საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

თამარ წერეთელი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

პროფესორი გიორგი ბერძულიშვილი

ქუთაისი

2017

სარჩევი

I თავი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები

II თავი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და მათი სწავლების მეთოდიკა მათემატიკის სასკოლო კურსში

შესავალი

მათემატიკის სწავლების მდგომარეობის კრიტიკული ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოსწავლეთა უმეტესობა სუსტად ფლობს ამოცანების ამოხსნის ხერხებს, განსაკუთრებით ეს ეხება გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებს. საშუალო სკოლის მათემატიკის მაღალი კლასები სასწავლო სახელმძღვანელოებში საჭიროზე ნაკლები დრო აქვს დათმობილი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნას, რასაც ვერ ვიტყვით გეომეტრიული მასალის თეორიულ საკითხებზე.

მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ერთ-ერთი აქტუალური პრობლემაა სწორი თანაფარდობის აღდგენა თეორიასა და პრაქტიკას შორის. ეს პრობლემა ცხადია უნდა გადაწყდეს ამოცანების ამოხსნის სწავლების დროს. ამოცანების ამოხსნის უნარი და ჩვევები დამოკიდებულია არა მარტო ამოხსნილი ამოცანების რიცხვზე, არამედ ამოცანების შინაარსსა და ამოხსნის სპეციალურ ხერხებზე.

მათემატიკის სწავლების უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ყველა მოსწავლის მათემატიკური მომზადების სავალდებულო დონის უზრუნველყოფა მოსწავლეთა მომავალი პროფესიული არჩევანისაგან დამოუკიდებლად. საზოგადოების კომპიუტერიზაცია, თანამედროვე ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა მოითხოვს მუშაკის მათემატიკურ განათლებას თითქმის ყოველ სამუშაო ადგილზე. მათემატიკურ განათლებაში ვგულისხმობთ მათემატიკის მეშვეობით გამომუშავებული აზროვნების სტილს, რომლის ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და ხერხები. კონკრეტული მათემატიკური ცოდნის გარეშე გაძნელებულია თანამედროვე ტექნიკის მუშაობის პრინციპების გაგება და გამოყენება, მეცნიერული ცოდნის შეთვისება, მრავალფეროვანი სოციალური, ეკონომიკური, პოლიტიკური ინფორმაციის აღქმა და ინტერპრეტაცია. შეუძლებელია თანამედროვე ადამიანის განათლების მიღება, ნაკლებად ეფექტიანია ასეთი ადამიანის ყოველდღიური პრაქტიკული საქმიანობა.

იმისათვის, რომ მოსწავლეს ჩამოუყალიბდეს ამოცანების ამოხსნის უნარი და გამოუმუშავდეს შესაბამისი ჩვევები, მეთოდიკურ ლიტერატურაში გვხვდება ორი თვალსაზრისი: პირველი, რომლის თანახმადაც საჭიროა ამოიხსნას რაც შეიძლება ბევრი ამოცანა და მეორე, რომლის თანახმადაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს განსახილავი ამოცანების შინაარსს და ამოხსნის სპეციალურ ხერხებს.

ჩვენი ვემხრობით იმ მოსაზრებას, რომ შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნის სწავლება ამოცანების ამოხსნის გარეშე, მაგრამ განსაკუთრებულ მნიშვნელობა აქვს ამოცანების შინაარსის სპეციფიკიდან გამომდინარე ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას, რომელიც ხელს უწყობს მოსწავლეებში შესაბამისი ცოდნა-ჩვევების განვითარებას და განმავითარებელი სწავლებისათვის აუცილებელია.

ცოდნა-ჩვევების სრულფასოვნების უმნიშვნელოვანეს მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ის, თუ რამდენად გააზრებული და გაცნობიერებულია ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების ცოდნა მოსწავლეთა მიერ, არამედ ისიც, თუ რამდენად ღრმად, საფუძვლიანად და მტკიცედ აქვს ათვისებული ის მოსწავლეს. ამიტომ, ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების ცოდნის მტკიცედ დაუფლება სწავლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა და ამავე დროს სწავლების ზოგად მეთოდოლოგიური დიდაქტიკური პრინციპის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია. ეს პრინციპი გულისხმობს, უპირველეს ყოვლისა სასწავლო მასალის ისე მიწოდებას, რომ მოსწავლე მტკიცედ იმახსოვრებდეს და ამის საფუძველზე უნარი შესწევდეს თავისუფლად აღადგინოს თავის მეხსიერებაში ის, რაც მან ადრე სწავლების პროცესში აღიქვა და აითვისა [101].

ცოდნა-ჩვევების განმტკიცება მჭიდროდაა დაკავშირებული გავლილი და ახალი მასალის თანმიმდევრულ ურთიერთკავშირზე, ამისათვის კი აუცილებელია დიდაქტიკის პრინციპების დაცვა, კერძოდ მასწავლებელმა ამოცანის ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლება არ უნდა დაიწყოს მანამ, ვიდრე მოსწავლეები საფუძვლიანად არ შეისწავლიან ამოცანების ამოხსნის ალგორითმულ ხერხებს, ამავე დროს უნდა დაიცვას გავლილი მასალიდან ახალ მასალაზე გადასვლის დიდაქტიკური მოთხოვნები, რომელთა

შორის მთავარია ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული ხერხების სისტემაში მოყვანა და უმთავრესის გამოყოფა მეორეხარისხოვნისაგან, ამოცანის დასმა და ახალი საკითხის ფაბულის ისეთი მოხაზვა, რომ მოსწავლე ნათლად ხედავდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების აუცილებლობას. ყოველივე ამით მასწავლებელი მოსწავლეებში შექმნის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების მოტივაციას და ადვილად დაძლევის განწყობას.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების დაუფლებისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება სისტემატიურ ვარჯიშს, რომელიც უნდა შეუფარდდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით და ხერხებით ამოსახსნელი ამოცანების სიძნელე-სიადვილეს და მის სპეციფიკას.

მასწავლებელმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მთელი პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ, გაცნობიერებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან მოსწავლისაგან ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა რიგ სხვა ღონისძიებებთან ერთად მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო პროგრამები განსაზღვრავს თუ რა თემები უნდა შეისწავლოს მოსწავლემ თითოეულ კლასში, ე.ი. განსაზღვრულია ალგორითმულად ამოხსნადი სავარჯიშოების ტიპები და სახეები. აშკარაა, რომ მხოლოდ ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანების სწავლებით შეუძლებელია მოსწავლეთა მათემატიკური მომზადების მაღალი დონის მიღწევა.

მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი არ ზღუდავს მასწავლებელს ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული და სპეციალური ხერხების სწავლების არჩევისას. „სტანდარტი არ განსაზღვრავს ცალსახად მათემატიკის სასკოლო კურსის შინაარსს, იგი მხოლოდ იმ საკითხებს მოიცავს, რომელთაც აუცილებლად უნდა შეიცავდეს კურსი

(გაცნობის თუ სისტემატიური კურსის სახით) ამიტომ, სტანდარტის მოთხოვნები შეიძლება პროგრამების და სახელმძღვანელოების სხვადასხვა ვარიანტმა დააკმაყოფილოს“ [52].

საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამებში [18], [19] და მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტში [30] მკაფიოდ არის ჩამოყალიბებული ის მოთხოვნები, რომელსაც უნდა ფლობდეს მოსწავლე კონკრეტული კლასის მათემატიკის კურსის გავლის შემდეგ. მასში მითითებულია, რომ მოსწავლეს მოეთხოვება არა მარტო ის მათემატიკური ცოდნა და უნარ-ჩვევები, რომლებიც მიიღწევა ალგორითმულად ამოხსნადი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებით, არამედ მან უნდა შეძლოს ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნაც, რომლებიც დაიყვანება ალგორითმულ ამოცანებზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მოსწავლეებმა გეომეტრიული შიანაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით უნდა შეძლონ არაალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანები აგებაზე, გამოანგარიშებაზე და დამტკიცებაზე დაიყვანონ ისეთი სახის ამოცანებზე, რომელთა ამოხსნა მოსწავლეთათვის ცნობილია–ალგორითმულია.

მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების ჩამოყალიბებაში ძლიერ გავლენას ახდენს ისეთი ამოცანები, რომლებიც უშუალოდ არ ამოიხსნება ცნობილი ალგორითმების გამოყენებით. ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესი მოითხოვს შემეცნებით აზროვნებას, რაც მოსწავლეებში აძლიერებს ამოცანის ამოხსნის გზის აღმოჩენის სიხარულს, ეს ემოციურ ფაქტორს წარმოადგენს და მოსწავლის ქცევის მძლავრი ბერკეტია. ემოციური ფაქტორის სწორად მართვას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს ადამიანის მოქმედების ყველა სფეროში, მოსწავლის სრულყოფილ პიროვნებად ფორმირებისა და სწავლების პროცესშიც.

მოსწავლის ემოციები, განცდები, როგორც მისი სუბიექტური მდგომარეობის გამომხატველი, უმთავრესად დაკავშირებულია სწავლების პროცესთან, ამიტომ ემოციების სწორი მიმართულების მიცემა და იმავე დროს მათი, როგორც ფსიქოლოგიური ფაქტორის გამოყენება ამოცანის დასაძლევად პორველ ყოვლისა სკოლისა და მასწავლებლის საქმეა. მოსწავლეთა ემოციების თვისობრივი გარდაქმნა-განვითარება ძირითადად სწორედ აღზრდისა და სწავლების საშუალებებით ხორციელდება.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებით გამოწვეული ემოციები მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს როგორც აღმზრდელობითი პროცესის შემადგენელი ნაწილი. ამიტომ მასწავლებელმა წინასწარ ზუსტად უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტული გზები და ღონისძიებები, რომელთა საშუალებითაც უზრუნველყოფს მოსწავლეებში დადებითი ემოციების და განცდების აღზრდას, ამასთანავე მიმზიდველს და სახალისოს გახდის სასწავლო პროცესს. მასწავლებელი თავადაც უნდა განიცდიდეს მოსწავლის სიხარულს, თანაგრძნობით და გულისხმიერებით ეხმარებოდეს მოსწავლეს ყოველი დაბრკოლების და სიძნელის გადალახვაში, უნდა იცნობდეს მოსწავლეების მისწრაფებებს, მათ ემოციებს, უნდა აკვირდებოდეს და სწავლობდეს ემოციების გარდაქმნა-განვითარებას სწავლა-აღზრდის პროცესში, თითოეული მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომით ახორციელებდეს მოსწავლის განვითარებას სწორი მიმართულებით.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ამოსახსნელი ამოცანებისა და სავარჯიშოების ანალიზი ცხადყოფს, რომ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანებს, რომელთა ამოხსნისათვის აუცილებელია სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენება ეთმობა უმნიშვნელო დრო, რის გამოც ვთვლით, რომ საშუალო სკოლის მათემატიკის არსებულ სასწავლო სახელმძღვანელოებში მოცემული ამოცანები ნაკლებგანმავითარებელი ეფექტის მქონეა და არ აკმაყოფილებს თანამედროვე მოთხოვნებს. ეს ტენდენცია ახალი არ არის, ასე იყო წარსულშიც და გრძელდება დღესაც. მართლაც, თუ გადავავლებთ თვალს ახლო წარსულს ვნახავთ, რომ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის სპეციალისტთა საერთო აღიარებით საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში არსებულ ამოცანათა სისტემებს მრავალ ნაკლზე საუბრობენ. ერთი მთავარი ნაკლი, რომელზეც ჩვენ ზემოთ გავამახვილეთ ყურადღება არის თეორიის მოწყვეტა პრაქტიკისაგან. ა.სტოლიარი აღნიშნავდა [83], რომ მათემატიკის გაკვეთილებზე ძირითადად მიმდინარეობს მათემატიკურ ტერმინებში ჩამოყალიბებული განყენებული ამოცანების საწვრთნელი ამოხსნა; ი.კოლიაგინი, ვ.ოგანესიანი და სხვ., მიიჩნევენ [64], რომ სასკოლო მათემატიკის კურსის სავარჯიშოები მწირია სააზროვნო ხასიათის და შინაარსის მხრივ, ი.გრუდიონოვი [54], აღნიშნავს მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა ერთტიპიურობას, ა.დოგრაშვილი თვლის, რომ სასკოლო სახელმძღვაოები არ შეიცავს ალბათური და

კომბინატორული შინაარსის მქონე ამოცანებს [17], თ.მორალიშვილის აზრით [25], მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა სისტემა არ არის სტრუქტურულად სრული, თ.წერეთელი და გ.ბერძულიშვილი თვლიან [37], [38], [39] რომ სასკოლო კურსი არ შეიცავს გეომეტრიული შინაარსის ისეთ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნის დროს აუცილებელია სპეციალური მეთოდების გამოყენება, გ.ბერძულიშვილი თვლის, რომ სასწავლო პროცესში ჩართული უნდა იყოს საგანთაშორსისი და შიგასაგნობრივი კავშირის შინაარსის მქონე ამოცანები, ნ. ონიანი-საღინაძე და ზ. ბაკურაძე თვლიან [1], რომ ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი დაწყებით და საშუალო სკოლაში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანა სისტემებს, ნ.ნახუცრიშვილი თვლის, რომ დაწყებითი სკოლის საფეხურზე საჭიროა პრობლემურ-განმავითარებელი შინაარსის მქონე ამოცანების წინა პლანზე დაყენება, [28], გ.ნოზაძე და მ.ოჩხიკიძე თვლიან, რომ სასკოლო მათემატიკის სახელმძღვანელოები განიცდის განმავითარებელი ამოცანების სიმცირეს [29], ი.ჩხიკვაძე თვლის, რომ, განმავითარებელი სწავლებისათვის დაწყებითი კლასების სასწავლო პროცესში საჭიროა ტექსტური ამოცანების უფრო მეტი დოზით ჩართვა [33] და სხვ.

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოთა სისტემები ფუნქციური დანიშნულების მიხედვით შეესაბამება ტრადიციულ სქემას „თეორია$\rightarrow$ამოცანები“. ჩვენ მიზანშეწონილად ვთვლით სწავლება მიმდინარეობდეს სქემით „ამოცანები$\rightarrow$თეორია$\rightarrow$ამოცანები“. ამგვარი მიდგომა საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში აუცილებელია განმავითარებელი სწავლების პრინციპების ასამოქმედებლად, როცა სწავლება მიმდინარეობს ძირითადად ამოცანების საშუალებით. სქემა „ამოცანები$\rightarrow$თეორია$\rightarrow$ამოცანები“ საშუალებას იძლევა განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, მისი გამოყენების საშუალებით, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვებაში.

სწავლების შეცვლილი სქემა საჭიროებს მისთვის შესაფერის სავარჯიშოთა სისტემას, რომელიც შეიცავს არსებულისაგან განსხვავებული ფუნქციური დანიშნულების მქონე სავარჯიშოებსაც. რისთვისაც გაანაალიზებული იქნა არა მარტო ქართული და პოსტსაბჭოთა სივრცის, არამედ ევროპული გამოცდილებაც [95], [96].

ქართველი მეცნიერ-მეთოდისტები ბოლო პერიოდში სისტემატიურად ხვეწენ ამოცანათა სისტემებს, რომლებიც დაფუძნებულია სქემაზე „ამოცანები→თეორია→ამოცანები“, გ.ბერძულიშვილი, გ.ბრეგაძე, ნ.ნახუცრიშვილი, ზ.ზაკურაძე, ლ.ქურჩიშვილი, გ.ჯინჯიხაძე, ლ.ზაზუნაშვილი, დ.გოშხეთელიანი, ნ.ონიანი-საღინაძე, ლ.ციბაძე, მ.გოგაძე, ი.გოგიბერიძე, და სხვ.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს განმავითარებელი სწავლების შესაბამისი სქემის „ამოცანები→თეორია→ამოცანები“ გამოყენებას, რომელიც მოითხოვს გეომეტრიული შინაარსის ამოვანათა სისტემის ახლებურად აგებას.

ყოველივე ზემოთთქმული საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ ერთი არსებითი ხასიათის შენიშვნა: გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნა სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების გამოყენებით დაფუძნებულია განმავითარებელი ხასიათის სავარჯიშოების განხილვაზე. ასეთი სახის სავარჯიშოების ნაკლებობა გარკვეულ ბარიერს უქმნის გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას.

საშუალო სკოლების მათემატიკის სასწავლო მასალა გადატვირთულია არა მარტო ჩვენთან, რამედ მსოფლიოს მრავალ წამყვან ქვეყანაში უმრავლეს შემთხვევაში მასწავლებლებს საშუალება არ აქვთ ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება განახორციელონ მთელ კლასთან [100],[102]. როგორც წესი ასეთი ამოცანების ამოხსნა ხდება ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. ე.ი. მოსწავლეთა მხოლოდ მცირე ნაწილთან. მაშასადამე, ის მოსწავლეები, რომლებიც შედარებით უკეთ ითვისებენ ტრადიციულ სასკოლო კურსს იღებენ უფრო მეტ გონებრივ დატვირთვას აზროვნების განვითარებისათვის, ვიდრე საშუალო და სუსტი მოსწავლეები. ამის მიზეზია ის, რომ სკოლის კურსდამთავრებულთა დიდი უმრავლესობა ვერ ხსნის მარტივ ალგორითმულ გეომეტრიულ ამოცანასაც კი.

მეთოდურად დამუშავებულია ამოცანათა ამოხსნის ზოგადი მეთოდები [23], [24], [32], [70], [71], [72], [82], [94] და სხვა, მაგრამ კერძომეთოდიკურ ასპექტებს ნაკლები ყურადღება

აქვს დათმობილი, ასევე დამუშავებულია ზოგიერთი კლასის ამოცანათა ამოხსნის ხერხები [1], [2], [3], [4], [5], [27], [33], [42], [43], [44], [49], [50], [51], [52], [56], []57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [66], [67], [69], [75], [76] რომლებიც არასისტემატიზირებულია, რადგან საშუალო სკოლაში არ ხდება ისეთი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების სისტემის კლასიფიკაცია, რომლებიც საჭიროებენ ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას, არ არის დამუშავებული მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, რომლებიც მათემატიკის გაღრმავებული სისტემის სპეციფიკასთან არის დაკავშირებული, რაც პირველ რიგში განპირობებულია იმით, რომ უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებთან სათანადო ყურადღება არ ეთმობა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების თეორიულ და მეთოდიკურ თავისებურებებს.

აღნიშნული პრობლემის გადასაჭრელად საჭიროდ მიგვაჩნია:

- განისაზღვროს გეომეტრიული შინაარსის ამოცანათა სისტემების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების არსი, სპეციფიკა, დანიშნულება და ფუნქცია;
- დამუშავდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემების სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოხსნის კლასიფიკაციის კრიტერიუმები;
- დამუშავდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემების სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოხსნის სწავლების კერძო მეთოდიკა.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოხსნის სწავლების პრობლემის კვლევა მრავალ ასპექტს მოიცავს, კერძოდ: ფსიქოლოგიურ, ზოგად და კერძო მეთოდიკურ ასპექტებს და სხვ.

ფსიქოლოგიური ასპექტების კვლევისას განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, აზროვნების პროცესის თავისებურებანი მოსწავლეთა ფსიქიკური განვითარების სხვადასხვა ასაკობრივ საფეხურზე და როგორია ცოდნის დაუფლების შესაძლებლობები ამა თუ იმ ასაკის მოზარდთან. ქართველმა ფსიქოლოგებმა ცნების შემუშავების უნარისა და მასზე სწავლების სხვადასხვა ფორმის გავლენის პრობლემის კვლევას საგანგებო შამოკვლევები

მიუძღვნეს დ.უზნაძემ [31], რ.ნათაძემ [65], შ.ნადირაშვილმა [21], ი.კოტეტიშვილმა [22], ზ.ვახანიამ [20] და სხვებმა. საბჭოთა და პოსტსაბჭოთა სივრცეში ჩატარებული კვლევებიდან შეიძლება გამოვყოთ ს.რუბენშტეინის [80], [81], ე.კაბანოვა-მელერის, ვ.კრუტეცკის, ი.კალიუტკინას, ნ.მენჩინსკაიას, ნ.ტალიზინას, ლ.ფრიდმანის, ა.რახიმოვის [78] და სხვათა შრომები. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია დ. ელკონინისა [91], [92] და ვ.დავიდოვის [55] წვლილი, რომლებმაც სწავლების საგანგებო სისტემაც კი შექმნეს ე.წ. „ელკონინ-დავიდოვის სისტემა“ და მათემატიკის სწავლებაში ახალი პრინციპი შემოიტანეს. დასავლეთელი მკვლევარებიდან ამ საქმეში დიდი დამსახურება მიუძღვის ჟ.პიაჟეს [73], [74]. ის ბავშვის ინტელექტუალური განვითარების შესახებ ორიგინალური თეორიის ავტორია. ამ საკითხების კვლევას დიდი ღვაწლი დასდო ამერიკელმა ჯ.ბრუნერმა, რომელმაც დაადასტურა, რომ ბავშვს ყოველთვის გაცილებით მეტის გაგება შეუძლია ვიდრე ეს ერთი შეხედვით ჩანს, თუ სასწავლო მასალას მისი აზროვნების ფორმის შესაბამისად მივაწვდით [46].

ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების კერძომეთოდიკური ასპექტები ნაკლებად დამუშავებულია. ამ საკითხებზე გამოკვლევები აქვთ დ.პოიას, ა.სტოლიარს, თ.მორალიშვილს, მ.ტიმოშჩუკს, გ.ბერძულიშვილს, გ.ბრეგაძეს, ბ.ბაკურაძეს, ტ.პივოვარუკს, ი.როზკას, ლ.ციბაძეს, ლ.ქურჩიშვილს, ლ.ბაბუნაშვილს, ნ.ონიანი-საღინაძეს, ბ.ბაკურაძეს, გ.ჯინჯიხაძეს, მ. ლომთაძეს და სხვ.

სამეცნიერო შრომები, რომლებიც სხვადასხვა ასპექტით ეხებიან დასახელებულ პრობლემას, განხილულია მხოლოდ ალგებრულ ამოცანათა ამოხსნის ზოგიერთი ცალკეული მეთოდის ან/და ხერხის გამოყენება, რომლებშიც ასახული არ არის საერთო თეორიული და მეთოდიკური კონცეფციები, გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის საკითხების კვლევა ძალზედ სავალალო მდგომარეობაშია. ქართველი მეთოდისტების მიერ დაცულ დისერტაციებს შორის გეომეტრიული საკითხების კვლევას ეხება მხოლოდ ერთი, რომლის ავტორია გ.ბერძულიშვილი და ისიც უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის მასწავლებელთა მომზადებას ეხება საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით. ეს ქმნის იმის შთაბეჭდილებას, რომ გეომეტრიული შინაარსის ამოცანათა ამოხსნის

სპეციალური ხერხების ზოგადი და კერძომეთოდიკური საფუძვლების დამუშავება გარკვეულ პრობლემებთან არის დაკავშირებული. ასეთი მოსაზრებები მცდარია და შორს არის ჭეშმარიტებისაგან.

ჩამოყალიბებული მოსაზრებებიდან ნათლად ჩანს არჩეული სადისერტაციო თემის „გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში“ აქტუალობა.

ჩვენს მიერ დასმული ამოცანების გადასაჭრელად განისაზღვრა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური მეთოდის და ხერხის სწავლების დანიშნულება და ფუნქცია, დამუშავდა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდებით და ხერხების გამოყენებით გეომეტრიულ სავარჯიშოთა კლასიფიკაციის კრიტერიუმები და სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელიც გადმოცემულია დისერტაციის მეორე თავში და შრომებში [34], [35], [36], [37], [38], [39]. მათი გამოყენება მასწავლებელს შეუძლია ჩვეულებრივ საგაკვეთილო პროცესში მქონე ამოცანების ჩართვით, არ მოითხოვს დამატებით სასწავლო დროს, ეფექტურია თავისი განმავითარებელი ფუნქციით, ამაღლებს მოსწავლეთა მათემატიკური მომზადების დონეს, ზოგადად ინტელექტს, რაც დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

კვლევის ობიექტი. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლების ეფექტური მეთოდიკის დამუშავება საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსისათვის. გავეცანით და კრიტიკულად გავაანალიზეთ პრობლემასთან დაკავშირებული სამეცნიერო-პედაგოგიური და მეთოდიკური ლიტერატურა. მოსწავლეებთან ანკეტური გამოკითხვისა და პრაქტიკოს-ნოვატორ მასწავლებელთან საუბრების შედეგად დავადგინეთ, რომ ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის დამუშავებული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლების მეთოდოლოგიური, თეორიული და მეთოდიკური საფუძვლები. მასწავლებელთათვის გამოცემულ დამხმარე მეთოდურ სახელმძღვანელოებსა და მოსწავლეთათვის გამოცემულ ამოცანათა კრებულებში ძალიან ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი, შეიძლება ითქვას, რომ ყურადღების მიღმაა

დარჩენილი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების როგორც თეორიულ, ისე პრაქტიკული საკითხების გაშუქება.

კვლევის საგანი. კვლევის საგანს შეადგენს საშუალო სკოლაში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლების მეთოდიკის დამუშავება. გამოვყავით და შევადგინეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემები, რომელთა ამოხსნის დროს საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება, რომელთა ჩართვა მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში.

შევარჩიეთ ისეთი საკითხები, რომლებიც შესაბამისობაშია საშუალო სკოლაში შესასწავლ საკითხებთან. განსახილავი საკითხებიდან გამოვყავით და დავამუშავეთ შემდეგი თემები:

- საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა;
- ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- ფართობისა და მოცულობის მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნა და სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- „დაჭრისა და შეწებების“ მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნა და მათი სწავლება საშუალო სკოლაში;
- არასტანდარტული პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- დამხმარე ელემენტის მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში;
- გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა ვექტორული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში;

- გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა ალგებრული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები.

კვლევის მიზანი. საშუალო სკოლაში სწავლების პროცესზე დაკვირვებით, კოლეგებისა და საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილების განზოგადებით პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებით მიზნად დავისახეთ ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლებით აგვემაღლებინა სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის დონე. შეგვედგინა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემები, რომელთა ამოხსნისათვის აუცილებელია სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების გამოყენება და დაგვემუშავებინა მათი სწავლების მეთოდიკა.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლება მიზნად ისახავს მოსწავლეთა ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მიღებული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოძიება და შექმნა.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლება საშუალებას იძლევა, რომ გეომეტრიული შინაარსის მასალის სწავლება გადავაქციოთ დიდაქტიკურად დაფუძნებული მათემატიკური ცოდნის და ამ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების სწავლების შეწყვილებად.

ამ საკითხების ირგვლივ არსებობს მეთოდისტების, მათემატიკოსების, პედაგოგების, ფსიქოლოგების მიერ გამოვლენილი გარკვეული კანონზომიერებები, რომლებიც არასისტემატიზირებულია. ჩვენ საჭიროდ ჩავთვალეთ მათგან გამოგვეყო სადისერტაციო თემისათვის გამოსაყენებელი მომენტები და დაგვემუშავებინა მათი სწავლების კერძო მეთოდიკა.

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მუშაობა მიზნად ისახავს მოსწავლეთათვის სწავლა-აღზრდისადმი შეგნებულ დამოკიდებულებას, ზნეობრივი და ინტელექტუალური ფორმირების გაუმჯობესებას და მოქალაქეობრიობის ჩამოყალიბებას. ამ მიზნების მისაღწევად საჭიროდ ვთვლით, რომ მოსწავლეებს ჩამოუყალიბდეთ ლოგიკური

აზროვნება, შემეცნებითი აქტივობა, ობიექტური სინამდვილის აღქმის უარი, რაც მოითხოვს მოსწავლეთა სპეციალურ გონებრივ ვარჯიშს, ამიტომ ასათვისებელი მასალისათვის დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით შევარჩიეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ისეთი სისტემები, რომელთა ამოხსნის დროს გამოიყენება სპეციალური მეთოდები და/ან ხერხები. ამასთან სწავლებაში გამოყენებული მეთოდები და ხერხები და სწავლების შინაარსი სრულ შესაბამისობაშია მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებებთან. სასწავლო მასალის გაღრმავება-გაფართოება სპეციალურად შერეული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანათა სისტემებით ხდება მოსწავლეთა ინტელექტუალური განვითარების დონის შესაბამისად.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს იმაში, რომ

- ტრადიციული მიდგომისგან განსხვავებით, ჩვენ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემების შედგენას ვახდენთ ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების მიხედვით, რის შედეგადაც ერთ სისტემაში ხვდება ისეთი შინაარსის ამოცანები, რომლებიც სხვადასხვა თემას ეხება, აგრეთვე პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანები.
- ჩვენი მიდგომით პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული მასალის სწავლება უნდა განხორციელდეს პარალელურ რეჟიმში, ამ დროს რაოდენობრივი თანაფარდობით უპირატესობა უნდა მიენიჭოს სტერეომეტრიული შინაარსის საკითხების განხილვას როგორც თეორიული სახით, ისე ამოხსნილი ამოცანების რაოდენობის მიხედვით;
- დამუშავებულია გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში;
- დასაბუთებულია, რომ სასწავლო პროცესის ეფექტიანობას მნიშვნელოვნად ამაღლებს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას აუცილებელია სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ისეთი ამოცანათა სისტემების ჩართვა საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში, რომელთა ამოხსნისათვის აუცილებელია სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება, იწვევს მოსწავლეთა დაინტერესებას არა მარტო

გეომეტრიული მასალის შესწავლისადმი, არამედ მთლიანად საბუნებისმეტყველო-მათემატიკური დისციპლინებისადმი;

- საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურების მათემატიკის კურსისათვის შედგენილია გეომეტრიულ ამოცანათა სისტემები, რომელთა ამოხსნისათვის აუცილებელია სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება;
- ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური კანონზომიერებების ანალიზის საფუძველზე შემუშავებულია შესაბამისი მეთოდიკური რეკომენდაციები.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების სრულყოფის ერთ-ერთ პერსპექტიულ გზას წარმოადგენს მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების სისტემის შექმნა, რომელიც დაფუძნებულია ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლებაზე, რაც მნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მათ ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კერძოდ, კონსტრუქციული და კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას და ხვ.

ნაშრომის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ კვლევის შედეგების გამოყენება სასწავლო პრაქტიკაში ხელს უწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას, მოსწავლეთა მიერ მტკიცე ცოდნის დაუფლებას და მათ დაინტერესებას მათემატიკის საფუძვლიანი შესწავლისათვის. ნაშრომის თეორიული მნიშვნელობა გამოხატულია მეცნიერულ კონცეფციაში სასწავლო პროცესის მიზანმიმართულად წარმართვის შესახებ, ხოლო მისი პრაქტიკული მნიშვნელობა ითვალისწინებს მათემატიკის სწავლებაში რიგი მეთოდიკური სიახლეების დანერგვას, კერძოდ, დადასტურებულია, რომ სასწავლო პროცესში ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ჩართვა, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება აძლიერებს მათემატიკის შესწავლის მოტივაციას, ხელს უწყობს ლოგიკური აზროვნების განვითარებას, ამაღლებს ინტელექტს.

კვლევის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენს ფილოსოფიურ-ფსიქოლოგიური დებულებები პიროვნების ინტელექტუალურ შესაძლებლობათა გახსნისა და განვითარების შესახებ.

პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა ქართულ–ამერიკულ სკოლა „პროგრესში“, შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის ჟონეთის საშუალო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის №1 საჯარო სკოლაში, ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში და ვანის მუნიციპალიტეტის ზედა გორას საჯარო სკოლაში.

ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო და დამოუკიდებელი სამუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც ეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2011-2013 წლები) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის პროცესში ზოგიერთი არაარსებითი ხასიათის ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2013-2017 წლები) დადასტურდა მათემატიკის სასკოლო კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის სტატისტიკური შეფასება მოვახდინეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით. ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა გვიჩვენა, რომ სწავლების ეფექტურობის ამაღლებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვს მეთოდიკურად სწორად შერჩეულ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანებს, რომელთა ამოხსნის პროცესი საჭიროებს სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას. ასეთ შინაარსზე დაფუძნებული სწავლება ამაღლებს მოსწავლეთა ინტელექტს, ანვითარებს ლოგიკურ

აზროვნებას, ზრდის მათ დაინტერესებას და შემეცნებით ინტერესებს მათემატიკის შესწავლისადმი.

თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევის პროცესში მიღებული იქნა ასეთი შედეგები:

- გაანალიზებული იქნა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების მეთოდიკური თავისებურებები და მათემატიკის სწავლებაში მათი პრაქტიკული მნიშვნელობა;
- დამუშავებულ იქნა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და ხერხები: დირიხლეს პრინციპი, ინვარიანტების და ნახევარინვარიანტების გამოყენება, ფართობისა და მოცულობის მეთოდი, პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდი, დამხმარე ელემენტის მეთოდი, ვექტორული და კოორდინატთა მეთოდები, ალგებრული მეთოდი და სხვ.
- თითოეული ნიშნის მიხედვით გამოყოფილ იქნა შესაბამისი სავარჯიშოთა სისტემები, რომელთა განხილვა შესაძლებელია მთელ კლასთან, ფაკულტატიურ, მათემატიკის საგნობრივ წრეზე და ინდივიდუალური მუშაობისათვის. ამ ნიშნის მიხედვით დაყოფილი ამოცანების თითოეული კლასისათვის დამუშავებულია მათი სწავლების სპეციალური მეთოდიკა, რომელშიც გათვალისწინებულია ამოხსნის ცალკეული ეტაპების განხილვა, მათი თანმიმდევრობა, მათემატიკური მოდელების შესაბამისი ტიპების გამოყენებით.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების ჩართვა სასწავლო პროცესში, როგორც მოსწავლეთა გონებრივი და ინტელექტუალური ფორმირების საშუალება;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების კლასიფიკაცია ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების მიხედვით და მათი ადგილი საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში;

- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების მეთოდური თავისებურებების გამოკვლევა;
- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემების შედგენა, რომელთა ამოხსნის დროს აუცილებელია სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება;
- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების დამუშავებული მეთოდიკის ექსპერიმენტული გამოკვლევა.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს. დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები მოხსენდა იაკობ გოგებაშვილის სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტის განათლების ფაკულტეტის სამეცნიერო სემინარს.

დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი სამეცნიერო შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. წერეთელი თ. სასკოლო მათემატიკის კურსში აგების ამოცანების სწავლების მეთოდიკის შესახებ. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(51). თბილისი. 2015. გვ. 63-65.
2. წერეთელი თ. პრაქტიკული შინაარსის მქონე ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში და მათი რეალიზების მეთოდური საფუძვლები. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(56). თბილისი. 2016. გვ.66-68.

3. წერეთელი თ. ზოგიერთი არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(57). თბილისი. 2017. გვ. 111-115.

4. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების მეთოდის გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 45–48.

5. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 49–52.

6. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 53–56.

I თავი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები

§1. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში

ამოცანის ცნების მრავალნაირი განმარტება არსებობს. ამოცანებს სხვადასხვანაირ ფუნქციებს მიაწერენ მკვლევარები [1], [2], [3], [26], [40], [41]. ჩვენი მიდგომები სრულად ემთხვევა გ.ბერძულიშვილის, გ.ბრეგაძის, ზ.ბაკურაძის, ნ.ონიანი–საღინაძის, ლ.ციბაძის და სხვათა მიდგომებს ამოცანის შესახებ და ვისარგებლებთ ამოცანის ინტუიციური გაგებით. მათი მიდგომებით ყოველი ამოცანა შედგება ორი ნაწილისაგან-პირობისა და კითხვისაგან. პირობა წარმოადგენს რაიმე ობიექტების ერთობლიობას და მათ შორის გარკვეულ მიმართებებს, რომლებიც შესაბამისი აღწერითაა მოცემული, ხოლო კითხვით მოითხოვება რაიმე მათემატიკური ფიგურის აგება–ამოცანები აგებაზე, ან კონკრეტული მათემატიკური ფაქტის დამტკიცება–ამოცანები დამტკიცებაზე, ან რაიმე სიდიდის ან/და სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობების პოვნა–ამოცანები გამოთვლაზე.

ამოცანის ამოხსნის ქვეშ იგულისხმება ისეთ აზრობრივი ქმედება-პროცესი, რაც იწვევს იმ შედეგის დადგომას, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს.

ზოგჯერ სპეციალისტები ამოცანის და მისი მათემატიკური ამოხსნის ქვეშ გულისხმობენ არა მარტო წმინდა მათემატიკური ხასიათის ამოცანებს, არამედ ზოგადად ამოცანას და მის ამოხსნას. მაგალითად, მათემატიკურ ამოცანაში ავტორები [64], გამოყოფენ შემდეგ კომპონენტებს: საწყისი მდგომარეობა–ამოცანის პირობა; საბოლოო მდგომარეობა–ამოცანის დასკვნა; ამოხსნა–პირობის გარდაქმნა საძიებლის პოვნის მიზნით; ამოხსნის ბაზისი–მისი თეორიული დახასიათება.

მათემატიკურად ითვლება ყველა ამოცანა, რომლებშიც საწყისი მდგომარეობიდან საბოლოო მდგომარეობამდე გადასვლა მათემატიკური აპარატით ხორციელდება. ავტორი ამ ჯგუფს აკუთვნებს წმინდა მათემატიკურ ამოცანებს, რომელთა ყველა კომპონენტი მათემატიკურ ობიექტებს წარმოადგენს და ისეთ ამოცანებსაც, რომელთა ამოხსნა ხდება მათემატიკური აპარატის გამოყენებით. [64].

სასკოლო მათემატიკური ამოცანების დაყოფა პირობითად ხდება ალგებრული და გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებად. ზოგადად, სასკოლო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და ხერხები ემყარება მათემატიკურ მეთოდებსა და მათემატიკური ობიექტების თვისებებს. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები დისერტაციის თემიდან გამომდინარე ჩვენს მიერ გამოყენებული იქნება აგებაზე, დამტკიცებაზე და გამოანგარიშებაზე განსაზღვრული კლასის ამოცანების ამოხსნის დროს, რის შემდეგაც მოხდება ასეთი ამოცანების სისტემის შედგენა.

გეომეტრიულ ამოცანათა სისტემა ტრადიციული გაგებით გულისხმობს იმას, რომ მათში თავმოყრილია ერთი სახის ამოცანები, კერძოდ, ისეთები რომლებიც ეკუთვნიან ან ამოცანებს აგებაზე ან ამოცანებს გამოანგარიშებაზე ან ამოცანებს დამტკიცებაზე. ტრადიციული გაგებით გეომეტრიულ ამოცანათა სისტემებში ხშირად გულისხმობდნენ აგრეთვე კონკრეტული თემების მიხედვით შედგენილი ამოცანებს, მაგალითად, ამოცანათა სისტემად აღიქმებოდა ისეთი ამოცანები, რომლებიც ეხებოდა მხოლოდ სამკუთხედების მსგავსებას, ან რომლებიც ეხებოდა მხოლოდ გეომეტრიულ გარდაქმნებს, სადაც ცალკე იყო გამოყოფილი ამოცანები პარალელურ გადატანაზე, ცალკე იყო ამოცანები ღერძულ სიმეტრიაზე, ცალკე–ცენტრულ სიმეტრიაზე, ცალკე–ჰომოთეტიაზე და სხვ. ზოგჯერ გეომეტრიულ ამოცანათა სისტემებს ყოფდნენ იმის მიხედვითაც სტერეომეტრიული იყო თუ პლანიმეტრიული ამოცანები. მართლაც, სირთულეს არ წარმოადგენს ნებისმიერი მათემატიკის მოყვარული პირის, რომ არაფერი ვთქვათ მათემატიკოსის ბიბლიოთეკაში აღმოვაჩინოთ პლანიმეტრიის ამოცანათა კრებულები ან სტერეომეტრიის ამოცანათა კრებულები. ზოგიერთი ავტორი პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების

გაერთიანებასაც არ ერიდებოდა და ერთად გამოიცემოდა გეომეტრიულ ამოცანათა კრებულები.

ჩვენ გვერდს ავუვლით ყველა ჩამოთვლილ სისტემას და ჩამოვაყალიბებთ ახალ მიდგომას, რომელსაც გამოვიყენებთ გეომეტრიული ამოცანათა სისტემის შესაქმნელად. გეომეტრიული ამოცანების სისტემის ქვეშ ჩვენ გვესმის შინაარსის მიხედვით დალაგებული ამოცანათა ერთობლიობა, რომლებიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ და გაერთიანებული არიან ერთი საერთო ნიშნით–მათი ამოხსნა ხდება ერთი მეთოდით ან/და ამოხსნის სპეციალური ხერხით. ამ ნიშნით შერჩეული ამოცანების სისტემები შესაძლებელია ერთდროულად შეიცავდენ ამოცანებს აგებაზეც, დამტკიცებაზეც და გამოანგარიშებაზეც. ასევე შესაძლებელია, რომ ერთი და იგივე ამოცანა მოხვდეს სხვადახვა სისტემაში, რადგან მათი ამოხსნის დროს შესაძლებელია გამოყენებული იყოს სხვადასხვა სპეციალური მეთოდი ან/და ხერხი.

ჩვენ გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებსა და ხერხებსაც დავყოფთ გარკვეული ნიშნების მიხედვით, კერძოდ თუ ამოხსნის მეთოდი ან კერძო ხერხის გამოყენება შესაძლებელია სამივე სახის გეომეტრიული ამოცანებისთვის–აგების, გამოანგარიშების და დამტკიცების ამოცანების ამოხსნის დროს, მაშინ ამოხსნის ასეთ მეთოდს/ხერხს ვუწოდოთ თითქმის უნივერსალური მეთოდი/ხერხი. თუ ამოხსნის მეთოდი ან კერძო ხერხის გამოყენება შესაძლებელია სამი სახის გეომეტრიული ამოცანებიდან მხოლოდ ორი სახისათვის, მაგალითად, მხოლოდ აგების და გამოანგარიშების, ან მხოლოდ აგების და დამტკიცების, ან მხოლოდ გამოანგარიშების და დამტკიცების ამოცანების ამოხსნის დროს, მაშინ ამოხსნის ასეთ მეთოდს/ხერხს ვუწოდოთ ნაკლებად უნივერსალური მეთოდი/ხერხი. ხოლო თუ ამოხსნის მეთოდი ან კერძო ხერხის გამოყენება შესაძლებელია სამივე სახის გეომეტრიული ამოცანებიდან მხოლოდ აგების, ან მხოლოდ გამოანგარიშების, ან მხოლოდ დამტკიცების ამოცანების ამოხსნის დროს, მაშინ ამოხსნის ასეთ მეთოდს/ხერხს ვუწოდოთ მწირად უნივერსალური მეთოდი/ხერხი.

გეომეტრიული ამოხსნების ამოხსნის მეთოდების ან/და სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესში აუცილებელია გამოვყოთ ის ამოცანები, რომელთა ამოხსნა შეიძლება

ერთი და იმავე ხერხით, ხოლო გეომეტრიული ამოცანების სისტემების შედგენის დროს ისინი სისტემაში დალაგებული უნდა იყოს სირთულის მიხედვით.

ჩვეულებრივ, მათემატიკურ ამოცანებს ყოფენ სტანდარტულ და არასტანდარტულ ამოცანებად. სტანდარტულად ითვლება ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნის ალგორითმი ცნობილია, ხოლო არასტანდარტული ამოცანისათვის ამოხსნის ალგორითმი ცნობილი არ არის. ზოგჯერ არასტანდარტულ ამოცანებს მიაკუთვნებენ საოლიმპიადო ამოცანებს, ჩვენ არასტანდარტული ამოცანების ქვეშ ვგულიხსმობთ უფრო ფართო კლასს, კერძოდ იმ ამოცანებს, რომლებიც სტანდარტული არ არის.

მეთოდურ ლიტერატურაში მათემატიკური ამოცანების ამოხსნას ზოგიერთი მკვლევარი გაყოფს სამ ეტაპს: 1. ამოცანის ფორმალიზაცია; 2. პრაქტიკული რეალიზაცია; 3. ინტერპრეტაცია. [1], [17].

მოსწავლეებს გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს, იქნება ის ალგორითმული, თუ არასტანდარტული, სრულად ან ნაწილობრივ მაინც უხდებათ ამ ეტაპების გავლა, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საკითხს დავუთმოთ გარკვეული ყურადღება, რადგან ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის დამუშავებული მათემატიკურ ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები. რაც შეეხება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს და სპეციალურ ხერხებს, მათზე მეთოდური ლიტერატურა თითქმის არ მოიპოვება, რაც ნიშნავს, რომ ეს საკითხები თითქმის დაუმუშავებელია.

ზოგადად, დაწვრილებით განვიხილოთ მათემატიკის სასკოლო კურსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები, რომელიც რა თქმა უნდა გამოდგება სასკოლო გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისთვისაც.

1.ფორმალიზაცია-არის მოცემული სიტუაციიდან გადასვლა ფორმალურ მათემატიკურ მოდელზე, რომელიც მიახლოებით ასახავს ამ სიტუაციას.

ისეთი მათემატიკური ამოცანებისათვის, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება ფორმალიზაციის ეტაპს მიეკუთვნება: ამოცანის პირობებში მოცემული ინფორმაციის სრულფასოვანი შესწავლა, იმის დადგენა, მოცემული ამოცანის მსგავსი ამოცანა ადრე ხომ არ აქვთ ამოხსნილი, თუ ასეთი სახის ამოცანა

მოსწავლეებს უკვე ამოხსნილი აქვთ, იმის გარკვევა, რომელი ხერხით იქნა ამოხსნილი, შეიძლება თუ არა იმავე ხერხით მოცემული ამოცანის ამოხსნა, თუ ასეთი სახის ამოცანა ამოხსნილი არა აქვთ, მაშინ იმის დადგენა, რომელი ხერხი უფრო პერსპექტიულია, რომელი გზა არ არის ჩიხური და სხვ.

2.რეალიზაცია-არის ამოცანის ამოხსნა ალგორითმული ამ სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის მიხედვით, ამ დროს მოსწავლეები გამოიყენებენ ამოცანათა ამოხსნის შესახებ მათთვის უკვე ცნობილ მიდგომებს, წესებს, თეორემებს, თეორემების შედეგებს, ფიგურათა თვისებებს, ფორმულებს, იგივეობებს, მათემატიკურ გარდაქმნებს და სხვ.

3.ინტერპრეტაცია-არის ამოცანის ამოხსნის გათვალისწინებით ამოხსნის სისწორის შემოწმება.

ეს სამი ეტაპი სქემატურად ასე წარმოდგება:

ფორმალიზაცია → რეალიზაცია → ინტერპერტაცია

გეომეტრიული ამოცანათა სისტემისათვის ამოხსნის მეთოდების და სპეციალური ხერხების ინტერპრეტაცია შეიძლება აგრეთვე დიაგრამების საშუალებით, ამოცანის პირობით მოცემული ფიგურის ფარგლით და სახაზავით აგების შესრულებით, დამტკიცებული გეომეტრიული დებულების რაიმე დამატებითი თვისებების დადგენით, გრაფების გამოყენებით და სხვ.

ყოველი გეომეტრიული ამოცანა აღწერს რეალურ სიტაციას, სადაც მოთხოვნილია გავიგოთ უცნობი სიდიდე ან დავადგინოთ გეომეტრიული ფიგურის ან სხეულის რაიმე თვისება. საჭიროა ავაგოთ ამოცანის პირობის შესაბამისი ნახაზი და მოვახდინოთ იმის გარკვევა, თუ რას წარმოადგენს ნახაზზე უცნობი სიდიდე. ცხადია ნახაზზე დატანილი იქნება ამოცანის პირობაში მოცემული სიდიდეებიც. უნდა შევეცადოთ უცნობი სიდიდის საშუალებით გამოვსახოთ სხვა სიდიდეები და შევადგინოთ ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე მათემატიკური მოდელი. ეს შეიძლება იყოს განტოლება, ფორმულა და სხვ. შესაძლებელია, როს ეს მათემატიკური მოდელი შეესაბამებოდეს კიდევ სხვა სიტუაციას.

ვთვლით, რომ ისეთი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და სპეციალური ხერხების გამოყენება მასწავლებელმა უნდა ჩართოს სასწავლო პროცესში, ამასთან მიზანშეწონილად ვთვლით ასეთი ამოცანების განხილვას თითოეული თემის გავლის დროს. ხაზგასმით გვინდა აღვნიშნოთ, ჩვენ არ ვითხოვთ, რომ ამისათვის სპეციალურად გამოიყოს სასწავლო დრო. თითოეული სასწავლო თემის განხილვისას, მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ თემის შესაბამისი ამოცანები, რომლებიც მოითხოვენ ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას, ამასთან სასწავლო პროცესი ისე უნდა წარვმართოთ, რომ გათვალისწინებული იყოს მოსწავლეთა ასკობრივი თავისებურებები.

დ.პოიას ამოცანის ამოხსნის პროცესის განსხვავებულ სქემას განხილავს [71], კერძოდ ის გამოყოფს შემდეგ ოთხ ეტაპს: 1. დასმული ამოცანის გაგება; 2. ამოცანის გეგმის შედგენა; 3. შედგენილი გეგმის შესრულება; 4. შემოწმება (მიღებული ამონახსენის შესწავლა).

თ.მორალიშვილი [24] თვლიდა, რომ „მეოთხე ეტაპი (მიღებული ამონახსნის შესწავლა) უმრავლეს შემთხვევაში არ სრულდება. ამოხსნის გეგმის შესრულების შემდეგ ამოცანის ამოხსნა სრულდება და ამოხსნის ძიებას არ უბრუნდებიან (დროის ნაკლებობის გამო)“.

ეს ტენდენცია გრძელდება და არც თუ ისე სასარგებლო შედეგები მოაქვს სასწავლო პროცესში. როცა საქმე ეხება ისეთ მათემატიკურ ამოცანებს, რომელთა ამონახსნის შემოწმება მარტივად არის შესაძლებელი, მაშინ მოსწავლეები ამას დამოუკიდებლად ახერხებენ და ამოწმებენ კიდეც. მაგალითად, განტოლების ან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი/ამო–ნახსნები, ირაციონალური განტოლების ამონახსნები და მისთ. ზოგჯერ შემოწმების პროცესი რთულია და მოსწავლეები გვერდს უვლიან მას, მაშინაც კი როცა დამუშავებულია შემოწმების მეთოდები ტრიგონომეტრიული განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემებისათვის [6]. ისეთი გეომეტრიული ამოცანების ამონახსნების შემოწმებას, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და სპეციალური ხერხების გამოყენება საკმაოდ რთულია, დიდი დროით დანახარჯებს მოითხოვს და მოსწავლეები ხშირად ცდილობენ გვერდი აუარონ ამ პროცედურებს, მაგრამ გამოცდილმა მასწავლებელმა სასწავლო პრაქტიკაში უნდა დანერგოს მიღებული ამონახსნის/ამონახსნების შემოწმების

სათანადო მექანიზმები და ამას მოსწავლეები უნდა შეაჩვიოს აგების ამოცანების ამოხსნის დროს, სადაც სავალდებულოა მიღებული ამონახსნის შემოწმების დამტკიცება.

სასწავლო პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოცანების მიმართ გარკვეული წესები. მოვიყვანოთ ამოცანების სპეციალური ხერხებით ამოხსნის რამოდენიმე წესი:

• „მარტივი“ წესი: არ გამოტოვოთ ყველაზე მარტივი ამოცანა. როგორც წესი მარტივ ამოცანებს არ განიხილავენ, არადა მეთოდურად გამართლებულია, რომ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა ასეთი ამოცანების განხილვით უნდა დავიწყოთ.

• „რიგითი“ წესი: ამოცანის ზოგიერთ პირობას ან პირობებს თუ ამის შესაძლებლობა არსებობს, უნდა შევუცვალოთ რიგით, გადავანაცვლოთ ან წინ ან უკან. ამოცანაში პირობები სასრული რიცხვით გამოისახება, ასე რომ, ყველა პირობას ადრე თუ გვიან თავისი რიგი მოუწევს.

• „უცნობი“ წესი: შევცვალოთ ამოცანის ერთი რომელიმე პირობა, სხვა პირობით. მივიღებთ დამხმარე ამოცანას, რომლის ამოხსნა უფრო მარტივია მოცემულთან შედარებით. ამოვხსნით დამხმარე ამოცანას, რის შემდეგაც ვუბრუნდებით ძირითად ამოცანას და ამოვხსნით მას მოცემული პირობებით.

• „საინტერესო“ წესი: შევცვალოთ ამოცანის პირობა უფრო საინტერესო პირობით.

• „დროებითი“ წესი: თუ ამოცანის პირობაში საუბარია რაიმე პროცესზე და საბოლოო მდგომარეობა უფრო თვალსაჩინოა, ვიდრე საწყისი, მაშინ უფრო მოსახერხებელია დროის უკუათვლა: პირველად განვიხილოთ პროცესის ბოლო ბიჯი, შემდეგ ბოლოსწინა და ა.შ. ასეთი მიდგომები გამოიყენება აგებაზე გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს, როცა ანალიზის ეტაპზე ვუშვებთ, რომ ამოცანა ამოხსნილია და ვეძებთ ამოხსნის გზას.

შევნიშნოთ, რომ ამ წესების სია არასრულია, რადგან კონკრეტული ამოცანიდან გამომდინარე შესაძლოა საჭიროებამ მოითხოვოს სხვა რომელიმე წესის გამოყენება ან სრულიად ახალი წესის შედგენა.

შესაძლოა პრაქტიკული მოღვაწეობის დროს შეგვხვდეს ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნა არ მოხერხდეს არცერთი ზემოთ ჩამოყალიბებული წესით, მაშინ უნდა შევქმნათ ასეთი ამოცანის ამოხსნის განსაკუთრებული წესი. ამასთანავე, უნდა გვახსოვდეს, რომ ისეთი გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა როცა საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება ხელოვნებაა, რომელსაც შეიძლება ამომხსნელი ფლობდეს მხოლოდ მაშინ, თუ სისტემატიურად ახდენს ამოცანების ამოხსნის მოქმედების თვითანალიზს.

ზოგჯერ, დაბალ კლასებში შესაძლებელია ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები გამოყენებული იქნეს ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების მიმართ, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია განტოლების ან/და განტოლებათა სისტემის შედგენით. ასეთი მიდგომა მიზანშეწონილია მაშინაც კი, როცა მოსწავლეები განტოლების შედგენით ალგებრული ამოცანების ამოხსნაში ჯერ კიდევ კარგად გაწაფული არ არიან. ხოლო, როცა კარგად დაეუფლებიან, შემდგომში ასეთი ამოცანების ამოხსნა განტოლების შედგენით მათთვის მარტივი საქმე იქნება, მაგრამ თუ მოსწავლეები ასეთი ამოცანებს დაბალ კლასებში არ გაეცნენ, მაშინ უმჯობესია სანამ დავიწყებდეთ ასეთი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების განვიხილვას განტოლებების და განტოლებათა სისტემების გამოყენებით შევთავაზოთ რამდენიმე გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანა, რომელთა ამოხსნა არითმეტიკული გზითაც შეიძლება და თავისი შინაარსით არასტანდარტულია.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ხასიათდება ზოგიერთი თავისებურებებით, კერძოდ,

1. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნის სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის დროს;

2. უმრავლეს შემთხვევაში მასწავლებელმა არ უნდა მოახდინოს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების მზა რეცეპტების სახით მიწოდება, მან უნდა ისარგებლოს ისეთი მითითებებითა და კითხვებით, რომლებიც საშუალებას მისცემს მოსწავლეებს თვითონ მივიდნენ ამოხსნის სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის „აღმოჩენამდე“;

3. მასწავლებელმა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების პროცესი უნდა წარმართოს ისე, რომ მასში მონაწილეობა მიიღოს მთელმა კლასმა, მოსწავლეებს საშუალება უნდა ჰქონდეთ გამოთქვან თავისი შეხედულებები, შესაძლოა ეს შეხედულებები მცდარიც იყოს და დაიცვან საკუთარი მიდგომები. მასწავლებლებმა პატივი უნდა სცენ მოსწავლეთა მიერ გამოთქმულ აზრებს;

4. მასწავლებელმა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანის ამოხსნის შემდეგ უნდა მოახდინოს გამოყენებული სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის სრულყოფილი მეთოდური ანალიზი და თუ ამოხსნილი ამოცანის სახე იძლევა ამის შესაძლებლობას, მოახდინოს მისი/მათი განზოგადება სხვა უფრო ფართო კლასის ამოცანების მიმართ;

5. მომდევნო ეტაპებზე, როცა მოსწავლეები მიიღებენ საკმაო გამოცდილებას, დახელოვნდებიან გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებაში, მასწავლებლის ჩარევა უნდა შემცირდეს, როგორც ამოხსნის სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის შერჩევისას, ასევე ამოხსნის პროცესშიც. მან ყურადღება უნდა გადაიტანოს იმ მოსწავლეებზე, რომლებსაც შედარებით უძნელდებათ ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება.

§2. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა კლასიფიკაცია ამოხსნის ხერხების მიხედვით

გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების დაყოფის ერთ–ერთი ტრადიციული სქემით ცალკეა გამოყოფილი პლანიმეტრიული და ცალკე–სტერეომეტრიული ამოცანები. ჩვენ ასეთ დაყოფაზე უარი ვთქვით და გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების დაყოფას ვახდენთ სხვა, ჩვენს მიერ შემუშავებული სქემით, რომელიც ითვალისწინებს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების დაყოფას ამოხსნის სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის მიხედვით. ცხადია, რომ დღის წესრიგში დგება მოვახდინოთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა კლასიფიკაცია მათი ამოხსნის ხერხების მიმართ.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების დაყოფის დროს ჩვენი სქემის გამოყენების დროს ამოცანათა ერთ სისტემაში მოხვდება შინაარსით განსხვავებული სახის ამოცანები და რაც ყველაზე თვალნათელია, ამოცანათა ერთ სისტემაში მოხვდება პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანები, რომელთაც საერთო ის აქვთ, რომ მათი ამოხსნის პროცესში შესაძლებელია გამოვიყენოთ ერთი და იგივე მეთოდი. ასევე, ჩვენი სქემით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების დაყოფის დროს ერთი და იგივე ამოცანა შესაძლოა მოხვდეს რამდენიმე სისტემაში, რადგან ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელ იყოს რამდენიმე სპეციალური, ერთმანეთისაგან განსხვავებული გზით. ჩამოთვლილი პრობლემები არც თუ ისე მარტივად გადასაწყვეტია და მასწავლებლისაგან დიდ პედაგოგიურ ტაქტს და მეთოდური თვალსაზრისით მაღალი დონის მომზადებას მოითხოვს.

ერთი შეხედვით, პროფესიონალ, გაუცნობიერებულ და საქმეში ჩახედულ ადამიანსაც კი, შეიძლება აბსურდულად ან პარადოქსულადაც კი მოეჩვენოს ის, თუ რა საერთო შეიძლება ჰქონეთ ამოცანებს, რომელთა პირობები ასეა ჩამოყალიბებული:

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედი შეუძლებელია დავფაროთ მასზე უფრო მცირე ორი ტოლგვერდა სამკუთხედით.

ამოცანა 2. მოცემულია ამოზნექილი შვიდკუთხედი. ნებისმიერად იღებენ მის ოთხ კუთხეს და გამოთვლიან ამ კუთხეთა სინუსებს და დანარჩენი სამი კუთხის კოსინუსებს.

აღმოჩნდა, რომ ამ შვიდი რიცხვის ჯამი დამოკიდებული არ არის თავდაპირველად არჩეულ ოთხ კუთხეზე. დაამტკიცეთ, რომ ამ შვიდკუთხედს ოთხი კუთხე ტოლი აქვს.

ამოცანა 3. თვითმფრინავის საფრენ საჰაერო სივრცეში ღრუბლებია. აღმოჩნდა, რომ სივრცე შეიძლება დაიყოს ნაწილებად ათი სიბრტყით ისე, რომ სივრცის თითოეულ ნაწილში იყოს არაუმეტეს ერთი ღრუბელი. რა უდიდესი რაოდენობის ღრუბლებში შეუძლია გაიაროს თვითმფრინავმა, რომელსაც აღებული აქვს წრფივი კურსი?

ამოცანა 4. კუბის ყოველ წვეროში დააწერეს რიცხვები ან 1 ან 0. კუბის წახნაგებზე დაწერეს მის წვეროებში დაწერილი რიცხვების ჯამი. შესაძლებელია თუ არა აღმოჩნდეს, რომ ყველა წახნაგზე დაწერილი რიცხვები განსხვავებული იყოს?

ამოცანა 5. იპოვეთ ფერთა უდიდესი რაოდენობა, რომლითაც შეიძლება შევღებოთ კუბის წიბოები (თითოეული წიბი თითო ფერად) ისე, რომ ფერთა თითოეული წყვილისათვის მოიძებნოს ორი მეზობელი წიბო, რომლებიც ერთ ფერად არიან შეღებილი. წიბოები მეზობელია, თუ მათ საერთო წვერო აქვთ.

ამოცანა 6. სივრცეში n წერტილი მოცემულია ისე, რომ ამ წერილებიდან არცერთი სამი წერტილი არ ეკუთვნის ერთ წრფეს და არცერთი ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ ძევს. ამ წერტილებიდან ყოველ სამ წერტილზე გავლებული სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ როგორაც არ უნდა ავიღოთ სივრცეში n-3 წერტილი, გავლებულ სიბრტყეებს შორის მოიძებნება სიბრტყე, რომელიც არ შეიცავს არცერთ წერტილს n-3 წერტილიდან.

თუ გავაანალიზებთ ამ ამოცანებს, პირველი რაც თვალნათლივ ჩანს, არის ის, რომ ზოგიერთი ამ ამოცანებიდან პლანიმეტრიულია, ზოგიერთი სტერეომეტრიული, ყველა ამოცანა თავისი შინაარსით არასტანდარტულია განეკუთვნება საოლიმპიადო ამოცანების კატეგორიას. ის, რომ ეს ამოცანები, უკლებლივ ყველა საოლიმპიადო კატეგორიისაა, გარკვეული ნიშნის მატარებელია, მაგრამ გვრჩება დაუკმაყოფილებლობის გრძნობა, ხომ არ შეიძლება კიდევ უფრო გამოკვეთილი რაიმე ნიშნით გავაერთიანოთ ეს ამოცანები? ამისათვის საჭიროა მოვახდინოთ თითოეული ამოცანის პირობების ყოველმხრივ შესწავლა და მათი ანალიზი. ეს პროცესები ჩვენ ჩატარებული გვაქვს დისერტაციის მეორე თავის პირველ პარაგრაფში, სადაც დაწვრილებით არის გარჩეული თითოეული ამოცანა და არა

მარტო ეს ამოცანები და გაკეთებულია შესაბამისი მეთოდური დასკვნები. აქ კი შევნიშნავთ, რომ ამ ამოცანების ერთ სისტემაში გაერთიანება გამოწვეულია იმით, რომ მათი ამოხსნისას გამოყენებულია ამოხსნის ერთი და იგივე მიდგომა–დირიხლეს პრინციპი. დირიხლეს პრინციპის არსის და მის გამოყენების შესახებ გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანების დროს დაწვრილებით არის განხილული დისერტაციის მეორე თავში.

დისერტაციის მეორე თავში, რომელიც მთლიანად ეძღვნება მათემატიკის სასკოლო კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენებას და მათი სწავლების მეთოდიკას დაწვრილებით არის გარჩეული ჩვენს მიერ მოყვანილი ამოცანათა სისტემების შედგენის დროს გამოყენებული ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები, გარჩეულია შესაბამისი შინაარსის ამოცანები და მოცემულია მეთოდური რეკომენდაციები. მოვიყვანთ ჩვენს მიერ განხილული გეომეტრიული შინაარსის ზოგიერთ ამოცანას, რომელთა ამოხსნის დროს გამოვიყენეთ ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები, რათა ნათელი წარმოდგენა შეგვექმნას ჩვენს მიერ შემუშავებულ სქემაზე.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას გამოყენებულია ინვარიანტები და ნახევარინვარიანტები

ამოცანა 1. წესიერი პირამიდის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მანძილების ჯამი მის გვერდით წახნაგებამდე მუდმივია და გვერდით წახნაგზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია.

ამოცანა 2. წესიერი მრავალწახნაგას ნებისმიერი შიგა წერტილიდან მის ყველა გვერდით წახნაგებამდე მანძილების ჯამი მუდმივია. კერძოდ, წესიერი ტეტრაედრი-სათვის, რომლის გვერდია a, ეს მანძილი ტოლია $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

ამოცანა 3. კვადრატული მინდორი დაყვეს 100 ერთნაირი ზომის პატარა კვადრატულ ნაკვეთებად. მათგან 9 ნაკვეთზე გაიზარდა სარეველები. ცნობილია, რომ სარეველები ყოველ წელს ვრცელდება იმ და მხოლოდ იმ ნაკვეთებზე, თუ მას უშუალოდ ესაზღვრება (ე.ი.

საერთო გვერდი აქვს) ორი სარეველებიანი ნაკვეთი. დაამტკიცეთ. რომ მთელი მინდორი არასოდეს არ დაიფარება სარეველებით.

ამოცანა 4. მოცემულია საჭადრაკო დაფა. ნებადართულია დაფის ნებისმიერი 2×2 ზომის კვადრატის ყველა უჯრის გადაღებვა-თეთრი უჯრების შავად, ხოლო შავი უჯრების თეთრად. შესაძლებელია თუ არა, რომ საჭადრაკო დაფიდან მივიღოთ დაფა, რომელსაც ექნება ზუსტად ერთი შავი უჯრა?

ამოცანა 5. ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით სიბრტყის ფიქსირებული წერტილიდან გაავლეთ წრფე, რომელიც მოცემული კუთხიდან ჩამოჭრის სამკუთხედს, რომელსაც მოცემული $2p$ პერიმეტრი აქვს.

ამოცანა 6. მოცემულია ქაღალდის სამკუთხედი კუთხეებით 20^0 , 20^0 და 140^0. ამ სამკუთხედს ჭრიან თავისი ერთ-ერთი ბისექტრისის გასწვრივ ორ სამკუთხედად, რომელთაგან ერთ-ერთს ასევე ჭრიან ორ სამკუთხედად მისი ერთ-ერთი ბისექტრისის გასწვრივ და ა.შ. შესაძლებელია თუ არა ასეთი მოქმედების სასრული რიცხვის შემდეგ მივიღოთ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი?

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას გამოყენებულია ფართობისა და მოცულობის მეთოდი

ამოცანა 1. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია BC და AD. ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწი-რი. CD რკალზე აღებულია M წერტილი და შეერთებულია ტრაპეციის ყველა წვეროს-თან. CMD სამკუთხედის CMD კუთხე b -ს ტოლია, ხოლო AMB სამკუთხედში ცნობილია ABM და BAM კუთხეთა სხვაობა, რომელიც a -ს ტოლია. იპოვეთ ABM სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის r რადიუსის შეფარდება ABM სამკუთხედის p ნახევარპერიმეტრთან.

ამოცანა 2. ვთქვათ, ABC სამკუთხედის ფართობია S. სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ

$$\frac{CM}{AC} = k_1 \text{ და } \frac{CN}{BC} = k_2.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$S_{CMN} = k_1 \cdot k_2 \cdot S_{ABC}.$$

ამოცანა 3. მოცემულ ABC სამკუთხედში O წერტილი ისეა შერჩეული, რომ AOB, BOC და AOC სამკუთხედების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1 : 2 : 3. OA, OB და OC წრფეები BC, AB და AC გვერდებს გადაკვეთენ შესაბამისად A_1, B_1 და C_1 წერტილებში. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ O წერტილი და იპოვეთ ფარდობა $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$.

ამოცანა 4. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის წიბო 1-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან A_1BT სიბრტყემდე, სადაც T-არის AD წიბოს შუაწერტილი.

ამოცანა 5. ერთეულოვან $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში იპოვეთ მანძილი A წვეროდან (BDA_1) სიბრტყემდე.

ამოცანა 6. ვთქვათ, ABCD ტეტრაედრის მოცულობაა V. ტეტრაედრის DA, DB და DC წიბოებზე შესაბამისად აღებულია M, N და P წერტილები ისე, რომ

$$\frac{MD}{AD} = k_1, \quad \frac{ND}{BD} = k_2 \text{ და } \frac{PD}{CD} = k_3.$$

დაამტკიცეთ, რომ MNDP ტეტრაედრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{MNPD} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot V_{ABCD}.$$

ამოცანა 7. SABC პირამიდის SA, SB და SC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M, N და P წერტილები ისე, რომ SM : MA = 2 : 3, SN : NB = 3 : 8 და SP : PC = 4 : 9. იპოვეთ SABC პირამიდის მოცულობა, თუ SMNP პირამიდის მოცულობა 24-ის ტოლია.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას გამოყენებულია ვექტორული მეთოდი

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედში AB და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K და L წერტილები ისე, რომ CL : BL = 1 : 2. ვთქვათ, Q წერტილი AL და CK წრფეების გადაკვე-თის წერტილია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ BQC სამკუთხედის ფართობი 1-ის ტოლია.

ამოცანა 2. $SABC$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის A წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც SAB სამკუთხედის მედიანას შუაზე ყოფს, ხოლო SAC სამკუთხედის SL მედიანას

გადაკვეთს ისეთ D წერტილში, რომ $SL=2SD$. როგორი შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე პირამიდის მოცულობას?

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას გამოყენებულია კოორდინატთა მეთოდი

ამოცანა 1. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის წერტილებზე $A(2,3)$ და $B(5,4)$ წერტილებზე და ეხება oy ღერძს.

ამოცანა 2. შეადგინეთ სფეროს განტოლება, რომელიც გადის $A(1;-1;4)$ წერტილზე და ეხება საკოორდინატო სიბრტყეებს.

ამოცანა 3. $\left(x-8\right)^2+\left(y-10\right)^2=169$ წრეწირში ჩავხაზულია $ABCD$ კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის B, C და D წვეროების კოორდინატები, თუ A წვეროს კოორდინატებია $A(13;-2)$.

ამოცანა 5. მართ სამკუთხა $ABCA_1B_1C_1$ პრიზმაში ყველა წიბო 1–ის ტოლია. A_1B_1 და B_1C_1 წიბოების შუაწერტილებია შესაბამისად D და E. იპოვეთ AD და BE წრფეებს შორის კუთხის კოსინუსი.

ამოცანა 6 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში M წერტილი AA_1 წიბოს წერტილია, ამასთან $AM:A_1M=3:1$. N წერტილი BC წიბოს შუაწერტილია. იპოვეთ MN და DD_1 წრფეებს შორის კუთხის კოსინუსი.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნისას გამოყენებულია ალგებრული მეთოდი

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედის ორი წვეროს კოორდინატებია $A(-1;-1)$ და $B(4;5)$, ხოლო მესამე წვერო $y=5x-15$ წრფეზე ძევს. სამკუთხედის ფართობია 9,5. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები.

ამოცანა 2. იპოვეთ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის მკვეთი სიბრტყის განტოლება და იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის A წვეროზე და B_1C_1 და C_1D_1 წიბოების შუაწერტილებზე. კუბის წიბო a–ს ტოლია.

ამოცანა 3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო a–ს ტოლია. K და L წერტილები შესაბამისად AB და DD_1 წიბოების შუაწერტილებია. როგორი ფარდობით ყოფს კუბის მოცულობას სიბრტყე, რომელიც გადის A_1, K და L წერტილებზე?

სრულად ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების მიხედვით დალაგებული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანათა სისტემები მოყვანილი გვაქვს დისერტაციის დანართში.

ჩვენი მიდგომა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მიმართ საშუალო სკოლაში ტრადიციული სწავლებისაგან განსხვავებულია. ძირითადი განსხვავება მიდგომებს შორის არის ის, რომ ჩვენ ვთვლით, პარალელურ რეჟიმში უნდა ისწავლებოდეს პლანიმეტრიის და სტერეომეტრიის თეორიული საკითხები და ხდებოდეს შესაბამისი ამოცანების ამოხსნა, ამავე დროს თანაფარდობის თვალსაზრისით უპირატესობა უნდა მივანიჭოთ სტერეომეტრიული შინაარსის მქონე თეორიული საკითხების სწავლებას და ამოცანების ამოხსნას. აქ ბუნებრივად იბადება კითხვა: რატომ? ამ კითხვის პასუხად შეგვიძლია ვუპასუხოთ:

ჯერ ერთი, სტერეომეტრიის თეორიული საკითხები და პრაქტიკული ამოცანები მოსწავლეთა სივრცითი წარმოდგენების ფორმირებაში ასრულებენ უდიდეს როლს და ამ ფუნქციის შეცვლა მათთვის სხვა სახის თეორიულ მასალას ან ამოცანებს, ან სხვა საკითხების განხილვას პრაქტიკულად არ შეუძლია.

მეორე არსებითი ფაქტორი მდგომარეობს იმაში, რომ თითქმის ყველა სტერეომეტრიის ამოცანის დაყვანა საბოლოო ჯამში ხდება პლანიმეტრიულ ამოცანაზე და თუ ჩვენ განხილულ ამოცანათა შორის რაოდენობრივ უპირატესობას პლანიმეტრიულ ამოცანებს მივანიჭებთ, მაშინ სტერეომეტრიული ამოცანების წილი კიდევ უფრო შემცირდება.

განსაკუთრებით საინტერესო შემთხვევებთან გვაქვს საქმე, როცა ერთი და იგივე ამოცანა ხვდება ამოცანათა სხვადასხვა სისტემაში. ჩვენი დაყოფის პრინციპის შესაბამისად ერთი და იგივე ამოცანა შესაძლოა მოხვდეს ორ, სამ და უფრო მეტ ამოცანათა სისტემაში. ამ დროს მასწავლებელი დგება დილემის წინაშე, რომელ კლასს მიაკუთვნოს კონკრეტული ამოცანა და რომელი თემის გავლის დროს ჩართოს ეს ამოცანა სასწავლო პროცესში? შევნიშნოთ, რომ

ასეთი ამოცანების რაოდენობა მათი ფორმისა და შინაარსიდან გამომდინარე ბევრი არ არის, მაგრამ შემუშავებული პრინციპი უნდა იყოს სრულყოფილი და ცალსახად უნდა განსაზღვროს როგორ შევადგინოთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემები, რომელთა ამოხსნისას აუცილებელია სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება.

კითხვაზე პასუხი მთლიანად მათემატიკის მეთოდიკის სფეროს განეკუთვნება. რადგან საკითხი ეხება ისეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ერთზე მეტი რამდენიმე სპეციალური მეთოდით ან/და ხერხით, ამიტომ მან, ვინც ახდენს გეომეტრიული ამოცანების სისტემის შედგენას, უნდა ჩაატაროს კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის ყველა ხერხის მეთოდიკური ანალიზი და ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს ან/და ხერხებს შორის უნდა აარჩიოს ის, რომელიც მეთოდურად ყველაზე უფრო მისაღებია. გავარკვიოთ, რა გულისხმობს ტერმინი–მეთოდურად ყველაზე უფრო მისაღები. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანის ამოხსნის სპეციალური მეთოდი ან/და ხერხი მეთოდურად მისაღებია, ნიშნავს, რომ მან დროის მოცემულ მომენტში, კონკრეტული სასწავლო მიზნებიდან გამომდინარე შედარებით უკეთ დააკმაყოფილა სასწავლო თემის ათვისებისათვის საჭირო კრიტერიუმები. მაგალითად, ისეთი, რომელიც უფრო მეტად დაეხმარა მოსწავლეს ამოცანის პირობაში მოცემული ფაქტების შინაარსის უკეთ გარკვევაში, გააფართოვა მოსწავლეთა ცოდნის არეალი განსახილავი თემის ირგვლივ, დამატებით მიაწოდა ინფორმაცია კონკრეტული ფიგურის ან სხეულის თვისებებზე, რომელიც მათთვის ცნობილი არ იყო, ნიადაგი მოამზადა და უზრუნველყო მარტივი გადასვლა ახალი მასალის ასახსნელად და სხვ. ჩვენს მოსაზრებას ექოლება ოპონენტები, რომლებიც ალბათ ყურადღებას გაამახვილებენ იმაზე, რომ ასეთი ამოცანების ჩართვა ამოცანათა სისტემაში მოხდება სუბიექტური ფაქტორის გამოყენებით და დაირღვევა პრინციპი, რომ სისტემა შედგეს ობიექტურად. ასეთი სახის ოპონირების შემთხვევაში შეგვიძლია ოპონენტებს ვუპასუხოთ, რომ ჩვენთვის მთავარია სასწავლო მიზნებიდან გამომდინარე, ისე შევარჩიოთ ამოცანათა სისტემები, რომ მივიღოღ მაღალი განმავითარებელი ეფექტის მქონე სასწავლო პროცესი, რაც შეეხება ფორმალურად ამოცანათა რომელ სისტემაში იქნება კონკრეტული ამოცანა, ამის მეთოდური დასაბუთება უნდა მოახდინოს მასწავლებელმა გაკვეთილზე და

მოსწავლეებს უნდა გაურჩიოს ამოცანის ამოხსნის ყველა შესაძლო სპეციალური მეთოდი ან/და ხერხი და აუხსნას მოსწავლეებს თემის სასწავლო მიზანი, რის მიღწევას აპირებს მასწავლებელი, რას ითვალისწინებს სასწავლო მიზანი და რატომ გააკეთა არჩევანი ამა თუ იმ მეთოდსა თუ ხერხზე. ეს მიდგომა სრულად გამორიცხავს სუბიექტურ ფაქტორს ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემების შედგენისას, რომელთა ამოხსნა საჭიროებს სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას.

ჩვენ დავამუშავეთ და დისერტაციაში სპეციალური ქვეთავი მივუძღვენით სპეციალური მეთოდებით და ხერხებით არასტანდარტული პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდიკურ თავისებურებებს. კონკრეტული მეთოდის, კერძოდ, ფართობისა და მოცულობის მეთოდი გამოვიყენეთ პლანიმეტრიიდან და სტერეომეტრიიდან ერთმანეთის მსგავსი შინაარსის ამოცანების ამოხსნა, რაც დახმარებას უწევს პლანიმეტრიისა და სტერეომეტრიის შინაარსის სასწავლო მასალის სწავლების ერთიან სისტემაში მოყვანას, რომელიც ჩვენი მიდგომის ერთ–ერთი მთავარი საყრდენია და ამავე დროს მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს ფართობისა და მოცულობის მეთოდი აღიქვან როგორც ერთიანი, რაც მეთოდური თვალსაზრისით ასევე მნიშვნელოვანია. შესაძლებელია, რომ ანალოგიური მიდგომები სტერეომეტრიული და პლანიმეტრიული ამოცანების ერთ კონტექსტში სწავლების შესახებ განვახორციელოთ ჩვენს მიერ დისერტაციის მეორე თავში განხილული სხვა სპეციალურ მეთოდებზეც, რომლებიც გამოვიყენეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის დროს, მაგრამ ამის შესაძლებლობას მოცულობის თვალსაზრისით სადისერტაციო ნაშრომი არ იძლევა.

შევნიშნავთ, რომ განხილული მეთოდური მიდგომა ძალიან კარგ ეფექტს იძლევა პრაქტიკაში, რაც დადასტურებულია ხანგრძლივი პირადი პედაგოგიური პრაქტიკით და ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის სტატისტიკური ანალიზით.

აქვე შევნიშნავთ, რომ დისერტაციის ფორმატი საშუალებას არ იძლევა დაწვრილებით გადმოვცეთ ყველა ის მიდგომა, რომელიც აღნიშნულ საკითხებზე ჩვენი ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკის მანძილზე განვახორციელეთ, მხოლოდ შევნიშნავთ, რომ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ და არ გამოვტოვოთ არცერთი შესაძლებლობა, როდესაც

მოვახდენთ პლანიმეტრიისა და სტერეომეტრიის შინაარსობრივად მსგავსი ფაქტების ანალიზს. მეთოდურად მარტივი განსახორციელებელია სამკუთხედის ფართობსა და პირამიდის მოცულობას შორის პარალელების გავლება, ასევე კარგ ეფექტს მისცემს მასწავლებელს წრეწირის ფართობსა და ბირთვის მოცულობის ერთმანეთთან დაკავშირება, სიბრტყეზე ვექტორთა სკალარული ნამრავლისა და სივრცეში ვექტორთა შერეული ნამრავლების გამოსახვა, ვექტორების გამოსახვა სიბრტყეზე და სივრცეში და სხვ.

ბოლოს, დავასაბუთოთ თუ რა მეთოდური ეფექტით ხასიათდება პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ერთიან კონტექსტში განხილვა. აქ გასათვალისწინებელია ის, რომ აუცილებელია პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები თუ იდენტური არა თითქმის ერთნაირი უნდა იყოს. ამ შემთხვევაში, სხვა შემთხვევებისაგან განსხვავებით მოსწავლეები ხალისით ხსნიან სტერეომეტრიულ ამოცანებს, რადგან მათ იციან თუ როგორი მეთოდით უნდა ამოხსნან სტერეომეტრიული ამოცანა და მათ ეხსნებათ შიშის და შებოჭილობის შეგრძნება, რაც ტრადიციულად ახლავს სტერეომეტრიული შინაარსის ამოცანების სწავლებას და გეომეტრიული შინაარსის მქონე ასეთი ამოცანების განხილვით გაკვეთილზე მიიღწევა მნიშვნელოვანი შედეგები, რაც აისახება სწავლების დონის ამაღლებით და მოსწავლეთა მაღალი აკადემიური მოსწრებით მათემატიკაში.

§3. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ფსიქოლოგიურ–პედაგოგიური საფუძვლები

მათემატიკის სწავლებას სკოლაში სამი ძირითადი მიზანი აქვს: საგანმანათლებლო, აღმზრდელობითი და განმავითარებელი. საგანმანათლებლო მიზანი მათემატიკას აკისრებს მყარი, ფუნქციური ცოდნის მიღების საშუალებას, რაც თავისთავად ნიშნავს, სახელმწიფო სტანდარტით განსაზღვრული მეცნიერული ცოდნის გარკვეული სისტემის გადაცემას, მათემატიკური ტერმინოლოგიის, მათემატიკის ზეპირი და წერითი მეტყველების, მათემატიკის ენის დაუფლებას, მათემატიკური ცოდნის რეალურ ცხოვრებაში გამოყენების უნარის განვითარებას. მათემატიკის სწავლება აღმზრდელობითი მიზნიდან გამომდინარე განიხილება, როგორც აღზრდის ერთიანი და კონსტრუქტივისტული სისტემა, რომელიც ახდენს პასუხისმგებლობის გრძნობის განვითარებას, ინიციატივის ხელშეწყობას, მიზანზე ორიენტირებულობას და მიზნით მართული ქცევის დაუფლებას, სწავლის მეტაკოგნიტური და გუნდური მუშაობის უნარების განვითარებას, უნვითარებს შრომის ორგანიზების, საკუთარი აზრის დაცვის უნარებს, სხვისი აზრის პატივისცემას და სხვ. განმავითარებელი მიზნის მიხედვით-მათემატიკის სწავლება განიხილება, როგორც პიროვნების მრავალმხრი–ვი (კოგნიტური, სოციალური და სხვ.) განვითარების მნიშვნელოვანი წინაპირობა, რომელიც განაპირობებს მათემატიკური ინტუიციისა და წარმოსახვის განვითარებას, ავითარებს ლოგიკური აზროვნების, არგუმენტირებული მსჯელობის, ანალიზისა და სინთეზის უნარ-ჩვევებს, ახდენს სივრცული წარმოდგენების ფორმირებას და სხვ.

სწავლების საყოველთაოდ მიღებული განმარტების თანახმად, სწავლება არის მასწავლებლისაგან მოსწავლისათვის ცოდნისა და უნარ-ჩვევების გადაცემის პროცესი. თანამედროვე პედაგოგიკა სწავლებას განიხილავს, როგორც ორმხრივი აქტიურობის პროცესს, რომელშიც ერთმანეთს უნდა შეხვდეს მასწავლებლის სწავლება და მოსწავლის სწავლა. ასეთი ორმხრივი ურთიერთშემხვედრი აქტიურობის გარეშე სწავლების მიზანდასახულობა ვერ განხორციელდება.

ამ ერთობლივი საქმიანობის პროცესში, მასწავლებელი, სათანადო გეგმისა და პროგრამის შესაბამისად, უნდა აცნობდეს მოსწავლეს სინამდვილის შესასწავლ სფეროს და ისეთნაირად წარმართავდეს მის სასწავლო აქტივობას, რომ მოსწავლე რაც შეიძლება ნაკლები დროისა და ენერგიის დახარჯვით დაეუფლოს სათანადო ცოდნას. მოსწავლე თავის მხრივ, მიიღებს, გადაამუშავებს, შეინახავს და საჭიროების შესაბამისად აღადგენს სწავლების ფორმაში მიწოდებულ ინფორმაციას შესასწავლი სინამდვილის შესახებ.

პედაგოგიური ამოცანის თვითმიზანი არ არის ცოდნის ამა თუ იმ სტრუქტურის ათვისება, მოსწავლის ცნობიერების ცოდნით „ავსება“, რომლის მიღწევითაც სკოლა და მასწავლებელი თავის ამოცანას გადაწყვეტილად ჩათვლის. სწავლებისა და სწავლის საბოლოო დანიშნულება არის ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება იმ საქმიანობის წარმატებით განხორციელებისათვის, რომელთა წინაშეც სუბიექტს ცხოვრება დააყენებს. ამისათვის კი საჭიროა მოსწავლეს კარგად ესმოდეს შესწავლილი მასალის არსი და შეეძლოს ამ ცოდნის შემოქმედებითად დაკავშირება სხვა, ცხოვრებაში წამოჭრილ პრობლემებთან.

თანამედროვე სკოლის მუშაობის ძირითადი პრინციპი მოსწავლეზე ორიენტირებული სწავლებაა. განვითარების ახალი ტენდეციები ახალ მოთხოვნებს აყენებს განათლების წინაშე, რომლებიც მოკლედ შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: კონკრეტული ამოცანის სწორად აღქმა და განსაზღვრა; პრობლემის გადაჭრის რაციონალური გზის მოძებნა; ცოდნის ეფექტურად წარმოჩენის და საზოგადოებასთან ურთიერთობის და თანამშრომლობის უნარები.

ყოველივე ამის განხორციელებაში გადამწყვეტი როლი ეკისრება მასწავლებელს. წარსულში ტრადიციულად, სასწავლო პროცესის მთავარი ფიგურა მასწავლებელი იყო, ის გადასცემდა ცოდნას, ხსნიდა ამოცანებს, წყვეტდა პრობლემებს, აკეთებდა დასკვნებს და მზა სახით აწვდიდა მოსწავლეებს. თანამედროვე პედაგოგიკის პრინციპების მიხედვით მასწავლებელი გვევლინება ფასილიტატორის როლში, ანუ მოსწავლის დამოუკიდებელი შემეცნებითი საქმიანობის ორგანიზატორი, მისი კონსულტანტი და თანაშემწე. მასწავლებლის პროფესიული ცოდნა და უნარი მიმართულია არა მარტო ცოდნის გადაცემასა და კონტროლზე, არამედ მოსწავლის საქმიანობის დიაგნოსტიკაზე, რათა

დროულად აღმოაჩინოს სწავლის პროცესის შემაფერხებელი სირთულეები და დაეხმაროს მოსწავლეს მათ დაძლევაში.

პედაგოგიკაში აღიარებულია სწავლების რამდენიმე მეთოდი, რომელთა გამოყენება მასწავლებლის კონკრეტულ მიზნებზეა დამოკიდებული. განვიხილოთ და დავახასიათოთ ზოგიერთი მათგანი:

1. ახსნით-თვალსაჩინოების (რეპროდუქტული) მეთოდი. მისი გამოყენებით ხდება მეხსიერების ვარჯიში, იძლევა ცოდნას, მაგრამ ხელს ვერ უწყობს კვლევით მუშაობას და ვერ ავითარებს შემოქმედებით აზროვნებას. მოიცავს ლექციას, აუდიო და ვიდეო მასალის გამოყენებას, სწავლების პროცესში თანამედროვე ტექნოლოგიების ჩართვას, ლიტერატურის შესწავლას, დემონსტრირებას და სხვ.

2. პრობლემური მეთოდი-ეს მეთოდი ძირითადად გამოიყენება მასწავლებლის მიერ ახალი მასალის გადაცემის დროს, მოსწავლის წიგნზე მუშაობისას, გადაცემული მასალის ათვისების შემოწმების პროცესში, ექსპერიმენტის ჩატარებისას და სხვ. მეთოდის გამოყენებით მოსწავლეები იძენენ ლოგიკური და კრიტიკული აზროვნების ჩვევებს.

3. ნაწილობრივ ძიებითი მეთოდი-ამ მეთოდს მიაკუთვნებენ პოპულარულ ლექციას, პროექტებზე მუშაობას, დამოუკიდებელ მუშაობას და სხვ. რაც მოსწავლეებს განუვითარებს მეცნიერული კვლევა-ძიების უნარ-ჩვევებს.

4. კვლევითი მეთოდი-რომლის შედეგადაც მოსწავლეები ეცნობიან მეცნიერული კვლევის პრინციპებს და ეტაპებს, შეისწავლიან საკვლევ თემასთან დაკავშირებულ ლიტერატურას, აფასებენ მიღწეულ შედეგებს და სხვ.

სწავლების შედეგი არის სწავლების მეთოდების და მიზნების შესაბამისობის კრიტერიუმი. სწავლების მეთოდი წარმოადგენს მიზანმიმართულ მოქმედებათა სისტემას, რომელსაც ახორციელებს მასწავლებელი და ორიენტირებულია მოსწავლეთა შემეცნებითი და პრაქტიკული საქმიანობის ორგანიზაციაზე, უზრუნველყოფს მოსწავლეთა მიერ განათლების შინაარსის ათვისებას.

ფსიქოლოგიური გამოკვლევებით და სწავლების გამოცდილებით დასტურდება, რომ ყოველი სახის შინაარსს შეესაბამება მისი ათვისების განსაზღვრული ხერხი. ათვისება

რთული პროცესია და რამდენიმე დონეს გულისხმობს. როდესაც მოსწავლე ითვისებს უნარ-ჩვევებს, იგი პირველ რიგში ნიმუშის მიხედვით არსებულ ცოდნას იყენებს. ამ დროს ცოდნა ხდება ღრმა და უფრო ოპერატიული, რითაც ვლინდება ათვისების მეორე დონე-მისი გამოყენება პრაქტიკაში მასწავლებლის მიერ ნაჩვენები ნიმუშის მიხედვით. როდესაც მოსწავლე შემოქმედებითად წყვეტს მისთვის ახალ პრობლემას, იგი აუცილებლად იყენებს ადრე ათვისებულ ცოდნასა და უნარ-ჩვევებს ახალ, უცნობ სიტუაციაში, შემოქმედებითად გარდაქმნის მას პრობლემის შინაარსის შესაბამისად. ამით მიიღწევა ათვისების კიდევ უფრო მაღალი, მესამე დონე.

ამრიგად ათვისება ხდება სამ დონეზე:

1. შეგნებული აღქმა და დამახსოვრება, რომელიც გარეგნულად ვლინდება ზუსტი ან მიახლოებული აღდგენით;

2. ცოდნის გამოყენება ნიმუშის შესაბამის ან მსგავს სიტუაციებში;

3. ცოდნის შემოქმედებითად გამოყენება ახალ, მოსწავლისათვის მანამდე უცნობ სიტუაციაში.

განვიხილოთ მოსწავლეზე ორიენტირებული სწავლების პროცესში ერთ–ერთი ყველაზე ხშირად გამოყენებადი მეთოდი, რომელიც პედაგოგიურ სამეცნიერო ლიტერატურაში ინტერაქტიური მეთოდის სახელითაა ცნობილი. ეს მეთოდი უზრუნველყოფს ცოდნის ათვისების პროცესში ყველა მოსწავლის აქტიურ ჩართვას, აყალიბებს მოსწავლეებში კრიტიკული აზროვნების უნარს, აჩვევს მათ ახალი ამოცანების გადაჭრისათვის საჭირო ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოპოვებას და რაც მთავარია, ასეთი სწავლება ამზადებს მოსწავლეს საზოგადოებასთან უთიერთობის და აქტიური თანამშრომლობისათვის.

განიხილავენ ინტერაქტიური მეთოდებით სწავლების რამოდენიმე ფორმას: ჯგუფური მუშაობას, გონებრივ იერიშს, დისკუსიას, სიუჟეტურ-როლური თამაშებს, სასწავლო პროექტებს და სხვ.

ინტერაქტიური გაკვეთილის ღირსებაა ის, რომ მასწავლებლის მოქმედებები აღარ არის მოქცეული ინსტრუქციათა ჩარჩოებში. მასწავლებლის თავისუფლება გულისხმობს

პასუხისმგებლობის საკუთარ თავზე აღებას, გადაწყვეტილებათა დამოუკიდებლად მიღებას და მათ რეალიზებას.

სწავლების ინტერაქტიური მეთოდები განსხვავდება სწავლების ტრადიციული მეთოდებისაგან არა მარტო ორგანიზაციული ფორმებით, არამედ ამ პროცესში ჩართული მოსწავლეების სასწავლო აქტივობის ფსიქოლოგიური მახასიათებლებითაც. პირველ რიგში თვალსაჩინოა ის გარემოება, რომ სწავლება და სწავლა წარმოგვიდგება, როგორც ადამიანთა ურთიერთობების თავისებური ფორმა და მისი დახასიათება არ ამოიწურება მხოლოდ იმ მექანიზმებით, რომლებიც სწავლის პროცესში მონაწილეობენ. მეთოდი აქცენტირებულია არა რაიმე ფაქტის ან მოვლების დასწავლაზე, არამედ ამ ფაქტის ან მოვლენის შესახებ სრულყოფილი მეცნიერული ცოდნის გაანალიზებაზე. თავის მხრივ, მეცნიერული ცოდნის ანალიზის პროცესში მოსწავლის წინაშე წარმოიშვება სხვა პრობლემებიც, რომელთა გადაჭრა მან დამოუკიდებლად უნდა შეძლოს, რისთვისაც უნდა შეეძლოს ახალი ცოდნის მოიძიება და მასში გარკვევა.

მასწავლებელი მოსწავლის სასწავლო საქმიანობისათვის მიმართულების მიმცემი, მის მიერ მოსაპოვებელი ცოდნის სტრატეგიული მიმართულებების განმსაზღვრელი, მოსწავლეთა დამოუკიდებელი მუშაობის ორგანიზატორია, ანუ ფასილიტატორია და არა ცოდნის მზა სტრუქტურების მიმწოდებელი.

სწავლებისადმი ასეთი მიდგომის ძირითადი თეორიული წყაროა თანამედროვე ამერიკული სოციალური ფსიქოლოგიის ორიგინალური მიმართულება-ინტერაქციონიზმი. მთავარი ამოცანა, რომელსაც ინტერაქციონისტები ისახავენ, მდგომარეობს იმ სპეციფიკური კომპონენტების გამოვლენაში, რითაც ადამიანური ქცევა თვისობრივად განსხვავდება ყველა სხვა ცოცხალი არსების ქცევისაგან. ამით ისინი ენათესავებიან ჰუმანისტურ ფსიქოლოგიას და კოგნიტივიზმს. ამ მიმართულების წარმომადგენელთა კვლევებში აქცენტირებულია პიროვნების ჩამოყალიბების მექანიზმების სოციალურ-ფსიქოლოგიური ხასიათი და ხაზი გაესმის შემოქმედებითი საწყისების განმსაზღვრელ როლს ადამიანის ცხოვრებაში. ამდენად, ისინი შეიძლება განვიხილოთ ერთიან, ჰუმანისტურ მოძრაობად, მით უმეტეს, რომ ყოველი მათგანი, როგორც თეორიული შესწავლის, ასევე პრაქტიკული

ფსიქოლოგიური მუშაობის ცენტრში აყენებს კონკრეტულ ადამიანს, მისი პირადული პრობლემებითა და მისწრაფებებით. ინოვაციები პედაგოგიურ პრაქტიკაში, ძირითადად იმ გავლენის შედეგია, რაც ამ მიმართულებებმა მოახდინეს განვითარებისა და განათლების ფსიქოლოგიაზე.

ინტერაქციონიზმი ბიჰევიორიზმის წიაღიდან აღმოცენდა. მის ჩამოყალიბებაზე უდიდესი გავლენა მოახდინა ამერიკელი ფილოსოფოსისა და ფსიქოლოგის, ჯორჯ ჰერბერტ მიდის (Mead J.H) სოციობიჰევიორისტულმა მოძღვრებამ.

კლასიკური ბიჰევიორიზმი, რომლის ფუძემდებელია ჯ.უოტსონი თვლის რომ, ფსიქოლოგიის შესწავლის საგანი უნდა იყოს ადამიანის ქცევა და არა მისი შინაგანი სამყარო, რადგანაც მხოლოდ ქცევის უშუალო დაკვირვებაა შესაძლებელი და გააჩნია ისეთი პარამეტრები, რომელთა გაზომვა და რომელზე ზემოქმედებაც ხერხდება.

ქცევა ეს არის ორგანიზმის რეაქცია გარე ზემოქმედებაზე-სტიმულზე. ამიტომ ამ თეორიას „სტიმულ-რეაქციის თეორიასაც უწოდებენ“ (S-R).

ბიჰევიორიზმისათვის ცენტრალურ მომენტს წარმოადგენს დასწავლის პრობლემა, რომელიც მოიცავს ქცევის ფორმათა ფართო სპექტრს: ცოდნა, უნარ-ჩვევები, მორალური პრინციპები, მანერები და სხვა.

მიდი ემიჯნება კლასიკურ ბიჰევიორიზმს იმით, რომ ადამიანის ქცევას სოციალურად დეტერმინირებულ მოვლენად მიიჩნევს, რითაც მის სპეციფიკურ თავისთავადობას აღიარებს, მაგრამ სოლიდარულია ჯ.უიტსონთან (Watson J.B.) იმაში, რომ ფსიკიქური მხოლოდ ქცევის ობიექტურად დაკვირვებადი პარამეტრების გათვალისწინებით შეიძლება აიხსნას და შესაბამისად, მხოლოდ ისეთი ტერმინოლოგიით შეიძლება დახასიათდეს, რომელშიც ასეთი დაკვირვების მეტი არაფერი იგულისხმება.

რადიკალური ბიჰევიორიზმის საპირისპიროდ, მიდი ამტკიცებს, რომ ადამიანური ქცევა საფუძველშივე სოციალური ხასიათისაა, საკუთარ ამოცანასაც იმაში ხედავს, რომ უჩვენოს თუ როგორ განსაზღვრავს სოციალური გავლენა ინდივიდუალური ადამიანს „მე“-ს. მისი აზრით „მე“-ს სტრუქტურა ყალიბდება სოციალურ ურთიერთქმედებებში. „მე“ როგორც ინდივიდის ქცევათა მაკონტროლებელი ინსტანცია, ფაქტიურად მიიღება გარედან,

სოციალური კონტროლის ინტერიორიზაციის გზით. უპირველეს ყოვლისა ეს ხორციელდება ბავშვის თამაშის პროცესში, როდესაც როლის შესრულებაში ჩართული ინდივიდი თავის თავს როგორღაც გარედან უყურებს და იწყებს საკუთარი ქცევების შეფასებას იმ ნორმათა მიხედვით, რომლებიც მის სოციალურ ჯგუფში არის დამკვიდრებული. პიროვნების შინაგანი სამყარო, მისი „მე" იბადება და ყალიბდება ჯგუფურ საქმიანობებში. ინდივიდუალური ცნობიერება სოციალური ბუნებისაა.

ჯ. მიდის „სოციალურ ბიჰევიორიზმს" სხვაგვარად „როლების თეორიასაც" უწოდებენ, რადგან ამ თეორიის თანახმად, სოციალური როლები, რასაც ინდივიდი ცხოვრების მანძილზე ასრულებს, არის მისი ფსიქიკის მთავარი დეტერმინანტი. ფსიქიკის ასეთი სოციოგენური განსაზღვრულობა მხოლოდ ადამიანის სპეციფიკური თავისებურებაა, რითაც იგი ძირეულად განსხვავდება სხვა ცოცხალ არსებათაგან, რომელთა ქცევაც მხოლოდ ბიოლოგიური ფაქტორებითაა განპირობებული.

ჯ. მიდის თეორიამ სათავე დაუდო ახალ მიმართულებას ფსიქოლოგიურ კვლევებში, რაც საბოლოოდ სოციალური ფსიქოლოგიის, როგორც განსაკუთრებული ფსიქოლოგიური დარგის, ჩამოყალიბებით დასრულდა. ამ თეორიის ფილოსოფიური პოსტულატები საფუძვლად დაედო ემპირიულ კვლევებს, რომლებშიც პიროვნების ქცევაზე სოციალური როლის გავლენის საკითხები შეისწავლება. ეს თეორიაც იზიარებს ბიჰევიორისტული თეორიების საერთო ნაკლს, რაც ადამიანური ქცევის დაპროგრამირებული ხასიათის მოვლენად მიჩნევაში მდგომარეობს. თუ „მე"-ს თვითკონტროლი სოციალური კონტროლის ინტერიორიზირებული ფორმაა და მეტი არაფერი, მაშინ პიროვნების ქცევაც სოციალური გავლენისაგან მექანიკურად დეტერმინირებული ყოფილა და არა მისი თავისუფალი ნების გამოვლენა. „მე"-სა და მისი ქცევის ასეთი ინტერპრეტაცია გაუგებარს ხდის, თუ რატომ ეკისრება ადამიანს პასუხისმგებლობა მისი ქცევებისათვის.

ცნობილი რუსი ფიზიოლოგის ი.პავლოვის შრომებმა საფუძველი დაუდო კლასიკური განპირობების თეორიას. ცხოველებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგად მან დაასკვნა, რომ გარე პირობების ზეგავლენით ადამიანის დიდი ტვინის ქერქში იქმნება ახალი დროებითი კავშირები როგორც უპირობო, ისე უკვე შეძენილ პირობით

რეფლექსებთან. ამაში ხედავს ი.პავლოვი ცოდნისა და საზოგადოდ გამოცდილების შეძენის ფიზიოლოგიურ საფუძვლებს. განპირობების ამ ტიპს ეწოდა „პირობით-რეფლექსური დასწავლა". უფრო მოგვიანებით სკინერმა განავითარა ოპერანტული განპირობების თეორია, რომელიც ამტკიცებს რომ ქცევა კონტროლდება და განმტკიცდება მისი შედეგებით, ანუ ქცევას თან სდევს შედეგი, რომელიც თავის მხრივ ცვლის ორგანიზმის მომავალ ქცევას.

ზოგადად, განმტკიცებას ისეთი ამოცანების გადაჭრა ევალება, როგორებიცაა: ახალი ქცევის ფორმირება უკვე არსებული სასურველი ქცევის განმტკიცება, უარყოფითი ქცევის შესუსტება, სასურველი ქცევის ბუნებრივ პირობებში გამოვლენის ხელშეწყობა და სხვ.

სკინერი გამოყოფს ორი სახის განმტკიცებას: ნეგატიურს და პოზიტიურს.

განმტკიცება	პოზიტიური	ნეგატიური
	დადებითი სტიმულების წარდგენა (დაჯილდოება)	მტკივნეული (ავერსიული) სტიმულების აშორება (შემსუბუქება)
დასჯა	ავერსიული სტიმულების წარდგენა (დასჯა)	დადებითი სტიმულების აშორება (ჯარიმა)

ოპერანტული პრინციპები ძალიან მნიშვნელოვანია სწავლებისათვის. საკლასო ოთახი ერთგვარად მოგვაგონებს სკინერის ექსპერიმენტის სიტუაციებს: მრავალი პრობლემა, უამრავი სახის ქცევა, სხვადასხვაგვარი მასწავლებლები, მათ მიერ გამოყენებული სწავლებისა და აღზრდის მეთოდები. ყველა მათგანის დანიშნულება ერთ რამეში მდგომარეობს-მოსწავლემ ისწავლოს.

სკინერის თეორია პროგრამირებულ სწავლებას დაედო საფუძვლად, სადაც თითოეული ნაბიჯი ზუსტად არის გათვლილი და ოპერანტულ განმტკიცებას ეფუძნება. ამ თეორიის კიდევ ერთი დამსახურებაა, რომ პოზიტიური კონტროლის მკაცრი რეკომენდაციები დაინერგა ავერსიულის სანაცვლოდ. ცნობილ სტატიაში „რატომ განიცდიან მასწავლებლები მარცხს" სკინერი წერს, რომ მასწავლებელთა წარუმატებლობის მთავარი მიზეზი ავერსიული კონტროლია-მათ სჯიდნენ თავიანთი მასწავლებლები და ისინიც სჯიან მოსწავლეებს.

აღნიშნული მეთოდი დიდი წარმატებით გამოიყენება ინკლუზიური განათლების პროცესში (გონებრივი ჩამორჩენა, აუტიზმი და სხვ.).

ბიჰევიორისტული სწავლების თეორიაში ყურადღება უნდა გავამახვილოთ ორ მნიშვნელოვან საკითხზე:

1. მასწავლებელი ზედმეტად აკონტროლებს პროცესს, სწავლის სპეციფიკიდან გამომდინარე განსაზღვრავს სასწავლო მასალას, გაკვეთილის ტიპს, წარმართავს სწავლების პროცესს, ამოწმებს და ასწორებს მოსწავლეთა საპასუხო რეაქციებს. ანუ მასწავლებელი არის გადამცემიც, მაკონტროლებელიც და შემფასებელიც. ასეთი სწავლება მასწავლებელს უადვილებს ახსნასა და გაკვეთილის წარმართვას. თავისთავად ეს პროცესი არის ლოგიკური, გასაგები, სწორხაზოვანი და პროგრესულიც, რადგან ხდება საჭირო უნარ-ჩვევების გადაცემა მოსწავლეებისათვის. სწავლების ეს ფორმა განსაკუთრებით ნაყოფიერია ისეთი მოსწავლეებისათვის, რომლებიც ნაკლებად გამოირჩევიან შემოქმედებითი აზროვნების უნარით და უფრო მეტად მიწოდებული მასალის დამახსოვრებისკენ აქვთ მიდრეკილება.

2. მნიშვნელოვანია, თუ როგორ ხდება მოსწავლეების მიერ მიწოდებული მასალის ათვისება. აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ რაც არ უნდა ამომწურავად ვასწავლოთ მოსწავლეს საგანი, მან თუ ის ვერ დააკავშირა ყოველდღიურ ყოფასთან, საგნის შესწავლის ხარისხი მცირდება. ასეთ დროს ქვეითდება მოსწავლის მოტივაცია და აკადემიური მოსწრებაც, რადგან მასალას, რომელსაც მას ვთავაზობთ, არ გააჩნია მისთვის მნიშვნელობა. ასეთ პირობებში სწავლას გააჩნია ზედაპირული და ფრაგმენტული ხასიათი. პრობლემა მეტად მწვავე ხასიათს იღებს, რადგანაც მასწავლებლისათვის ძნელია მოარგოს გაკვეთილი ცალკეულ მოსწავლეთა სასწავლო მოთხოვნილებებს და საჭიროებებს.

დიდია ბიჰევიორიზმის გავლენა სწავლების ტრადიციულ მეთოდებზე, რომლებიც ორიენტირებულია მასწავლებელზე. ბიჰევიორიზმი არის მოდელი, რომელსაც გააჩნია თავისი ღირებულება, თუ იგი მიზანმიმართულად და სწორად იქნება გამოყენებული. ის დაკავშირებულია მკაცრ დისციპლინასა და ინფორმაციის გადაცემასთან. მას გააჩნია თავისი სუსტი მხარეებიც, მაგალითად, მოსწავლეები ვერ ეჩვევიან დამოუკიდებელ სწავლას. სასწავლო მეთოდები, რომლებიც ბიჰევიორისტულ თეორიებს ეყრდნობა, უნდა

გამოიყენებოდეს გარკვეული მიზნების მისაღწევად, კერძოდ ცალკეულ საგნებში ცოდნის დაგროვებისათვის.

ადამიანური ქცევის თვისობრივ გასაკუთრებულობას აღნიშნავს კოგნიტური ფსიქოლოგიაც, რომელიც მთავარ აქცენტს ქცევის შემეცნებით მხარეზე აკეთებს. კოგნიტივისტებს მიაჩნიათ, რომ ქცევის ბიჰევიორისტულ მოდელში ადამიანი წარმოდგენილია ბიოლოგიური მანქანის სახით, რომელიც მექანიკურად რეაგირებს გარე სამყაროში შექმნილ ვითარებაზე. მხედველობის გარეშეა დატოვებული ის გარემოება, რომ საერთოდ ცოცხალ არსებათა შესაძლებლობები არ ამოიწურება სხვადასხვა სტიმულებზე მექანიკური რეაგირების ფორმების დასწავლის უნარით.

კოგნიტური სფეროს მიზნების შინაარსის აღწერას ეძღვნება ბლუმის ტაქსონომია. კოგნიტური მიზნების იერარქიაში გამოიყოფა ექვსი კლასი: 1. ცოდნა-ფაქტობრივი ინფორმაცია; 2. გააზრება-აზრის გაგება; 3. გამოყენება-მიღებული ინფორმაციის პრაქტიკაში გამოყენება; 4. ანალიზი-ინფორმაციის კომპონენტებად დაყოფა მოვლენის არსის გაგების გასაადვილებლად; 5. სინთეზი-მოვლენის მთლიანობაში განხილვა; 6. შეფასება-ღირებულებითი მსჯელობები, შედარებითი შეფასებები.

გადაწყვეტილების მიღება, პრობლემების გადაჭრა, ანალიზი, სინთეზი, შეფასება, დამახსოვრება კოგნიტურ ქმედებებს წარმოადგენენ. კოგნიტური თეორიებიდან მასწავლებლებისათვის განსაკუთრებით საინტერესოა ჯერომ ბრუნერისა და დევიდ ოზიბელის თეორიები. კოგნიტური თეორიას საფუძვლად უდევს სამი ძირითადი პრინციპი:

1. ახალი ცოდნა ეფუძნება ძველ ცოდნას. ბიჰევიორიზმისაგან განსხვავებით (რომელიც ჩვეულებრივ ყველა მოსწავლეს განიხილავს როგორც თანასწორს) კოგნიტივიზმი აღნიშნავს, რომ კლასებში მოსწავლეები მოდიან სხვადასხვა მოტივებით, ცოდნის სხვადასხვა დონით, სხვადასხვა მახასიათებლებით (სქესი, ნაციონალობა, ინტელექტი, პიროვნული თვისებები და სხვ.) რომელთა გათვალისწინება სწავლების პროცესში აუცილებელია.

2. სწავლა გულისხმობს ინფორმაციის გადამუშავებას-მოსწავლეები უბრალოდ კი არ აღიქვამენ ინფორმაციას, არამედ გადაამუშავებენ მას. ამდენად, ეს შეხედულება ხაზს უსვამს სწავლების აქტიურ ხასიათს.

3. ცოდნას განსაზღვრავს ურთიერთდამოკიდებულებები. ამ კონტექსტში განასხვავებენ დეკლარატიულ ცოდნას, რომელიც ჩვენს მიერ ათვისებული ცოდნისა და ინფორმაციის მარაგს წარმოადგენს და პროცედურულ ცოდნას, რომელიც რაიმეს გაკეთების, რაიმეს შესრულების ცოდნას გულისხმობს.

რეალობის საკუთარ ვერსიას ჩვენ თვითონვე ვქმნით, ჩვენვე აღმოვაჩენთ ჩვენსავე აზრებს-ამბობს ჯ.ბრუნერი [46] და იქვე მიუთითებს, რომ სკოლის დანიშნულებას სწავლების ისეთი პირობების შექმნა წარმოადგენს, რომელიც ხელს შეუწყობს აღმოჩენას.

სწავლება აღმოჩენის გზით შეიძლება განისაზღვროს როგორც ისეთი სწავლება, როდესაც მოსწავლეებს მასალა დაუსრულებელი ფორმით მიეწოდებათ, რაც მათში აღძრავს სურვილს, თვითონ აღმოაჩინონ ურთიერთკავშირები ინფორმაციის ელემენტებს შორის და მოახდინონ ცოდნის ორგანიზება. მოცემული მიდგომა არ მოითხოვს მასწავლებლის აქტიურ მონაწილეობას სწავლების პროცესში, თუმცა იგი უნდა ხელმძღვანელობდეს და მითითებებს აძლევდეს მოსწავლეებს. ჯ.ბრუნერის მიხედვით ეს მეთოდი აადვილებს ინფორმაციის გადატანას მეხსიერებაში, ზრდის ამოცანის გადაჭრის უნარს, ამაღლებს მოტივაციას.

ჯ.ბრუნერის მეთოდით მუშაობა სისტემურ ფორმას ღებულობს, როცა შემდეგ ლოგიკურ ნაბიჯებს შეიცავს:

1. საკითხის (ამოცანის) ფორმულირება და გააზრება;

2. მაგალითების შერჩევა, შესაბამისი დაკვირვებების ჩატარება;

3. ჰიპოთეზის წამოყენება (ინტელექტუალური მიხვედრა, რომელიც დაკვირვებებს ემყარება);

4.ჰიპოთეზის დამტკიცება ან უარყოფა (ექსპერიმენტის, ტესტების, სხვ. დაკვირვებების შემუშავება და ჩატარება);

5. ახალი ინფორმაციის გამოყენება-განზოგადება.

ჯ.ბრუნერი ასევე მიუთითებს პირობებს, რომლებიც ხელს უწყობენ აღნიშნული მეთოდით სწავლებას. ესენია: განწყობა, მოთხოვნილება, კონკრეტიკის ფლობა და მომზადების მრავალფეროვნება.

განწყობა-ამზადებს მოსწავლეებს იმისათვის, რომ რეაგირება მოახდინონ გარკვეული მიმართულებით. მაგალითად, აღმოჩენაზე ორიენტირებული ადამიანისათვის ამოცანის მიმართ მიდგომა ჩვეულებრივ გულისხმობს ინფორმაციის ელემენტებს შორის მიმართებების დადგენას, ანდა უბრალოდ შეიძლებოდა გვეთქვა, რომ ასეთი ადამიანი განწყობილია აღმოჩენისათვის. განწყობის შექმნაზე გავლენას ახდენს მითითება.

მოთხოვნილება-წარმოადგენს მოსწავლის აქტივიზაციას, მზაობას სწავლებისადმი, ჯ.ბრუნერი თვლის, რომ აგზნების ზომიერი დონე გაცილებით უწყობს ხელს აღმოჩენის გზით სწავლებას, ვიდრე ზედმეტად მაღალი ან ზედმეტად დაბალი დონე, ანუ მოსწავლეები უნდა იმყოფებოდნენ არა დუნე, არამედ მზაობის მდგომარეობაში. მათთვის ასევე აუცილებელია შფოთვა გარკვეული დოზით და ინტერესი, მაგრამ არა შიში და პანიკა.

კონკრეტიკის ფლობა გულისხმობს თუ რამდენადაა მოსწავლე დაუფლებული საგანთან დაკავშირებულ კონკრეტულ ინფორმაციას. აღმოჩენა შემთხვევით არ მოდის, იგი მნიშვნელოვნადა არის დამოკიდებული მოსწავლის ინფორმაციულ მზაობაზე.

მრავალდონიანი სწავლება ერთ-ერთი ხელშემწყობი პირობაა აღმოჩენის გზით სწავლებისათვის. მოსწავლეები, რომლებიც ინფორმაციას ღებულობენ მომზადების სხვადასხვა დონეზე, გაცილებით უკეთესად ახდენენ ცოდნის ორგანიზებას, აღნიშნავს ჯ.ბრუნერი. ამიტომ იგი იძლევა რეკომენდაციას, რომ ერთი და იგივე საგნები ისწვლებოდეს სწავლების სხვადასხვა დონეზე მოსწავლეთა უნარებისა და ბაზისური ცოდნის გათვალისწინებით.

ჯ.ბრუნერი ჩამოთვლის მთელ რიგ რეკომენდაციებსა და შენიშვნებს, რომლებიც განსაკუთრებით საჭიროა კონსტრუქტივისტული სწავლებისათვის:

1. საგნის სასწავლო გეგმის შედგენისას გათვალისწინებული უნდა იყოს საგნის ძირითადი პრინციპები.

2. ნებისმიერი მასალა შეიძლება გადასცე ნებისმიერი ასაკის ბავშვს ამა თუ იმ ფორმით.

ბევრი მკვლევარი არ ეთანხმება ამ მოსაზრებას, რომ აბსტრაქტული ცნებები რთული ასთვისებელია მცირე ასაკის ბავშვებისათვის, მაგალითად, ოთხი წლის ბავშვი ვერაფრით ვერ გაიგებს პროპორციულობის პრინციპს. ჯ.ბრუნერი ამ კრიტიკის საპასუხოდ ამბობს, რომ

განათლებამ უნდა შეიმუშაოს საგანთა გადაცემის ისეთი ფორმა, რომელიც გამოსადეგი იქნება მოსწავლეთა მოცემული ასაკისათვის, მასალა ისეთი თანმიმდევრულობით უნდა დავაწყოთ, რომ იგი მოსწავლემ ჯერ შეხების დონეზე შეიგრძნოს, შემდეგ კონკრეტული წარმოდგენა შეიმუშაოს, ხოლო ბოლოს სიმბოლურად წარმოიდგინოს.

2. ჯ.ბრუნერი გვთავაზობს ასევე სპირალურ სასწავლო გეგმას, რომელიც გულისხმობს მასალის გაფართოებას სწავლების სხვადასხვა საფეხურზე. სპირალური სასწავლო გეგმა იდეალურია აღმოჩენით სწავლებისათვის, რადგანაც აქ მასალა სისტემატიზირებულია და მიემართება მარტივიდან რთულისაკენ. იგი გარკვეულ წილად გამეორებას წარმოადგენს, რაც დადებითად მოქმედებს ცოდნის კონსტრუირებასა და კოდირების სისტემის ფორმირებაზე.

3. „მოსწავლეებს უნდა ვასწავლოთ საკუთარი ვარაუდების ალბათობის განსაზღვრა“- მიუთითებს ჯ.ბრუნერი. სხვა შემთხვევაში ისინი თავს აარიდებენ ვარაუდების გამოთქმას შეცდომებისადან თავის დაღწევის მიზნით. ეს კი აღმოჩენის პროცესის დათრგუნვას გამოიწვევს.

4. ჯ.ბრუნერი მოუწოდებს მასწავლებლებს, რომ სწავლებისას რაც შეიძლება მეტი ტექნიკური საშუალება გამოიყენონ (აუდიოვიზუალური, კონკრეტული და სომბოლური მოდელები, ინფორმაციის მულტიმედიური საშუალებები და სტიმულაციები) ეს დაეხმარება მოსწავლეებს ცნებების ფორმირებასა და მასალის ათვისებაში.

ყველა პედაგოგი როდი ეთანხმება აზრს, რომ სწავლებისადმი საუკეთესო მიდგომას აღმოჩენის მეთოდი წარმოადგენს. საწინააღმდეგო მოსაზრებას იზიარებს დ.ოზიბელი. უმრავლეს სასკოლო სიტუაციებში, მიუთითებს ის, აღმოჩენა და დროის ტყუილად ხარჯვას ნიშნავს. ამ გაგებით, დ.ოზიბელისათვის კლასი წარმოადგენს ადგილს, სადაც სწავლება დირექტიული მეთოდებით მიმდინარეობს. ზოგიერთი მეცნიერის აზრით დ.ოზიბელის თეორია გვთავაზობს კომპრომისს სწავლების ორ მიდგმას, კონსტრუქტივიზმსა და დირექტიულ სწავლებას შორის. დ.ოზიბელის თეორიაში ძირითად დებულებას „გააზრებული სწავლება“ წარმოადგენს. სტიმულმა ან ცნებამ აზრი რომ შეიძინოს, მოსწავლის კოგნიტურ სტრუქტურაში უნდა არსებობდეს რაღაც გარკვეული ინფორმაციის

მარაგი, რასთანაც შესაძლებელი გახდება მისი მიკუთვნება. მაგალითად, სიტყვა „ავტომობილი“ ადამიანისათვის იძენს აზრს მაშინ, როცა იგი შეიძლება მიაკუთვნოს თავის ცნობიერებაში უკვე არსებული ავტომობილების კლასს.

გააზრებული სწავლება მოსწავლისაგან მოითხოვს მონათესავე ძირითადი ცნებების ათვისებას, რომლებთანაც მოხდება ახალი მასალის მიერთება. დ.ოზიბელი გამოყოფს მიერთების ორ სახეს:

1. წარმოებული მიერთება, რომელიც ხორციელდება, მაშინ როდესაც ახალი მასალა ჰგავს უკვე ნაცნობს.

2.კორელაციური მიერთება, რომელასც ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც ახალი ინფორმაცია ითხოვს რაიმე ცვლილებას არსებულ კოგნიტურ სტრუქტურაში.

დ.ოზიბელის თეორიაში ახალი ცოდნის კონსტრუირება მთლიანად დამოკიდებულია ადრინდელ გააზრებულ მასალაზე. ამ კუთხით დ.ოზიბელი კონსტრუქტივისტული შეხედულებების მკვლევართა თანამოაზრედ გვევლინება. დ.ოზიბელი ექსპოზიციურ სწავლებას ემხრობა, რომელიც გულისხმობს ინფორმაციის დასრულებული ფორმით გადაცემას. ასეთი სწავლების დროს მოსწავლეებს მოეთხოვებათ არა ურთიერთკავშირების გამოვლენა, არამედ მათი დასწავლა. ოზიბელი გვთავაზობს ხერხებს, რომლებიც დაეხმარება მასწავლებლებს სწავლების დაგეგმვაში:

- წინასწარი მაორგანიზებლები-წარმოადგენენ იდეებს ან ცნებებს, რომლებიც წინ უსწრებს ასახსნელ მასალას და განაპირობებენ ახალი ცოდნის ინტეგრირებას ძველთან, ანუ მოთავსებას კოგნიტურ სტრუქტურაში. დ.ოზიბელი განიხილავს წინასწარი მაორგანიზებლების ორ ტიპს:

  1. ექსპოზოციური მაორგანიზებლები, რომლებიც ძირითადად ახალი მასალის ასახსნელად გამოიყენება.
  2. შედარებითი, რომელთა დანიშნულებაა განაწყონ მოსწავლეები ძველ და ახალ მასალას შორის მსგავსება-განსხვავების მოსაძებნად.

- დისოციაცია-დ.ოზიბელი აღნიშნავს,რომ ინფორმაცია, რომელიც ძალიან ჰგავს უკვე ნაცნობს, მალე გავიწყდება, მაშინ, როცა განსხვავებული ინფორმაცია დიდხანს ინახება

მეხსიერებაში. აქედან გამომდინარე, სწავლების ისეთი ხერხები, რომლებიც ხაზს უსვამენ ძველსა და ახალ მასალას შორის განსხხვავებას, ხანგრძლივ დამახსოვრებას უწყობს ხელს. ამასთან ერთად აუცილებელია ახალი მასალა ძველს შევადაროთ, რათა გავაადვილოთ სწავლება. ამგვარად, ინფორმაციის შედარება მსგავსება-განსხვავების გზით ხელს უწყობს არა მხოლოდ მის იოლად დასწავლას, არამედ მის დამახსოვრებასაც.

- სწავლებისადმი აზრის მინიჭება-დ.ოზიბელი ჯ.ბრუნერის მსგავსად დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს გააზრებულ სწავლებას და ამბობს, რომ აზრი გამომდინარეობს უშუალოდ იმ ურთიერთკავშირებიდან, რომელიც ცნებებს, იდეებს, ობიექტებსა და შემთხვევებს შორის არსებობს. აზრი არასოდეს უშუალოდ არ ცნობიერდება, არამედ კონსტრუირდება მოსწავლეების მიერ.

ამგვარად, სწავლება ორივე–აღმოჩენისა და რეცეპციის (აღქმის) გზით, ატარებს კოგნიტურ ხასიათს და თითოეულის დანიშნულებაა მაქსიმალურად შეუწყოს ხელი ინფორმაციის სრულად ათვისებას, დამახსოვრებას, გაამყაროს მოტივაცია და სწავლება აქტიურ პროცესად აქციოს.

კოგნიტური მოსწავლეობა ერთ-ერთი კონსტრუქტივისტული პედაგოგიური მოდელია, რომლის ძირითადი მეთოდებია:

1. მიბაძვა-იგივე მოდელირება, რომელიც გულისხმობს მოსწავლეებისათვის სამუშაოს შესრულების ჩვენებას;
2. ვარჯიში-გულისხმობს მოსწავლეთა ქცევის სპეციფიკური ასპექტების ფორმირებას როგორც კოგნიტურ ასევე მოტორულ დონეზე;
3. მხარდაჭერა-მასწავლებელი ეხმარება მოსწავლეს ისეთი დავალებების შესრულებაში, რომელიც ძნელად ეჩვენება მას. გამოყოფენ მხარდაჭერის ექვს პროცედურას: მობილიზაცია, თავისუფლების ხარისხის შემცირება, კურსის შენარჩუნება, კრიტიკული ასპექტების გამოყოფა, ფრუსტრაციის კონტროლი და დემონსტრაცია;
4. დაშორება-გარკვეული აზრით წარმოადგენს მხარდაჭერის დანამატს. მხარდაჭერა თუ დახმარებასა და ხელმძღვანელობას გულისხმობს, დაშორებისას მოსწავლემ დავალება დამოუკიდებლად უნდა შეასრულოს, კომპეტენტური პირის ჩარევის გარეშე;

5. არტიკულაცია-წარმოადგენს იდეის ვერბალური ფორმით ჩამოყალიბებას და სიტყვებით გადმოცემას. არტიკულაციის ერთ-ერთ ხერხს წარმოადგენს კითხვა-პასუხი. მისი მიზანია მოსწავლეებმა გაიაზრონ საკუთარი კოგნიტური სტრატეგიები;

6. რეფლექსია-მჭიდროდ უკავშირდება არტიკულაციას. ისიც ასევე მოითხოვს, რომ მოსწავლე ჯერ დაფიქრდეს და შემდეგ ილაპარაკოს ამოცანის შესრულების სტრატეგიებზე. ამ დროს ხდება აბსტრაქტული აზროვნების პროვოცირება;

7. გამოკვლევა-გულისხმობს შესწავლილი მასალის განზოგადებას.

კოგნიტური მოსწავლეობის მოდელის შემთხვევაში მასალის გადაცემა ხდება სამი პრინციპის მიხედვით:

1. ლოკალური გლობალურის შემდეგ. მისი მიზანია მოსწავლეებს ჯერ ზოგადად გადაეცეს შესასწავლი მასალა და შემდეგ გადავიდეთ დეტალებზე.

2. მასალის გადაცემა უნდა ხდებოდეს მარტივიდან რთულისაკენ.

3. მოსწავლეებს უნდა გადაეცეს ინფორმაცია ათვისებული ცოდნის სხვადასხვა პირობებში გამოყენების შესახებ. ხშირად წიგნიდან ლექციიდან ან ლაბორატორიიდან მიღებული ცოდნა არ გამოიყენება ამ სიტუაციების გარეთ, რადგან მოსწავლეებს არავინ უხსნის, თუ სად უნდა გამოიყენონ იგი. ასეთ შემთხვევაში ცოდნა ინერტულია, კოგნიტური მოდელი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს ათვისებული ცოდნის განზოგადებას და გამოყენებას.

კოგნიტურ პედაგოგიურ მოდელში კარგი მასწავლებელი არის ის, რომელიც: იწყებს გაკვეთილს წინა მასალის მოკლე მიმოხილვით, იწყებს გაკვეთილს მიზნის მითითებით, მასალას აგებს პატარა ნაწილების სახით, რომელთა შორის მიმართებას ამყარებენ მოსწავლეები, მასალას ხსნის ნათლად და დაწვრილებით, ყველა მოსწავლეს ერთნაირად ააქტიურებს, იძლევა ბევრ შეკითხვას და ცდილობს პასუხი მიიღოს ყველა მოსწავლისაგან, მოსწავლეთა შეცდომებს ასწორებს გამოვლენითანავე, უზრუნველყოფს ერთობლივ მუშაობას და ყურადღებას აქცევს მოსწავლეთა მოსწრებას.

ჰუმანისტური ფსიქოლოგიის ძირითად შესასწავლ ობიექტს წარმოადგენს ადამიანი, როგორც უნიკალური ერთიანი სისტემა. იგი ახლოს დგას ექსისტენციალურ ფილოსოფიასთან, რომლის მთავარი პრინციპია ადამიანის მისწრაფება იპოვოს თავისი

არსებობის ჭეშმარიტი აზრი. ჰუმანისტური ფსიქოლოგიის მთავარ თეორიტიკოსებს ამერიკელი მეცნიერები ა.მასლოუ (Maslow A.) და კ.როჯერსი (Rojers C.R) წარმოადგენენ. მათი აზრით ის, რაც გარემოებათა ზემოქმედებით ყალიბდება ინდივიდუალურ ადამიანში, მისთვის მეტნაკლებად თავსმოხვეულია, მიუხედავად იმისა, თუ რამდენად ღრმად იქნება გათავისებული, ადამიანის ჭეშმარიტ ბუნებას გამოხატავს საკუთარ შესაძლებლობათა თავისუფალი გამოვლენისაკენ სწრაფვა.

ა.მასლოუს გავლენით დღევანდელ ფსიქოლოგიაში მტკიცედაა დამკვიდრებული ადამიანის მოღვაწეობის მამოძრავებელი ძალების-მოტივების პირამიდის სქემით გამოსახვა, რომლის ფუძეზე თავსდება მრავალრიცხოვანი ფიზიოლოგიური მოთხოვნილებები, ხოლო მწვერვალზე თვითრეალიზაციის მოთხოვნილება, რომელიც ადამიანს უბიძგებს მაქსიმალურად გამოავლინოს საკუთარი შესაძლებლობები მოღვაწეობის იმ სფეროში, რომელასც საკუთარი პრეტენზიების შესაბამისად შეირჩევს. ავტორის თანახმად, იმისათვის, რომ იერარქიულად მაღალი მოტივები გააქტიურდნენ, აუცილებელია უფრო დაბალი რანგის მოთხოვნილებები მინიმალურად მაინც იქნენ დაკმაყოფილებული.

საყურადღებოა თვითრეალიზაციის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ასპექტი-მისწრაფება კომპეტენტურობისაკენ, რომელიც გამოიხატება ბავშვის მცდელობაში იყოს საკმარისად კომპეტენტური წარმატების მისაღწევად.

მოტივაციისადმი ჰუმანისტურ მიდგომას აქვს თავისი ღირებულება სასკოლო პრაქტიკისათვის. იგი ხაზს უსვამს მოსწავლის ქცევაზე მოქმედ შინაგან ფაქტორებს. სკოლა, რომელსაც აქვს ჰუმანისტური ორიენტაცია, მიმართულია არა მასწავლებელზე და საგნებზე, არამედ მოსწავლეებზე. ამ მიდგომისათვის მთავარია ბავშვის პიროვნული განვითარება, პოზიტიური თვითშეფასების ზრდა. კარლ როჯერსი თავის წიგნში „სწავლის თავისუფლება“ აღნიშნავს, რომ განათლებულობა ეფუძნება არა ცოდნაზე, არამედ მის მოპოვების უნარზე. კი არ ასწავლო, არამედ ხელი შეუწყო სწავლას-ეს არის მასწავლებლის მთავარი ფუნქცია.

ადამიანური ცხოვრების არსს, კ.როჯერსიც „მე“-ს შესაძლებლობათა თავისუფალი გამოვლენისაკენ სწრაფვაში ხედავს. მისი აზრით „მე“ კონცეფცია-ე.ი. საკუთარ თავზე სუბიექტის შეხედულებათა სისტემა, რაც გარემოსთან და პირველ რიგში სოციალურ გარემოსთან ურთიერთქმედების პროცესში ყალიბდება, წარმოადგენს პიროვნების ქცევის თვითრეგულაციის ძირითად ინსტანციას. პიროვნება მიისწრაფის „მე“–ს სრულყოფილი რეალიზაციისაკენ, რაც იდეალური „მე“-ს სახით აქვს წარმოდგენილი, მაგრამ გარემოებები, განსაკუთრებით კი საზოგადოების მაკონტროლებელი გავლენა-აღზრდა და სოციალური ზემოქმედების სხვა ფორმები, ახშობს პიროვნებაში თავისუფლებას და აფერხებს ამ მისწრაფების სრულყოფილ დაკმაყოფილებას. „მე“-კონცეფციასა და იდეალურ „მე“-ს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავება, კ.როჯერსის თანახმად რიგ შემთხვევაში, იწვევს სულიერი აქტივობის პერვერსიულ ფორმებს, დაწყებული აღქმის მარტივი შეცდომებიდან, დამთავრებული ფსიქიკური აშლილობის რთული კომპლექსებით.

საყურადღებოა, რომ კ.როჯერსის მეთოდიკა ნაყოფიერი აღმოჩნდა ძნელადაღსაზრდელ მოზარდებთან პედაგოგიური მუშაობის მიმართულებით. არა აკრძალვა და დაწესებული ნორმებისადმი იძულებითი მორჩილება, არამედ მოზარდის პიროვნების აღიარება, მისი დაფარული შესაძლებლობების მიგნება, ამ მიმართულებით ინტერესის გაღვიძება, მისი პიროვნებით აღმზრდელის გულწრფელი დაინტერესება, მის ძალებში რწმენა, მოლოდინი, რომ იგი ნამდვილად მიაღწევს წარმატებებს, მოახდენს საკუთარ შესაძლებლობათა რეალიაციას, ერთი სიტყვით აღსაზრდელში რეალური გამცდილებისადმი ღია „მე“ კონცეფციის ჩამოყალიბება, არის პედაგოგიური პროცესის ნორმალური მიმდინარეობიდან ამოვარდნილ მოსწავლეთა „გამოსწორების“ ყველაზე ეფექტური გზა.

კ.როჯერსი თავისუფალი სწავლების სისტემის დამკვიდრების მოთხოვნით გამოდის. მას მიაჩნია, რომ სწავლებამ უნდა უზრუნველყოს მოსწავლის შინაგანი შესაძლებლობების თავისუფალი განვითარება. მოსწავლეს უნდა ჰქონდეს საშუალება მოახდინოს თავისუფალი არჩევანი, რათა თვითონ განსაზღვროს თუ რისი შესწავლა ესაჭიროება დასახული სამომავლო მიზნების განსახორციელებლად. ცოდნის მიღების პროცესში ის არის სუბიექტი და არა პედაგოგიური ზემოქმედების პასიური ობიექტი.

ყოველ ცოცხალ ორგანიზმს-ინდივიდუმს შეუძლია გაცილებით მეტი, ვიდრე გარეგან სტიმულებზე სტეროტიპული რეაქციების განხორციელებისათვის არის საჭირო, ხოლო ადამიანის გონების შესაძლებლობები, ამ თვალსაზრისით განუზომლად ფართოა. ადამიანის სპეციფიკას ახალ სიტუაციებზე ახლებური რეაგირების ფორმათა მიგნება წარმოადგენს. რეაქციები, ყველაზე მარტივ სტიმულებზეც კი, ჯერ გონებაში აღმოცენდება და მხოლოდ შემდეგ განხორციელდება და განმტკიცდება.

კოგნიტივისტებისათვის სწავლა სინამდვილის შესასწავლი სფეროს გაგება და მისი კანონების წვდომაა და არა მექანიკური დასწავლა. ამ თვალსაზრისით, კოგნიტივიზმის უშუალო წინამორბედი გეშტალტფსიქოლოგიაა, რომელიც გერმანიაში ამერიკული ბიჰევიორიზმის პარალელურად აღმოცენდა და რომლის ძირითად ბირთვსაც იმ დროს ბერლინში მოღვაწე ფსიქოლოგები მაქს ვერთჰაიმერი (Wertheimer M), კურტ კოფკა (Koffka K), ვოლფგან კელერი(Kohler.W) და კურტ ლევინი(Levin K.) წარმოადგენდნენ.

გეშტალისტებმა ბიჰევიორისტების მსგავსად გაილაშქრეს ტრადიციული ცნობიერების ფსიქოლოგიის წინააღმდეგ, მაგრამ სრულიად სხვა პოსტულატებზე დაყრდნობით: ბიჰევიორისტებს ცნობიერება, როგორც ობიექტური გაზომვისათვის მიუწვდომელი სფერო, არ აკმაყოფილებთ ამხსნელი პრინციპის ამპლუაში, გეშტალტისტებს კი ცნობიერების შინაარსების სტრუქტურალისტური ანალიზი მიაჩნიათ უმართებულოდ.

ისინი სამართლიანად მიუთითებენ, რომ ასეთ პირობებში მაღალი ფსიქიკური პროცესები ფაქტიურად ექსპერიმენტული შესწავლის მიღმა რჩება, რადგან მათ შეისწავლიან არა მათი არსის მიხედვით, არამედ მხოლოდ საშენი მასალის მიხედვით: არსებობს აგურები-შეგრძნებები და ცემენტი-ასოციაციები, მაგრამ შენობა-აზროვნების, მეხსიერების, წარმოსახვის, ნებისყოფის და მაღალი რიგის სულიერი აქტივობის სხვა ფორმები, რომლებიც მათგან აიგება, თვისობრივად ახალი მოვლენაა და შესწავლას საჭიროებს. ანუ ფსიქიკური განცდა შესწავლილი უნდა იქნას როგორც თვისობრივად ახალი მთლიანობა, როგორც დასრულებული ფორმა ანუ გეშტალტი და არა მისი შემადგენელი ელემენტების ანალიზის გზით.

გეშტალტობის პრინციპი კ.ლევინმა ქცევის ფსიქოლოგიურ დახასიათებაში გადაიტანა და სცადა დაემტკიცებინა, რომ ქცევა არის არა ცალკეულ სტიმულებზე ორგანიზმის რეაქციის სისტემა, არამედ ორგანიზებული მთლიანობა, რომელიც განისაზღვრება მოქმედების ველის მთლიანობითი ორგანიზაციით. ეს უკანასკნელი, თავის მხრივ, დამოკიდებულია იმ მოთხოვნილებაზე, რომელიც ქცევის შედეგად უნდა დაკმაყოფილდეს. მოთხოვნილების აქტივიზაცია იწვევს ორგანიზმის თავისებურ დაძაბულობას, რაც გარემოსთან მიმართებაში აყალიბებს მოქმედების ფორმას, რომელიც მხოლოდ იმ შემთხვევაში მოხსნის აღნიშნულ დაძაბულობას, თუ დასრულებული გეშტალტის სტრუქტურას მიიღებს. დაუსრულებელი მოქმედება დაძაბულობას არა თუ არ ხსნის, არამედ, პირიქით კიდევ უფრო აძლიერებს.

აზროვნებასთან მიმართებაში გეშტალტის ცნება პირველად ვიურცბურგის სკოლის წარმომადგენლებმა იხმარეს. ვიურცბურგელებმა ექსპერიმენტული თვითდაკვირვების მეთოდით გამოარკვიეს, რომ აზროვნების პროცესი თავისებური დახშული მთლიანობაა და მკაცრად მიმართულია მხოლოდ და მხოლოდ დასმულ ამოცანაზე. მაგრამ ამ სკოლას აღარ განუვითარებია და არ განუვრცია ეს მსჯელობა ადამიანის სულიერი ცხოვრების ყველა ასპექტზე.

ქცევის ბიჰევიორისტულ მოდელში ამოცანის გადაჭრა ანუ მოქმედების სწორი ვარიანტის მიგნება ხდება შემთხვევით, მრავალრიცხოვანი ცდების შედეგად. გეშტალისტები კი ამავე პროცესს განიხილავენ, როგორც სიტუაციის გეშტალტის ცვლილებას მისი სტრუქტურის ცვალებადობის გზით. გეშტალტის სტრუქტურის გადაწყობა უზრუნველყოფს იმ მიმართებათა წვდომას, რაც ამოცანის გადაჭრისთვის არის აუცილებელი, მაგალითად, მ.ვერთჰაიმერის თანახმად, დასკვნა არის ახალი გეშტალტის ჩამოყალიბება წინამძღვრების სტრუქტურული გამთლიანებით.

გეშტალტისტებისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობისაა წვდომის, როგორც აზროვნების არსებითი მომენტის გაგება ინსაიტის (ინტუიციის) აქტის სახით, რადგან განცდაში ვერ ვიპოვით იმის ცნობიერებას, თუ როგორ მივდივართ პრობლემის გადაჭრამდე. ინსაიტი გასაგებს ხდის პრობლემის მყისიერ გადაჭრას ყოველგვარი ძიებითი მუშაობის გარეშე.

გეშტალტისტები ყველაზე ადრე გამოვიდნენ სწავლების გაბატონებული სისტემის წინააღმდეგ. მ.ვერთჰაიმერის თანახმად, სწავლების ასოციაციონისტურ და ფორმალურ-ლოგიკურ კონცეფციებზე დაფუძნებული პრაქტიკა შემაფერხებლად მოქმედებს აზროვნების განვითარებაზე, რადგან არასწორად ესმის თვითონ ამ პროცესის ბუნება. ნამდვილი აზროვნება არაა არც ცალკეულ ელემენტთა შორის კავშირების განმტკიცება და არც ლოგიკური კავშირების ფორმალური გაგება. ნამდვილი აზროვნება პროდუქტიული ხასიათისაა, რაც გამოიხატება პრობლემის გადაწყვეტის პრინციპის, როგორც მთლიანობითი ფორმის მქონე სტრუქტურის წვდომაში, ეს კი მხოლოდ ინსაიტის (ინტუიციის) გზით მიიღწევა. ამაზე მეტყველებს მათ მიერ ექსპერიმენტალურად დადგენილი ფაქტი, რომ იმ ბავშვებთან, რომლებთაც სკოლაში გეომეტრიას ფორმალური მეთოდებით ასწავლიდნენ, გაცილებით ძნელი აღმოჩნდა ამ სფეროში ახალი ამოცანებისადმი შემოქმედებითი მიდგომის ჩამოყალიბება, ვიდრე იმ ბავშვებთან, მრომლებსაც სწავლება საერთოდ არ გაუვლიათ. [5].

როჯერსის თეორიაზე დაყრდნობით შეიძლება ითქვას, რომ ჰუმანისტური განათლება განსაკუთრებულ ყურადღებას აქცევს მოსწავლეთა გრძნობისა და აზროვნების განვითარებას, მოსწავლეთა შორის ურთიერთობებს, მოსწავლეთა პიროვნული ღირებულებების აღიარებას. იგი გვირჩევს შეიქმნას კლასები, რომლებიც უფრო მეტად: ორიენტირებულია მოსწავლეზე, დაფუძნებულია გამოცდილებაზე, რეფლექსურია, ითვალისწინებს განვითარებას, დემოკრატიულია და მასტიმულირებელია.

იგი აგრეთვე გვირჩევს სკოლაში ნაკლები იყოს: დირექტიული სწავლება, მოსწავლეთა მხრიდან პასიურობა, აზრს მოკლებული წერითი დავალებები, სახელმძღვანელოების მექანიკური კითხვა და დაზეპირება, აქცენტი გადატანილი იქნეს კონკურენციასა და ნიშნების მიღებაზე, დაეყრდნონ სტანდარტიზებულ ტექსტებს.

§4. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები მათემატიკის სასკოლო კურსში

მათემატიკის სწავლების დროს ტრადიციულად ვპასუხობთ კითხვებზე „რა ვასწავლოთ", „როგორ ვასწავლოთ" და „ვის ვასწავლოთ". ყურადღების მიღმა კი გვრჩება შეკითხვა „რატომ", ანუ გვინდა ვთქვათ რომ, მოსწავლეს მეტად უნდა დავანახოთ ამა თუ იმ მათემატიკური ფაქტის შესწავლის საჭიროება, სახელმძღვანელოები და საკლასო მუშაობა მეტად უნდა დავტვირთოთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ისეთი ამოცანებით, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას და ამავე დროს ამოცანების შინაარსი და მათი ამოხსნისას გამოყენებული მეთოდები და/ან ხერხები არ სცილდება საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამას. ამით ჩვენ ხელს ვუწყობთ მოსწავლეთა შინაგანი მოტივაციის ამაღლებას, მათი ცოდნის გაღრმავებას და კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას. მარტივად რომ ვთქვათ, მოსწავლეებს ვასწავლით ანალიზურ აზროვნებას.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნისას მნიშვნელოვანი ყურადღება ნახაზის შედგენას-ამოცანის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას ეთმობა. ამ მიზნით სათანადოდ არ ხდება სწავლების თანამედროვე საშუალებების ჩართვა სასწავლო პროცესში, რაც პირველ რიგში დაკავშირებულია კომპიუტერის გამოყენებასთან, რომელიც ეფექტურად შეიძლება გამოვიყენოთ სივრცული სხეულების კვეთების, გვერდითი და სრული ზედაპირის ფართობების, მოცულობების გამოთვლის დროს და სხვ.

დიდია გეომეტრიის და ზოგადად მათემატიკის როლი მოსწავლეების დამოუკიდებელი პიროვნებებად ჩამოყალიბებაში. უპირველეს ყოვლისა მათემატიკის სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების განვითარებას. აზროვნების მნიშვნელოვანი ელემენტი ლოგიკაა, ლოგიკისაკენ გზა კი ინტუიციაა. მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისას შეძენილი უნარ-ჩვევები ხელს უწყობს როგორც რაციონალური აზრის ჩამოყალიბებისა და გადმოცემის უნარის განვითარებას (როგორიცაა ლაკონურობა,

სიზუსტე, სიცხადე, არგუმენტირებული მსჯელობა) ასევე ინტუიციის-როგორც ამოცანის ამოხსნის გზების ძიების, საბოლოო შედეგის განსაზღვრის უნარის გამომუშავებას.

მათემატიკას დიდი წვლილი შეაქვს მოსწავლის ხასიათის, ზნეობრივი ნორმების ჩამოყალიბებაში. ამოცანის ამოხსნის ბოლომდე მისაყვანად მას ხშირად საკმაოდ შრომატევადი და გრძელი გზის გავლა, ამოხსნის რამოდენიმე ვარიანტი განხილვა უხდება, რაც ხელს უწყობს მოსწავლის არა მარტო ინტელექტუალურ განვითარებას, არამედ მტკიცე, შეუპოვარი ხასიათის ჩამოყალიბებას.

მათემატიკის სწავლება ეხმარება მოსწავლეებს სამყაროს ესთეტიკური აღქმის უნარის განვითარებაში, მათთვის საინტერესო თემებს წარმოადგენს სიმეტრიული გეომეტრიული ფიგურები, ორნამეტები და სხვ. სახელმძღვანელოებში ამ საკითხებს ნაკლები ყურადღება ეთმობა. საკამათო არ არის, რომ არსებული სასკოლო სახელმძღვანელოები უნდა აკმაყოფილებდნენ მათემატიკის სწავლების ძირითადი მიზნებს, ხელს უნდა უწყობდეს მოსწავლეთა ინტელექტუალურ განვითარებას, ფუნდამენტური ცოდნის გადაცემა-ათვისებას, უნდა ახდენდეს აზროვნების ფორმირებაში ხელშეწყობას, მოსწავლეებს უნდა უყალიბებდეს მათემატიკურ უნარ-ჩვევებს, რომელიც აუცილებელია პრაქტიკული საქმიანობისათვის, აქტიურად მონაწილეობდეს პიროვნების ჩამოყალიბებაში და სხვ. მაგრამ, აუცილებელია სახელმძღვანელოებში ადგილი გამოინახოს სხვა უნარების, მათ შორის ესთეტიკური აღქმის უნარის განვითარებიათვისაც.

ისტორიული გამოცდილება ადასტურებს, რომ მათემატიკის სწავლება ყველა საფეხურზე საჭიროა მიმდინარეობდეს შეგნებულად. საჭიროა მასწავლებელმა უპირატესობა მიანიჭოს მოსწავლეთა მსჯელობას და აზროვნებას, ვიდრე მასალის ზეპირად დასწავლას. მან უნდა შეძლოს მოსწავლეთა აზრების ამოცნობა-წაკითხვა, მეტად უნდა წაახალისოს და მხარი დაუჭიროს მოსწავლეთა ინდივიდუალურ იდეებსა და მოულოდნელ აღმოჩენებს.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლებაში არსებული მეთოდიკური პრობლემების გამომწვევი მიზეზები შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ:

1. მიგვაჩნია, რომ ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მესამე საფეხურზე მათემატიკის სწავლების წარმართვა ისეთი შინაარსით, რომ გათვალისწინებული იყოს

მოსწავლეთა მომავალი პროფესია. ჩვენი აზრით არასწორია, რომ მომავალი მათემატიკოსი, მომავალი ექიმი, მომავალი ფილოლოგი და მომავალი ეკონომისტი ერთი და იგივე პროგრამით სწავლობდეს. ასევე, მიზანშეუწონლად მიგვაჩნია, რომ ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკას ერთი და იგივე ტესტით აბარებს ყველა აბიტურიენტი, მიუხედავად სპეციალობის არჩევანისა. მიგვაჩნია, რომ ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე უნდა მოხდეს მათემატიკის გამოცდის დავალებათა დიფერენცირება სპეციალობების მიხედვით, რაც ვფიქრობთ, რომ დადებით როლს ითამაშებს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების დონის ამაღლებაზე. ვაცნობიერებთ იმას, რომ ეს მოთხოვნა არსებულ საგამოცდო სისტემის ზოგიერთ პრინციპთან წინააღმდეგობაში მოდის, მაგრამ ვთვლით, რომ მათემატიკის სწავლების გაუმჯობესება ქვეყნის ინტერესებისათვის უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ზოგიერთი მეორეხარისხოვანი საკითხი;

2. ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლებში მათემატიკის კვირეული საათობრივი ბადე შემცირდა, კლასებში კვირეული დატვირთვა 4 სთ-ია, რაც საკმარისი ნამდვილად არ არის. მიგვაჩნია, რომ ახლო წარსულში გეომეტრიის და ალგებრის სასწავლო დისციპლინების დიფერენცირებული სწავლების ნაცვლად მათემატიკის ერთ საგნად სწავლება წინ გადადგმული ნაბიჯი იყო, მაგრამ მათემატიკის კვირეული დატვირთვის საათობრივი ბადის შემცირებამ თავისი უარყოფითი კონტექსტით გადაფარა ის დადებითი, რაც ალგებრის და გეომეტრიის ინტეგრაციას მოჰყვა. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, საშუალო სკოლებში მათემატიკის კვირეული დატვირთვა გაიზარდოს მინიმუმ 5 სთ–მდე;

3. სასწავლო პროგრამიდან ამოღებული იქნა ხაზვა-როგორც ცალკე საგანი. ამ საგნის ამოღებამ უარყოფითი გავლება იქონია არა მარტო საინჟინრო და არქიტექტურის სპეციალობებზე შემსვლელთათვის, არამედ მთლიანად დაბლა დასწია გეომეტრიის სწავლების დონე. რა თქმა უნდა ეს არ ეხება გეომეტრიის თეორიული საკითხების სწავლებას, აქ ვგულისხმობთ გეომეტრიული ამოცანებისათვის საჭირო ნახაზების აგების ხარისხისს, რომელზეც მოსწავლეებს უმრავლეს შემთხვევაში უძნელდებათ მოცემული ფიგურის ელემენტების აგება, კავშირის დამყარება მოცემულ და საძებნ ელემენტრბს შორის და სხვ.;

4. დაბალია მათემატიკის ახალგაზრდა მასწავლებელთა პედაგოგიური მომზადების დონე, რისი მიზეზიც უმაღლესი სკოლის მათემატიკის საგნობრივი მასწავლებლების მოსამზადებელ მაინორ პროგრამებზე პედაგოგიური პრაქტიკის გაუქმებაა. ეს საკითხი ცალკე მსჯელობის საქმეა, რომლის გადაწყვეტაც სცილდება სადისერტაციო თემის შინაარსს და მის მიზანს. გვინდა მხოლოდ ის ვთქვათ, რომ ასეთი მდგომარეობაა სხვა საგნების მასწავლებელთა მომზადებაშიც, რადგან ქვეყანაში არ არსებობს მასწავლებლის მომზადების ისეთი კონცეფცია, რომელიც კვალიფიციურ მასწავლებლებს მოამზადებდა. საგნობრივი მასწავლებლის მომზადება, გარდა დაწყებითი კლასების მასწავლებლებისა ხდება საგნის შესაბამის აკრედიტირებულ აკადემიურ პროგრამებზე, რომლის კურსის გავლა საერთოდ არ ითვალისწინებს პედაგოგიური, ფსიქოლოგური და მეთოდიკური ციკლის დისციპლინებს, რა თქმა უნდა არც პედაგოგიურ პრაქტიკას და აკადემიური პროგრამების მაინორ 60 კრედიტიან პროგრამებზე, რომელიც პედაგოგიური პრაქტიკის გავლას არ ითვალისწინებს ან საგნის მასწავლებლის მქონე სერთიფიცირებულ მოქმედი მასწავლებლებისათვის მასწავლებლის მოსამზადებელ ერთ წლიან საგანმანათლებლო პროგრამებზე, რომელიც 60 კრედიტის გავლას ითვალისწინებს. არსებული მოდელით მომზადებული საგნობრივი მასწავლებლების უმრავლესობა ვერ აკმაყოფილებს მასწავლებლისათვის წაყენებულ მოთხოვნებს ბევრი კუთხით, მაგრამ ვიმედოვნებთ, რომ განათლების სამინისტრო, რომელიც ბოლო პერიოდში ინტენსიურად მუშაობს მასწავლებლის მომზადების სახელმწიფო პროგრამაზე, რომელიც მალე იხილავს დღის შუქს და თუ მთლიანად არა, პრობლემების უმეტესობას მაინც გადაწყვეტს.

5. დახვეწას საჭიროებს მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოები მეთოდურად, უმეტეს შემთხვევებში მოსწავლეები ახალი მასალის შესწავლის აუცილებლობას ვერ ხედავენ, სუსტია თემატური კავშირი განსახილავი ამოცანების შინაარსს შორის;

მეთოდურად გამართლებულია, რომ მასწავლებელმა გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების დაწყებამდე სასწავლო პროცესში ჩართოს შესამზადებელი და გამამდიდრებელი სავარჯიშოები და მათი

განხილვით მოამზადოს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლებისათვის ბაზისი.

შესამზადებელი სავარჯიშოების როლი და ადგილი კარგად არის ცნობილი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკაში, მაგრამ ასეთი სახის სავარჯიშოები არ გვხვდება მათემატიკის სასკოლო კურსისათვის დამხმარე ამოცანათა კრებულებში, ხოლო მათი შედგენა მასწავლებლებისათვის რთულია და მაღალ კვალიფიკაციას მოითხოვს. შესამზადებელი სავარჯიშოების შედგენასა და გამოყენებასთან დაკავშირებული საკითხები სათანადოდ არ არის შესწავლილი, ამიტომ პრაქტიკოსი მასწავლებლები იშვიათად მიმართავენ შესამზადებელ ამოცანებს, სწავლებაში ძირითადად ხელმძღვანელობენ ტრადიციული სქემით „თეორია$\rightarrow$ამოცანები".

გეომეტრიული შინაარსის მქონე გამამდიდრებელი სავარჯიშოები განსამტკიცებელი სავარჯიშოების კლასს მიეკუთვნება. სავარჯიშოთა ამ კლასზე ყურადღების გამახვილება გამოწვეულია იმით, რომ ჩვენში მოქმედ მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოცემული გამამდიდრებელი სავარჯიშოები ერთი მხრივ რაოდენობრივად ძალზედ ცოტაა, მერე მხრივ, რაც არის მათი აბსოლუტური უმრავლესობა მოსწავლეთა ცოდნის დონეს არც აღრმავებს და არც აფართოებს. მათ შორის იშვიათად გვხვდება შემოქმედებითი ხასიათის სავარჯიშოები. გამამდიდრებელი სავარჯიშოები მოსწავლეებს ეხმარება ახალი მასალა განიხილონ სხვადასხვა კუთხით და დაუკავშირონ ისინი ადრე მიღებულ ცოდნას, განაზოგადონ შეძენილი ცოდნა და მოახდინონ მისი შეჯერება შესწავლილი თეორიულ საკითხებთან ახალი ცოდნის ცალკეული ნაწილების ერთმანეთთან დაკავშირება. ახალი ცოდნის ჩართვა ადრე მიღებული ცოდნის სტრუქტურაში აძლიერებს აღქმის სიღრმეს და სიცხადეს, ეხმარება მოსწავლეებს ახალი მასალის უკეთ დამახსოვრებაში.

გამამდიდრებელი სავარჯიშოები საშუალებას იძლევა მათემატიკის სასწავლო შინაარსი გადანაწილდეს თეორიულ ტექსტებსა და ამოცანებზე ისე, რომ არ მოხდეს ახალი მასალის შემეცნებითი დონის დაწევა.

6. მათემატიკის სასკოლო კურსისათვის საჭიროა შეიქმნას უფრო მრავალფეროვანი ამოცანათა სისტემები, რადგან არსებული ვერ აკმაყოფილებს სათანადო მოთხოვნებს,

არცთუ იშვიათად დარღვეულია მარტივიდან რთულზე გადასვლის პრინციპი, ნაკლებად შეიცავს განმავითარებელი ხასიათის ამოცანებს. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემებთან მიმართებაში ქართველი მეთოდისტების მიერ ამ კუთხით აქტივობა საკმაოდ დაბალია, შეიძლება ითქვას, რომ თითქმის არც მიმდინარეობს. დაწყებითი კლასებისათვის და ალგებრული შინაარსის მასალის სწავლების სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების პრობლემის გადაჭრას არაერთი სამეცნიერო ნაშრომი მიუძღვნა პროფ. გ.ბერძულიშვილმა, მან აღნიშნული საკითხებს ბოლო ოთხ წელში 5 წიგნი მიუძღვნა [1], [3], [3], [4], [5]. მათგან სამი–დოქტორ გ.ბრეგაძის თანაავტორობით [2], [3], [5]. მონოგრაფიაში [3], გადმოცემულია დაწყებით კლასებში მათემატიკის საოლიმპიადო და განმავითარებელი ამოცანების ამოხსნის მწყობრი მეთოდური სისტემის შედგენის თეორიული საფუძვლები და შედგენილია ასეთი ამოცანების სისტემები. უფრო დაწვრილებით კი, მასში განხილულია განმავითარებელი და საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება დაწყებით კლასებში. გადმოცემულია განმავითარებელი და მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მეთოდიკური საფუძვლები, დასაბუთებულია განმავითარებელი და საოლიმპიადო შინაარსის მქონე სპეციალური ხერხებით ამოხსნადი ამოცანების ჩართვის აუცილებლობა დაწყებითი კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში. გადმოცემულია დირიხლეს პრინციპის, ინდუქციის, დედუქციის, ანალიზის და სინთეზის მეთოდების, არასრული და სრული ინდუქციის, მათემატიკური ინდუქციის, ანალოგიის, განზოგადების, გრაფების, სიმრავლეთა თეორიის, მათემატიკური ლოგიკის, ალბათური, კომბინატორული, საგანთაშორისი კავშირების, გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები და მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკა დაწყებითი კლასების მათემატიკის საკოლო კურსში. მეთოდურად დამუშავებულია სხვადასხვა ტიპის მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების თავისებურებები. აქცენტი გადატანილია განმავითარებელი და საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების ახალ მეთოდურ მიდგომებზე. ნაშრომში განხილული ამოცანების უმრავლესობა დაწყებითი კლასების სხვადასხვა საერთაშორისო და რესპუბლიკური დონის მათემატიკურ ოლიმპიადების თემატიკებიდან არის აღებული და დაწყებითი კლასებში

განსახილავი ამოცანების ყველა ტიპს მოიცავს. გარჩეულია მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანები თავისი ამოხსნებით, მეთოდური რეკომენდაციებით და მითითებებით. გარდა ამისა ნაშრომი შეიცავს დაწყებითი კლასებისათვის შედგენილ განმავითარებელ და საოლიმპიადო ამოცანებს მათემატიკაში, რაც ქართულ ენაზე გამოცემული მეთოდური შრომებისათვის სიახლეა და პირველი მცდელობა იმისა, რომ შეავსოს არსებული ხარვეზი.

ამ მონოგრაფიაში დასმული საკითხების კვლევა ავტორებმა გააგრძელეს [5] წიგნში, რომელიც ეხება მეორე საფეხურის საშუალო სკოლის მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანათა ამოხსნის პრაქტიკული ჩვევების ფორმირებას და კარგი შენაძენია პრაქტიკოსი მასწავლებლების და სპეციალისტებისათვის. მასში ძირითდი აქცენტი, ისევე, როგორც დანარჩენ სამ წიგნში გადატანილია ალგებრული შინაარსის საკითხების სწავლებაზე. შევნიშნოთ, რომ ეს ნაშრომები მოცულობით საკმაოდ შთამბეჭდავია, მაგრამ მათში ძალზე მცირე მოცულობით არის გეომეტრიული შინაარსის მასალა, არადა გეომეტრიული შინაარსის მასალის მეტი დოზით ჩართვა კიდევ უფრო მეტად სასარგებლოს გახდიდა მონოგრაფიებს.

რაც შეეხება გეომეტრიული შინაარსის მქონე განმავითარებელი და საძიებო ამოცანების შემცველ მასალას, რომელთა გამოყენება შესაძლებელი იქნებოდა სკოლებში სასწავლო პროცესში ჩართვისათვის სამწუხაროდ ქართულ ენაზე არ გვაქვს. ჩვენი აზრით ამის ერთ–ერთი მთავარი მიზეზია ის, რომ განათლების სამინისტროს მიერ აღარ ხდება დამხმარე სახელმძღვანელოებისათვის გრიფის მინიჭებას, რაც ართულებს კრებულების გამოყენებას სკოლებში. ეს ავტორებს უკარგავს ინტერესს განახორციელონ მუშაობა აღნიშნული მიამართულებით.

7. მათემატიკის სასკოლო კურსის არსებული სავარჯიშოთა სისტემები თითქმის არ შეიცავს გეომეტრიულ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა საჭიროებს კერძო მეთოდებისა და ხერხების გამოყენებას.

პრაქტიკაში მასწავლებელმა ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას კონკრეტული თემატიკების მიხედვით უნდა ჩართოს საკლასო მეცადინეობაზე,

რომლისთვისაც დამატებითი სასწავლო დროის გამოყენება საჭირო არ არის. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან უზრუნველყოფილი უნდა იქნეს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ დაუფლება. მოსწავლეების მიერ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების დაუფლება მოითხოვს მოსწავლეებისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, მათი თავისებურებების გათვალისწინებას, საშინაო დავალების და დამოუკიდებელი სამუშაოების ინდივიდუალიზაციას და სხვ. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ან/და ხერხებით ამოხსნის სწავლების მთლიანი პროცესი. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების რეალიზება დამოკიდებულია როგორც მასწავლებლის გამოცდილებაზე, ისე ამოცანების ამოხსნის მეთოდებსა და სპეციალური ხერხების ფორმებსა და მეთოდიკურ თავისებურებებზე. ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და სპეციალური ხერხები მოითხოვს მეცნიერულ შესწავლას. ჩვენი აზრით არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და სპეციალური ხერხების სწავლებას მეტად უნდა ექცეოდეს ყურადღება უმაღლეს სკოლაში მასწავლებელთა მოსამზადებელ აკადემიურ პროგრამებზე და მასწავლებელთა გადასამზადებელ ტრენინგებზე, რადგან ვთვლით, რომ არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდებსა და სპეციალურ ხერხებს უნდა ფლობდეს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის სამივე საფეხურის მათემატიკის ყველა მასწავლებელი.

სწავლების პროცესში მოსწავლეებს საფუძვლიანად უნდა გავაცნოთ გამოყენებული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდები და ხერხები. მიზანშეწონილია, თუ ამის შესაძლებლობა არსებობს ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდი/ხერხი და მეთოდურად დავასაბუთოთ გამოყენებული მეთოდის/ხერხის უპირატესობა.

საკუთარმა პედაგოგიურმა გამოცდილებამ, კოლეგებთან კონსულტაციებმა და პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაასაბუთა, რომ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;

მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება ამოცანების ამოხსნის ყველაზე პერსპექტიული გზის მოძებნაში;

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომლის მიზანია ამოცანის პირობაში ჩადებული ინფორმაციის სრული აღქმა და მის საფუძველზე ამოხსნის გზის მიგნება;

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანის ამოხსნის ახალი სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი მეთოდის ან/და ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ ეს შესაძლებელია მოვახდინოთ მისი განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან დამოუკიდეელი მუშაობისათვის მივცეთ შედარებით ნაკლები სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა.

მეთოდურად უნდა დამუშავდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და ხერხები, დადგინდეს გამოყენებული მეთოდების და ხერხების უპირატესობები.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების მეთოდურ დამუშავებას მთლიანად ეძღვნება დისერტაციის მეორე თავი.

I თავის დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები

1. საქართველოში განათლების რეფორმის წარმატებით განხორციელება დიდად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი ლოგიკური აზროვნების და მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარებით აღჭურვილი დაამთავრებს ახალგაზრდა სკოლას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია მოსწავლე დაეუფლოს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს და ხერხებს. მან უნდა შეეძლოს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ან/და ხერხებით ამოხსნა, რისთვისაც შეიძლება გამოიყენოს ცნობილი თეორემები, გეომეტრიული ფიგურის თვისებები, ფიგურის ელემენტებს შორის მეტრული დამოკიდებულებები, ჩაატაროს გაზომვები და გამოთვლები, შეასრულოს გეომეტრიულ ფიგურათა აგებები, მოახდინოს მათი გეომეტრიული გარდაქმნები და სხვ.

2. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები შეესაბამება სქემას „თეორია$\rightarrow$ამოცანები“. მიგვაჩნია, უმჯობესია სწავლებაში დამკვიდრდეს სქემა „ამოცანები$\rightarrow$თეორია$\rightarrow$ამოცანები“, რომელიც საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში დაამკვიდრებს განმავითარებელი სწავლების პრინციპებს და საშუალებას მოგვცემს განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს შეძლონ ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვება.

3. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება მიზნად ისახავს ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მოცემული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის მოძიება და მოცემულის საფუძველზე ახალი ინფორმაციის შექმნა. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენებით სწავლების პროცესი უნდა დავგეგმოთ და წარვმართოთ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების და ახალი გეომეტრიული მასალის სწავლების შეწყვილებით.

4. მასწავლებლის პრაოფესიული ცოდნა-ჩვევების მნიშვნელოვან მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და კერძო ხერხების ცოდნა, არამედ რამდენად გააზრებულად და გაცნობიერებულად

ფლობს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების თეორიულ საფუძვლებს. ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების თეორიული საფუძვლების ცოდნა სწვლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანა და ერთ-ერთი დიდაქტიკური პრინციპია. ვთვლით, რომ მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის თეორიულ საფუძვლებს საშუალო სკოლის სამივე საფეხურის მათემატიკის ყველა მასწავლებელი უნდა ფლობდეს.

5. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;
- მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ყველაზე პერსპექტიული გზის მოძებნაში;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომლის მიზანია ამოცანის პირობაში ჩადებული ინფორმაციის სრული აღქმა და მის საფუძველზე ამოხსნის გზის მიგნება;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ახალი სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი მეთოდის ან/და ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ ეს შესაძლებელია მოვახდინოთ მისი განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან დამოუკიდეელი მუშაობისათვის მივცეთ შედარებით ნაკლები სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა.
- მეთოდურად უნდა დამუშავდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები.

II თავი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და მათი სწავლების მეთოდიკა მათემატიკის სასკოლო კურსში

§1.ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების მეთოდის გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის თავისებურებები საშუალო სკოლაში

რაიმე გარდაქმნის ინვარიანტი არის ისეთი სიდიდე, ან თვისება, რომელიც უცვლელი რჩება ამა თუ იმ გარდაქმნების შესრულების შემდეგ. მაგალითად, მსგავსი ფიგურების წრფივი ელემენტების ფარდობა, ან არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა. ინვარიანტები შეიძლება იყოს რაიმე სიმრავლის ელემენტები, მაგალითად, წრეწირის ერთსა და იმავე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები, ან ყველა იმ კუთხეთა სიმრავლე, რომლებისთვისაც სამართლიანია ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები და სხვ.

ინვარიანტები აქტიურად გამოიყენება არა მარტო მათემატიკაში, არამედ მათ იყენებენ ფიზიკის კურსში. მაგალითად, ინვარიანტს წარმოადგენს თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე, დაცემის კუთხე უდრის არეკვლის კუთხეს და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში ინვარიანტი არის სიდიდე, რომელიც იცვლება მონოტონურად, ანუ, ან მხოლოდ იზრდება, ან მხოლოდ მცირდება.

საოლიმპიადო ამოცანები ინვარიანტებზე შეიძლება დავყოთ ორ სახედ:

1. ისეთი ამოცანები, რომლებშიც წარმოდგენილია რაიმე გარდაქმნა ან სიდიდე და მოთხოვნილია დავამტკიცოთ, რომ ეს ინვარიანტია. ე.ი. ასეთ ამოცანებში ინვარიანტი განსაზღვრულია მკაფიოდ.

2. ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოსახსნელად გამოიყენება ინვარიანტები, მაგრამ გამოსაყენებელი ინვარიანტი ცხადი სახით მოცემული არ არის.

განვმარტოთ რაში მდგომარეობს ინვარიანტის გამოყენების იდეა გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს. ამოცანაში მოცემულია გეომეტრიული ობიექტი, რომლის მიმართ ხორციელდება რაიმე ოპერაცია. ისმის კითხვა. შესაძლებელია თუ არა ამ ოპერაციის შედეგად მივიღოთ სხვა ობიექტი, რომელსაც ექნება განსაზღვრული თვისებები?

რომ გავარკვიოთ ეს, ჩვენ ავაგებთ რაიმე ახალ სიდიდეს-ინვარიანტს, რომელიც არ იცვლება ნებადართული ოპერაციების შესრულებისას და თუ ამ სიდიდის მნიშვნელობები განსხვავებულია მითითებული ორი ობიექტისათვის, მაშინ ამოცანის პასუხი უარყოფითია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ არჩეული ინვარიანტი ღებულობს ამ ორი ობიეტისათვის ერთნაირ მნიშვნელობებს, ეს არ ნიშნავს, რომ ერთი მათგანი აუცილებლად მიიღება მეორისაგან მითითებული ოპერაციების შესრულების შედეგად. ხშირად, ნაპოვნი ინვარიანტის შემთხვევაში ამის დამტკიცება ხერხდება.

თავისი შინაარსით ზოგადად, ამოცანები ინვარიანტებზე-ეს არის საოლიმპიადო ამოცანები, რომლებშიც გარდაქმნების ჩატარების დროს რაღაც სიდიდე რჩება უცვლელი. ასეთი ამოცანების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუ არ ვიცით მათი ამოხსნის პრინციპი. ასეთი შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანების ამოსახსნელად საკმარისია მოვძებნოთ ის სიდიდე, რომელიც არ იცვლება ამოცანის პირობებში აღწერილი გარდაქმნების დროს.

გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები ინვარიანტებზე საკმაოდ გონებამახვილურ მიგნებებს მოითხოვს და ერთი შეხედვით მოცემული ამოცანისათვის ინვარიანტის მოძებნა შესაძლებელია რთულიც კი იყოს. საკმაოდ ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით დასტურდება, რომ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეები შედარებით ადვილად ახერხებენ კონკრეტული ამოცანისათვის ინვარიანტის, ზოგჯერ კი ერთი ამოცანისათვის რამდენიმე ინვარიანტის პოვნასაც, მაშინ როცა, გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს მოსწავლეებს ეს უჭირთ, რადგან იქმნება გარკვეული სირთულეები. ჩვენ რამდენიმე ათეული წელია პრაქტიკაში ვიყენებთ ასეთ სისტემას: ინვარიანტების შესწავლის დაწყებას ვახდენთ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების განხილვით. როცა მოსწავლეები კარგად გაერკვევიან ინვარიანტის არსში და ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნაში, ამის შემდეგ

გადავდივართ ინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნაზე. მიზანშეწონილია, ინვარიანტების გამოყენებით ამოსახსნელი გეომეტრიული შინაარსის პირველი ამოცანები მჭიდროდ იყოს დაკავშირებული არითმეტიკასა და ალგებრასთან, რაც აადვილებს სწავლების პროცესს და გვეხმარება მათემატიკის შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებაში. ეს განამტკიცებს მოსწავლეებში აზრს, რომ მათემატიკა, როგოც სასწავლო საგანი უნდა განიხილებოდეს როგორც ერთიანი, მთლიანი, მაგრამ ცხადია, რომ სასწავლო მასალაში ჩართული უნდა იყოს ძირითდი საკითხები მათემატიკის სხვადასხვა დარგებიდან, ეს ეხება გეომეტრიული შინაარსის მასალას, რომელსაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მოსწავლეთა გონებრივ განვითარებაში.

განვიხილოთ ზოგიერთი სახის გეომეტრიული შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანა, რომელთა ამოხსნა უკავშირდება ინვარიანტების გამოყენებას.

ამოცანა 1. ბაყაყი დახტის წრფის გასწვრივ. პირველად ის გადახტა 1 სმ-ზე, შემდეგ 2 სმ-ზე იმავე ან საპირისპირო მიმართულებით, შემდეგ 4 სმ-ზე იმავე ან საპირისპირო მიმართულებით, შემდეგ 6 სმ-ზე იმავე ან საპირისპირო მიმართულებით და ა.შ. შესაძლებელია თუ არა, რომ 2017-ე ნახტომის შემდეგ ბაყაყი დაუბრუნდეს საწყის წერტილს?

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს აშკარად ჩანს, რომ შემთხვევების რიცხვი ძალზედ დიდია და ყველა შემთხვევის განხილვა მიზანშეწონილი არ არის. უნდა ვეძებოთ ისეთი სიდიდე, რომელიც პროცესის მიმდინარეობის დროს არ იცვლება. რა სიდიდე შეიძლება იყოს ეს? დავაკვირდეთ რა ხდება ბაყაყის თავიდან რამდენიმე გადახტომის დროს. ადვილი შესამჩნევია, რომ ბაყაყის თითოეული გადახტომის შემდეგ მანძილი საწყისი წერტილიდან ხდება კენტი. მართლაც, პირველი ნახტომის შემდეგ სიტუაცია ნათელია, მეორე ნახტომის შემდეგ თუ ბაყაყი გადახტა იმავე მიმართულებით, რა მიმართულებითაც გადახტა პირველად, მაშინ ბაყაყის დაშორება საწყისი წერტილიდან იქნება 3 სმ, თუ გადახტა პირველი ნახტომის საპირისპირო მიმართულებით, მაშინ საწყისი წერტილიდან ბაყაყის დაშორება იქნება 1 სმ. ე.ი. ორთავე შემთხვევაში მანძილი საწყისი წერტილიდან გამოისახება კენტი რიცხვით. ანალოგიურად იქნება ყველა სხვა ნახტომების შემთხვევაში.

მოსწავლეები ადვილად შეამჩნევენ, რომ განსახილავ ამოცანაში ინვარიანტს წარმოადგენს კენტი რიცხვით გამოსახული ბაყაყის საწყის და გადახტომის შემდეგ ბაყაყის დახტომის წერტილებს შორის მანძილი. რაც ნიშნავს. რომ 2017-ე ნახტომის შემდეგ ბაყაყის დაშორება საწყისი წერტილიდან გამოისახება ისევ კენტი რიცხვით. ე.ი. ბაყაყი საწყის წერტილში ვერ დაბრუნდება.

მოსწავლეები თუ თვითონ ვერ შეამჩნევენ, რომ ამოცანის პასუხი დამოკიდებული არ არის ნახტომების რიცხვის შერჩევაზე, მაშინ მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა განუმარტოს, რომ ნახტომების რიცხვი 2017 არჩეულია სიმბოლურად, როგორც წლევანდელი წლის გამომსახველი რიცხვი. მის ნაცვლად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი. ამის შემდეგ მოსწავლეები დაადგენენ, რომ ნახტომების გამომსახველი ნებისმიერი სხვა ნატურალური რიცხვის შემთხვევაშიც ამოცანის პასუხი არ შეიცვლება, ე.ი. ბაყაყი საწყის წერტილში ვერ დაბრუნდება.

ამოცანა 2. ოთხი კალია კვადრატის წვეროებში ზის. ყოველ წამში ერთი კალია გადაახტება რა მეორე კალიას, დახტება პირველი კალიას სიმეტრიულ წერტილში მეორე კალიას მიმართ (თუ A წვეროში მდებარე კალია გადაახტება B წვეროში მყოფ კალიას და დახტება A_1 წერტილში, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AB_1}$ ვექტორები ტოლია). დაამტკიცეთ, რომ სამი კალია ერთდროულად არ შეიძლება იმყოფებოდეს:

ა) ერთ წრფეზე, რომელიც კვადრატის გვერდის პარალელურია;

ბ) ნებისმიერ ერთ წრფეზე.

ა) ვთქვათ, კვადრატის წვეროები, რომლებშიც იმყოფება კალიები გამოისახება კოორდინატებით: (0, 0), (0, 1), (1, 0) და (1, 1). კალიების გადახტომის დროს დახტომის წერტილის აბსცისა ან არ იცვლება, ან იცვლება ლუწი რიცხვით. აქედან გამომდინარეობს, რომ იმ კალიების რაოდენობა, რომლებსაც ლუწი რიცხვით გამოსახული აბსცისები აქვთ, 2-ის ტოლია. რაც ნიშნავს, რომ ერთ ვერტიკალურ წრფეზე სამი კალია ვერ იქნება. ზუსტად ასევე დამტკიცდება, რომ სამი კალია ვერ განთავსდება ერთდროულად ერთ ჰორიზონტალურ წრფეზე. რის საფუძველზეც დავასკვნით, რომ სამი კალია ვერ აღმოჩნდება ერთ წრფეზე, რომელიც კვადრატის გვერდის პარალელურია.

ბ) ვთქვათ, რაღაც დროის შემდეგ სამი კალია კვადრატის წვეროებიდან (0, 0), (0, 1) და (1, 0) აღმოჩნდნენ შესაბამისად წერტილებში A, B და C. როგორც ა) შემთხვევის განხილვის დროს ვთქვით, A წერტილის ორივე კოორდინატი ლუწია, ხოლო B წერტილის აბსცისა ლუწია, ხოლო ორდინატა-კენტი, ხოლო C წერილის-პირიქით, აბსცისაა კენტი და ორდინატა ლუწი. მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის აბსცისა ლუწია, ხოლო ორდინატა-კენტი, ხოლო $\overrightarrow{AC}$ ვექტორს პირიქით, აბსცისა აქვს კენტი და ორდინატა-ლუწი. მოსწავლეები ამის შემდეგ მარტივად გამოიტანენ დასკვნას, რომ ასეთი ორი ვექტორი კოლინეარული არ არის, რაც ჩვენს შემთხვევაში იმას ნიშნავს, რომ A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ ძევს.

კალიების განსხვავებული სხვა ნებისმიერი სამეულისათვის ფაქტის დამტკიცება მარტივად შესაძლებელია კოორდინათა სისტემის შეცვლით, რასაც მოსწავლეები მასწავლებლის ჩარევის გარეშეც შეძლებენ. დამტკიცების ეს ნაწილი მიზანშეწონილია საკლასო მეცადინეობაზე განხილულ იქნეს როგორც დამოუკიდებელი სამუშაო ან მივცეთ საშინაო დავალებად.

ამოცანა 3. შესაძლებელია თუ არა საჭადრაკო უჯრის A1 უჯრიდან მხედარი მოხვდეს H8 უჯრაში, ისე რომ დაფის, ყველა უჯრა გაიაროს მხოლოდ ერთხელ?

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს შესაძლოა მოსწავლეებმა ვერ შენიშნონ რას წარმოადგენს ინვარიანტი. ამ შემთხვევაში მათ უნდა განვუმარტოთ, რომ თუ მხედარი საჭადრაკო დაფის თეთრ უჯრაზეა, მაშინ ლუწი სვლების შემდეგ ის ისევ თეთრ უჯრაზე აღმოჩნდება, ხოლო თუ საჭადრაკო დაფის შავ უჯრაზეა, მაშინ ლუწი სვლების შემდეგ ის ისევ შავ უჯრაზე აღმოჩნდება.

საჭადრაკო დაფაზე სულ 64 უჯრაა, რომელთაგან ერთ A1 უჯრაში მხედარი დგას. თუ შესაძლებელია, რომ A1 უჯრიდან მხედარი მოხვდეს H8 უჯრაში, ისე რომ, ყველა უჯრა გაიაროს მხოლოდ ერთხელ, მაშინ ეს უნდა მოხდეს 63 სვლის შემდეგ. ეს ნიშნავს, რომ 62-ე სვლის შემდეგ მხედარი უნდა მოხვდეს თეთრ უჯრაზე. მაგრამ H8 უჯრა ისევე, როგორც A1 უჯრა შავია. ცხადია, რომ ბოლო სვლის შემდეგ მხედარი H8 უჯრაში ვერ აღმოჩნდება.

ამოცანა 4. ფიგურა „აქლემი“ დაფაზე ზომით 10×10 აკეთებს (1,3) ტიპის სვლას, ის გადაადგილდება ჯერ მეზობელ უჯრაში და შემდეგ არჩეული მიმართულების

მართობულად სამი უჯრით. მხედარი აკეთებს იმავე ტიპის (1,2) სვლას. შესაძლებელია თუ არა „აქლემის" სვლების სასრული რაოდენობის შემდეგ დაფის რომელიმე უჯრიდან მოვხვდეთ მის რომელიმე მეზობელ უჯრაში?

განვიხილოთ 10×10 ზომის საჭადრაკო დაფა, რომელიც შეღებილია თეთრ და შავ ფერებში. თუ დავაკვირდებით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ „აქლემი" ყოველი სვლით გადადის ერთი ფერის უჯრიდან იმავე ფერის უჯრაში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უჯრის ფერი, რომელზეც დგას „აქლემი"-ინვარიანტია. მაგრამ, რადგან საჭადრაკო დაფის ორი მეზობელი უჯრა სხვადასხვა ფერისაა, ამიტომ ერთი ფერის უჯრიდან მეორე ფერის უჯრაზე გადასვლას „აქლემი" ვერ შეძლებს.

ამოცანა 5. სამი კალია წრფეზე ზის ისე, რომ ორი განაპირა კალია დაშორებულია შუაში მჯდომი კალიადან 1 მ-ით. ყოველი წამის შემდეგ ერთ-ერთი კალია გადააფრინდება მეორე კალიას და დაჯდება მის მიმართ სიმეტრიულ წერტილში (თუ A გადაახტება B-ს და დაჯდება A_1 წერტილში, მაშინ $AB=BA_1$). დროის რაღაც შუალედის შემდეგ კალიები აღმოჩნდნენ წრფის იმავე წერტილებში, სადაც ისხდნენ პროცესის დასაწყისში, მაგრამ ზოგიერთი კალია არ აღმოჩნდა თავის თავდაპირველ ადგილას. დაამტკიცეთ, რომ ადგილები მხოლოდ განაპირა კალიებმა შეიცვალეს.

ვთქვათ, კალიები თავდაპირველად სხედან საკოორდინატო ღერძის წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია -1, 0 და 1. შევნიშნოთ, რომ კალიების კოორდინატები თითოეული გადახტომის შემდეგ ისევ მთელი იქნება. ამას გარდა, ნებისმიერი კალია გადახტომის შემდეგ საწყისი წერტილიდან გადაადგილდება ლუწი რიცხვის შესაბამისი მანძილით. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ თავდაპირველად კალიას კოორდინატი იყო ლუწი, მაშინ ის ნებისმიერი გადახტომის შემდეგ დარჩება ლუწად. ამიტომ, ცხადია, რომ მხოლოდ თავიდან შუაში მჯდომ კალიას შეუძლია დაუბრუნდეს თავის პირვანდელ მდგომარეობას, ხოლო ადგილები შეიცვალეს განაპირა კალიებმა.

ამოცანა 6. მოცემულია ქაღალდის სამკუთხედი კუთხეებით 20^0 , 20^0 და 140^0. ამ სამკუთხედს ჭრიან თავისი ერთ-ერთი ბისექტრისის გასწვრივ ორ სამკუთხედად, რომელთაგან ერთ-ერთს ასევე ჭრიან ორ სამკუთხედად მისი ერთ-ერთი ბისექტრისის

გასწვრივ და ა.შ. შესაძლებელია თუ არა ასეთი მოქმედებების სასრული რიცხვის შემდეგ მივიღოთ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი?

დავყოთ ყველა სამკუთხედების სიმრავლე „კარგ“ და „ცუდ“ სამკუთხედებად. კარგი ვუწოდოთ ისეთ სამკუთხედებს, რომლის კუთხეები 20^0 -ის ჯერადია, ხოლო „ცუდი“- დანარჩენ სამკუთხედებს. „ცუდ“ სამკუთხედებს განეკუთვნება ისეთი სამკუთხედიც, რომლის მხოლოდ ერთი კუთხეა 20^0 -ის ჯერადი. პირველ ნაბიჯზე მიღებული ორივე სამკუთხედი „ცუდია“. აქედან ცხადია, რომ „ცუდი“ სამკუთხედის მისი რომელიმე კუთხის ბისექტრისის გაჭრის შედეგად კვლავ მიიღება ორი „ცუდი“ სამკუთხედი. ცხადია, რომ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი „კარგი“ სამკუთხედის მიღება „ცუდი“ სამკუთხედების გაჭრით მისი რომელიმე შიგა კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ შეუძლებელია.

ამოცანა 7. კვადრატული ფორმის 2×2 ზომის ცხრილი შეღებილია ორი ფერის საღებავით: თეთრად და შავად. ამასთან შავად შეღებილია 3 უჯრა, თეთრად კი 1 უჯრა. ერთ სვლაზე ნებადართულია გადავღებოთ ცხრილის ნებისმიერი ან სვეტი, ან სტრიქონი, ან ნებისმიერ დიაგონალზე განლაგებული უჯრები: შავი უჯრები თეთრად, ხოლო თეთრი უჯრები შავად. შესაძლებელია თუ არა რამდენიმე სვლის შემდეგ მივიღოთ ცხრილი, რომლის ყველა უჯრა იქნება შეღებილი თეთრად?

მოვახდინოთ ამოცანის ასეთი წარმოდგენა: უჯრებს, რომელიც შეღებილია თეთრად, შევუსაბამოთ რიცხვი 1, ხოლო იმ უჯრებს, რომლების შეღებილია შავად, რიცხვი -1. ამ პირობით, უჯრისათვის ფერის შეცვლა წარმოადგენს მისთვის მინიჭებული რიცხვისათვის ნიშნის შეცვლას. განვიხილოთ უჯრებში მოთავსებული ყველა რიცხვის ნამრავლი. რადგან უჯრების გადაღებვის დროს ჩვენ ნიშანს ვუცვლით მხოლოდ ორ უჯრის თანამარავლს, ამიტომ ოთხი თანამარავლის ნიშანი უცვლელი რჩება. თავიდან ეს ნამრავლი -1-ის ტოლია. თუ ამოცანაში მოთხოვნილი პირობები შესრულდა და რამდენიმე სვლის შემდეგ მივიღეთ ცხრილი, რომლის ყველა უჯრა იქნება შეღებილი თეთრად, მაშინ აღმოჩნდება, რომ საძიებელი მდგომარეობისათვის ნამრავლი იქნება 1, რაც ჩატარებული მსჯელობით შეუძლებელია. ცხადია, რომ აღწერილი ოპერაციით ცხრილის გადაღებვა შეუძლებელია.

არსებობს აგრეთვე ისეთი მათემატიკური შინაარსის მქონე ამოცანების კლასი, რომელთა ამოხსნის დროს გამოიყენება ნახევრადინვარიანტები. ნახევრადინვარიანტებს წარმოადგენს რაიმე სიდიდის ზუსტი ზედა ან ზუსტი ქვედა საზღვარი. უმრავლეს შემთხვევებში ნახევრადინვარიანტები გამოიყენება დამტკიცებაზე ექსტრემალური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს, ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნახევარინვარიანტების გამოყენებით შესაძლებელია რაიმე სიდიდის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობების პოვნა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ტერმინი „მათემატიკური შინაარსის მქონე ამოცანები" შემთხვევით არ გამოგვიყენებია, რადგან, ექსტრემალური ამოცანები თავისი შინაარსით შეიძლება იყოს მეცნიერების სხვადასხვა დარგიდან, განსაკუთრებით კი ეკონომიკიდან, ფიზიკიდან და სხვ.

განვმარტოთ, ნახევარინვარიანტების გამოყენების არსი. ინვარიანტების გამოყენებისას ჩვენ ვამტკიცებთ რაიმე სიდიდე რჩება უცვლელი თუ არა, ხოლო ნახევარინვარიანტების შემთხვევაში, ჩვენ უნდა გავცეთ პასუხი კითხვას: „რას არ უნდა აღემატებოდეს" ან „რაზე ნაკლები არ უნდა იყოს" საძიებელი სიდიდე?

ნახევარინვარიანტების სწავლების პროცესის წარმართვა მიმდინარეობს იმავე პრინციპით, რა პრინციპითაც ვასწავლით ინვარიანტებს, კერძოდ გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები ნახევარინვარიანტების გამოყენებით გაცილებით რთულია, ვიდრე ინვარიან–ტების გამოყენებით, ასეთი ამოცანების ამოხსნა დაკავშირებულია რაიმე სიდიდის უდიდესი/უმცირესი მნიშვნელობის დადგენასთან, მოითხოვს გონების დაძაბვას და გეომეტრიული ფაქტების ცოდნის გარდა უტოლობათა თვისებების ცოდნასაც. საკუთარი, საკმაოდ ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით და მოწინავე მასწავლებლების გამოცდილებით დასტურდება, რომ ნახევარინვარიანტების გამოყენებით არითმეტიკული და ალგებრული ამოცანების შინაარსში გარკვევას და მათ ამოხსნას მოსწავლეები შედარებით იოლად ახერხებენ, მაშინ როცა, გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს მოსწავლეებს ეს უძნელდებათ, რადგან იქმნება გარკვეული სახის სირთულეები, რაც დაკავშირებულია არითმეტიკის, ალგებრის, ტრიგონომეტრიის, ფიზიკის და გეომეტრიის საკითხების ერთმანეთთან დაკავშირებაში ანუ, გართულებულია არითმეტიკის, ალგებრის, ფიზიკის, ტრიგომომეტრიის და სხვა სასწავლო დისციპლინებიდან მიღებული ცოდნის

ტრანსფერი გეომეტრიის საკითხების შესწავლის დროს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სუსტია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის სასწავლო კურსებს შორის საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები, რაზეც განხილული საკითხიც მეტყველებს. ცხადია, რომ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების შემცველი საკითხების განხილვა უნდა გამოსწორდეს და იმედს ვიტოვებთ, რომ დროთა განმავლობაში ეს ასეც იქნება, მაგრამ სანამ არსებულ მდგომარეობაში ვართ, ჩვენ უარს ვერ ვიტყვით და არც გვითქვამს ასეთი საკითხების სწავლებაზე, რაც ჩამოვაყალიბეთ გარკვეული სისტემის სახით. ჩვენ რამოდენიმე ათეული წელია პრაქტიკაში ვიყენებთ ასეთ სისტემას: ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცა–ნების შესწავლის დაწყებას ვახდენთ მას შემდეგ, რაც მოსწავლეები კარგად დაეუფლებიან და გაერკვევიან ინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნაში. ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების შესწავლას ვიწყებთ მხოლოდ მას შემდეგ, რაც მოსწავლეები კარგად არიან დაუფლებული ნახევარინვარიანტების გამოყენებით არითმეტიკული და ალგებრული ამოცანების ამოხსნას, ამის შემდეგ ეტაპობრივად გადავდივართ ნახევარინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნაზე. მიზანშეწონილია, რომ ნახევარინვარიანტების გამოყენებით ამოსახსნელი პირველი ამოცანები, რომლებიც გეომეტრიული შინაარსის შემცველია და მათთვის დასადგენია ნახევარინვარიანტები, დაკავშირებული იყოს არითმეტიკასთან, ალგებრასთან, ტრიგონომეტრიასთან, ფიზიკასთან და სხვ. რაც აადვილებს სწავლების პროცესს და გვეხმარება საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებაში.

განვიხილოთ ზოგიერთი სახის გეომეტრიული შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანა, რომელთა ამოხსნა უკავშირდება ნახევარინვარიანტების გამოყენებას.

ამოცანა 8. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან ფერდებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა და ფერდისადმი გავლებული სიმაღლის სიგრძის ტოლია.

ვთქვათ, O-ტოლფერდა ABC სამკუთხედის BC ფუძის ნებისმიერი წერტილია, h_1 და h_2 - ამ წერტილიდან სამკუთხედის ფერდებამდე მანძილებია. მაშინ, ერთის მხრივ:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2}, \qquad (1)$$

სადაც h ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდზე დაშვებული სიმაღლეა.

მეორეს მხრივ:

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{AOC} = \frac{AB \cdot h_1}{2} + \frac{AC \cdot h_2}{2}.$$

მაგრამ, რადგან $AB = AC$, ამიტომ,

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot h_1}{2} + \frac{AC \cdot h_2}{2} = AB \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (2)$$

რადგან, (1) და (2) ტოლობების მარცხენა ნაწილები ერთმანეთის ტოლია, ტოლი უნდა იყოს მათი მარჯვენა ნაწილებიც, საიდანაც მარტივად მივიღებთ, რომ:

$$h = h_1 + h_2.$$

ამ ამოცანის განხილვის შემდეგ მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა განუმარტოს, რა წარმოადგენს მოცემულ ამოცანაში ნახევარინვარიანტს, შესაძლებელი იყო თუ არა ნახევარიანარიანტის დადგენა სხვა განსხვავებული მიდგომით. მოსწავლეებს დაუსვას კითხვები: იცოდნენ, თუ არა მოსწავლეებმა ნახევარინვარიანტის ამ მნიშვნელობის შესახებ, ხომ არ იციან კიდევ სამკუთხედში განხილულისაგან განსხვავებული სხვა სიდიდეების უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობები, ხომ არ შეიძლება ამ ამოცანის განზოგადება რომელიმე სახის ოთხკუთხედისათვის, n-კუთხედისათვის, რომელიმე სივრცითი სხეულისათვის და ა.შ. ანალოგიური კითხვები მოსწავლეებში ამაღლებს საკითხისადმი მოტივაციას, ახდენს მათ დაინტერესებას, რათა დამოუკიდებლად მიაგნონ ასეთ სიდიდეს და სასწავლო პროცესს უფრო საინტერესოს ხდის. თუ მოსწავლეებმა ვერ შეძლეს განხილული ამოცანის განზოგადება, მაშინ მიზანშეწონილია მასწავლებელმა განიხილოს ამოცანა 8-ის განზოგადებული შემდეგი სივრცითი ანალოგი, რომელიც ჩამოყალიბდება ასე:

ამოცანა 9. წესიერი პირამიდის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მანძილების ჯამი მის გვერდით წახნაგებამდე მუდმივია და გვერდით წახნაგზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია.

ამ ამოცანის ამოხსნა განხილული წინა ამოცანის ანალოგიურია, განსხვავება არის ის, რომ ამ ამოცანაში წინასაგან განსხვავებით უნდა განვიხილოთ არა ფართობები, არამედ მოცულობები.

ამოცანა 10. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილიდან მანძილების ჯამი სამკუთხედის სამივე გვერდამდე მუდმივია და ტოლია $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, სადაც a ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდია.

მოვახდინოთ ამოცანის ამოხსნა წინა ამოცანის ამოხსნის ანალოგიურად. ვთქვათ, O-ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის შიგა არის ნებისმიერი წერტილია, h_1, h_2 და-h_3 ამ წერტილიდან შესაბამისად სამკუთხედის AB, AC და BC გვერდებამდე მანძილებია. მაშინ, ერთის მხრივ სამკუთხედის ფართობი ტოლია

$$S_{ABC}=\frac{a\cdot h}{2}.$$

სადაც a-ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდია, ხოლო h-ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლე. მეორეს მხრივ:

$$S_{ABC}=S_{ABO}+S_{AOC}+S_{BOC}=\frac{a\cdot h_1}{2}+\frac{a\cdot h_2}{2}+\frac{a\cdot h_3}{2}=a(h_1+h_2+h_3),$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ, რომ:

$$h=h_1+h_2+h_3.$$

ამავე მეთოდით შესაძლებელია მარტივად დავამტკიცოთ, რომ წესიერი მრავალკუთ–ხედის ნებისმიერი შიგა წერტილიდან მის ყველა გვერდამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ინტერესმოკლებული არ არის ამოცანა 10-ის სივრცითი განზოგადება:

ამოცანა 11. წესიერი მრავალწახნაგას ნებისმიერი შიგა წერტილიდან მის ყველა გვერდით წახნაგებამდე მანძილების ჯამი მუდმივია. კერძოდ, წესიერი ტეტრაედრისათვის, რომლის გვერდია a, ეს მანძილი ტოლია $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

ამოცანა 12. სამკუთხედის გვერდები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი მისი რომელიმე სიმაღლის მესამედის ტოლია.

ვთქვათ, სამკუთხედის გვერდებია a, b, c და ისინი ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. პროგრესიის თვისების ძალით

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

მაშინ, ნახევარპერიმეტრი ტოლია

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2} = b + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b.$$

გამოვსახოთ სამკუთხედის ფართობი სხვადასხვანაირად, გვაქვს:

$$\frac{1}{2}b \cdot h_b = p \cdot r$$

ანუ,

$$\frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{3}{2}b \cdot r.$$

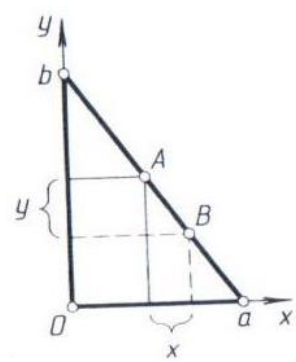
საიდანაც,

$$r = \frac{h_b}{3}.$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა. ამ ამოცანაში ინვარიანტს წარმოადგენს სამკუთხედის საშუალო სიგრძის გვერდი, რადგან შესრულებულია პირობა:

$$2b = a + c.$$

ამოცანა 13. მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზეთ საერთო მართი კუთხის მქონე უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.



ნახ. 1.

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს გარდა ნახევარინვარიანტის შერჩევისა, მეტად კარგ შედეგს იძლევა კოორდინატთა სისტემის შერჩევა იმდაგვარად, რომ ამოცანის ამოხსნია პროცესი

გამარტივდეს. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავე დავამთხვიოთ მართი კუთხის წვეროს, ხოლო აბსცისათა და ორდინატთა ღერძები მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებს ისე, როგორც ნახაზზეა გამოსახული (ნახ. 1).

იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები მოთავსებულია წერტილებში $O(0,0)$ და $A\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$, ტოლია $S^* = \frac{ab}{4}$, სადაც A ჰიპოტენუზის შუაწერტილია.

განვიხილოთ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული ნებისმიერი მართკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე წვეროები განთავსებულია წერტილებში $O(0,0)$ და $B\left(\frac{a}{2}+x,\frac{b}{2}-y\right)$.

სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს:

$$\frac{\frac{a}{2}+y}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}},$$

საიდანაც

$$y = \frac{b}{a}x,$$

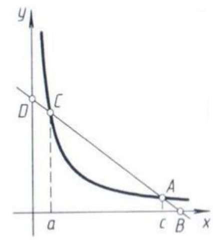
და განსახილავი მრავალკუთხედის ფართობია

$$S = \left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{b}{2}-y\right) = \left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{a}x\right) = \frac{ab}{4}-\frac{b}{a}x^2.$$

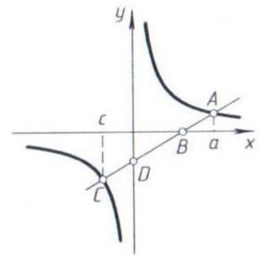
მივიღეთ ნახევარიანვარიანტი $S \le S^*$. ანუ, ჩვენს სამკუთხედში ჩახაზული ნებისმიერი სამკუთხედის ფართობი არ აღემატება $\frac{ab}{4}$-ს. ამრიგად, ფართობი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$, ანუ საძიებელი მართკუთხედის წვეროები მოთავსებულია მოცემული სამკუთხედის შუაწერტილებში.

ამოცანა 14. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A წერტილი და მასზე გამავალი წრფე. ცნობილია, რომ A წერტილი $y=\frac{k}{x}, k>0$ ჰიპერბოლის წერტილია (იხილეთ ნახაზი), ხოლო წრფე კვეთს ჰიპერბოლას ორ წერტილში. ნახაზზე ჰიპერბოლა გამოსახული არ არის. ფარგლითა და სახაზავის გამოყენებით ააგეთ წრფისა და ჰიპერბოლის გადაკვეთის მეორე წერტილი.

ვთქვათ, წრფე კოორდინატთა ღერძებს გადაკვეთს წერტილებში $B(b,0)$ და $D(0,d)$, ხოლო C წრფისა და ჰიპერბოლის გადაკვეთის საძიებელი მეორე წერტილია. განიხილება ორი შემთხვევა რომელიც გამოსახულია ნახ. 2 და ნახ.3.



ნახ. 2.



ნახ.3.

ამოვხსნით, რა სისტემას

$$\begin{cases} y = \dfrac{k}{x} \\ y = px + q \end{cases},$$

გადაკვეთის წერტილების აბსცისების გამოსათვლელად მივიღებთ განტოლებას:

$$x^2 + \frac{p}{q}x - \frac{h}{p} = 0.$$

მაშინ ვიეტის თეორმის თანახმად გვაქვს:

$$a + c = -\frac{q}{p},\ \ ac = -\frac{k}{p}.$$

სადაც a და c არის შესაბამისად A და C წერტილების აბსცისები.

რადგან $B(b,0)$ და $D(0,d)$ წერტილები წრფეს ეკუთვნის, მივიღებთ: $b = -\dfrac{q}{p}$ და $d = -q$.

ე.ი. $a + c = b$. ანუ

$$c - 0 = b - a. \qquad (1)$$

A და C წერტილების ორდინატები შესაბამისად ტოლია $\dfrac{k}{a}$ და $\dfrac{k}{c}$. მაშინ $\dfrac{k}{a} + \dfrac{k}{c} = k\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right) = k\dfrac{a+c}{aq} = q.$ ანუ

$$\frac{k}{c} - d = 0 - \frac{k}{c}. \qquad (2)$$

(1) და (2) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

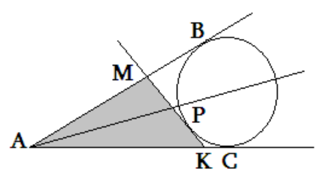
$$AB = DC.$$

მიღებული ინვარიანტის საფუძველზე C წერტილის ასაგებად საკმარისია გადავდოთ წრფეზე D წერტილიდან მონაკვეთი, რომელიც AB-ს ტოლია (პირველ მეოთხედში, თუ $p<0$ და მესამე მეოთხედში, როცა $p>0$).

ამოცანა 15. ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით სიბრტყის ფიქსირებული წერტილიდან გაავლეთ წრფე, რომელიც მოცემული კუთხიდან ჩამოჭრის სამკუთხედს, რომელსაც მოცემული $2p$ პერიმეტრი აქვს.

ვთქვათ, A-მოცემული კუთხის წვეროა, $2p$-მოცემული პერიმეტრია. კუთხის გვერდებზე გადავდოთ წერტილები B და C, ისე რომ შესრულდეს პირობა $AB=AC=p$. კუთხეში ჩავხაზოთ წრეწირი, რომელიც კუთხის გვერდებს ეხება B და C წერტილებში.

ვთქვათ, M წერტილი მოცემული კუთხის რაიმე შიგა წერტილია. თუ M წერტილი ABC მრუდწირული სამკუთხედის შიგა წერტილია, რომელიც შემოსაზღვრულია AB და AC მონაკვეთებით და წრეწირის მცირე BC რკალით, მაშინ M წერტილიდან უნდა გავავლოთ წრეწირის მხები.



ნახ. 4.

ვთქვათ, გავლებული ერთ-ერთი მხები მოცემული კუთხის AB და AC გვერდებს კვეთს შესაბამისად P და Q წერტილებში და წრეწირს ეხება K წერტილში. მაშინ

$$AP+PQ+QA=AP+(PK+KQ)+QA=(AP+PK)+(KQ+QA)=$$
$$=(AP+PB)+(CQ+QA)=AB+AC=2p.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ წრეწირისადმი გავლებული მეორე მხების მიმართაც. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი. იმ შემთხვევაში, თუ M წერტილი ძევს წრეწირის მცირე BC რკალზე და განსხვავებულია B და C წერტილებისაგან, მაშინ ეს ამონახსნები ერთმანეთს ემთხვევა. თუ M წერტილი მოთავსებულია კუთხის შიგნით, მაგრამ არ ეკუთვნის ABC მრუდწირული სამკუთხედის შიგა არეს, მაშინ ამოცანას ამონახსნი არა აქვს. ვთქვათ, M წერტილი მოთავსებულია კუთხის გარეთ. თუ აგებული

წრეწირისადმი გავლებული ერთ-ერთი მხები ჩამოჭრის მოცემული კუთხიდან სამკუთხედს, მაშინ ჩამოჭრილი სამკუთხედი საძიებელია. დამტკიცება ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურია. ამ შემთხვევაში ამოცანას მხოლოდ ერთი ამონახსნი აქვს. დანარჩენ შემთხვევვებში ამოცანას ამონახსნი არა აქვს.

ამოცანა 16. ყინულზე დევს სამი A, B და C შაიბა, რომლებიც ადგენენ ABC სამკუთხედს. ჰოკეისტი ურტყამს ერთ-ერთ შაიბას ისე, რომ მან გაიაროს დანარჩენ ორ შაიბას შორის და გაჩერდეს რაიმე წერტილში. შესაძებელია თუ არა რომ ყველა შაიბა 25 დარტყმის შემდეგ დაუბრუნდეს თავის პირვანდელ მდგომარეობას?

სანამ დავიწყებდეთ ამოცანის ამოხსნას, მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ სამკუთხედის ორიენტაციის ცნება და გავაკეთოთ განმარტება, რომ ზოგადად ABC და BAC სამკუთხედები ერთმანეთისგან განსხვავებულია, რადგან პირველ შემთხვევაში სამკუთხედზე შემოვლა ხდება მიმართულებით $A \to B \to C \to A$, ხოლო BAC სამკუთხედის შემთხვევაში $B \to A \to C \to B$. ამ საკითხების გარკვევის შემდეგ მოსწავლეები მარტივად მიხვდებიან, რომ ამოცანისათვის ინვარიანტს წარმოადგენს მოცემული ABC სამკუთხედის ორიენტაცია. ამოცანის ამოხსნის პროცესი კი მარტივდება და შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შაიბის თითოეული დარტყმის შემდეგ იცვლება ახლად შედგენილი სამკუთხედის ორიენტაცია, ანუ ABC სამკუთხედის შემოვლა, რაც ნიშნავს, რომ ყველა შაიბა 25 დარტყმის შემდეგ ვერ დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მოსწავლეებისაგან იმის გარკვევა ამ ამოცანაშიც, ისევე როგორც ზემოთ განხილულ ამოცანაში 25 სიმბოლურად აღებული რიცხვია, თუ იგივე შედეგს მივიღებთ თუ დარტყმების რაოდენობას შევცვლით მაგალითად 2017-ით.

ამოცანა 17. რამდენიმე ერთნაირ ტოლგვერდა სამკუთხედს წვეროებში აწერია რიცხვები 1, 2 და 3. ეს სამკუთხედები ერთმანეთზე დააწყვეს და შეკრეს სამაგრით. შესაძლებელია თუ არა ერთად შეკრული სამკუთხედების თითოეულ წვეროსთან თავმოყრილ ყველა სამკუთხედებზე დაწერილი რიცხვების ჯამი იყოს: ა) 25; ბ) 50?

ამოცანის ამოხსნისათვის მოვძებნოთ ინვარიანტი, რომელსაც წარმოადგენს სამკუთხე–დის წვეროებში დაწერილი რიცხვების ჯამი, ანუ 6 = 1 + 2 + 3.

დავუშვათ, შესაძლებელია სამკუთხედების თითოეულ წვეროსთან თავმოყრილ ყველა სამკუთხედებზე დაწერილი რიცხვების ჯამი იყოს 25. მაშინ მთლიანად სამივე წვეროსთან სამკუთხედებზე დაწერილი ყველა რიცხვის ჯამი იქნება 75 = 25 × 3. მაგრამ 75 არ არის 6-ის ჯერადი. ე.ი. შეუძლებელია სამკუთხედების თითოეულ წვეროსთან თავმოყრილ ყველა სამკუთხედებზე დაწერილი რიცხვების ჯამი იყოს 25.

ანალოგიური მსჯელობით შესაძლებელია დავადგინოთ, რომ ბ) შემთხვევისათვის ჯამი იქნება 150, 150 = 25 × 6. რომელიც 6-ის ჯერადია, მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ ამოცანის პირობაში მოყვანილი მოთხოვნები აუცილებლად შესრულდება. ამიტომ, ამოცანა რომ ამოხსნილად ჩაითვალოს, დამატებით უნდა დავამტკიცოთ, სრულდება, თუ არა ამოცანის პირობაში მოყვანილი მოთხოვნები.

ამოცანის პირობებში მოყვანილი მოთხოვნები სრულდება. მართლაც, თუ ხუთ სამკუთხედს დავაწყობთ ისე, რომ ერთმანეთის ქვეშ მოხვდეს წვეროები, რომლებზეც რიცხვები 1, 2 და 3 აწერია შემდეგნაირად:

1	2	3
2	3	1
3	1	2
1	2	3
3	2	1

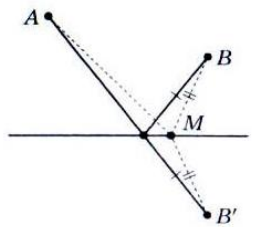
აღმოჩნდება, რომ ერთად შეკრული ხუთი სამკუთხედის თითოეულ წვეროსთან თავმოყრილ სამკუთხედებზე დაწერილი რიცხვების ჯამები ერთმანეთის ტოლია და 10-ს უდრის. თუ ასეთი პრინციპით შევკრავთ სამკუთხედების კიდევ ოთხ ასეთ ხუთეულს, მივიღებთ, რომ სამკუთხედების თითოეულ წვეროსთან თავმოყრილ ყველა სამკუთხე-დებზე დაწერილი რიცხვების ჯამი იქნება 50.

ამოცანა 18. სიბრტყეზე მოცემულია l წრფე და ამ წრფის ერთ მხარეს მდებარე A და B წერტილები. l წრფეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $AM + MB$ მანძილების ჯამი იყოს უმცირესი.

განვიხილოთ l წრფის მიმართ B წერტილის სიმეტრიული B' წერტილი. სიმეტრიის დროს BM წრფე გადადის $B'M$ მონაკვეთში ნახ. 5. ცხადია, რომ

$$AM + MB = AM + B'M.$$

სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $AM + B'M$ ჯამი უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს მაშინ, როცა M წერტილი ეკუთვნის AB' წრფეს.



ნახ. 5.

სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $AM + B'M$ ჯამი უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს მაშინ, როცა M წერტილი ეკუთვნის AB' წრფეს. ამრიგად, M წერტილი წარმოადგენს l წრფისა და AB' მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილს. ასე შერჩეული M წერტილისათვის $AM + MB$ მანძილების ჯამი AB' მონაკვეთის სიგრძის ტოლია. M წერტილის ნებისმიერი სხვა მდებარეობის შერჩევისას განსახილავი ჯამი ყოველთვის მეტი იქნება, ვიდრე AB' მონაკვეთის სიგრძე. ეს ამოცანა საინტერესოა იმით, რომ ის გამოსახავს ფიზიკიდან ცნობილ არეკვლის კანონს-დაცემის კუთხე უდრის არეკვლის კუთხეს. მართლაც, თუ A წერტილს განვიხილავთ, როგორც სინათლის წყაროს, ხოლო l წრფეს, როგორც ერთგვაროვან სარკულ ზედაპირს, მაშინ A წერტილიდან გამოსულ სხივს l წრფე აირეკლავს დაცემის კუთხის ტოლი კუთხით და ეს სხივი მოხვდება B წერტილში, ისე რომ, $AM + MB$ მანძილების ჯამი უმცირესია (ფერმას პრინციპი). ამ ამოცანაში ინვარიანტია: დაცემის კუთხე უდრის არეკვლის კუთხეს.

ანალოგიური მსჯელობის გამოყენებით მარტივად არის შესაძლებელი ფიზიკიდან და გეომეტრიიდან არა ერთი ცნობილი კანონის დამტკიცება, მაგალითად, არეკვლის კანონი, სამკუთხედებსა და მრავალკუთხედებში გავლებული ზოგიერთი მონაკვეთის თვისებების დამტკიცება, ისეთი ამოცანების ამოხსნა, რომელიც დაკავშირებულია მრავალკუთხა და წრიულ ბილიარდთან და სხვ.

უნდა შევნიშნოთ, რომ აუცილებელია განხილული ამოცანის შემდეგ მოსწავლეებს ვუთხრათ, რომ ამოცანის ამოხსნის მარტივი გზის მიუხედავად, შეუძლებელია განხილული ამოცანის ამოხსნის განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, თუ ორის ნაცვლად გვექნება სამი წერტილი. მაგალითად, თუ განვიხილავთ ასეთ ამოცანას: სიბრტყეზე მოცემულია l წრფე და ამ წრფის ერთ მხარეს მდებარე A, B და C წერტილები. l წრფეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $AM + MB + MC$ მანძილების ჯამი იყოს უმცირესი. აღმოჩნდა, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა წერტილის სიმეტრიის გამოყენებით არავითარ შედეგს არ იძლევა. ამ და სხვა უამრავი სახის ისეთი ამოცანების გადასაწყვეტად, სადაც მოითხოვება მინიმუმების და მაქსიმუმების პოვნა, მათემატიკოსებმა შეიმუშავეს ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდი, რომლის განხილვა საშუალო სკოლის კურსს სცილდება და აქ არ შევუდგებით.

ამოცანა 20. მოცემულია საჭადრაკო დაფა. ნებადართულია ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური ზოლის ყველა უჯრის გადაღებვა-თეთრი უჯრების შავად, ხოლო შავი უჯრების თეთრად. ასეთი მოქმედებების ჩატარების შემდეგ შესაძლებელია თუ არა, რომ საჭადრაკო დაფიდან მივიღოთ დაფა, რომელსაც ექნება ზუსტად ერთი შავი უჯრა?

ვთქვათ, თუ ჰორიზონტალური ან ვერტიკალური ზოლი შეიცავს k შავ და 8-k თეთრ უჯრას, მაშინ გადაღებვის შემდეგ მივიღებთ 8-k შავ და k თეთრ უჯრას. ცხადია, რომ შავი უჯრების რაოდენობა შემცირდება

$$(8 - k) - k = 8 - 2k,$$

ლუწი რიცხვით. რადგან ჩატარებული მოქმედებისათვის შავი უჯრების რაოდენობის ლუწობა ინვარიანტია, ამიტომ თავდაპირველად დაფაზე არსებული 32 შავი უჯრიდან შეუძლებელია მივიღოთ ერთი შავი უჯრა.

ამოცანა 21. მოცემულია საჭადრაკო დაფა. ნებადართულია დაფის ნებისმიერი 2×2 ზომის კვადრატის ყველა უჯრის გადაღებვა-თეთრი უჯრების შავად, ხოლო შავი უჯრების თეთრად. შესაძლებელია თუ არა, რომ საჭადრაკო დაფიდან მივიღოთ დაფა, რომელსაც ექნება ზუსტად ერთი შავი უჯრა?

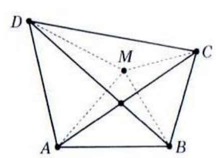
ვთქვათ, ნებისმიერი 2×2 ზომის კვადრატი შეიცავს k შავ და 4-k თეთრ უჯრას, მაშინ გადაღებვის შემდეგ მივიღებთ 4-k შავ და k თეთრ უჯრას. ცხადია, ამ შემთხვევაშიც რომ შავი

უჯრების რაოდენობა შემცირდება $(4 - k) - k = 4 - 2k$, ლუწი რიცხვით. რადგან ჩატარებული მოქმედებისათვის შავი უჯრების რაოდენობის ლუწობა ინვარიანტია, ამიტომ თავდაპირველად დაფაზე არსებული 32 შავი უჯრიდან შეუძლებელია მივიღოთ ერთი შავი უჯრა.

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, რომ მასწავლებელმა მოსწავლეებს გააცნოს ფიგურებში არსებული ისეთი წერტილები, რომლებზეც მიიღწევა ექსტრემუმები. სამკუთხედის შემთხვევაში ეს შედარებით მარტივია, ხოლო ზოგადად მრავალკუთხედებისათვის რთულია. საკლასო მეცადინეობაზე მასწავლებელმა შეიძლება განიხილოს ასეთი ამოცანა.

ამოცანა 19. სიბრტყეზე მოცემულია ამოზნექილი ოთხკუთხედი. მის სიბრტყეში იპოვეთ წერტილი, რომლიდანაც ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილების ჯამი მინიმალურია.

საძიებელ წერტილს წარმოადგენს ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტი–ლი (ნახ. 6). მართლაც, სამკუთხედის უტოლობის ძალით, $AM + MC$ მანძილების ჯამი ნაკლები არ არის AC დიაგონალზე, ხოლო $MB + DM$ ჯამი ნაკლები არ არის BD დიაგონალზე. ამიტომ $AC + BD$ ჯამის მინიმუმი მიიღწევა ამ ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში.



ნახ. 6.

ამოცანა 22. კვადრატული მინდორი დაყვეს 100 ერთნაირი ზომის პატარა კვადრატულ ნაკვეთებად. მათგან 9 ნაკვეთზე გაიზარდა სარეველები. ცნობილია, რომ სარეველები ყოველ წელს ვრცელდება იმ და მხოლოდ იმ ნაკვეთებზე, თუ მას უშუალოდ ესაზღვრება (ე.ი. საერთო გვერდი აქვს) სარეველებიანი ორი ნაკვეთი. დაამტკიცეთ. რომ მთელი მინდორი არასოდეს არ დაიფარება სარეველებით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ყველა იმ ნაკვეთების, ან რამდენიმე ნაკვეთის საზღვრების სიგრძეთა ჯამი, რომელზეც სარეველები იზრდება არ იცვლება, ე.ი. წარმოადგენს ინვარიანტს. ამ ფაქტის დამტკიცება შესაძლებელია დამოუკიდებლად მივანდოთ

მოსწავლეებს ან მივცეთ საშინაო დავალებად. საწყის მომენტში ასეთი ნაკვეთების საზღვრების ჯამი არ აღემატება $4 \times 9 = 36$-ს. ამიტომ, ის ვერასოდეს ვერ გახდება 40-ის ტოლი, რაც ნიშნავს, რომ მთელი მინდორის დაფარვა სარეველებით არასოდეს არ მოხდება.

სასკოლო კურსიდან მათემატიკური ანალიზის ელემენტების ამოღების შემდეგ, აღარ შეისწავლება ფუნქციის წარმოებული, ხოლო ფუნქციის წარმოებულის სასკოლო კურსიდან ამოღებამ თავისთავად გამოიწვია ფუნქციათა ექსტრემუმის საკითხების ამოღება. არა და რეალური ცხოვრება ხომ სულ სხვადასხვა სახის ექსტრემუმის პოვნაა. ადამიანის გონებაც ხომ ისეა მოწყობილი, რომ ყოველთვის ყველაფერში ცდილობს უმცირესით უდიდესის მიიღებას. მასწავლებლებს სისტემატიურად უხდებათ ზოგიერთი სახის ფუნქციებისათვის სხვადასხვა კერძო ხერხის გამოყენება რათა მოსწავლეებს წარმოდგენა შეუქმნას და გამოთვალოს ზოგიერთი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა 23. იპოვეთ XOY სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\sqrt{(x-12)^2+(5-y)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=13.$$

განტოლების მარცხენა ნაწილში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს ორი OM და MC მანძილების ჯამს, სადაც $O(0;0)$, $M(x;y)$, $C(12{,}5)$. ნებისმიერი სამი O, M და C წერტილისათვის სამართლიანია სამკუთხედის უტოლობა:

$$OM+MC \geq OC.$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$OC=\sqrt{144+25}=13,$$

ამიტომ ცხადია, რომ M წერტილი ეკუთვნის OC მონაკვეთს.

ჩვენს მიერ განხილული ამოცანა 18 შეეხებოდა ფიზიკიდან ოპტიკის ცნობილ არეკვლის კანონს და ფერმას პრინციპს, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს გეომეტრიულ ოპტიკაში, მაგრამ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ჩვენ სხვა მიზანი გვაქვს. ჩვენ მიზანს შეადგენს მოვახდინოთ ამოცანა 18-ის ამოხსნის დროს მიღებული გამოცდილების განზოგადება,

დავეყრდნოთ გამოყენებულ ინვარიანტს, რომლის თანახმად დაცემის კუთხე უდრის არეკვლის კუთხეს და ამოვხსნათ შემდეგი შინაარსის

ამოცანა 24. იპოვეთ

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-16x+89}$$

ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

ერთი შეხედვით არ ჩანს რა კავშირი შეიძლება ჰქონდეს მოცემულ ფუნქციას არეკვლის კანონთან, მაგრამ ეს მხოლოდ ერთი შეხედვით. მივყვეთ მსჯელობას. ცხადია, რომ მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, რადგან ორივე ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითია *x*-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ფესვქვეშა გამოსახულებებში გამოვყოთ შესაბამისი სრული კვადრატები. მივიღებთ:

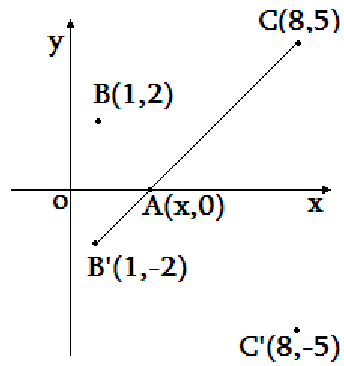
$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x-8)^2+25}=\sqrt{(x-1)^2+(0\pm 2)^2}+\sqrt{(x-8)^2+(0\pm 5)^2}\ .$$

პირველი ფესვქვეშა გამოსახულება გეომეტრიულად წარმოადგენს $A(x,0)$ და B(1,2) ან $A(x,0)$ და B'(1,-2) წერტილებს შორის მანძილს. ცხადია, რომ ეს მანძილები ერთმანეთის ტოლია. ხოლო მეორე ფესვქვეშა გამოსახულება გეომეტრიულად წარმოადგენს $A(x,0)$ და C(8,5) ან $A(x,0)$ და C'(8,-5) წერტილებს შორის მანძილს. აქაც ცხადია, რომ ეს მანძილები ერთმანეთის ტოლია.

ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს, რომ აბსცისათა ღერძზე ვიპოვოთ ისეთი $A(x,0)$ წერტილი, რომ ამ წერტილიდან სიბრტყის რომელიმე ორ B და C, ან B და C', ან C და B', ან B' და C' წერტილებს შორის მანძილების ჯამი უმცირესია (ნახ. 7). რადგან B და B' წერტილები და C და C' წერტილები აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ ინვარიანტს-სინათლის სხივის არეკვლის კანონს, რომლის თანახმად დაცემის კუთხე უდრის არეკვლის კუთხეს, მარტივად დავადგენთ, რომ ოთხივე ეს მანძილი ერთმანეთის ტოლია.

ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ერთ-ერთი მათგანის გამოთვლა. სიმარტივისათვის ავირჩიოთ B'(1,-2) და C(8,5) წერტილები, რადგან ისინი აბსცისათა ღერძის სხვადასხვა

მხარეს მდებარეობენ. საძიებელი $A(x,0)$ წერტილის პოვნა მარტივია, რადგან ის წარმოადგენს ამ წერტილებზე გამავალი წრფის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილს.



ნახ. 7.

შევადგინოთ B’(1,-2) და C(8,5) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. გვაქვს:

$$\frac{x-1}{8-1}=\frac{y+2}{5+2},$$

საიდანაც,

$$y=x-3.$$

ეს წრფე აბსცისათა ღერძს კვეთს A(3,0) წერტილში. ამის შემდეგ დაგვრჩა ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობა $x=3$ წერტილზე. გვაქვს

$$f(x)_{\min}=\sqrt{(3-1)^2+4}+\sqrt{(3-8)^2+25}=7\sqrt{2}.$$

შევნიშნოთ, რომ განხილული ამოცანის ამოხსნის დროს გარდა გამოყენებული ინვარიანტის მეთოდისა, წარმატებით გამოვიყენეთ ალგებრული მეთოდიც და ამ პარაგრაფში ამის შესახებ მინიშნებაც კი არ გავაკეთეთ, რადგან დაწვრილებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ალგებრულ მეთოდზე ქვემოთ გვექნება საუბარი. აქ კი შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამოცანათა ამოხსნის პროცესში რამდენიმე სხვადასხვა მეთოდის სინთეზი მეტად სასარგებლოა და ხელს უწყობს მათემატიკის, როგორც ერთი მეცნიერების აღქმას, ერთიანი სასწავლო დისციპლინის სწავლებას და მოსწავლეებისასთვის ადვილი ხდება გადაცემული სასწავლო მაასალის ათვისება.

ჩვენ განვიხილეთ სამივე სახის (ამოცანები აგებაზე, ამოცანები დამტკიცებაზე და ამოცანები გამოანგარიშებაზე) საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების

ამოხსნა ინვარიანტების და ნახევარინვარიანტების გამოყენებით და ჩამოვაყალიბეთ მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, რომელთა დაცვით სასწავლო პროცესი ხდება უფრო ეფექტური და მოსწავლეებისათვის გაადვილებულია საკითხის სწავლება, იძლევა სასწავლო დროის ეკონომიას და ისინი ფიგურების და სივრცითი სხეულების გეომეტრიულ თვისებებს აღიქვამენ არა როგორც მშრალ ფაქტებს, არამედ ინვარიანტის ან ნახევარინვა–რიანტის მოძებნით დამოუკიდებლად ახდენენ ფიგურების და სივრცითი სხეულების ისეთი სიდიდის/სიდიდეების, ან ობიექტის თვისების/თვისებების დადგენას, რომელიც უცვლელი რჩება ამა თუ იმ გარდაქმნების შესრულების შემდეგ ან აქვთ უდიდესი/უმცირესი მნიშვნელობები, რაც მათ უნვითარებთ ინტუიციას და აძლიერებს მიხვედრის უნარებს. ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების გამოყენება წარმატებით არის შესაძლებელი არა მარტო გეომეტრიული შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის დროს, არამედ ის წარმატებით გამოიყენება ზოგადად მათემატიკური შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას, რომელიც მეცნიერების სხვადასხვა დარგებს განეკუთვნება. მაგალითად, ფიზიკას, ეკონომიკას, საინჟინრო მეცნიერებებს, არქიტექტურას და სხვ. ინვარიანტების და ნახევარ–ინვარიანტების გამოყენება მტკიცე ბაზას აყალიბებს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებისათვის, რაც სასწავლო პროცესის თანამედროვე პრინციპებით წარმართვის ერთ-ერთი განმსაზღვრელი ფაქტორია. ამავე დროს უნდა შევნიშნოთ, რომ საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ინვარიანტების და ნახევარინვარიანტების გამოყენებით ამოხსნისას უნდა დავიცვათ ზომიერება და ამოცანების შერჩევა უნდა მოვახდინოთ დიდი სიფრთხილით, რათა თავიდან ავიცილოთ ზედმეტად რთული ამოცანების განხილვა, რომელთა აღქმა მოსწავლეებს შეიძლება გაუჭირდეთ და შემდეგში შესაძლოა ასეთმა ამოცანებმა მოსწავლეებში იმედგაცრუება გამოიწვიოს. ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ინვარიანტების და ნახევარინვარიანტების გამოყენებით საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის მეთოდის გამოყენებით სათანადო მომზადების მქონე კვალიფიციური მასწავლებლი ეფექტურად მოახდენს მოსწავლეთა მზაობას სასწავლო პროცესისათვის და რთული

მათემატიკური შინაარსის მქონე ამოცანების საკმაოდ მარტივად ამოხსნას, რომლებიც ჩვეულებრივი, ტრადიციული მიდგომით ან არ ამოიხსნება, ან საკმაოდ დიდ დროს და რთული გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს.

დისერტაციას ბოლოს დართული აქვს სათანადო მეთოდური პრინციპების დაცვით შერჩეული საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემა, რომელთა ამოხსნა მიზანშეწონილია ინვარიანტებისა და ნახევარინვარიანტების გამოყენებით და იძლევა სათანადო განმავითარებელ ეფექტს.

§2. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში

მათემატიკის კურსში გეომეტრიული მასალა სხვა საკითხებთან ერთად შეიცავს მონაკვეთის სიგრძის, ფიგურათა ფართობების და სხეულების მოცულობების შესწავლას. თითოეული ეს სიდიდე შემოღებულია გარკვეული ძირითადი თვისებებით, რომლებიც ზოგჯერ სასწავლო სახელმძღვანელოებში ჩამოყალიბებულია აქსიომების სახით, ზოგჯერ დაფუძნებულია მოსწავლეთა თვალსაჩინო წარმოდგენებზე. მაგალითად, უახლოეს წარსულში, აკადემიკოს ა.კოლმოგოროვის გეომეტრიის სასკოლო სახელმძღვანელოებში, რომლებითაც გეომეტრია საშუალო სკოლებში ჯერ კიდევ წინა საუკუნის 70-იანი წლებიდან ისწავლებოდა, ჩამოყალიბებული აქსიომებით განისაზღვრებოდა მონაკვეთის სიგრძე, ფიგურის ფართობი და სივრცითი სხეულის მოცულობა. დაახლოებით ამავე პრინციპით იყო აგებული, ამ 80-იან წლებში აკადემიკოს ა.პოგორელოვის გეომეტრიის სასწავლო სახელმძღვანელოები, რომლებმაც შეცვალა ა.კოლმოგოროვის სახელმძღვანელოები. მასშიც მონაკვეთის სიგრძე, ფიგურის ფართობი და სხეულის მოცულობა ეფუძნებოდა ძირითადი თვისებების სახით ჩამოყალიბებულ დებულებებს, აკადემიკოსების ა.კოლმოგოროვის და ა.პოგორელოვის აქსიომათა სისტემები დიდად არ განსხვავდებოდა ერთმანეთისაგან.

ანალოგიური პრინციპით იყო აგებული არა ერთი მოწინავე საზღვარგარეთული ქვეყნის მათემატიკის სასკოლო განათლება წარსულში. განათლების ექსპერტების ნაწილი მაშინაც მიიჩნევდნენ და ნაწილს დღესაც მიაჩნია, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსის აგება მკაცრ აქსიომატურ სისტემაზე არ იძლევა სასურველ ეფექტს და გეომეტრიული მასალის გადმოცემისათვის საკმარისია ფაქტები იყოს თვალსაჩინო და ეფუძნებოდეს ინტუიციურ წარმოდგენებს. პრაქტიკაში ასეთი სახის სასწავლო სახელმძღვანელოებს მოსწავლეები გაცილებით უკეთეს შედეგზე გაყავს, მაგრამ მოსწავლეებს, რომლებიც სკოლის დამთავრების შემდეგ მათემატიკის შესწავლას აღარ აგრძელებენ აღარ ახსოვთ საშუალო სკოლაში შესწავლილი გეომეტრიული მასალის აბსოლუტური უმრავლესობა. გათვალისწი–ნებული იქნა წარსულის გამოცდილება და საქართველოს განათლების სისტემაში მოქმედი

მათემატიკის ზოგიერთი სასწავლო სახელმძღვანელო აგებულია არა მკაცრ აქსიომატურ მიდგომებზე, არამედ მოსწავლეთა ინტუიციურ წარმოდგენებზე და წარმატებით გამოიყენება სკოლებში.

2.1. ფართობის მეთოდის არსი და მისი სწავლების მეთოდიკა

არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს ჩვენი მიდგომა ბოლო მიდგომისაგან რამდენადმე განსხვავებულია, რადგან ეყრდნობა გეომეტ–რიის კურსის იმ ძირითად თვისებებს-აქსიომებს, რომლებიც მკაცრად ფორმულირებულია. ეს განპირობებულია იმით, რომ ასეთი სახის ამოცანების გადაწყვეტის დროს საქმე გვაქვს უფრო ღრმა და რთული მათემატიკური ფაქტების დადგენასთან, რომლებიც განიხილება მათემატიკის სასკოლო კურსის პროგრამით.

ჩვენი მიდგომით, ფიგურის ფართობის გაცნობის დაწყებამდე მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა გააცნოს ფიგურის ფართობის ძირითადი თვისებები:

- ბრტყელი ფიგურის ფართობი არაუარყოფითი რიცხვია;
- ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ;
- თუ ფიგურას დავყოფთ რამდენიმე ნაწილად, მაშინ ფიგურის ფართობი მისი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია;
- 1-ის ტოლი გვერდის მქონე კვადრატის ფართობი 1-ის ტოლია.

ამის შემდეგ მასწავლებებლი ამ თვისებებზე დაყრდნობით სასკოლო მეცადინეობაზე მოსწავლეებს დაუმტკიცებს მათთვის დიდი ხნის წინ ცნობილ გეომეტრიულ ფაქტს, რომ მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია. შემდეგ თანმიმდევრულად. მეთოდურად მოახდენს პარალელოგრამის, სამკუთხედის, ტრაპეციის და სხვა გეომეტრიული ფიგურების ფართობთა ფორმულების დამტკიცებას.

მასწავლებლები განსაკუთრებულ ყურადღებას უთმობენ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულების სხვადასხვა სახით ჩანაწერს, რომლებიც ერთმანეთისაგან მიიღება ალგებრული გარდაქმნებით და მიღებული ახალი ფორმულების ჩანაწერები სამკუთხედის სხვადასხვა ელემენტებს შეიცავს, რომლებიც ერთმანეთთან გარკვეული

დამოკიდებულებებით არიან დაკავშირებული. აქ საუბარია სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ისეთ ფორმულებზე, რომლებიც არც დამტკიცებული არ არის სასკოლო სახელმძღვანელოში და არც ამოცანის სახით არ არის მოცემული მათემატიკის მოქმედ სასკოლო კურსში. ასეთი სახის ფორმულების მიღება კარგ მასალას წარმოადგენს დამტკიცებაზე გეომეტრიული ამოცანებისათვის.

სასწავლო-მეთოდურ ლიტერატურაში არსებობს შრომების საკმაოდ დიდი რაოდენობა, რომლების დაკავშირებულია ფართობებთან [43], [45], [49], [51], [56], [57], [60], [61], [62], [69], [76], [84], [89], [90]. ამ ნაშრომებიდან უმრავლესობა ეხება ფართობთა შედარებებს, ტოლდიდობისა და ტოლშედგენილობის გარკვევას. შრომებში [66], [52], [75] განხილულია ფართობთა მეთოდის პრაქტიკული გამოყენებები. გარდა იშვიათი გამონაკლისისა [67], თითქმის არ გვხვდება შრომები მოცულობათა მეთოდის გამოყენებაზე.

სამკუთხედების ფართობის გამოთვლაზე განსაკუთრებული ყურადღების გამახვილება გამოწვეულია იმით, რომ მრავალკუთხედი შეგვიძლია დავყოთ სამკუთხედებად და თუ ვისარგებლებთ ფართობის მესამე და მეოთხე თვისებებით, მაშინ შესაძლებელია გამოვთვალოთ მრავალკუთხედის ფართობი. ამასთან მათემატიკის გაღრმავებულად შემსწავლელ ჯგუფებში მოსწავლეებს უნდა ავუხსნათ, რომ მრავალკუთხედის სამკუთხედებად დაყოფის შესაძლებლობის მკაცრი მათემატიკური დამტკიცება საკმაოდ რთულია და სასკოლო პროგრამაში არ განიხილება, რადგან მტკიცების პროცესი სცილდება სკოლის პროგრამას, თუმცა ასეთი წარმოდგენა მეტად თვალსაჩინოა და შესაძლოა მოსწავლეებში გაკვირვებაც კი გამოიწვიოს, მაგალითად, ნებისმიერი მრავალკუთხედი შესაძლებელია სამკუთხედებად დავყოთ მისი ერთი წვეროდან გავლებული ყველა დიაგონალით და ა.შ. მრავალკუთხედის სამკუთხედებად დაყოფა მოსწავლეებს ფართობების გამოსათვლელი ფორმულების დამტკიცებამდეც აქვთ გამოყენებული მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების გამოსათვლელი ფორმულის დადგენის დროს და ეს იმდენად ბუნებრივად არის აღქმული მოსწავლეების მიერ, რომ ამ კუთხით რაიმე პრობლემა სასწავლო პროცესში არ წარმოიშვება.

ფიგურის ფართობის მეორე ძირითადი თვისებებიდან მარტივად გამომდინარეობს, რომ თუ თუ ორი ფიგურა შედგება ერთმანეთის ტოლი ფიგურებისაგან ე.ი. ეს ფიგურები ტოლშედგენილია, მაშინ მათ ტოლი ფართობები აქვთ ე.ი. ეს ფიგურები ტოლდიდია. სამართლიანია ამ წინადადების შებრუნებული წინადადებაც. კერძოდ, ორი ტოლდიდი მრავალკუთხედიდან ყოველთვის შესაძლებელია ერთი მათგანი დავყოთ ისეთ ნაწილებად, რომ მათი შეერთებით მივიღოთ მეორე მრავალკუთხედი. მოსწავლეებს ეს წინადადებაც დამტკიცების გარეშე უნდა გავაცნოთ, რადგან მისი დამტკიცებაც სცილდება სასკოლო მათემატიკის კურსს. ყოველივე ეს ქმნის იმის წანამძღვარს, რომ მოსწავლეები მარტივად გააკეთებენ დასკვნას:

ორი მრავალკუთხედი ტოლდიდია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ტოლ-შედგენილია. ეს წინადადება ბოიაი-ჰერვინის თეორემის სახელით არის ცნობილი [45].

ზოგიერთი სახის არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანის (ამოცანები დამტკი-ცებაზე, ამოცანები გამოანგარიშებაზე, ამოცანები აგებაზე) ამოხსნის პროცესი ზოგჯერ საკმაოდ მარტივდება ბოიაი-ჰერვინის თეორემის გამოყენებით. მეთოდი, რომელსაც საკმაოდ ეფექტური პრაქტიკული გამოყენება აქვს ცნობილია სახელით „დაჭრა და შეწებება“.

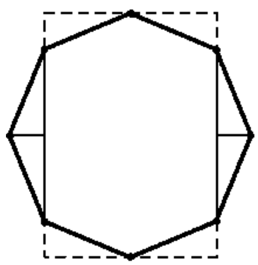
რაიმე გეომეტრიული ფიგურის დაჭრა ისეთ ნაწილებად, რომ მათი შეწებებით მივიღოთ სხვა, ჩვენთვის საჭირო გეომეტრიული ფიგურა, მოითხოვს გარკვეულ გონებამახვილობას და ერთი შეხედვით შეიძლება არც ჩანდეს, მაგრამ სწორედ აქ ვლინდება ჩატარებული მსჯელობის ლოგიკური თანმიმდევრობა, რომელიც ახლავს მათემატიკური ფაქტების დამტკიცებას. ეს სრულ შესაბამისობაშია არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნის პროცესთან. „დაჭრის და შეწებების“ მეთოდის გამოყენებით განვიხილოთ რამდენიმე პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი რვაკუთხედის ფართობი მისი უდიდესი და უმცირესი დიაგონალების ნამრავლის ტოლია.

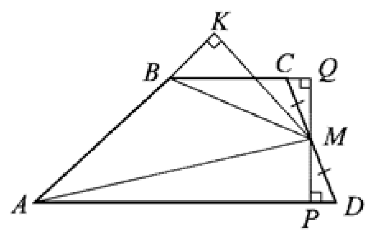
ავაგოთ მოცემული რვაკუთხედისათვის ისეთი მართკუთხედი, რომელიც ნახაზზეა გამოსახული. რვაკუთხედი და მართკუთხედი ტოლდიდია, რადგან ნახაზზე გამოსახული მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია (ნახ. 7). ამ ფაქტის დამტკიცება მარტივია, რადგან

ტოლია ამ მართკუთხა სამკუთხედების კათეტები და ჰიპოტენუზა. მათი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ისინი ტოლდიდია. ვაჩვენოთ, რომ აგებული მართკუთხედის ფართობი წესიერი რვაკუთხედის უდიდესი და უმცირესი დიაგონალების ნამრავლის ტოლია.

მართლაც, ცხადია, რომ მართკუთხედის დიდი გვერდი წარმოადგენს რვაკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს, რომელიც თავის მხრივ წესიერი რვაკუთხედის უდიდესი დიაგონალია. ასევე, მარტივად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მართკუთხედის მეორე გვერდი წესიერი რვაკუთხედის დიაგონალია.



ნახ. 8.



ნახ. 9.

ამრიგად, მართკუთხედის ფართობი, ანუ იგივე წესიერი რვაკუთხედის ფართობი მისი უდიდესი და უმცირესი დიაგონალების ნამრავლის ტოლია.

იგივე მიდგომით შესაძლებელია განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შუახაზი ამ სამკუთხედიდან ჩამოჭრის მისი ფართობის მეოთხედის ტოლ სამკუთხედს.

ამ ამოცანის განხილვა შესაძლებელია მაშინაც კი, როცა მოსწავლეებმა არ იციან მსგავსი ფიგურების ფართობთა ფარდობის შესახებ. რადგან ამოცანის ამოხსნა დიდ სირთულეებთან არ არის დაკავშირებული, შესაძლებელია, რომ ეს ამოცანა საშინაო დავალებად მივცეთ მოსწავლეებს.

ამოცანა 3. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფართობი მისი ფერდის და ამ ფერდზე მეორე ფერდის შუაწერტილიდან დაშვებული მართობის სიგრძეთა ნამრავლის ტოლია.

ვაჩვენოთ, რომ

$$S = AB \cdot MK,$$

სადაც S -ტრაპეციის ფართობია ნახ. 9, მაგრამ,

$$S = S_{AMB} + S_{AMD} + S_{BMC}.$$

M წერტილზე გავავლოთ ტრაპეციის სიმაღლე. მაშინ

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MP, \qquad S_{BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot MQ.$$

რადგან მართკუთხა CMQ და DMP სამკუთხედები ტოლია ჰიპოტენუზითა და მახვილი კუთხით, $\Delta CMQ = \Delta DMP$, ამიტომ $MQ = MP.$ ამიტომ

$$S_{AMD} + S_{BMC} = \frac{1}{2}\left(AD + BC\right)\cdot MP = \frac{1}{2}\cdot\frac{AD + BC}{2}\cdot PQ = \frac{1}{2}S.$$

ამრიგად,

$$S = S_{AMB} + \frac{1}{2}S,$$

საიდანაც

$$S = 2S_{AMB}.$$

მაგრამ,

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot MK.$$

საიდანაც ცხადია, რომ

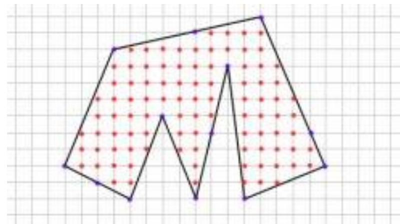
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot MK.$$

ფიგურათა ფართობის მეთოდის სრულყოფილად შესწავლის შემდეგ მოსწავლეებს შეიძლება გავაცნოთ მრავალკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი კიდევ ერთი საინტერესო ფორმულა, რომელიც ავსტრიელ მათემატიკოსს გეორგ პიკს ეკუთვნის. მან დაადგინა, რომ იმ მრავალკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები კვადრატული ბადის წვეროებს ემთხვევა, გამოითვლება ფორმულით:

$$s = N + \frac{1}{2}m - 1,$$

სადაც S-მრავალკუთხედის ფართობია, N-მრავალკუთხედის შიგა არეში მოთავსებული ბადის კვანძები, ხოლო M-მრავალკუთხედის გვერდებზე და წვეროებში მოთავსებული ბადის კვანძები [45].

ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურის საზღვარზე მდებარე ბადის კვანძების რაოდენობაა 13, ხოლო ფიგურის შიგა არის ბადის კვანძების რაოდენობა კი-95.



პიკის ფორმულის თანახმად, ნახაზზე გამოსახული ფიგურის ფართობი

$$s = 95 + \frac{13}{2} - 1 = 100{,}5$$

კვადრატული ერთეულის ტოლია.

პიკის თეორემა საკმაოდ ლამაზია და საინტერესოც, მაგრამ პრაქტიკული გამოყენება ძალზედ მცირე აქვს, შეიძლება ითქვას, რომ პრაქტიკაში არ გამოიყენება.

მიუხედავად იმისა, რომ არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას საკმაოდ ეფექტურია ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენება, მის შესახებ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკასა და სამეცნიერო-პოპულარულ ლიტერატურაში ინფორმაცია მეტად მწირია, რაც ჩვენი ვარაუდით იმის მთავარი მიზეზია, რომ ამ მეთოდის გამოყენებისაგან ხშირად თავს იკავებენ არა მარტო მოსწავლეები, არამედ მასწავლებლებიც კი, როცა მისი გამოყენება საკმაოდ ეფექტურია და ამოცანის ამოხსნა თვალსაჩინო ხდება და ამოხსნის პროცესი საგრძნობლად მარტივდება.

გავარკვიოთ ფართობის და მოცულობის მეთოდის არსი. განვიხილავთ ფართობის და მოცულობის სხვადასხვა თვისებებს და ვწერთ განტოლებებს, რომლებშიც ერთმანეთს უკავშირდება ამოცანის პირობაში მოცემული და საძიებელი სიდიდეები. უფრო ხშირად ფართობის და მოცულობის თვისებებიდან გამოიყენება მისი ადიციურობა და ის თვისებები, რომელთა საშუალებითაც ამოსახსნელი ამოცანა დაიყვანება ისეთ განტოლებაზე, ან განტოლებათა სისტემაზე, რომლის ამოხსნის შემდეგ ვღებულობთ ამოცანის საძიებელ სიდიდეს ან სიდიდეებს.

ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენების იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ განვიხილავთ რაიმე ფიგურის ფართობს/მოცულობას როგორც მისი ნაწილების ფართობთა/

მოცულობათა ჯამს, ამასთან თითოეული ნაწილის ფართობის/მოცულობის ჩაწერას ვახდენთ ჩვენთვის ხელსაყრელი სახით, რის შედეგადაც მივიღებთ განტოლებას, ან განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს ამოცანის საძიებელ სიდიდეს ან სიდიდეებს და საძიებელი სიდიდის/სიდიდეების პოვნა საგრძნობლად მარტივდება.

ცხადია, რომ ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენება ისეთი გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს, რომელთა პირობები შეიცავს ფიგურათა ფართობებს და მოცულობებს ბუნებრივია, მაგრამ გამოყოფას იმსახურებს გეომეტრიული ამოცანების ის კლასი, რომელთა პირობებში ფიგურათა ფართობები და მოცულობები მოცემული არ არის. ამ შემთხვევაში ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესში ფიგურის ფართობის და გეომეტრიული სხეულის მოცულობის შემოტანა განიხილება როგორც ერთ-ერთი დამატებითი დამხმარე ელემენტი. განსაკუთრებით საინტერესოა დამატებითი დამხმარე ელემენტების გამოყენებით აგების არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა, რომელსაც ჩვენ ცალკე განვიხილავთ.

მიუხედავად სიმარტივისა, ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენება შესაძ-ლებელია საკმაოდ რთული გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცა-ნების ამოხსნის დროს და საგანმანათლებლო პროცესში მისი ჩართვა მეთოდურად გამართლებულია. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის არსიდან გამომდინარე მისი გამოყენება ხდება როგორც პლანიმეტრიული, ისე სტერეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნისას. ცხადია, რომ პირველ შემთხვევაში ვიყენებთ ფართობთა ტოლობას, ხოლო მეორე შემთხვევაში მოცულობათა ტოლობას, მაგრამ რადგან ამოცანათა ამოხსნის მიმართ მიდგომები, იქნება ის პლანიმეტრიული, თუ სტერეომეტრიული შინაარსის ერთნაირია და ამიტომ ისინი გავაერთიანეთ ერთ მეთოდად. ნაცვლად ტერმინისა-ფართობისა და მოცულობის მეთოდი, ჩვენ პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ვისარგებლებთ ფართობის მეთოდით, ხოლო სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას მოცულობის მეთოდით, რაც რასაკვირველია არ ცვლის ფართობისა და მოცულობის მეთოდის არსს.

შევნიშნოთ, რომ ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია ზოგასაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ცნობილი ფაქტების მარტივად დამტკიცება. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სამკუთხედის ბისექტრისების შესახებ თეორემის დამტკიცება, რომელიც მოსწავლეებს მივცეთ ამოცანის სახით. დამტკიცების პროცესი სასკოლო მათემატიკის სახელ-მძღვანელოში მოყვანილი დამტკიცებისაგან რამდენადმე განსხვავებულია.

ამოცანა 4. თეორემა ბისექტრისების შესახებ. ვთქვათ, BH არის ABC სამკუთხედის B კუთხის ბისექტრისა. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{BC}.$$

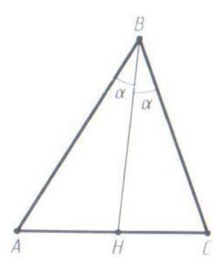
ვთქვათ, $\angle B = 2\alpha.$, მაშინ ნახ. 10–დან ჩანს, რომ

$$\frac{S_{ABH}}{S_{CBH}} = \frac{\frac{1}{2} BH \cdot AB \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} BH \cdot BC \cdot \sin\alpha} = \frac{AB}{BC}.$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{S_{ABH}}{S_{CBH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot H}{\frac{1}{2} CH \cdot H} = \frac{AH}{CH}.$$

სადაც h-არის ABC სამკუთხედის B წვეროდან დაშვებული სიმაღლე. მიღებული ტოლობების მარჯვენა ნაწილების გატოლებით მივიღებთ საძიებელ ტოლობას.



ნახ. 10.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოხსნა უფრო მოსახერხებელია ფართობთა მეთოდით, ვიდრე სხვაგვარი მიდგომით, ამასთან ერთი ამოცანა ეხება

უშუალოდ სამკუთხედის ფართობის გამოსაანგარიშებელი ფორმულის დადგენას, ხოლო მეორე ამოცანის პირობაში სიტყვა ფართობი ნახსენები საერთოდ არ არის.

ამოცანა 5. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = p^2 tg\frac{A}{2} tg\frac{B}{2} tg\frac{C}{2},$$

სადაც a, b და c არის ABC სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია, ხოლო p სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრი $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

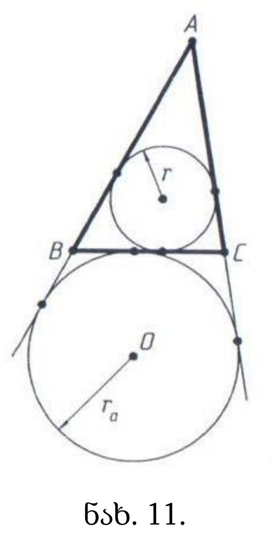
ვთქვათ, O - ABC სამკუთხედის გარეჩახაზული წრეწირის ცენტრია, რომელიც ეხება BC გვერდს, r_a -მისი რადიუსია (ნახ. 11).

მაშინ ცხადია, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} - S_{OBC} = \frac{1}{2} r_a \left(AB + AC - BC\right) = \frac{1}{2} r_a \left((AB + AC + BC) - 2BC\right) =$$

$$= \frac{1}{2} r_a \left(2p - 2a\right) = r_a (p - a)$$

მეორეს მხრივ, თუ გავაგრძელებთ AB გვერდს და მის გაგძელებაზე გარეჩახაზულ წრეწირთან შეხების წერტილს აღვნიშნავთ D-თი, და გავითვალისწინებთ, რომ წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებების მონაკვეთები ერთნამეთის ტოლია, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $AD = p$.



ნახ. 11.

მართკუთხა ADO სამკუთხედიდან

$$r_a = ptg\frac{A}{2}.$$

ე.ი. თუ შევიტანთ მიღებულ მნიშვნელობას ABC სამკუთხედის ფართობის ფორმულაში მივიღებთ:

$$S = p(p-a)tg\frac{A}{2}.$$

ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ, რომ

$$S == p(p-b)tg\frac{B}{2} \text{ და } S = p(p-c)tg\frac{C}{2}.$$

თუ მიღებულ ტოლობებს წევრ-წევრად ერთმანეთზე გადავამრავლებთ და მხედველობაში მივიღებთ ჰერონის ფორმულას, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ამოცანა 6. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია BC და AD. ტრაპეციაში ჩახაზულია წრეწირი. CD რკალზე აღებულია M წერტილი და შეერთებულია ტრაპეციის ყველა წვეროსთან. CMD სამკუთხედის CMD კუთხე b -ს ტოლია, ხოლო AMB სამკუთხედში ცნობილია ABM და BAM კუთხეთა სხვაობა, რომელიც a -ს ტოლია. იპოვეთ ABM სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის r რადიუსის შეფარდება ABM სამკუთხედის p ნახევარპერიმეტრთან.

ვიპოვოთ ABM სამკუთხედის ყველა კუთხე (ნახ. 12). შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\angle BAM = \alpha, \quad \angle ABM = \beta, \quad \angle BMA = \gamma.$$

ამოცანის პირობის ძალით $\beta - \alpha = a.$ ჩახაზული კუთხის თვისებით α კუთხე იზომება BCM რკალის ნახევრით, β კუთხე- ADM რკალის ნახევრით, კუთხე $\angle CMD = b$ იზომება AB, BC და AD რკალების ნახევარჯამით. წრეწირში ჩახაზული ტრაპეცია ტოლფერდაა, ამიტომ AB და CD რკალები ტოლია. ამრიგად,

$$\alpha + \beta = b.$$

მაშინ ტოლობებიდან

$$\beta - \alpha = a, \quad \beta + \alpha = b.$$

გვაქვს:

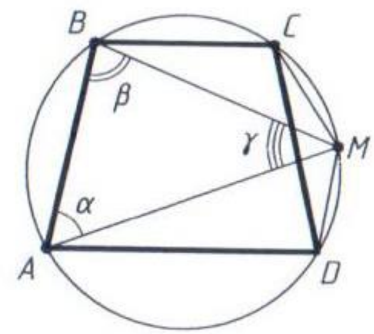
$$\beta = \frac{a+b}{2}, \quad \alpha = \frac{b-a}{2}.$$

ასევე გვაქვს:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - b.$$

დავწეროთ ABM სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ორი ფორმულა:

$$S_{ABM} = pr, \quad S_{ABM} = p^2 tg\frac{A}{2} tg\frac{B}{2} tg\frac{C}{2}.$$



ნახ. 12.

ამ ფორმულების მარჯვენა მხარეთა გატოლებით და მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\frac{r}{p} = tg\frac{a+b}{4} tg\frac{b-a}{4} ctg\frac{b}{2}.$$

ამოცანა 7. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში მისი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან ფერდებამდე მანძილების ჯამი ფერდზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია.

იმ შემთხვევაში, როცა M წერტილი ემთხვევა სამკუთხედია ან A ან B წვეროს, ცხადია და დამტკიცებას არ საჭიროებს. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა M წერტილი არ ემთხვევა სამკუთხედის არც A და არც B წვეროს.

ვთქვათ, მოცემული სამკუთხედის ფერდის სიგრძე a–ს ტოლია. ფერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე h–ის ტოლია, ხოლო M წერტილიდან ფერდებამდე მანძილებია h_1 და h_2. CM მონაკვეთი ABC სამკუთხედს ყოფს ორ ACM და BCM სამკუთხედებად. ცსადია, რომ

$$S_{ABC} = S_{ACM} + S_{BCM}.$$

მაგრამ, რადგან

$$S_{ABC} = \frac{ah}{2}, \quad S_{ACM} = \frac{ah_1}{2}, \quad S_{BCM} = \frac{ah_2}{2},$$

ამიტომ გვაქვს:

$$\frac{ah}{2} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2}.$$

საიდანაც,

$$h = h_1 + h_2.$$

ანალოგიური მეთოდით შესაძლებელია დამტკიცოთ სასკოლო გეომეტრიის და უფრო რთული შინაარსის მქონე გეომეტრიული ფაქტები, რომლებიც თეორემების სახით არის ცნობილი, მაგრამ მასწავლებელს მეცადინეობებზე შეუძლია ისინი განიხილოს როგორც ამოცანები დამტკიცებაზე. ასეთი მიდგომით შესაძლებელია დავამტკიცოთ ჩევის და მენელაის თეორემები, რომელთაც შემდეგ გამოვიყენებთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ზოგიერთი არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნისას.

2.2. მოცულობის მეთოდის არსი და მისი სწავლების მეთოდიკა

რა მიდგომაც გვქონდა ფართობების შესწავლის დროს, ანალოგიური მიდგომები, გვაქვს მოცულობის შესწავლის მიმართაც. სანამ დაიწყებს გეომეტრიული სხეულების მოცულობის შესწავლას მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა გააცნოს გეომეტრიული სხეულების მოცულობების თვისებები:

- გეომეტრიული სხეულის მოცულობა არაუარყოფითი რიცხვია;
- ტოლ გეომეტრიულ სხეულებს ტოლი მოცულობები აქვთ;
- თუ გეომეტრიულ სხეულს დავყოფთ რამდენიმე ნაწილად, მაშინ გეომეტრიული სხეულის მოცულობა მისი ნაწილების მოცულობათა ჯამის ტოლია;
- 1-ის ტოლი გვერდის მქონე კების მოცულობა 1-ის ტოლია.

ამის შემდეგ მასწავლებელი ამ თვისებებზე დაყრდნობით სასკოლო მეცადინეობაზე მოსწავლეებს დაუმტკიცებს მათთვის დიდი ხნის წინ ცნობილ გეომეტრიულ ფაქტს, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი სიგრძის, სიგანის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. შემდეგ თანმიმდევრულად. მეთოდურად მოახდენს მართი პარალელეპიპედის,

პრიზმის, პირამიდის, ბრუნვითი სხეულების და სხვა გეომეტრიული სხეულების მოცულობათა ფორმულების დამტკიცებას.

გეომეტრიული სხეულების მეორე თვისებებიდან მარტივად გამომდინარეობს, რომ თუ ორი გეომეტრიული სხეული შედგება ერთმანეთის ტოლი ნაწილებისაგან ე.ი. ეს გეომეტრიული სხეულები ტოლშედგენილია, მაშინ მათ ტოლი მოცულობები აქვთ ე.ი. ეს გეომეტრიული სხეულები ტოლდიდია. სწორედ ეს გვეხმარება მოცულობის მეთოდის არსის გარკვევასა და მის პრაქტიკულ გამოყენებაში.

განვიხილოთ მოცულობის მეთოდის გამოყენება ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს, რომელთა პირობაში მოცულობის შესახებ არაფერი არ არის ნათქვამი. მოცულობის მეთოდის გამოყენება განსაკუთრებით ეფექტურია ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს, სადაც მოითხოვება მანძილის პოვნა წერტილიდან სიბრტყემდე ან წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გამოთვლის დროს. უნდა შევნიშნოთ, რომ ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნის დროს მოცულობის მეთოდის გამოყენებისას აუცილებელი აღარ არის წერტილის პროექციის აგება წრფეზე, ან წერტილის პროექციის აგება სიბრტყეზე, ან წრფის გეგმილების აგება სიბრტყეზე და სხვ. მსგავსი აგებების შესრულება, რაც ხშირად დამატებით დროს მოითხოვს და სხვადასხვა სახის გართულებები შემოაქვს ამოხსნის პროცესში, გარდა იმისა რომ ახდენს ნახაზის გადატვირთვას.

ამოცანა 8. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის წიბო 1-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან A_1BT სიბრტყემდე, სადაც T-არის AD წიბოს შუაწერტილი.

თავდაპირველად ვიპოვოთ A_1ABT პირამიდის მოცულობა, გავითვალისწინოთ, რომ ამ პირამიდის ფუძეა მართკუთხა ABT სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AT=\frac{1}{2}$ და AB=1, ხოლო სიმაღლეა $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის $AA_1=1$ წიბო (ნახ. 13).

ცხადია, რომ

$$V_{A_1ABT}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABT}\cdot A_1A=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}.$$

მეორეს მხრივ, ამ პირამიდის მოცულობის გამოთვლა მოვახდინოთ ისე, რომ მის ფუძედ განვიხილოთ A_1BT სამკუთხედი, ხოლო სიმაღლედ AH, სადაც AH არის მანძილი A წერტილიდან A_1BT სიბრტყემდე, ანუ საძიებელი მანძილია.

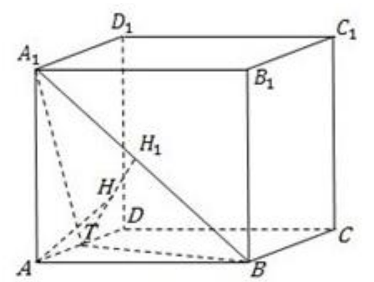
$$V_{ABTA_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1BT} \cdot AH,$$

გამოვსახოთ საძიებელი მანძილი. გვაქვს:

$$AH = \frac{3V_{ABTA_1}}{S_{\Delta A_1BT}} \cdot$$

გამოვთვალოთ ტოლფერდა A_1BT სამკუთხედის ფართობი. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$S_{\Delta A_1BT} = \frac{1}{2} TH_1 \cdot A_1B \cdot$$



ნახ. 13.

რადგან ATB მართკუთხა სამკუთხედია, ამიტომ

$$TB = \sqrt{AT^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot$$

ასევე მართკუთხა TH_1B სამკუთხედიდან გვაქვს,

$$TH_1 = \sqrt{TB^2 - H_1B^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

მიღებული მნიშვნელობები გავითვალისწინოთ A_1BT სამკუთხედის ფართობის ფორმულაში, გვექნება:

$$S_{\Delta A_1BT} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot$$

საძიებელი მანძილი კი ტოლია: $AH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

ამოცანა 9. ერთეულოვან $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში იპოვეთ მანძილი A წვეროდან (BDA_1) სიბრტყემდე.

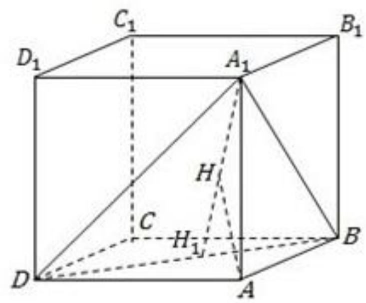
თავდაპირველად ვიპოვოთ A_1ABD პირამიდის მოცულობა, გავითვალისწინოთ, რომ ამ პირამიდის ფუძეა მართკუთხა ADB სამკუთხედი, რომლის გვერდებია $AD = AB = 1$, ხოლო სიმაღლე, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის $AA_1=1$ წიბოა (ნახ. 14).

ცხადია, რომ

$$V_{A_1ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABD} \cdot A_1A = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

მეორეს მხრივ, ამ პირამიდის მოცულობის გამოთვლა მოვახდინოთ ისე, რომ მის ფუძედ განვიხილოთ A_1BD სამკუთხედი, ხოლო სიმაღლედ AH, სადაც AH არის მანძილი A წერტილიდან BDA_1 სიბრტყემდე, ანუ საძიებელი მანძილი.

$$V_{A_1ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1BD} \cdot AH,$$



ნახ. 14.

გამოვსახოთ საძიებელი მანძილი. გვაქვს:

$$AH = \frac{3V_{A_1ABD}}{S_{\Delta A_1BD}}.$$

გამოვთვალოთ ტოლფერდა A_1BD სამკუთხედის ფართობი. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$S_{\Delta A_1BD} = \frac{1}{2}DB\cdot A_1H_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ: $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

ფართობების და მოცულობების შესახებ არსებული ყველა ამოცანის ამოხსნის უნივერსალური მეთოდი/მეთოდები არ არსებობს, მაგრამ არსებობს მიდგომები, რომელთა

გამოყენებით შესმლებელია ამოცანების გარკვეული კლასის ამოხსნა. ფართობისა და მოცულობის მეთოდი ჩვენ გამოვიყენეთ ისეთი ამოცანების ამოხსნის დროს, რომელთა პირობებში ნახსენები არ არის ფიგურათა ფართობები და გეომეტრიულ სხეულთა მოცულობები. ყოველივე ეს გვაძლევს იმის საფუძველს, რომ დავასკვნათ, არსტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენება მეტად ეფექტურია, მოსწავლეებში ანვითარებს სივრცით წარმოდგენებს და ხელს უწყობს გეომეტრიული ცოდნის დონის ამაღლებას.

2.3. არასტანდარტული პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები

არასტანდარტული პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენება ხშირად პლანიმეტრიიდან და სტერეომეტრიიდან ერთმანეთის ანალოგიური შინაარსის ფაქტებზე დაყრდნობით ხდება, რაც მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს ფართობისა და მოცულობის მეთოდი აღიქვან როგორც ერთიანი, მთლიანი. ეს კი დახმარებას უწევს პლანიმეტრიისა და სტერეომეტრიის მასალის სწავლების ერთიან სისტემაში მოყვანას.

პლანიმეტრიისა და სტერეომეტრიის შინაარსობრივად მსგავსი უამრავი ფაქტი არსებობს და გაკვეთილზე მათი მოყვანა და მსგავსების ანალიზი გამოცდილ მასწავლებელს არ გაუჭირდება. ჩვენი ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით დავრწმუნდით, რომ ასეთი სახის ინფორმაციებიდან, მიზანშეწონილია სასწავლო მეცადინეობაზე საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სამკუთხედის ფართობის და პირამიდის მოცულობის გამოსახვა. ასევე კარგ ეფექტს მისცემს მასწავლებელს წრეწირის ფართობსა და ბირთვის მოცულობის გამოსახვა, სიბრტყეზე ვექტორთა სკალარული ნამრავლისა და სივრცეში ვექტორთა შერეული ნამრავლების გამოსახვა, ვექტორების გამოსახვა სიბრტყეზე და სივრცეში და სხვ.

ამოცანა 10. ვთქვათ, ABC სამკუთხედის ფართობია S. სამკუთხედის AC და BC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ

$$\frac{CM}{AC}=k_1 \text{ და } \frac{CN}{BC}=k_2.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$S_{CMN}=k_1\cdot k_2\cdot S_{ABC}.$$

რადგან ABC და MNC სამკუთხედებს საერთო C კუთხე აქვთ, ამიტომ ამ სამკუთხედების ფართობები ჩავწეროთ სახით:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C,\;\; S_{MNC}=\frac{1}{2}MC\cdot NC\sin C.$$

მათი ფარდობა მოგვცემს:

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}MC\cdot NC\sin C}{\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C}=\frac{MC}{AC}\cdot\frac{CN}{BC}=k_1\cdot k_2.$$

ანუ

$$S_{CMN}=k_1k_2S_{ABC}.$$

განვიხილოთ ამ ამოცანის სივრცული ანალოგი.

ამოცანა 11. ვთქვათ, ABCD ტეტრაედრის მოცულობაა V. ტეტრაედრის DA, DB და DC წიბოებზე შესაბამისად აღებულია M, N და P წერტილები ისე, რომ

$$\frac{MD}{AD}=k_1\;,\;\; \frac{ND}{BD}=k_2 \text{ და } \frac{PD}{CD}=k_3.$$

დაამტკიცეთ, რომ MNDP ტეტრაედრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{MNPD}=k_1\cdot k_2\cdot k_3\cdot V_{ABCD}.$$

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ მისი O სათავე დავამთხვიოთ პირამიდის D წვეროს. მაშინ D წვეროს კოორდინატებია (0,0,0). ვთქვათ, პირამიდის წვეროების კოორდინატებია $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ და $C(x_3,y_3,z_3)$.

ცხადია, რომ

$$DA(x_1,y_1,z_1),\; DB(x_2,y_2,z_2) \text{ და } DC(x_3,y_3,z_3).$$

მაშინ ABCD ტეტრაედრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix}.,$$

რადგან

$$MD = k_1 \cdot AD, \quad DN = k_2 \cdot BD, \text{ და } DP = k_3 \cdot CD,$$

ამიტომ

$$DM\left(k_1x_1, k_1y_1, k_1z_1\right),\ DN\left(k_2x_2, k_2y_2, k_2z_2\right) \text{ და } DP\left(k_3x_3, k_3y_3, k_3z_3\right).$$

მაშინ MNDP ტეტრაედრის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{MNPD} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} k_1x_1 & k_1y_1 & k_1z_1 \\ k_2x_2 & k_2y_2 & k_2z_2 \\ k_3x_3 & k_3y_3 & k_3z_3 \end{Vmatrix} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{6}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot V_{ABCD}.$$

ამ მასალის განხილვის შემდეგ მიზანშეწონილია მასწავლებელმა განიხილოს ისეთი შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნის პროცესი დაიყვანება განხილული ამოცანების ამოხსნაზე, რაც ხელს უწყობს მიღებული თეორიული ცოდნის განმტკიცებას და მის პრაქტიკაში გამოყენებას. განსახილავი არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებიდან შევარჩიეთ რამოდენიმე ამოცანა, პლანიმეტრიიდან და სტერეომეტრიიდან, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილად მიგვაჩნია სასკოლო მეცადინეობაზე.

ამოცანა 12. მოცემულ ABC სამკუთხედში O წერტილი ისეა შერჩეული, რომ AOB, BOC და AOC სამკუთხედების ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $1:2:3$. OA, OB და OC წრფეები BC, AB და AC გვერდებს გადაკვეთენ შესაბამისად A_1, B_1 და C_1 წერტილებში. ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ააგეთ O წერტილი და იპოვეთ $A_1B_1C_1$ და ABC სამკუთხედების ფართობთა ფარდობა.

დავუშვათ, რომ საძიებელი O წერტილი აგებულია და OA, OB და OC წრფეები BC, AB და AC გვერდებს გადაკვეთენ შესაბამისად A_1, B_1 და C_1 წერტილებში . გავარკვიოთ რისი ტოლია $\frac{AB_1}{B_1C}$ ფარდობა (ნახ. 15).

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{AOB_1}}{S_{COB_1}}=\frac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}}.$$

მაგრამ რადგან,

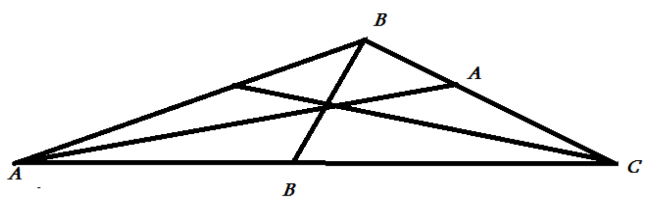
$$S_{ABB_1}=S_{AOB}+S_{AOB_1} \text{ და } S_{CBB_1}=S_{BOC}+S_{COB_1},$$

ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{S_{AOB_1}}{S_{COB_1}}=\frac{S_{AOB}+S_{AOB_1}}{S_{BOC}+S_{COB_1}}.$$

საიდანაც პროპორციის თვისების ძალით მარტივად მივიღებთ:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{1}{2}.$$



ნახ. 15.

ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ, რომ

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_{AOC}}{S_{AOB}}=\frac{3}{1} \text{ და } \frac{BC_1}{AC_1}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}=\frac{2}{3}.$$

პირველად დავსახოთ O წერტილის აგების გეგმა. ჯერ ავაგოთ A_1, B_1 და C_1 წერტილები, რომელთა აგება ცხადია და ამის შემდეგ ავაგოთ AA_1, BB_1 და CC_1 წრფეების გადაკვეთის წერტილი. ამის შემდეგ გამოვთვალოთ საძიებელი ფარდობა.

მონაკვეთების მიღებული ფარდობებიდან მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ

$$\frac{CA_1}{BC}=\frac{3}{4},\ \frac{CB_1}{AC}=\frac{2}{3},$$

ამიტომ

$$\frac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{S_{A_1C_1B}}{S_{ABC}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10} \text{ და } \frac{S_{B_1C_1A}}{S_{ABC}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}.$$

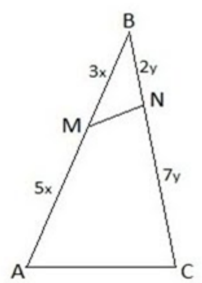
საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{10}S_{ABC} - \frac{1}{5}S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

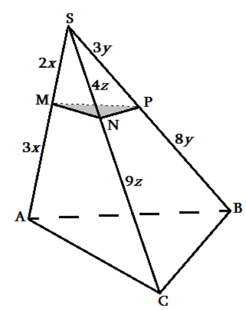
ამოცანა 12. ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ AM : MB = 5 : 3 და BN : NC = 2 : 7. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ MNB სამკუთხედის ფართობი 11-ის ტოლია.

ვთქვათ, BM=3x და BN=2y. მაშინ AM=5x და CN=7y. რადგან AB=AM+MB, ამიტომ AM=8x. ანალოგიურად, BC=9y (ნახ.16). ამიტომ გვაქვს:

$$MB : AB = 3 : 8 \text{ და } BN : NC = 2 : 9.$$



ნახ. 16.



ნახ. 17.

თუ გავითვალისწინებთ ამოცანა 1-ის შედეგს, მივიღებთ:

$$11 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot S_{ABC}.$$

საიდანაც,

$$S_{ABC} = 11 \cdot 12 = 132.$$

ამ ამოცანის განხილვის შემდეგ მიზანშეწონილია მასწავლებელმა განიხილოს ასეთი

ამოცანა 13. SABC პირამიდის SA, SB და SC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M, N და P წერტილები ისე, რომ SM : MA = 2 : 3, SN : NB = 3 : 8 და SP : PC = 4 : 9. იპოვეთ SABC პირამიდის მოცულობა, თუ SMNP პირამიდის მოცულობა 24-ის ტოლია.

მოსწავლეები წინა ამოცანის ანალოგიურად დაამყარებენ დამოკიდებულებებს SM და SA გვერდებს შორის (ნახ. 17), კერძოდ:

$$SM : SA = 2 : 5.$$

SN და SB გვერდებს შორის:

$$SN : SB = 3 : 11.$$

ბოლოს კი-SP და SC გვერდებს შორის:

$$SP : SC = 4 : 13.$$

ისარგებლებენ ამოცანა 2-ის შედეგით და მარტივად გამოთვლიან, რომ

$$V_{SABC} = 715.$$

ასეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების განხილვით მასწავლებელი გაკვეთილზე აღწევს მეტად მნიშვნელოვან შედეგს. კერძოდ, პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების პარალელურ რეჟიმში განხილვა, როცა ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ნ/და ხერხები პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების განხილვისას ერთნაირია, მოსწავლეებს უხსნის იმ შებოჭილობასა და შიშის შეგრძნებას, რას ტრადიციულად თან ახლავს სტერეომეტრიული შინაარსის ამოცანების სწავლებას. ჩვენ მიერ ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა განხილული მეთოდური მიდგომის უპირატესობა ტრადიციულ სასწავლო მიდგომასთან შედარებით, როცა კლასების მიხედვით ცალკე ხდება პლანიმეტრიული მასალის შესწავლა და ცალკე სტერეომეტრიული მასალის, რაც დაადასტურა ჩვენს მიერ ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის სტატისტიკურმა შეფასებამ, რომლის მონაცემებიც ჩვენ ქვემოთ გვაქვს მოყვანილი.

§3. საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა

ნებისმიერ სამ მომდევნო ნატურალურ რიცხვს შორის რომ, ერთი რიცხვი აუცილებლად სამის ჯერადია, ცხადია. ასევე ცხადია, რომ ნებისმიერ 13 ადამიანს შორის მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომლებიც ერთ თვეში არიან დაბადებული. ერთიცა და მეორეც შეიძლება დავუკავშიროთ შემთხვევების განხილვას, მაგრამ უფრო გონივრულია მსჯელობა წარვმართოთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენებით. მეორე შემთხვევისათვის შეიძლება ასე ვიმსჯელოთ:

დავუშვათ, რომ არ მოიძებნება ისეთი ორი ადამიანი, რომელიც ერთ თვეშია დაბადებული. მაშინ 12 თვიდან თითოეულში დაიბადებოდა არა უმეტეს ერთი ადამიანი, ე.ი. სულ არაუმეტეს 12 ადამიანი. რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას, რადგან: $12 < 13$.

ასეთი მსჯელობები ძალიან ხშირად გვხვდება ამოცანების ამოხსნის დროს, ამიტომ ის გამოყვეს როგორც დამტკიცების განსაკუთრებული სახე და მას დირიხლეს პრინციპი უწოდეს. ამ პრინციპის ფორმულირება ასეთია:

თუ $(n+1)$ კურდღელი ჩასმულია n გალიაში, მაშინ მოიძებნება გალია, რომელშიც სულ ცოტა ორი კურდღელი მაინც ზის.

ამ დებულების დასაბუთებაც საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით ხდება:

დავუშვათ, რომ ყველა გალიაში ზის ორზე ნაკლები კურდღელი (ერთი ან არცერთი). მაშინ ყველა n გალიაში ზის არაუმეტეს n კურდღელი. რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას.

არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე მათემატიკური ამოხსნების დროს შედარებით ადვილი გასარკვევია თუ რა შეიძლება ვიგულისმოთ „გალიებში“ და რა „კურდღლებში“, მაგალითად, ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანაში „კურდღლების“ როლს ასრულებს 13 ადამიანი, ხოლო „გალიების“ როლს წელიწადის თვეთა რაოდენობა-12 თვე. მაგრამ გაცილებით რთული გასარკვევია რას წარმოადგენს „კურდღლები“ და რას „გალიები“ გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტულ ამოცანებში, რადგან არითმეტიკული და

ალგებრული შინაარსის მქონე მათემატიკური ამოხსნებისაგან განსხვავებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებში ეს უმრავლეს შემთხვევაში თვალნათლივ არ ჩანს.

შევნიშნოთ, რომ მასწავლებელმა დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის განხილვა არ უნდა დაიწყოს მანამ, სანამ მოსწავლეები კარგად არ გაერკვევიან დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე მათემატიკური ამოხსნების ამოხსნაში. ამის შემდეგ უნდა მოხდეს ეტაპობრივი გადასვლა გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნაზე პრინციპით „მარტივიდან რთულზე“, მაგრამ თავიდან მასწავლებელი მოსწავლეებს უნდა დაეხმაროს გაერკვნენ კონკრეტულ ამოცანაში რა არის „გალია“ და რა „კურდღელი“, რადგან ზოგადად მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით დაიყვანება „კურდღლებისა“ და „გალიების“ არჩევაზე. ხშირად არცთუ ისე ცხადია რა არის ამოცანაში „კურდღელი“ და რა „გალია“. დროთა განმავლობაში მასწავლებლის ჩარევა ამოცანების ამოხსნაში უნდა შემცირდეს და მოსწავლეებმა დამოუკიდებლად უნდა შეძლონ დირიხლეს პრინციპით გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ არცერთი წრფე სამკუთხედის სამივე გვერდს არ კვეთს.

წრფე სიბრტყეს ორ ნახევარსიბრტყედ ყოფს, რომელსაც დავარქვათ „გალიები“. სამკუთხედის სამ წვეროს-„კურდღლები“. დირიხლეს პრინციპის თანახმად, მოიძებნება გალია, რომელშიც სულ ცოტა ორი კურდღელი ზის. ანუ მოიძებნება ორი წვერო, რომლებიც მოცემული წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში ძევს. გვერდი, რომელიც ამ წვეროებს აერთებს მოცემულ წრფეს არ კვეთს.

ამოცანა 2. კუბის წახნაგი შეღებილია ორ ფერად. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება ორი მეზობელი წახნაგი, რომელიც ერთ ფერზეა შეღებილი.

განვიხილოთ კუბის სამი წახნაგი, რომელთაც ერთი საერთო წვერო აქვს. დავარქვათ მას „კურდღლები“, ხოლო ფერებს „გალიები“. დირიხლეს პრინციპის თანახმად, მოიძებნება ორი წახნაგი, რომლებიც შეღებილია ერთ ფერად და მეზობელია.

ანალოგიურად დამტკიცდება დირიხლეს ზოგადი პრინციპი: „თუ n კურდღელი ჩასმულია k გალიაში, მაშინ მოიძებნება გალია, რომელშიც არანაკლებ n/k კურდღელი ზის“.

ოდნავი სახეცვლილი ფორმით, რომელშიც წილადი ჩანაწერი არ არის, დირიხლეს ზოგადი პრინციპი შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ:

„თუ $nk + 1$ კურდღელი ჩასმულია k გალიაში, მაშინ მოიძებნება გალია, რომელშიც ჩასმულია არანაკლებ $(n + 1)$ კურდღელი“.

ამოცანა 3. კვადრატის ფორმის ხალიჩა, რომლის გვერდის სიგრძე 1მ-ია ჩრჩილმა დააზიანა, გაუკეთა ხვრელები 51 ადგილას (ხვრელი წარმოადგენს წერტილს). დაამტკიცეთ, რომ რომელიმე კვადრატული ფორმის ნაჭრით, რომლის გვერდის სიგრძე 20 სმ-ია, შეიძლება დავფაროთ არანაკლებ სამი ხვრელი.

მთელი ხალიჩა შეიძლება დავფაროთ 25 ასეთი ნაჭრით. რადგან

$$51 = 25 \cdot 2 + 1,$$

ამიტომ, დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით რომელიმე ნაჭერი აუცილებლად დაფარავს არანაკლებ სამ ხვრელს.

ზოგჯერ დირიხლეს პრინციპი არ მუშაობს „პირდაპირ“, არ ჩანს კმაყოფილდება თუ არა დირიხლეს პრინციპის პირობები და მოითხოვს დამატებით დაზუსტებებს, რის შედეგადაც დირიხლეს პრინციპის გამოყენება შესაძლებელი ხდება და ამოხსნის პროცესი მარტივდება.

ზოგჯერ მოსახერხებელია ამოცანის ამოხსნის დროს მოვიყვანოთ კონტრმაგალითი, რომელიც აჩვენებს, წინააღმდეგობას ამოცანის პირობაში მოყვანილ სიტუაციასთან, რითაც დადასტურდება, რომ ამოცანის პირობაში მოყვანილი სიტუაციის შესრულება ზოგად შემთხვევაში შეუძლებელია

ამოცანა 4. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედი შეუძლებელია დავფაროთ მასზე უფრო მცირე ორი ტოლგვერდა სამკუთხედით.

მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ, რომ თუ რაიმე სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები არ აღემატება a-ს, მაშინ სამკუთხედის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერ-თებელი მონაკვეთის სიგრძე a-ს არ აღემატება.

თუ ტოლგვერდა სამკუთხედის დაფარვა შესაძლებელია ორი, მასზე ნაკლები ზომის ტოლგვერდა სამკუთხედით, მაშინ დირიხლეს პრინციპის თანახმად, ერთ-ერთი სამკუთხედი ფარავს მოცემული ტოლგვერდა სამკუთხედის ორ წვეროს, ე.ი. გამოდის, რომ დამფარავი სამკუთხედი შეიცავს ისეთ მონაკვეთს, რომლის სიგრძე მეტია, ვიდრე მისი გვერდი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე.ი. ტოლგვერდა სამკუთხედის დაფარვა შეუძლებელია ორი, მასზე ნაკლები ზომის ტოლგვერდა სამკუთხედით.

ამოცანა 5. სიბრტყე შეღებილია ორ ფერად. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ორი წერტილი, რომელთა შორის მანძილია 1 მეტრი და ისინი შეღებილია ერთ ფერად.

განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 მეტრი. მისი სამი წვეროდან ორი მაინც შეღებილია ერთ ფერზე, რადგან ფერები ორია, წვეროები კი სამი.

ამოცანა 6. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ 6 ადამიანს შორის ყოველთვის იქნება სამი წყვილ-წყვილად ერთმანეთის ნაცნობი, ან სამი წყვილ-წყვილად ერთმანეთის უცნობი.

გამოვსახოთ ჩვენი 6 ადამიანი წერტილების სახით სიბრტყეზე. წერტილები შევაერთოთ ერთმანეთთან წითელი მონაკვეთებით, თუ წერტილების შესაბამისი ადა-მიანები ერთმანეთს იცნობენ (ნაცნობობა ორმხრივია), და შევაერთოთ ეს წერტილები ლურჯი მონაკვეთებით, თუ ამ წერტილების შესაბამისი ადამიანები ერთმანეთს არ იცნობენ. ამრიგად, ამოცანაში მოითხოვება დავამტკიცოთ, რომ სიბრტყეზე აუცილებლად იქნება დახაზული ან წითელი სამკუთხედი წვეროებით არჩეულ წერტილებში, ან ლურჯი. დავამტკიცოთ ეს.

ავირჩიოთ ექვსი წერტილიდან ერთ–ერთი. ვთქვათ, A. მაშინ ის დანარჩენ ხუთ წერტილთან შეერთებულია ან წითელი, ან ლურჯი მონაკვეთებით. დირიხლეს პრინციპის თანახმად არანაკლებ სამ წერტილთან ის შეერეთებულია ერთი ფერის მონაკვეთებით. ვთქვათ, ეს არის წითელი მონაკვეთები. განვიხილოთ, ეს სამი წერტილი. თუ მათ შორის ორი ასევე შეერთებულია წითელი მონაკვეთით, მაშინ A-თან ერთად მივიღებთ წითელ სამკუთხედს. თუ ასეთი წერტილები არ არსებობს, მაშინ არჩეული სამი წერტილი ადგენს ლურჯ სამკუთხედს. ცხადია, რომ მსჯელობა იქნება ისეთივე, თუ A წერტილში გავლებული იქნება უფრო მეტი ლურჯი მონაკვეთი, ვიდრე წითელი.

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს ჩვენ გამოვიყენეთ ამოცანისადმი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. შეგვეძლო განგვეხილა სუფთა გეომეტრიული შინაარსის ამოცანა, რომელიც განხილული ამოცანის ტოლფასია. კერძოდ,

ამოცანა. სიბრტყეზე მოცემულია ექვსი წერტილი ისე, რომ ნებისმიერი სამი მათგანი ერთ წრფეზე არ ძევს. წერტილის ნებისმიერი წყვილი შეერთებულია ერთმანეთთან ან წითელი ან ლურჯი ფერით. დაამტკიცეთ, რომ მოცემულ წერტილებს შორის შეგვიძლია შევარჩიოთ სამი ისეთი წეტილი, რომ მათი შეერთების შედეგად მიღებული სამკუთხედი შეღებილია ერთ ფერად.

ამოხსნის პროცესი წარიმართება წინა შემთხვევის ანალოგიურად.

დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნის დროს გაკვეთილზე ან მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე რეკომენდებულია, მოსწავლეებს დავუსვათ შეკითხვები და მათგან არასრულყოფილი პასუხის შემთხვევაში განვუმარტოთ მოცემულ ამოცანებში რა ასრულებს „გალიის“ და რა „კურდღელის“ ფუნქციებს. ასეთი წარმოდგენები ამარტივებენ ამოცანების ამოხსნას, ამცირებს ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო დროს, უფრო გასაგებს ხდის ამოცანის ამოხსნას და მეთოდური თვალსაზრისით მისაღებია.

ამოცანა 7. მაქსიმუმ რამდენი ეტლი შეიძლება განვალაგოთ 8×8 ზომის საჭადრაკო დაფაზე ისე, რომ არცერთი მათგანი ერთმანეთს არ ემუქრებოდეს?

ცხადია, რომ 8 ეტლი შესაძლებელია განვალაგოთ დიაგონალზე A1-დან H8-ის ჩათვლით. დავამტკიცოთ, რომ საჭადრაკო დაფაზე 9 ეტლის განთავსება ისე, რომ ისინი ერთმანეთს არ ემუქრებოდნენ, შეუძლებელია.

ერთ ჰორიზონტალზე შეუძლებელია განთავსდეს ერთ ეტლზე მეტი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი ერთმანეთს დაემუქრებიან. რაც ნიშნავს, რომ ეტლები შესაძლებელია განვალაგოთ მხოლოდ დაფის ჰორიზონტალებზე. რადგან საჭადრაკო დაფაზე მხოლოდ 8 ჰორიზონტალია, ამიტომ ეტლების უდიდესი რაოდენობა 8-ზე მეტი ვერ იქნება.

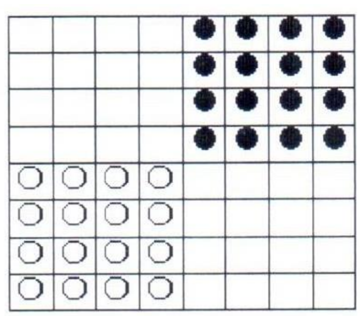
ამოცანა 8. მაქსიმუმ რამდენი მეფე შეიძლება განვალაგოთ საჭადრაკო დაფაზე ისე, რომ არცერთი მათგანი ერთმანეთს არ ემუქრებოდეს?

დავყოთ საჭადრაკო დაფის 64 უჯრა 2×2 ზომის 16 პატარა კვადრატად. თუ რომელიმე ასეთ პატარა კვადრატში მოთავსებული იქნა ორი მეფე, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემუქრებიან. ამრიგად, 16 პატარა კვადრატიდან თითოეულში განთავსებულია არაუმეტეს ერთი მეფისა. მეორეს მხრივ, თუ მეფეს განვათავსებთ 2×2 ზომის თითოეული 16 პატარა კვადრატის მარცხენა ქვედა კუთხეში, მაშინ ასე განთავსებული მეფეები არ დაემუქრებიან ერთმანეთს.

ამოცანა 9. საჭადრაკო დაფაზე განლაგებულია n თეთრი და n შავი ეტლი ისე, რომ სხვადასხვა ფერის ეტლები ერთმანეთს არ ემუქრება. იპოვეთ n-ის შესაძლო უდიდესი მნიშვნელობა.

ვაჩვენოთ, რომ როცა n>16, შეუძლებელია ეტლების ისე განლაგება, როგორც ამოცანის პირობაშია აღწერილი. ცხადია, რომ საჭადრაკო დაფის ყოველ ჰორიზონტალსა ყოველ ვერტიკალზე შესაძლებელია განთავსდნენ მხოლოდ ერთი ფერის ეტლები ან ეს უჯრები დარჩეს ეტლებისაგან თავისუფალი. შევთანხმდეთ და საჭადრაკო დაფის ჰორიზონტალი/ვერტიკალი აღვნიშნოთ იმავე ფერით, რა ფერის ეტლსაც დავდებთ ამ ჰორიზონტალზე/ვერტიკალზე. რადგან ეტლების რაოდენობა 16-ზე მეტია, ამიტომ თეთრი ჰორიზონტალების რაოდენობა 3-ზე ნაკლები არ არის.

თუ თეთრი ჰორიზონტალების რაოდენობა სამის ტოლია, მაშინ ერთ-ერთ მათგანში 6 ეტლზე ნაკლები არ არის, ანუ თეთრი ვერტიკალების რაოდენობა 6-ზე ნაკლები არ არის, ხოლო შავის 2-ზე მეტი არ არის. ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს შეუძლებელია.



ნახ. 18.

ამრიგად, თეთრი ჰორიზონტალების რაოდენობა ოთხზე ნაკლები არ არის, რაც ნიშნავს, რომ შავი ჰორიზონტალების რაოდენობა 4-ზე მეტი არ არის. იგივე სამართლიანია შავი

ვერტიკალებისთვისაც. ცხადია, შავი ეტლების რაოდენობა 16-ზე მეტი არ არის. მივიღეთ წინააღმდეგობა. როცა n=16, მაშინ ეტლების განლაგება მოცემულია ნახ. 18–ზე:

ამოცანა 10. კუბის ყოველ წვეროში დააწერეს რიცხვები ან 1 ან 0. კუბის წახნაგებზე დაწერეს მის წვეროებში დაწერილი რიცხვების ჯამი. შესაძლებელია თუ არა, რომ ყველა წახნაგზე დაწერილი რიცხვები განსხვავებული იყოს?

შევნიშნოთ, რომ კუბის წახნაგებზე შესაძლებელია ეწეროს ერთ-ერთი 5 რიცხვიდან:

0, 1, 2, 3 ან 4.

მაგრამ კუბს 6 წახნაგი აქვს, რაც დირიხლეს პრინციპის თანახმად ნიშნავს, რომ რომელიმე ორ წახნაგზე მაინც დაწერილი იქნება ერთმანეთის ტოლი რიცხვები.

ამოცანა 11. თვითმფრინავის საფრენ საჰაერო სივრცეში ღრუბლებია. აღმოჩნდა, რომ სივრცე შეიძლება დაიყოს ნაწილებად ათი სიბრტყით ისე, რომ სივრცის თითოეულ ნაწილში იყოს არაუმეტეს ერთი ღრუბელი. რა უდიდესი რაოდენობის ღრუბლებში შეუძლია გაიაროს თვითმფრინავმა, რომელსაც აღებული აქვს წრფივი კურსი?

თვითმფრინავს, რომელსაც წრფივი კურსი აქვს აღებული, შეუძლია გაიაროს სივრცის ნაწილებით შემოსაზღვრული ყველა სიბრტყიდან თითოეულში, მაგრამ არაუმეტეს ერთხელ. ამრიგად, თვითმფრინავმა ფრენის მანძილზე არაუმეტეს 10-ჯერ შეიცვალა სივრცის ნაწილი. ეს ნიშნავს, რომ მან იფრინა სივრცის არაუმეტეს 11 ნაწილში. შესაბამისად თვითმფრინავმა გაიარა არაუმეტეს 11 ღრუბელში. რიცხვი 11 მიიღწევა მაშინ, როცა თვითმფრინავის კურსი არცერთი სიბრტყის პარალელური არ არის და არ ემთხვევა სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეებს.

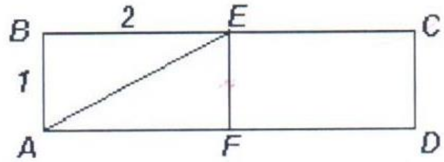
ამოცანა 12. მოცემული გვაქვს საღებავების კომპლექტი, რომელშიც n ფერის საღებავია. ნებადართულია მთელი კოორდინატების მქონე სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის შეღებვა საღებავების კომპლექტის ნებისმიერი ფერით. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე მოიძებნება მართკუთხედი, რომელსაც ერთი ფერის წვეროები აქვს.

შევადგინოთ ჰორიზონტალური ზოლები, რომლებიც შედგება ერთმანეთის მომდევნო n+1 წერტილების მწკრივებისაგან. მათგან განვიხილოთ ვერტიკალურ ზოლში მოთავსე–ბული მწკრივი, რომელიც n+1 წერტილისაგან შედგება. n+1 წერტილის n ფერად შეღებვის

რაოდენობათა რიცხვი სასრულია. მართლაც, პირველი წერტილის შესაღებად შეგვიძლია შევარჩიოთ n რაოდენობის ფერიდან ერთ-ერთი, ე.ი. პირველი წერტილის შეღებვის ყველა შესაძლო რაოდენობა n-ის ტოლია. მიუხედავად იმისა, თუ რა ფერად არის შეღებილი პირველი წერტილი, მეორე წერტილის შესაღებად ისევ შეგვიძლია შევარჩიოთ n რაოდენობის ფერიდან ერთ-ერთი, ე.ი. მეორე წერტილის შეღებვის ყველა შესაძლო რაოდენობაც n-ის ტოლია და ა.შ. მე-(n+1)-ე წერტილის შესაღებად შეგვიძლია შევარჩიოთ n რაოდენობის ფერიდან ერთ-ერთი, ე.ი. მე-(n+1)-ე წერტილის შეღებვის ყველა შესაძლო რაოდენობაც n-ის ტოლია. თუ გამოვიყენებთ კომბინატორიკიდან ცნობილ ნამრავლის წესს, გამოვთვლით, რომ სულ არსებობს n+1 წერტილის n ფერად შეღებვის n^{n+1} ხერხი. ამიტომ განხილული ზოლების ვერტიკალურ მწკრივებში მოიძებნება ერთ ფერად შეღებილი ორი A და B მწკრივი მაინც. ანუ არსებობს ორი ისეთი მწკრივი, რომ ამ მწკრივის წევრები რომლებიც ეკუთვნიან i-ურ ჰორიზონტალურ მწკრივს (i = 1, 2, …, n+1), შეღებილი არიან ერთი და იმავე ფერზე. რადგან A ვერტიკალურ მწკრივში მთელი კოეფიციენტების მქონე n+1 წერტილია, რომელთა შორის მოიძებნება ერთი ფერის ორი X და Y წერტილი. B მწკრივის ორი წერტილი X’ და Y’ იმავე ჰორიზონტალურ მწკრივშია, რომელშიც X და Y წერტილები და შეღებილია იმავე ფერზე, რა ფერზეც არის შეღებილი X და Y, რადგან A და B მწკრივები ერთ ფერზე არიან შეღებილი. წერტილები X, Y, X’, და Y’ მართკუთხედის წვეროებია და შეღებილია ერთსა და იმავე ფერზე, ანუ წერტილთა X, Y, X’, და Y’ ოთხეული საძიებელია.

ამოცანა 13. მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთის სიგრძე 4 მეტრია, ხოლო სიგანე 1 მეტრი. შესაძლებელია თუ არა ამ ნაკვეთზე დავრგოთ სამი ხე ისე, რომ ნებისმიერ ორ ხეს შორის მანძილი იყოს არანაკლებ 2,5 მეტრი?

ვთქვათ, ამ ABCD ნაკვეთზე იზრდება სამი ხე (ნახ. 19). დავყოთ ის ორ ტოლ მართკუთხედად ზომებით 2მ × 1მ.



ნახ. 19.

მაშინ, ჩვენი დაშვების თანახმად ამ მართკუთხედებიდან ერთში მაინც ორი ხე იზრდება, რომელთა შორის დაშორება არანაკლებ 2,5 მეტრია. მეორეს მხრივ ასეთ მართკუთხედებში თუ ორი ხეა დარგული, მაშინ მათ შორის დაშორება არ აღემატება ამ მართკუთხედის დიაგონალს. ადვილი საჩვენებელია, რომ მართკუთხედის დიაგონალი არ აკმაყოფილებს ამოცანის მოთხოვნას

$$\sqrt{5} < 2{,}5.$$

ე.ი. შეუძლებელია მართკუთხედის ფორმის 4მ × 1მ ზომის ნაკვეთზე სამი ხის დარგვა ისე, რომ ნებისმიერ ორ ხეს შორის მანძილი იყოს არანაკლებ 2,5 მეტრი.

ამოცანა 14. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმირ მრავალწახნაგას აქვს ორი ისეთი წახნაგი, რომელთაც გვერდების ერთნაირი რაოდენობა აქვთ.

დავუშვათ, რომ რაიმე მრავალწახნაგას ნებისმიერ ორ წახნაგს გვერდების განსხვავებული რაოდენობა აქვს. განვიხილოთ ის Ω წახნაგი რომელსაც აქვს ყველაზე მეტი გვერდი. ვთქვათ, მისი გვერდების რაოდენობაა m.

ცხადია, რომ მრავალწახნაგას სხვა ნებისმიერი წახნაგის გვერდების რაოდენობა მკაცრად ნაკლებია m-ზე. რაც ამავე დროს ნიშნავს, რომ დარჩენილი წახნაგების რაოდენობაც მკაცრად ნაკლებია m-ზე იმ შემთხვევაშიც კი, თუ იარსებებდა ერთკუთხედი და ორკუთხედი. ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ სულ m-1 განსხვავებული მრავალკუთხედი. მეორეს მხრივ Ω წახნაგს მიერთებულია მრავალწახნაგას სხვა m წახნაგი (თითოეულ გვერდს-თითოეული წახნაგი). მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ნიშნავს, რომ ნებისმირ მრავალწახნაგას აქვს ორი ისეთი წახნაგი, რომელთაც გვერდების ერთნაირი რაოდენობა აქვთ.

ამოცანა 15. წრფეზე მოცემულია 50 მონაკვეთი. დაამტკიცეთ, რომ რომელიმე 8 მონაკვეთს ან საერთო წერტილი აქვთ, ან მოიძებნება 8 მონაკვეთი, რომელთაგან არცერთ ორ მონაკვეთს ერთმანეთთან საერთო წერტილი არა აქვთ.

ვთქვათ, $[a_1, b_1]$ მონაკვეთი არის მოცემულ მონაკვეთებს შორის უკიდურესი მარცხენა მონაკვეთი. თუ იმ მონაკვეთების რაოდენობა, რომლებიც b_1 წერტილს შეიცავს 7-ზე მეტია, მაშინ ამოცანა ამოხსნილია. თუ ის 7-ის ტოლია, ან ნაკლებია 7-ზე, მაშინ არსებობს არანაკლებ 50 – 7 = 43 მონაკვეთი, რომლებიც მთლიანად b_1 წერტილის მარჯვნივ

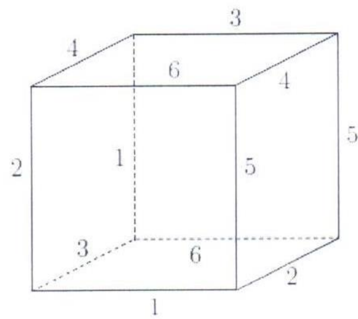
მდებარეობენ. ავირჩიოთ მათგან $[a_2, b_2]$, რომელიც 43 მონაკვეთს შორის უკიდურესად მარცხნივ მდებარეობს. მაშინ ან b_2 ერთდროულად ეკუთვნის 8 მონაკვეთს, ან არსებობს 50 – 2 · 7 = 36 მონაკვეთი, რომლებიც მთლიანად b_2 წერტილის მარჯვნივ მდებარეობენ. გავაგრძელებთ, რა ანალოგიურად მსჯელობას, ჩვენ ან ვიპოვით წერტილს, რომელიც ეკუთვნის 8 მონაკვეთს, ან მივიღებთ წყვილ-წყვილად 7 თანაუკვეთ $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$, $\cdots, [a_7, b_7]$ ისეთ მონაკვეთს, რომ b_k წერტილის მარჯვნივ კიდევ 50-7k მონაკვეთია, ანუ b_7 წერტილის მარჯვნივ კიდევ ერთი $[a_8, b_8]$ მონაკვეთია. ამ შემთხვევაში, ჩვენ მივიღებთ 8 წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ \cdots, [a_7, b_7], [a_8, b_8]$ მონაკვეთს.

ამოცანა 16. სივრცეში n წერტილი მოცემულია ისე, რომ არცერთი სამი წერტილი ერთ წრფეს არ ეკუთვნის და არცერთი ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ ძევს. ამ წერტილებიდან ყოველ სამ წერტილზე გავლებული სიბრტყე. დაამტკიცეთ, რომ როგორაც არ უნდა ავიღოთ სივრცეში n-3 წერტილი, გავლებულ სიბრტყეებს შორის მოიძებნება სიბრტყე, რომელიც არ შეიცავს არცერთ წერტილს n-3 წერტილიდან.

ვთქვათ, M არის მოცემული n წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე, A-კი ნებისმიერი n-3 წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე. ავიღოთ M სიმრავლიდან ისეთი x წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. ასეთი წერტილი არსებობს, რადგან M სიმრავლე შეიცავს n წერტილს, ხოლო A სიმრავლე n-3 წერტილს. გავავლოთ x წერტილსა და M სიმრავლის დანარჩენ წერტილებზე (n-1) წრფე. ამ წრფეებიდან ერთი წრფე არ კვეთს A სიმრავლეს. ამ წრფეზე და M სიმრავლის დარჩენილ (n-2) წერტილზე გავავლოთ (n-2) სიბრტყე. არცერთი ამ სიბრტყეებიდან არ კვეთს A სიმრავლეს, რადგან სიბრტყეების რაოდენობაა (n-2), ხოლო A სიმრავლეში (n-3) ელემენტია. სწორედ ეს სიბრტყე წარმოადგენს საძიებელ სიბრტყეს.

ამოცანა 17. იპოვეთ ფერთა უდიდესი რაოდენობა, რომლითაც შეიძლება შევღებოთ კუბის წიბოები (თითოეული წიბო თითო ფერად) ისე, რომ ფერთა თითოეული წყვილისათვის მოიძებნოს ორი მეზობელი წიბო, რომლებიც ერთ ფერად არიან შეღებილი. წიბოები მეზობელია, თუ მათ საერთო წვერო აქვთ.

არსებობს რამდენიმე წესი, რომლის თანახმად შესაძლებელია კუბის წიბოები შეიღებოს 6 ფერზე. ვაჩვენოთ, რომ ექვს ფერზე მეტის გამოყენება კუბის შესაღებად შეუძლებელია.



ნახ. 20.

დავუშვათ, რომ ჩვენ შევძელით კუბი შეგვეღება შვიდ ან უფრო მეტ ფერზე ისე, როგორც ამოცანის პირობაშია მოთხოვნილი. რადგან კუბს სულ 12 წიბო აქვს, ამიტომ იარსებებს საღებავის ფერი, მაგალითად, თეთრი, რომელზეც შეღებილია კუბის მხოლოდ ერთი წიბო (ნახ. 20). კუბის ყოველ წიბოს ზუსტად ოთხი მეზობელი წიბო აქვს. რაც ნიშნავს, რომ თეთრ ფერთან წყვილში შესაძლებელია იყოს საღებავის არა უმეტეს ოთხი ფერი, რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ საღებავის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფერების რაოდენობა არ აღემატება ხუთს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, კუბის შეღებვა შვიდ ან უფრო მეტ ფერზე ისე, როგორც ამოცანის პირობაშია მოთხოვნილი შეუძლებელია, ფერთა რაოდენობის მაქსიმუმია ექვსი.

ამოცანა 18. ამოზნექილი ხუთკუთხედის შიგა არეში ნებისმიერად აღებულია ორი წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ შესაძლებელია შევარჩიოთ ოთხკუთხედი, წვეროებით მოცემული ხუთკუთხედის წვეროებში ისე, რომ ის შეიცავდეს ორივე აღებულ წერტილს.

ვთქვათ, ABCDE-მოცემული ამოზნექილი ხუთკუთხედია, M და N წერტილები კი, ამ ხუთკუთხედის შიგა წერტილებია. განვიხილოთ ხუთი სამკუთხედი: ABC, BCD, CDE, DEA და EAB. თითოეული M და N წერტილებიდან ეკუთვნის ამ სამკუთხედებიდან არაუმეტეს ორ სამკუთხედს (ნახ. 21). რაც ნიშნავს, რომ არსებობს სამკუთხედი, რომელსაც არ ეკუთვნის M და N წერტილები. ვთქვათ, ეს სამკუთხედია ABE. მაშინ, M დაN წერტილები მდებარეობენ BCDE ოთხკუთხედში.

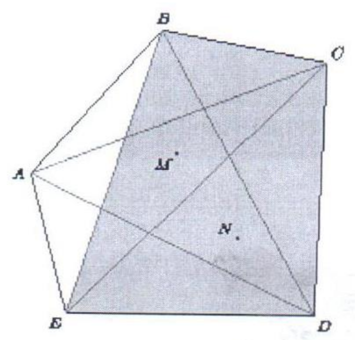
ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია მეორე ხერხითაც.

ვთქვათ, ABCDE-მოცემული ამოზნექილი ხუთკუთხედია, M და N წერტილები კი, ამ ხუთკუთხედის შიგა წერტილებია. გავავლოთ MN წრფე. ეს წრფე სიბრტყეს ყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. აქ განიხილება სამი შემთხვევა:

1) MN წრფე გადის ხუთკუთხედის ორ წვეროზე;

2) MN წრფე გადის ხუთკუთხედის ერთ წვეროზე;

3) MN წრფე არ გადის ხუთკუთხედის არცერთ წვეროზე.



ნახ. 21.

განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე:

1. ვთქვათ, MN წრფე გადის ხუთკუთხედის B და D წვეროებზე. მაშინ A და B წერტილები MN წრფის ერთ მხარეს მდებარეობენ, ხოლო A და C წერტილები MN წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ. ამ შეთხვევაში არსებობს ADE სამკუთხედი, რომელიც არ შეიცავს M და N წერტილებს. თუ ჩამოვაჭრით ABCDE ხუთკუთხედს ამ სამკუთხედს, მივიღებთ საძიებელ ოთხკუთხედს.

2. ვთქვათ, MN წრფე გადის ხუთკუთხედის D წვეროზე. მაშინ MN წრფე კვეთს ABCDE ხუთკუთხედის ან BC ან AB, ან AE გვერდებიდან ერთ-ერთს. განვიხილოთ თითოეული ქვეშემთხვევა.

ვთქვათ, MN წრფე გადის ხუთკუთხედის D წვეროზე და კვეთს ABCDE ხუთკუთხედის BC გვერდს. მაშინ არსებობს ADE სამკუთხედი, რომელიც არ შეიცავს M და N წერტილებს. თუ ჩამოვაჭრით ABCDE ხუთკუთხედს ამ სამკუთხედს, მივიღებთ საძიებელ ოთხკუთხედს.

ვთქვათ, MN წრფე გადის ხუთკუთხედის D წვეროზე და კვეთს ABCDE ხუთკუთხედის AB გვერდს. მაშინ არსებობს ADE სამკუთხედი, რომელიც არ შეიცავს M და N წერტილებს. თუ ჩამოვაჭრით ABCDE ხუთკუთხედს ამ სამკუთხედს, მივიღებთ საძიებელ ოთხკუთხედს.

იმ შემთხვევაში, როცა MN წრფე გადის ხუთკუთხედის D წვეროზე და კვეთს ABCDE ხუთკუთხედის AE გვერდს. მაშინ არსებობს BCD სამკუთხედი, რომელიც არ შეიცავს M და N წერტილებს. თუ ჩამოვაჭრით ABCDE ხუთკუთხედს ამ სამკუთხედს, მივიღებთ საძიებელ ოთხკუთხედს.

3. თუ MN წრფე არ გადის ხუთკუთხედის არცერთ წვეროზე, მაშინ MN წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს მოცემული ხუთკუთხედის არანაკლებ სამი წვერო. არანაკლებ სამი წვერო ნიშნავს ან სამ წვეროს ან ოთხ წვეროს. თუ MN წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს მოცემული ხუთკუთხედის სამი წვერო, მაშინ მოცემულ ხუთკუთხედს უნდა ჩამოვაჭრათ ამ სამი წვეროსაგან შედგენილი სამკუთხედი. მიღებული ოთხკუთხედი საძიებელია.

თუ MN წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს მოცემული ხუთკუთხედის ერთი წვერო, ვთქვათ, ეს არის C წვერო, ხოლო მეორე ნახევარსიბრტყეში-ოთხი წვერო-A, B, D და E. მაშინ მოცემულ ხუთკუთხედს უნდა ჩამოვაჭრათ A, D და E სამი წვეროსაგან შედგენილი სამკუთხედი. მიღებული ოთხკუთხედი საძიებელია.

მოცანა 19. ლალამ კუბიკის წახნაგებზე დააწერა ნატურალური რიცხვები 1-დან 6-ის ჩათვლით. ლილი კუბიკს ვერ ხედავს, მაგრამ ამტკიცებს, რომ:

ა) ამ კუბიკის ორ მეზობელ წახნაგს ორი რიცხვი აწერია მიმდევრობით;

ბ) ასეთი მეზობელი წახნაგები კუბზე არანაკლებ ორია.

მართალია თუ არა ლილი ორივე შემთხვევაში? რატომ?

სულ მოცემული გვაქვს 6 ნატურალური რიცხვი 1, 2, 3, 4, 5 და 6. ამ რიცხვებიდან შედგება 5 წყვილი ერთმანეთის მიმდევრობით ჩაწერილი რიცხვები:

1 და 2; 2 და 3; 3 და 4; 4 და 5; 5 და 6.

თითოეული ასეთი წყვილი შეიძლება ეწეროს ან ორ მეზობელ წახნაგზე, ამ ერთმანეთის მოპირდაპირე წახნაგებზე. მაგრამ, კუბიკს მხოლოდ სამი წყვილი მოპირდაპირე წახნაგი აქვს. ამიტომ მათზე შეიძლება დაიწეროს არაუმეტეს ერთმანეთის მიმდევრობით მოცემული რიცხვების წყვილებიდან არაუმეტეს სამისა. რაც ნიშნავს, რომ უკიდურეს შემთხვევაში

ასეთი ორი წყვილი დაიკავებს კუბიკის მეზობელ წახნაგებს. რაც საშუალებას იძლევა ვთქვათ, რომ ლილი ორთავე შემთხვევაში მართალია.

ამოცანა 20. მოცემულია ამოზნექილი შვიდკუთხედი. ნებისმიერად იღებენ მის ოთხ კუთხეს და გამოთვლიან ამ კუთხეთა სინუსებს და დანარჩენი სამი კუთხის კოსინუსებს. აღმოჩნდა, რომ ამ შვიდი რიცხვის ჯამი დამოკიდებული არ არის თავდაპირველად არჩეულ ოთხ კუთხეზე. დაამტკიცეთ, რომ ამ შვიდკუთხედს ოთხი კუთხე ტოლი აქვს.

ვთქვათ, შვიდკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე α -ს ტოლია, ხოლო მისი რომელიმე მეორე კუთხე β -ს ტოლია. განვიხილოთ პირობიდან ერთ-ერთი ჯამი. შემდეგ ამ ჯამში გადავანაცვლოთ ერთი კუთხის სინუსი და ერთი კუთხის კოსინუსი, ამ დროს ჯამის ცვლილება შესაბამისად იქნება:

$$(\sin\beta+\cos\alpha)-(\sin\alpha+\cos\beta)=\sqrt{2}\left(\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

პირობის ძალით ჯამის მნიშვნელობა არ იცვლება, რაც ნიშნავს, რომ

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right).$$

რადგან

$$\alpha,\beta\in(0,\pi),$$

ამიტომ, ტოლობას ადგილი ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$.\alpha-\frac{\pi}{4}=\beta-\frac{\pi}{4},\ \text{ან}\ \ .\alpha-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right).$$

ანუ

$$\alpha=\beta,\ \text{ან}\ \beta=\frac{3\pi}{2}-\alpha.$$

თუ α შვიდკუთხედის ნებისმიერი კუთხეა, მაშინ შვიდკუთხედის კუთხებიდან ყველა კუთხე ტოლია და უდრის α -ს, ან ზოგიერთი α -ს ტოლია, ზოგიერთი კი $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ -ს ტოლი. რაც საბოლოო ჯამში იმას ნიშნავს, რომ შვიდკუთხედის კუთხეები ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მხოლოდ ორ მნიშვნელობის ღებულობენ. ამიტომ დირიხლეს პრინციპის

თანახმად, ამ კუთხეებს შორის ოთხი აუცილებლად ღებულობს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას.

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნა დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით და ჩამოვაყალიბეთ მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები. უნდა შევნიშნოთ, რომ ხშირად დირიხლეს პრინციპს აიგივებენ მეთოდთან-დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით, რაც ჩვენი აზრით არსწორია, რადგან ვთვლით, რომ დირიხლეს პრინციპი უფრო მეტია ვიდრე მეთოდი-დამტკიცება საწინააღმდეგოს დაშვებით და მისი გამოყენება ეფექტურად არის შესაძლებელი ზოგადად მათემატიკური შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის დროს. განსაკუთრებით კარგ შედეგს იძლევა დირიხლეს პრინციპის გამოყენება არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას. მაგრამ, არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დაწყებამდე მოსწავლეებმა კარგად უნდა შეისწავლონ დირიხლეს პრინციპის არსი, საფუძვლიანად დაეუფლონ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნას დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით, კონკრეტულ ამოცანებში შეძლონ დამოუკიდებლად გაარკვიონ, რა წარმოადგენს მისთვის „გალიებს" და რა „კურდღლებს". ამავე დროს, მასწავლებელმა უნდა დაიცვას მარტივი ამოცანებიდან რთულ ამოცანებზე გადასვლის პრინციპი და რაც ერთ-ერთი უმთავრესია, უნდა მოახდინოს საშინაო დავალებების ინდივიდუალიზაცია, რაშიც ვგულისხმობთ იმას, რომ მოსწავლეს მისი მათემატიკური მომზადების დონის შესატყვისად საშინაო დავალებად მივცეთ დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით ისეთი ამოცანები, რომლის ამოხსნასაც ის შეძლებს დამოუკიდებლად და არ შეექმნება რაიმე გადაულახავი პრობლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ მოსწავლემ ვერ შეძლო საშინაო დავალების დამოუკიდებლად ამოხსნა, ამოცანის სტრუქტურის, მისი სირთულის და შინაარსიდან გამომდინარე, მას დახმარებაც შესაძლოა მასწავლებლის გარდა ვერავინ გაუწიოს და მოსალოდნელია, რომ ამან მოსწავლეში გამოიწვიოს საკუთრი ძალებისადმი იმედგაცრუება და მათემატიკის შესწავლისადმი დამოკიდებულებების გადასინჯვა.

საკუთარი მრავალწლიანი პედაგოგიური გამოცდილებით, ჩვენს მიერ ორგანიზებული და ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოწინავე მასწავლებელი ეფექტურად ახერხებს დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ჩართვას სასწავლო პროცესში, მოსწავლეებს აქვთ მზაობა სასწავლო პროცესში საკლასო მეცადინეობაზე განიხილონ სასკოლო პროგრამაში მოცემულ ამოცანებთან შედარებით რთული საოლიმპიადო მათემატიკური შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელებიც მასწავლებლის მიერ ისეა შერჩეული, რომ მათი ამოხსნა მოითხოვს გონებამახვილობას და ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნას, მაშინ როცა ასეთი ამოცანები ჩვეულებრივი, ტრადიციული მიდგომით ან არ ამოიხსნება, ან საკმაოდ დიდ დროს და რთული გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს.

დისერტაციას დართული აქვს სათანადო მეთოდური პრინციპების დაცვით შერჩეული საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემა, რომელთა ამოხსნა მიზანშეწონილია დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით და მათი ჩართვა სასწავლო პროცესში იძლევა სათანადო განმავითარებელ ეფექტს.

§4. დამხმარე ელემენტის მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში

სასკოლო პრაქტიკაში თითქმის ყველა გეომეტრიული, განსაკუთრებით კი პლანი–მეტრიის ამოცანის ამოხსნა იწყება ამოცანის პირობაში ფიგურის/ფიგურების მოცემული ელემენტების ნახაზზე გამოსახვით და მათი ურთიერთგანლაგების შესაბამისი აგებების შესრულებით. ამ დროს ხშირად ნახაზზე, რომელზეც მხოლოდ ამოცანის პირობაში მოცემული სიდიდეებია გამოსახული აშკარად არ ჩანს მოცემულობასა და საძებნ სიდიდეებს შორის კავშირის დამყარების გზა.

ზოგჯერ თუ ნახაზზე გამოსახულ ამოცანის პირობაში ფიგურის/ფიგურების მოცემულ სიდიდეებს დავუმატებთ რაიმე დამხმარე ელემენტს/ელემენტებს, ან შევასრულებთ რაიმე დამხმარე აგებას, მაშინ მოცემულ და საძებნ სიდიდეებს შორის კავშირები აშკარა ხდება და ამოცანის ამოხსნის გზის მიგნება მარტივდება. ამავე დროს დამხმარე ელემენტის მეთოდის გამოყენების დროს მასწავლებელმა უნდა გაითვალისწინოს მოსწავლეთა ფსიქოლოგიური დამოკიდებულება მეთოდის მიმართ, რადგან პირველ რიგში მეთოდის გამოყენების დროს მოსწავლეებში წარმოიშვება გაკვირვება, რომელიც დაკავშირებულია ისეთი მარტივი გეომეტრიული ფიგურის აგებასთან, რომლის გამოყენებით მარტივად ხდება საკმაოდ რთული არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნა. ეს ემოციური ფაქტორი სათანადოდ დასმული კითხვებით მასწავლებელმა შეიძლება მოსწავლეთა დაინტერესების საბაბად გამოიყენოს, რამაც შესაძლოა მათემატიკით იმ მოსწავლეთა დაინტერესებაც კი გამოიწვიოს, რომლებსაც ადრე მათემატიკა არ აინტერესებდათ.

დამხმარე გეომეტრიული ფიგურები და აგებები კონკრეტული ამოცანის განხილვის დროს სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება იყოს, კერძოდ ასეთი ფიგურები და აგებები შეიძლება იყოს: წრფე, რომელიც გადის მოცემულ წერტილზე, ან მოცემულ ორ წერტილზე; მონაკვეთის ან/და მონაკვეთების გაგრძელება განსაზღვრულ მანძილზე ან/და სხვა წრფის გადაკვეთამდე; მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფის პარალელური ან/და პერპენდიკულარული წრფის გავლება; სამკუთხედის შევსება პარალელოგრამამდე მისი

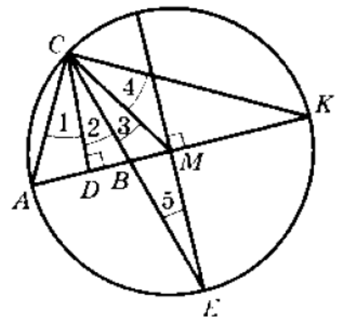
ერთი გვერდის მიმართ გავლებული მედიანის გაორკეცებით; მოცემული მონაკვეთის ტოლი მონაკვეთის აგება; ისეთი მონაკვეთის აგება, რომლის სიგრძე მოცემული მონაკვეთის სიგრძეზე n-ჯერ მეტია/ნაკლებია; სამკუთხედის მოცემული წვეროდან მისი მოპირდაპირე გვერდის პარალელური წრფის გავლება; ტრაპეციის ფერდების გაგრძელებების გადაკვეთის წერტილის აგება; ტრაპეციის დიაგონალის პარალელური წრფის გავლება მოცემული ტრაპეციის ერთ–ერთი წვეროდან; მოცემული რადიუსის მქონე წრეწირის გავლება მოცემული წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, რომელიც გადის მოცემულ ორ წერტილზე; მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზული ან/და მოცემულ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის აგება; მოცემული წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან წრეწირის გავლება, რომელიც გადის მოცემულ წერტილზე; მოცემული რადიუსის მქონე წრეწირის რკალის ან/და სეგმენტის შევსება წრეწირამდე და სხვ. აგებაზე ისეთი ამოცანების ამოხსნის დროს, რომლებშიც მოითხოვნილია აიგოს სამკუთხედი, დამხმარე ელემენტად ხშირად გამოიყენება მედიანები, ბისექტრისები, სიმაღლეები, სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსები და მათი ცენტრები. ზოგჯერ ასევე გამოიყენება სამკუთხედის ორი გვერდის ჯამი ან/და სხვაობა, სამკუთხედის ორი კუთხია ჯამი ან/და სხვაობა.

პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნა იწყება ნახაზის აგებით, რომლის აკურატულად შესრულება და შემდგომ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო დამხმარე ელემენტის/ელე–მენტების აგება გვეხმარება ვიპოვოთ ყველა ის კავშირი, რომელიც არსებობს მოცემული და საძებნი ფიგურის/ფიგურების ელემენტებს შორის. ამის შემდეგ დავსახოთ ამოცანის ამოხსნის გზა. დამატებითი აგებების შესრულება ხშირად გამოიყენება იმისათვის, რომ მოცემული ამოცანა დავიყვანოთ ადრე ამოხსნილ ამოცანაზე, ან დავიყვანოთ სირთულით უფრო მარტივ ამოცანაზე, ვიდრე მოცემული ამოცანაა.

განვიხილოთ რამოდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოხსნის დროს გამოვიყენებთ დამხმარე ელემენტის მეთოდს.

ამოცანა 1. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედის ერთი წვეროდან გავლებული მედიანა, ბისექტრისა და სიმაღლე შესაბამის კუთხეს ყოფს ოთხ ტოლ ნაწილად, მაშინ ასეთი სამკუთხედი მართკუთხაა და გამოთვალეთ ასეთი სამკუთხედის კუთხეები.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ კუთხეს, რომლიდანაც გავლებულია მედიანა, ბისექტრისა და სიმაღლე აქვს კონკრეტულად განსაზღვრული მნიშვნელობა. ეს ნიშნავს, რომ საძიებელ სამკუთხედს აქვს განსაზღვრული სახე.



ნახ. 22.

მოსწავლეები მარტივად დარწმუნდებიან, რომ ასეთი სამკუთხედი ტოლფერდა, მით უფრო ტოლგვერდა არ შეიძლება რომ იყოს. ისმის კითხვა: ხომ არ შეიძლენა ასეთი სამკუთხედი იყოს მართკუთხა? შეიძლება, რადგან წრეწირში ჩახაზულ ნებისმიერ სამკუთხედში მისი რომელიმე გვერდის შუამართობის და ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხის ბისექტრისას და შუამართობის სხვადასხვა მხარეს მდებარე კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილები წრეწირის წერტილებია.

დავამტკიცოთ, რომ C წერტილი AK დიამეტრის მქონე წრეწირის წერტილია. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ M წერტილი წრეწირის ცენტრია. შევასრულოთ დამატებითი აგება–გავალოთ AK მონაკვეთის შუამართობი. E წერტილი ბისექტრისის და შუამართობის გადაკვეთის წერტილია, რომელიც სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის წერტილია. CD სიმაღლე ME შუამართობის პარალელურია, CE–მკვეთია. მაშინ $\angle 2 = \angle 5,$ მაგრამ პირობის ძალით $\angle 2 = \angle 3.$ ამიტომ $\angle 3 = \angle 5.$ რაც ნიშნავს, რომ CM = ME (ნახ. 20).

სამკუთხედის AK გვერდის M შუაწერტილი თანაბრად არის დაშორებული C და E წერტილებიდან, რომლებიც AK დიამეტრის მქონე სამკუთხედზე შემოზაზული წრეწირის წერტილებია. რაც ნიშნავს, რომ

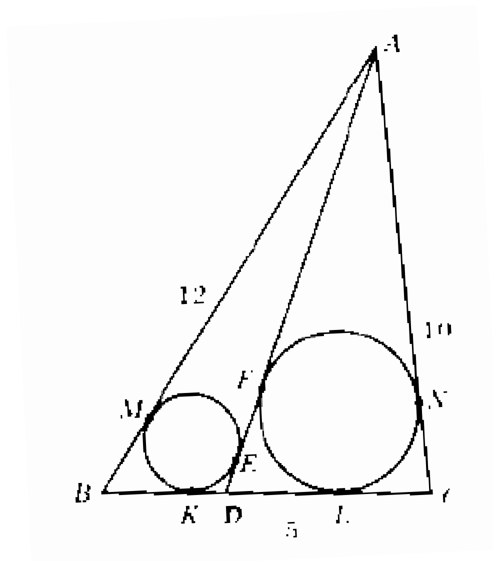
$$\angle C = 90^0, \quad \angle CAD = 90^0 - \angle ACD = 90^0 - 22,5^0 = 67,5^0, \quad \angle CKA = 22,5^0.$$

ამოცანა 2. ABC სამკუთხედში AB = 12, BC = 5, AC = 10. D წერტილი BC გვერდს ყოფს შეფარდებით BD : DC = 4 : 9. ABD და ACD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების AD გვერდთან შეხების წერტილებია შესაბამისად E და F. იპოვეთ EF მონაკვეთის სიგრძე.

გამოვთვალოთ BD და CD მონაკვეთების სიგრძეები. გვაქვს:

$$BD = \frac{4}{4+9}\cdot BC = \frac{4\cdot 5}{13} = \frac{20}{13} = a;$$

$$CD = \frac{9}{4+9}\cdot BC = \frac{9\cdot 5}{13} = \frac{45}{13} = b.$$



ნახ. 23.

ვთქვათ, $DE = x, DF = y.$ შემოვიღოთ დამხმარე ელემენტი $DA = z$ (ნახ. 23). მაშინ მხების თვისების ძალით გვაქვს:

$$2x = DE + DK = DA + DB - BK - AE = DA + DB - (BK + AE) =$$

$$= DA + DB - (BM + AM) = DA + DB - AB = z + a - 12.$$

ანალოგიურად,

$$2y = z + b - 10.$$

ამიტომ,

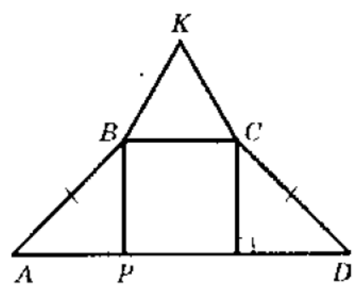
$$2(y - x) = z + b - 10 - z - a + 12 = b - a + 2 = \frac{45}{13} - \frac{20}{13} + 2 = \frac{51}{13}.$$

საიდანაც,

$$EF = y - x = \frac{51}{26} = 1\frac{25}{26}.$$

ამოცანა 3. ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძეზე აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის სიმაღლე ტრაპეციის სიმაღლის ტოლია, ხოლო ფართობი ტრაპეციის ფართობზე 5–ჯერ ნაკლებია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხე.

რომ ვიპოვოთ A კუთხის მნიშვნელობა, საკმარისია ვიპოვოთ ამ კუთხის რომელიმე ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა. რადგან ამოცანის პირობაში მოცემულია ტრაპეციისა და სამკუთხედის ფართობთა ფარდობა, ამიტომ საქმე გვექნება ამ ტრაპეციისა და სამკუთხედის სიმაღლესთან, რომელიც ნახაზზე გამოსახულია BP მონაკვეთით. მეორეს მხრივ, რადგან მოცემული ტრაპეცია ტოლფერდაა, ამიტომ AP მონაკვეთის სიგრძე მარტივად გამოითვლება ტოლფერდა ტრაპეციის AD და BC ფუძეების ნახევარსხვაობით. ეს გვიბიძგებს იმისკენ, რომ მიზანშეწონილია ვიპოვოთ A კუთხის ტანგენსი. ამისათვის გამოვთვალოთ BP და AP.



ნახ. 24.

შემოვიღოთ დამხმარე ელემენტი. ვთქვათ, ტოლფერდა ტრაპეციისა და ტოლგვერდა სამკუთხედის საერთო BC გვერდის სიგრძე a–ს ტოლია. მაშინ BKC სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$s_{BKC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

ამოცანის პირობის ძალით ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლე BKC ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლის ტოლია, ხოლო მათი ფართობთა ფარდობა 5–ის ტოლია (ნახ. 24). გამოვიყენოთ ეს მონაცემები და შევადგინოთ განტოლება, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ტოლფერდა ტრაპეციის AD ფუძე გამოვსახოთ a–ს საშუალებით. გვაქვს:

$$\frac{a+AD}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=5\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

საიდანაც,

$$a+AD=5a.$$

ტოლფერდა ტრაპეციის თვისების ძალით:

$$AP=\frac{AD-BC}{2}=\frac{4a-a}{2}=\frac{3a}{2}.$$

მართკუთხა ABP სამკუთხედიდან

$$tgA=\frac{BP}{AP}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

საიდანაც,

$$A=30^0.$$

დამხმარე ელემენტის მეთოდის გამოყენების არსი აგებაზე არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს მდგომარეობს იმაში, რომ ამოსახსნელი ამოცანა დავიყვანოთ ისეთი აგებების სასრული რაოდენობის შესრულებაზე, რომლებიც განეკუთვნება ძირითად აგებებს, ან დავიყვანოთ აგების ისეთ ამოცანაზე, რომელიც უკვე ამოხსნილი გვაქვს.

განვიხილოთ რამდენიმე გეომეტრიული ამოცანა აგებაზე, რომელთა ამოხსნისას გამოვიყენებთ დამხმარე ელემენტის მეთოდს, ოღონდ ამ შეთხვევაში, განხსხვავებით წინა ამოცანებისაგან, დამხმარე ელემენტი იქნება არა რომელიმე მონაკვეთი, არამედ გეომეტრიული ფიგურა–სამკუთხედი.

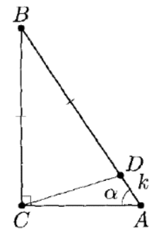
ამოცანა 4. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი, თუ მოცემულია ჰიპოტენუზის და კათეტის სიგრძეთა სხვაობა და მახვილი კუთხე.

ვთქვათ, საძიებელ ABC სამკუთხედში სრულდება დამოკიდებულებები:

$$\angle BCA=90^0,\ \angle BAC=\alpha,\ \ Ab-BC=k.$$

მაშინ, თუ AB მონაკვეთზე ავიღებთ D წერტილს ისე, რომ BD= BC, მივიღებთ, რომ AD=k (ნახ. 25). ამას გარდა $\angle ABC=90^0-\alpha.$ ამიტომ $\angle BDC=\angle BCD=45^0+\frac{1}{2}\alpha,$ მაშინ, $\angle ADC=135^0-\frac{1}{2}\alpha.$

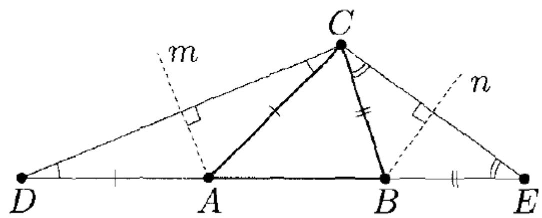
შესაძლებელია ავაგოთ დამხმარე ACD სამკუთხედი $AD = k$ გვერდით და მასთან მიმდებარე $\angle BAC = \alpha$ და $\angle ADC = 135^0 - \frac{1}{2}\alpha$ კუთხეებით. ამ სამკუთხედიდან საძიებელ ABC სამკუთხედამდე შევსება მარტივია და შესაძლებელია განხილულ იქნას რამდენიმე ვარიანტი, რომლებსაც არ განვიხილავთ სიმარტივის გამო.



ნახ. 25.

ამოცანა 5. ააგეთ სამკუთხედი ორი კუთხით და პერიმეტრით.

ვთქვათ, ABC საძიებელი სამკუთხედი აგებულია მოცემული p პერიმეტრით, A და B წვეროებთან შესაბამისად მდებარე α და β–ს ტოლი კუთხეებით.



ნახ. 26.

AB წრფეზე გადავდოთ AC მონაკვეთის ტოლი AD მონაკვეთი და BC მონაკვეთის ტოლი BE მონაკვეთი. მიღებული D და E წერტილები შევაერთოთ C წერტილთან (ნახ. 26).

შევნიშნოთ, რომ ACD სამკუთხედი ტოლფერდაა, CAB–ამ სამკუთხედის შიგა კუთხეა, ამიტომ $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. ანალოგიურად, $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

ამრიგად, ამოცანა დავიყვანეთ დამხმარე სამკუთხედის აგებაზე DE=p გვერდით და მასთან მიმდებარე $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$ და $\angle CED = \frac{\beta}{2}$ ორი კუთხით.

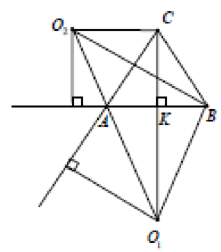
იმისათვის, რომ მივიღოთ საძიებელი ABC სამკუთხედის A და B წვეროები, საკმარისია მაგალითად, ავაგოთ CD და CE მონაკვეთების m და n შუამართობები.

უნდა შევნიშნოთ, რომ წინა ამოცანისაგან განსხვავებით, ამ ამოცანაში დამხმარე სამკუთხედი არ იყო, მაგრამ ის ჩვენ შევქმენით დამატებითი აგებებით, რომელიც შემდეგში დაგვეხმარა ამოცანის ამოხსნაში.

ზოგიერთი არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს დამხმარე ელემენტი შეიძლება არ იყოს არც მონაკვეთი, არც რაიმე სხვა გეომეტრიული ფიგურა, არამედ იყოს ფიგურის ფართობი, ან გეომეტრიული სხეულის მოცულობა და სხვ. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ასეთი ამოცანა.

ამოცანა 6. სამკუთხედის გვერდებია 5, 5 და 6. იპოვეთ სამკუთხედის გარეჩახაზული წრეწირების რადიუსები.

ადვილად გამოვთვლით, რომ ტოლფერდა ABC სამკუთხედის CK სიმაღლეა 4, ხოლო ფართობია 12 (ნახ. 27).



ნახ. 27.

გამოვთვალოთ r_2. შევნიშნოთ, რომ საძიებელი რადიუსი წარმოადგენს $O_2CB, O_2BA,$ O_2AC სამკუთხედების სიმაღლეს. ამიტომ

$$S_{ABC}=S_{O_2CB}+S_{O_2BA}-S_{O_2AC}=\frac{1}{2}r_2\cdot BC+\frac{1}{2}r_2\cdot AB-\frac{1}{2}r_2\cdot AC=\frac{1}{2}r_2\left(BC+AB-AC\right).$$

მეორეს მხრივ, $S_{ABC}=12.$ მივიღებთ განტოლებას: $r_2\left(5+6-5\right)=2\cdot 12.$ საიდანაც,

$$r_2=4=r_3.$$

ანალოგიურად ვიპოვით r_1–ს: $r_1=6.$

ჩვენს მიერ განხილული ამოცანები მოიცავდა გეომეტრიული ამოცანების სამივე სახეს– ამოცანებს აგებაზე, ამოცანებს დამტკიცებაზე და ამოცანებს გამოთვლაზე, რომელთა ამოხსნისას გამოვიყენეთ დამხმარე ელემენტის მეთოდი. რის შემდეგაც შეგვიძლია

გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ჩვენს მიერ შემოღებული კლასიფიკაციით, დამხმარე ელემენტის მეთოდი განეკუთვნება გეომეტრიული ამოცანებია ამოხსნის თითქმის უნივერსალურ მეთოდთა კლასს, რადგან დამხმარე ელემენტის მეთოდი ეფექტურად გამოიყენება აგებაზე, გამოანგარიშებაზე და დამტკიცებაზე გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს.

დამხმარე ელემენტის მეთოდის გამოიყენებისას საშუალება გვაქვს ამოცანის ამოხსნის პროცესში ჩავრთოთ ახალი გეომეტრიული ფიგურები, თავიანთი თვისებებით, რითაც ვაღწევთ ამოცანის ამოხსნის პროცესში გამოყენებული თეორიული საკითხების მოცულობის გაზრდას იმ თეორემების, ფიგურათა თვისებების განხილვით, რომელსაც გამოვიყენებთ ამოცანის ამოხსნის პროცესში და მათზე დაყრდნობით შევქმნით ახალ ცოდნას.

§5. გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა ვექტორული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები

მოსწავლეები სასკოლო კურსში ეჩვევიან იმას, რომ ვექტორები გამოიყენება სხვადასხვა შინაარსის მქონე მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის დროს, როცა ამოცანის პირობაში მოთხოვნილია რაიმე გეომეტრიული ფაქტის დამტკიცება, ან აგების ამოცანების ამოხსნის დროს, სადაც ვექტორებს ვიყენებთ აგებული რაიმე დამხმარე ფიგურის პარალელური გადატანისას. შედარებით ნაკლები გამოყენება აქვს ვექტორებს გამოანგარიშებაზე გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას, თუ არ გავითვალისწინებთ ისეთი სტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებს გამოანგარიშებაზე, სადაც ვექტორების სკალარული ან/და ვექტორული ნამრავლების გამოყენებით მოითხოვება რაიმე სიდიდეთა გამოთვლა (სკალარული ნამრავლი, ვექტორული ნამრავლი, ორ ვექტორს შორის კუთხე, ორი ვექტორით აგებული სამკუთხედის ან პარალელოგრამის ფართობი, სამ ვექტორით აგებული პარალელოგრამის ან პირამიდის მოცულობა და სხვ.). ჩვენ ვგულისხმობთ ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტულ ამოცანებს, რომელთა პირობებით მოითხოვნილია ფიგურის ფართობის, გეომეტრიული სხეულის მოცულობის გამოთვლა და სხვ. უმრავლეს შემთხვევაში ასეთი მიდგომის საჭიროებას ვერც მასწავლებლები ხედავენ და ხშირ შემთხვევაში გვერდს უვლიან ვექტორების გამოყენებით საკმაოდ საინტერესო და მეთოდურად მრავლისმომცემი ამოცანების განხილვას. სასურველია, რომ მასწავლებელმა სასწავლო პროცესში განიხილოს ისეთი არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანები, რომელთა ამოხსნის დროს მოსწავლეებს არ დარჩეთ შთაბეჭდილება, რომ მათ მიერ განხილული ამოცანები ერთმანეთისაგან იზოლირებულია როგორც შინაარსით, ისე ამოხსნის მეთოდებით. ვთვლით, რომ ამოცანათა სისტემის შერჩევას მეტად ფრთხილად და დიდი პასუხიმგებლობით უნდა მოეკიდოს მასწავლებელი, რადგან განსახილავმა ამოცანათა სისტემამ უნდა გამოჩინოს ის ლოგიკური კავშირები, რომელიც უნდა იყოს ამოცანათა შინაარსში და ამოხსნის მეთოდებს შორის. ამასთან მასწავლებელმა უნდა აუხსნას

მოსწავლეებს, რომ გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდი გამოიყენება სამივე სახის-აგებაზე, გამოანგარიშებაზე და დამტკიცებაზე გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს, შემოვიღოთ ასეთ მეთოდებისათვის ტერმინი-თითქმის უნივერსალური, ხოლო ზოგიერთი მეთოდი გამოიყენება მხოლოდ რომელიმე ორი სახის, მაგალითად, მხოლოდ გამოანგარიშებაზე და აგებაზე, ან მხოლოდ აგებაზე და დამტკიცებაზე, ან მხოლოდ გამოანგარიშებაზე და დამტკიცებაზე გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას, ასეთ მეთოდებს ვუწოდოთ ნახევრად უნივერსალური და გამოიყენება მხოლოდ ერთი სახის, მაგალითად, მხოლოდ აგებაზე, ან მხოლოდ გამოანგარიშებაზე ან მხოლოდ დამტკიცებაზე გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას, ვუწოდოთ ასეთ მეთოდებს ნაკლებად უნივერსალური.

მეთოდური თავალსაზრისით, გამართლებულად ვთვლით, როცა ეს შესაძლებელია და ხელოვნურობის შეგრძნებას არ გაუჩენს მოსწავლეებს განსახილავი ამოცანის ამოხსნის ახალი მეთოდის შესწავლა დავაფუძნოთ ადრე განხილულ გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდზე. ამ სახით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდის შემოღება განამტკიცებს ადრე მიღებულ ცოდნას, აფართოებს მისი პრაქტიკული გამოყენების არეალს და მტკიცე საფუძველს ქმნის ახალი ცოდნის შესაძენად. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანა, რომლის ამოხსნა მოვახდინოთ ვექტორთა მეთოდით, ხოლო ამოხსნის პროცესი დამყარებულია წინა პარაგრაფში განხილულ პირველ და მეორე ამოცანებში მოყვანილ გეომეტრიულ ფაქტებზე და ამ ფაქტების განზოგადებაზე.

ამოცანა 5. ABC სამკუთხედში AB და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად K და L წერტილები ისე, რომ CL : BL = 1 : 2. ვთქვათ, Q წერტილი AL და CK წრფეების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ BQC სამკუთხედის ფართობია 1.

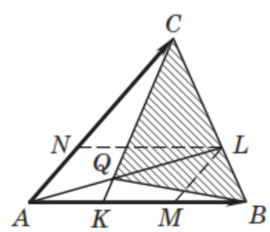
ვთქვათ, $\overline{AB}=\overline{a}, \overline{AC}=\overline{b}.$ ვაჩვენოთ, რომ $S_{\Delta BQL}=\frac{1}{3}, \quad S_{\Delta LQC}=\frac{2}{3}.$ (ნახ. 28).

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ წინა პარაგრაფის პირველ ამოცანას და დამოკიდებულებას $BL:LC=2:1$, მარტივად მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

გამოვიყენოთ ფართობთა თვისება წინა პარაგრაფის პირველი ამოცანიდან და გავითვალისწინოთ, რომ

$$S_{ABC}=S_{ALC}+S_{ALB}=\frac{AL}{QL}\cdot S_{CQL}+\frac{AL}{QL}\cdot S_{QLB}=\frac{AL}{QL}\left(S_{CQL}+S_{QLB}\right)=\frac{AL}{QL}S_{BQC}.$$

ვიპოვოთ ფარდობა $\frac{AL}{QL}$. წრფე, რომელიც L წერტილზე გადის და AC გვერდის პარალელურია AB გვერდს კვეთს M წერტილში, ამასთან $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{1}$ და $\overline{AM}=\frac{2}{3}\bar{a}$. წრფე, რომელიც L წერტილზე გადის და AC გვერდის პარალელურია, AC გვერდს გადაკვეთს N წერტილში, ამასთან $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$ და $\overline{AN}=\frac{1}{3}\bar{b}$.



ნახ. 28.

საიდანაც,

$$\overline{AL}=\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}.$$

რადგან A,Q და L წერტილები ერთ წრფეზე ძევს, ამიტომ $\overline{AQ}$ და $\overline{AL}$ ვექტორები კოლინეარულია, გვაქვს

$$\overline{AQ}=\mu\overline{AL}=\frac{\mu}{3}\left(2\bar{a}+\bar{b}\right). \qquad (1)$$

ანალოგიურად, K წერტილისათვის: $\overline{CK}=\frac{2}{3}\overline{CA}+\frac{1}{3}\overline{CB}=\frac{1}{3}\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)$, $\overline{CQ}=\lambda\overline{CK}=\frac{\lambda}{3}\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)$.

მაგრამ, $\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}$. საიდანაც, $\frac{\mu}{3}\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)=\bar{b}+\frac{\lambda}{3}\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)$. ფრჩხილების გახსნის და მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ მივიღებთ: $\left(2\mu-\lambda\right)\bar{a}+\left(\mu-3+3\lambda\right)\bar{b}=0$. საიდანაც,

$$\begin{cases}2\mu-\lambda=0\\ \mu+3\lambda-3=0\end{cases}\Rightarrow \mu=\frac{3}{7},\ \lambda=\frac{6}{7}.$$

განვიხილოთ ფარდობა $\frac{QL}{AL}=\frac{AL-AQ}{AL}=1-\frac{AQ}{AL}$.

მაგრამ, (1) ტოლობიდან $\frac{AQ}{AL}=\mu.$ გვაქვს, $\frac{QL}{AL}=1-\mu \Rightarrow \frac{AL}{QL}=\frac{1}{1-\mu}=\frac{7}{4}.$

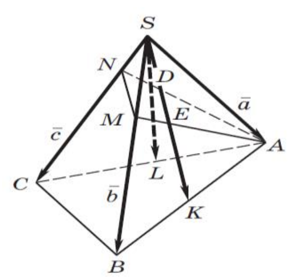
საბოლოოდ მივიღებთ: $\frac{S_{ABC}}{S_{BQC}}=\frac{1}{1-\mu}=\frac{7}{4}.$

ამის შემდეგ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მოსწავლეებს გავაცნოთ ვექტორების გამოყენებით სივრცითი სხეულის მოცულობის ან გვერდითი ზედაპირის ფართობის გამოთვლა. მაგრამ, რადგან ფართობის გამოთვლასთან დაკავშირებული პლანიმეტრიის ამოცანა განხილული გვაქვს, უმჯობესია განვიხილოთ სტერეომეტრიული ამოცანა, სადაც მოთხოვნილია სხეულის მოცულობის გამოთვლა. ამასთან, განსახილავი ამოცანა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს: დაცული უნდა იყოს დიდაქტიკური პრინციპი– გადასვლა უნდა განხორციელდეს მარტივიდან რთულზე, ემყარებოდეს ადრე მიღებულ ცოდნას, ცხადია უნდა იყოს არასტანდარტული, არ უნდა გასცილდეს სასკოლო მათემატიკის კურსს, ამოხსნის პროცესი არ უნდა იყოს ხანგრძლივი და სხვ.

ამოცანა 6. $SABC$ სამკუთხა პირამიდის ფუძის A წვეროზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც SAB სამკუთხედის მედიანას შუაზე ყოფს, ხოლო SAC სამკუთხედის SL მედიანას გადაკვეთს ისეთ D წერტილში, რომ $SL=2SD$. როგორი შეფარდებით ყოფს ეს სიბრტყე პირამიდის მოცულობას?

დავუშვათ, $\overline{SA}=\overline{a}, \overline{SB}=\overline{b}$ და $\overline{SC}=\overline{c}$. ცხადია, რომ $k_1=1.$ ვთქვათ, მკვეთი სიბრტყე პირამიდას SB და SC წიბოებს კვეთს შესაბამისად M და N წერტილებში ნახ. 29). ამიტომ $\overline{SM}=k_2\overline{b}, \quad \overline{SN}=k_3\overline{c}$. ვიპოვოთ k_2 და k_3. ამისათვის ვისარგებლოთ ტოლობებით:

$$\overline{SE}=\frac{1}{2}\overline{SK}=\frac{1}{4}\left(\overline{a}+\overline{b}\right),\ \overline{SD}=\frac{1}{3}\overline{SL}=\frac{1}{6}\left(\overline{a}+\overline{c}\right).$$



ნახ. 29.

მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ, რომ A, D, E და M წერტილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობს. მოსწავლეთათვის ცნობილია, რომ სივრცის ნებისმიერი S წერტილისათვის შესრულებულია ტოლობა: $\overline{SM} = \alpha \cdot \overline{SA} + \beta \cdot \overline{SE} + (1-\alpha-\beta) \cdot \overline{SD},$ სადაც $\alpha \in R, \beta \in R.$

თუ გავითვალისწინებთ მიღებულ ტოლობებს, გვექნება:

$$\overline{SM} = \alpha \cdot \bar{a} + \frac{\beta}{4}\left(\bar{a}+\bar{b}\right) + \frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)\left(\bar{a}+\bar{c}\right).$$

რადგან $\overline{SM} = k_2 \bar{b},$ მაშინ თუ გამოვიყენებთ ვექტორის სამ არაკომპლანარულ ვექტორად დაშლის ერთადერთობას, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6} = 0; \\ \frac{1}{4}\beta = k_2; \\ \frac{1}{6}(1-\alpha-\beta) = 0. \end{cases}$$

საიდანაც, $k_2 = \frac{1}{3}.$ ანალოგიურად, ტოლობებიდან: $\overline{SN} = k_3 \bar{c},$ $\overline{SN} = \left(\frac{5}{6}\alpha + \frac{\beta}{12} + \frac{1}{6}\bar{a}\right) + \frac{\beta}{4}\bar{b} + \frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)\bar{c}.$ მივიღებთ, რომ $k_3 = \frac{1}{5}.$ წინა პარაგრაფის მეორე ამოცანის თანახმად გვექნება: $V_{SAMN} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot V_{SABC} = \frac{1}{15} \cdot V_{SABC}.$ პირამიდის დარჩენილი ნაწილის მოცულობა ტოლია $\frac{14}{15} \cdot V_{SABC}.$ ამრიგად, მოცულობათა საძიებელი ფარდობა ტოლია 1 : 14.

განხილული ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენეთ წინა პარაგრაფში ამოხსნილი ამოცანები და მათზე დაყრდნობით მოსწავლეებს ვექტორების დახმარებით გადავეცით ახალი ვოდნა, კერძოდ, სასკოლო მასალისაგან განსხვავებით ვექტორები გამოვიყენეთ სამკუთხედის ფართობის და პირამიდის მოცულობის გამოთვლისათვის. რითაც ერთის მხრივ მოვახდინეთ განვლილი მასალის საფუძვლიანი განმტკიცება, მეორეს მხრივ ჩვენ შევძელით ასახსნელი მასალის ეფექტური გადაცემა, ხოლო მოსწავლეებმა შეიძინეს ახალი ცოდნა, რომელიც ლოგიკურ კავშირშია ადრე მიღებულ ცოდნასთან. დაცულია სწავლების ყველა დიდაქტიკური პრინციპი, მათ შორის ერთ–ერთი მარტივიდან რთულზე გადასვლის დიდაქტიკური პრინციპი. ჩვენს მიერ ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტით დადასტურდა წარმოდგენილი ფორმით სწავლების ეფექტურობა.

§6. გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში

კოორდინატების შემოღება სიბრტყეზე და სივრცეში შეიძლება უამრავი სხვადასხვა გზით. კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით ამა თუ იმ კონკრეტული გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს შესაძლებელია შემოვიღოთ არა მარტო დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, არამედ კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემა და შემდეგ მათგან შევარჩიოთ ისეთი, რომლის გამოყენებითაც ამოცანის ამოხსნა მეთოდურად გამართულია, ამოხსნის გზა მარტივდება და მოსწავლეთათვის ადვილად აღსაქმელი ხდება, საჭიროებს შედარებით ნაკლები რაოდენობის და მარტივ მათემატიკურ გარდაქმნებს და გამოთვლების ჩატარებას, უფრო მოსახერხებელს ხდის ამოცანის ამოხსნას. ამ შემთხვევაში მასწავლებელიც და მოსწავლეებიც თავს კომფორტულად გრძნობენ და მოსწავლეთათვის ამოცანათა ამოხსნის პროცესში ჩართვა ყოველგვარი ძალდატანების გარეშე–ბუნებრივად ხდება და ისინი ხალისით ერთვებიან სასწავლო პროცესში.

გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისაგან განსხვავებული სისტემები, როგორიცაა: აფინური (ირიბკუთხა) კოორდინატთა სისტემა, პოლარული კოორდინატები, ცილინდრული კოორდინატები, სფერული კოორდინატები და სხვ.

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის დროს ყველაზე ხშირად გამოიყენება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის გამოყენებითაც მარტივდება გამოთვლების ჩატარება და მოსწავლეების მიერ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა აღიქმება როგორც ბუნებრივი და მასთან შეგუებულობის გამო რაიმე მეთოდური სირთულე არ წარმოიშვება.

კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების დროსაც მიზანშეწონილად მიგვაჩნია სასწავლო პროცესის ისე დაგეგმვა, რომ პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების განხილვა მოხდეს პარალელურ რეჟიმში. შევნიშნოთ, რომ კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებისას ამოცანიების გრაფიკული გამოსახვის და სირთულის გათვალისწინებით, მიგვაჩნია, რომ შედარებით მეტი ყურადღება უნდა დავუთმოთ სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას პლანიმეტრიულ ამოცანებთან დაკავშირებით.

კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით განხილულ ამოცანათა შორის მოსწავლეთა განსაკუთრებულ დაინტერესებას იწვევს ისეთი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია წრეწირთან და წრესთან, სფეროსა და ბირთვთან, რადგან ამ გეომეტრიული ფიგურებისა და სხეულების განტოლებების მიღება მათი განსაზღვრებების საფუძველზე კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებასთან არის დაკავშირებული და ამოცანების ამოხსნის დროსაც ბუნებრივად ხდება მეთოდის გამოყენება და მოსწავლეებში ქმნის მზაობას კოორდინატთა მეთოდი განვრცობილი და გადატანილი იქნეს სხვა სახის არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროსაც.

განვიხილოთ ამოცანები წრეწირსა და სფეროზე, რომელთა ამოხსნისას კოორდინატთა მეთოდის გამოყენება ძალიან კარგ ეფექტს იძლევა.

ამოცანა 1. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის წერტილებზე $A(2,3)$ და $B(5,4)$ და ეხება oy ღერძს.

ვთქვათ, წრეწირის ცენტრის კოორდინატებია $O(x_0, y_0)$ და რადიუსია R. ამოცანის პირობის თანახმად, წრეწირი ეხება oy ღერძს, რაც იმას ნიშნავს, რომ წრეწირის ცენტრის x_0 აბსცისა წრეწირის საძიებელი R რადიუსის ტოლია. რადგან $A(2,3)$ და $B(5,4)$ წერტილები წრეწირზე მდებარეობენ, ამიტომ ამ მათი კოორდინატები აკმაყოფილებენ წრეწირის განტოლებას. თუ გავითვალისწინებთ ჩამოთვლილ თვისებებს, შეგვიძლია დავწეროთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} (x_0-2)^2+(y_0-3)^2=R^2 \\ (x_0-5)^2+(y_0-4)^2=R^2 \\ x_0=R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2-4x_0+y_0^2-6y_0+13=R^2 \\ x_0^2-10x_0+y_0^2-8y_0+41=R^2 \\ x_0=R \end{cases}.$$

თუ ერთმანეთს გავუტოლებთ სისტემის პირველი და მეორე გასნტოლებების მარცხენა მხარეებს, მივიღებთ:

$$3x_0 + y_0 = 14.$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვლისწინებთ, რომ $x_0 = R$, მივიღებთ

$$3R + y_0 = 14.$$

გამოვსახოთ x_0 და y_0 R –ით და ჩავსვათ სისტემის პირველ ან მეორე განტოლებაში, ჩვენ შემთხვევაში გამოთვლების ჩასატარებლად უმჯობესია პირველ განტოლებაში. მივიღებთ:

$$(R-2)^2 + (14-3R-3)^2 = R^2.$$

თუ ჩავატარებთ ელემენტარულ გარდაქმნებს და ამოვხსნით მიღებულ კვადრატულ განტოლებას, მივიღებთ:

$$R = 5 \text{ ან } R = \frac{25}{9}.$$

R –ის მიღებული ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მნიშვნელობა გვეუბნება, რომ ამოცანას აკმაყოფილებს ერთმანეთისაგან განსხვავებული ორი წრეწირი. რაც შეეხება წრეწირის ცენტრის კოორდინატებს, ერთ შემთხვევაში არის $O(5;-1)$ და საძიებელი წრეწირია:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

მეორე შემთხვევაში წრეწირის ცენტრის კოორდინატებია $O\left(\frac{25}{9};\frac{17}{3}\right)$ და საძიებელი წრეწირია:

$$\left(x-\frac{25}{9}\right)^2 + \left(y-\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}.$$

ამოცანა 2. შეადგინეთ სფეროს განტოლება, რომელიც გადის $A(1;-1;4)$ წერტილზე და ეხება საკოორდინატო სიბრტყეებს.

რადგან საძიებელი სფეროს განტოლება ეხება საკოორდინატო სიბრტყეებს და $A(1;-1;4)$ წერტილი სფეროს წერტილია, ამიტომ სფეროს ცენტრიდან საკოორდინატო სიბრტყეებამდე

მანილები სფეროს რადიუსის ტოლია და სფეროს ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებისათვის სრულდება პირობები:

$$x>0, \quad y<0, \quad z>0.$$

სფეროს O ცენტრის კოორდინატები იქნება $O(R;-R;R)$.

მეორეს მხრივ, რადგან $A(1;-1;4)$ წერტილი სფეროს წერტილია, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებს სფეროს განტოლებას:

$$(1-R)^2+(-1+R)^2+(4-R)^2=R^2.$$

საიდანაც მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$R^2-6R+9=0.$$

ანუ

$$(R-3)^2=0.$$

აქედან

$$R=3.$$

სფეროს საძიებელი განტოლებაა:

$$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$

კოორდინატთა მეთოდის გამოყენება კარგ ეფექტს იძლევა ისეთი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს, როცა ამოცანის ამოხსნის დროს უნდა გამოვიყენოთ გეომეტრიული გარდაქმნები–პარალელური გადატანა, მობრუნება, ჰომოთეტია და სხვ. ზოგჯერ შესაძლებელია მოვახდინოთ კოორდინატთა სისტემის ან პარალელური გადატანა, ან მობრუნება და მან დაიკავოს ისეთი მდებარეობა სიბრტყეზე, ან სივრცეში, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მარტივად ამოვხსნათ მოცემული ამოცანა, ან მოცემული ამოცანა დავიყვანოთ მასზე უფრო მარტივ ამოცანაზე, ან მის ტოლფას ამოცანაზე, რომელიც შედარებით მარტივი ამოსახსნელია. ამოვხსნათ ის და მასზე დაყრდნობით ანალოგიის გამოყენებით ამოვხსნათ თავიდან მოცემული ამოცანა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა 3. $(x-8)^2+(y-10)^2=169$ წრეწირში ჩავხაზულია $ABCD$ კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის B, C და D წვეროების კოორდინატები, თუ A წვეროს კოორდინატებია $A(13;-2)$.

წრეწირის ცენტრი მდებარეობს წერტილში $O(8;10)$ და $R=13$. თუ წრეწირის ცენტრს გადავიტანთ $\overline{p}(-8,-10)$ პარალელური გადატანით, მაშინ წრეწირის ცენტრი გადავა $O'(0;0)$ წერტილში. ხოლო $A(13;-2)$ წერტილი გადავა წერტილში $A'(5;-12)$ და მოცემული ამოცანა დაიყვანება ასეთი სახის სტანდარტულ ამოცანაზე, რომლის ამოხსნა რაიმე სირთულესთან დაკავშირებული არ იქნება.

ამოცანა 4. $x^2+y^2=169$ წრეწირში ჩახაზულია $A'B'C'D'$ კვადრატი. იპოვეთ კვადრატის B', C' და D' წვეროების კოორდინატები, თუ A' წვეროს კოორდინატებია $A'(5;-12)$.

ამოვხსნათ ეს ამოცანა. რადგან A' და C' წერტილები სიმეტრიული წერტილებია $O'(0;0)$ კოორდინატთა სათავის მიმართ, ამიტომ $C'(-5;12)$. A' და B' წერტილები სიმეტრიული წერტილებია აბსცისათა ღერძის მიმართ, ამიტომ $B'(5;12)$. ხოლო D' წერტილი A' წერტილის სიმეტრიული წერტილია ორდინატთა ღერძის მიმართ, ამიტომ $D'(-5;-12)$. ამის შემდეგ თავიდან მოცემული ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ $B'(5;12)$, $C'(-5;12)$ და $D'(-5;-12)$ წერტილების წინა სახე $\overline{p}(-8,-10)$ პარალელური გადატანის დროს. მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$B(13;22),\ C(3;22) \text{ და } D(3;22).$$

კოორდინატთა მეთოდის გამოყენება ზოგჯერ ძალზედ კარგ ეფექტს იძლევა სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს. განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

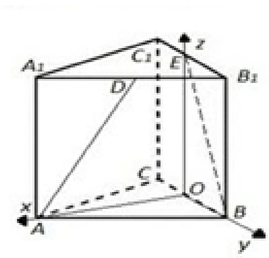
ამოცანა 5. მართ სამკუთხა $ABCA_1B_1C_1$ პრიზმაში ყველა წიბო 1–ის ტოლია. A_1B_1 და B_1C_1 წიბოების შუაწერტილებია შესაბამისად D და E. იპოვეთ AD და BE წრფეებს შორის კუთხის კოსინუსი.

ამოცანის ამოხსნისათვის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა შევარჩიოთ შემდეგნაირად: მისი სათავე დავამთხვიოთ BC გვერდის O შუაწერტილს, აბსცისათა ღერძი $ABCA_1B_1C_1$ პრიზმის ABC ფუძის OA მედიანას, ორდინატთა ღერძი შეიცავს პრიზმის BC

წიბოს, ხოლო აპლიკატთა ღერძი პრიზმის AA_1, BB_1 და CC_1 წიბოების პარალელური იყოს (ნახ. 30).

ამის შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ მოცემული პრიზმის ყველა წიბო 1–ის ტოლია და დავადგინოთ A, B, E და D წერტილების კოორდინატები. მარტივად გამოვთვლით, რომ

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{1}{2};0\right), E(0;0;1) \text{ და } D\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4};0\right).$$

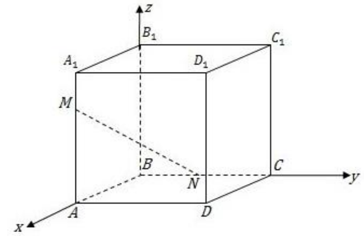


ნახ. 30.

მოხდა ამოცანის დაყვანა სტანდარტულ ამოცანაზე, სადაც ცნობილია ორი ვექტორის სათავე და ბოლო, საპოვნია ამ ორ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, რაც არანაირ პრობლემას აღარ წარმოადგენს მოსწავლეებისათვის.

ამოცანა 6 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბში M წერტილი AA_1 წიბოს წერტილია, ამასთან $AM : A_1M = 3:1$. N წერტილი BC წიბოს შუაწერტილია. იპოვეთ MN და DD_1 წრფეებს შორის კუთხის კოსინუსი.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა შევარჩიოთ ისე, როგორც ნახაზზეა გამოსახული, კერძოდ კოორდინატთა სათავე დავამთხვიოთ კუბის B წვეროს, აბსცისათა ღერძი მოიცავდეს AB წიბოს, ორდინატთა ღერძი მოიცავდეს BC წიბოს, ხოლო აპლიკატთა ღერძი მოიცავდეს BB_1 წიბოს (ნახ. 31).



ნახ. 31.

ამის შემდეგ, ისევე როგორც წინა ამოცანაში, აქაც გავითვალისწინებთ, რომ მოცემული კუბის წიბო 1–ის ტოლია და ადვილად დავადგენთ, რომ M,N,D და D_1 წერტილების კოორდინატებია

$$M\left(1;0;\frac{3}{4}\right), N\left(0;\frac{1}{2};0\right), D(1;1;0),\ D_1(1;1;1).$$

აქაც, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში ამოცანა დავიყვანეთ სტანდარტულ ამოცანაზე, რომლის ამოხსნა მოსწავლეებისათვის რაიმე პრობლემას აღარ წარმოადგენს.

განვიხილეთ და მეთოდურად გავაანალიზეთ კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა, რომლებიც დაკავშირებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის იმდაგვარად, სპეციალურად შერჩევასთან, რომ ამოცანის ამოხსნის პროცესი გამარტივებულია და დროის ნაკლები დანახარჯებით შედარებით მარტივად არის შესაძლებელი ამოცანის ამოხსნა. ზოგჯერ, შესაძლებელია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ მოვახდინოთ ამოცანის დაყვანა (რედუქცია) შინაარსით გაცილებით მარტივ ამოცანაზე, რომლის ამოხსნა რაიმე სირთულესთან არ იქნება დაკავშირებული, დაყვანილი მარტივი ამოცანის ამოხსნის შემდეგ კი შესაძლებელია დავუბრუნდეთ თავიდან მოცემულ ამოცანას და მარტივად ამოვხსნათ ისიც. ჩვენი კლასიფიკაციით კოორდინატთა მეთოდიც განეკუთვნება არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის თითქმის უნივერსალუღ მეთოდთა კატეგორიას, რადგან მისი გამოყენებით შესაძლებელია ამოვხსნათ სამივე ტიპის გეომეტრიული ამოცანები–ამოცანები აგებაზე, ამოცანები გამოანგარიშებაზე და ამოცანები დამტკიცებაზე.

§7. გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა ალგებრული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები

არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას ხშირად მოსახერხებელია ამოცანის ფორმულირება მოვახდინოთ ისე, რომ ფიგურის მოცემული და საძიებელი ელემენტების გამოსახვა მოხდეს რაიმე ისეთი სიდიდეების საშუალებით, რომლებზეც შესაძლებელი იქნება გამოვიყენოთ მათემატიკის სასწავლო კურსის გეომეტრიული მასალიდან ცნობილი თეორემები და თვისებები და მათზე დაყრდნობით ამ სიდიდეებს გამოვსახავთ ფორმულების სახით. სწორედ ეს არის ალგებრული მეთოდის არსი. კერძოდ, ალგებრული მეთოდით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა გულისხმობს გეომეტრიული შინაარსის ამოცანის მოცემულობის „ალგებრაიზაციას". ცხადია ეს ეხება ისეთ სიდიდეებს, რომელთა გამოსახვა შესაძ;ებელია ფორმულების სახით, რაც შემდეგში საშუალებას მოგვცემს შევადგინოთ განტოლება/უტოლობა ან/და განტოლებათა/უტო–ლობათა სისტემა ან/და ერთობლიობა, რომელთა ამონახსნსაც წარმოადგენს ამოცანის საძიებელი სიდიდე. მაგალითად, გეომეტრიული ამოცანის მოცემულობაში ასეთი სიდიდეები შესაძლებელია იყოს მონაკვეთის სიგრძე, სიბრტყის ან სივრცის წერტილებს შორის მანძილები, მანძილი ორ პარალელურ წრფეს შორის სიბრტყეზე და სივრცეში, მანძილი აცდენილ წრფეებს შორის სივრცეში, მანძილი მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფემდე ან სიბრტყემდე, ფიგურის ან მისი ნაწილის ფართობი, გეომეტრიული სხეულის ამ მისი ნაწილების მოცულობები, ვექტორების სკალარული ან/და ვექტორული ან/და შერეული ნამრავლები და სხვ.

ალგებრული მეთოდით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს სხვადასხვაგვარი მიდგომები. მაგალითად, შესაძლებე–ლია საძიებელი სიდიდის გამოთვლა მოვახდინოთ პირდაპირი წესით. ასეთი მიდგომა გამოყენებული შეიძლება იყოს გეომეტრიული ამოცანების ალგებრული მეთოდით ამოხსნის საწყის ეტაპზე–საილუსტრაციო სახით. რაც შეეხება ისეთ გეომეტრიულ

ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია პირდაპირი გამოთვლით, არაფრის მომცემი არ არის შინაარსობრივად და მათი განხილვა ჩვენ მიზანშეწონილად არ მიგვაჩნია.

საძიებელი სიდიდის გამოთვლა მოვახდინოთ არა უშუალოდ რაიმე მზა ფორმულის სახით, არამედ ეტაპობრივად. რაც გულისხმობს იმას, რომ ჯერ გამოვთვლით რაიმე დამხმარე სიდიდეს, რომელიც რაღაც წესით/ფორმულით დაკავშირებულია ამოცანაში საძიებელ სიდიდესთან, შემდეგ ნაპოვნი სიდიდით გამოვთვლით მეორე სიდიდეს, რომელიც რაღაც წესით/ფორმულით დაკავშირებულია საძიებელ სიდიდესთან და ა.შ. სასრული რაოდენობის ასეთი სვლების შემდეგ გამოვთვლით ამოცანის პირობით საპოვნ საძიებელ სიდიდეს. შევნიშნოთ, რომ ყოველი მომდევნო სვლის შემდეგ შუალედურად ნაპოვნ სიდიდესა და ამოცანის საძიებელ სიდიდეს შორის კავშირები სულ უფრო ცხადი და მარტივი უნდა იყოს. შესაძლებელია ალგებრული მეთოდით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ეფექტურად გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული მეთოდი, ასევე მათემატიკური ანალიზის მეთოდები.

ალგებრული მეთოდით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას უფრო ხშირად იყენებენ საძიებელი სიდიდის გამოსახვას სხვადასხვა განტოლებებით. ამის შემდეგ ამ განტოლებებს აერთიანებენ ერთ განტოლებათა სისტემაში და ხსნიან მას. სისტემის ამონახსნს უმრავლეს შემთხვევაში წარმოადგენს ამოცანაში საპოვნი უცნობი სიდიდე ან ამონახსნს წარმოადგენს ისეთი დამხმარე მონაცემი, რომლის საშუალებითაც მარტივად არის შესაძლებელი ამოცანის პირობით საძიებელი სიდიდე. ზუსტად ასეთი მიდგომაა წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდით ამოცანების ამოხსნის დროსაც. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით ასეთი მიდგომები იდენტურია. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი შინაარსის მქონე არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანა.

ამოცანა 1. ABC სამკუთხედის ორი წვეროს კოორდინატებია $A(-1;-1)$ და $B(4;5)$, ხოლო მესამე წვერო $y=5x-15$ წრფეზე ძევს. სამკუთხედის ფართობია 9,5. იპოვეთ C წვეროს კოორდინატები.

ეს ამოცანა შესაძლებელია ამოვხსნათ გეომეტრიულად. კერძოდ, რადგან მოცემულია სამკუთხედის ორი წვეროს კოორდინატები, შესაძლებელია გამოვთვალოთ ამ სამკუთხედის გვერდის სიგრძე. შემდეგ, რადგან ვიცით სამკუთხედის ფართობი, შეგვიძლია ვიპოვოთ ამ გვერზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე. შემდეგ ვიპოვოთ სამკუთხედის მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, შემდეგ დავწეროთ ნაპოვნი წრფის პარალელური ორი წრფის განტოლებები, რომლებიც სამკუთხედის გვერდის შემცველი წრფიდან დაშორებულია ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ტოლი მანძილით. ბოლოს ვიპოვოთ თითოეული წრფის თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები მოცემულ წრფესთან, რომელზეც მდებარეობს სამკუთხედის მესამე C წვერო. წარმოდგენილ სქემაში ყველაფერი წესრიგშია და შესაძლებელია ამ მოდელით ამოცანის ამოხსნა იმის გათვალისწინებითაც კი, რომ წარმოდგენილი მოდელი ანალიზური გეომეტრიის ელემენტების ცოდნას მოითხოვს და რამდენადმე სცილდება სასკოლო მათემატიკის კურსს (ანალიზურ გეომეტრიაში ასეთი ამოცანები მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებთან ისწავლება მეორე სემესტრში). ამიტომ, უნდა ვიფიქროთ ამოცანის ამოხსნის სხვა მეთოდის გამოყენების შესახებ, ამ შემთხვევაში ბუნებრივად, ყოველგვარი ძალდატანებისა და რაიმე მითითებების მიცემის გარეშე მოსწავლეები აყენებენ საკითხს ამოცანის ამოხსნია ალგებრული მეთოდის შესახებ. რასაც მასწავლებლის მხარდაჭერით ახორციელებენ კიდეც. ჩვენ მოვიყვანთ ამოცანის ამოხსნას ალგებრული მეთოდით.

ვთქვთ, სამკუთხედის მესამე C წვეროს კოორდინატებია $C\left(x_0, y_0\right)$. მაშინ $\overline{BA}(-5;-6)$ და $\overline{BC}\left(x_0-4, y_0-5\right)$. ABC სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\sin B.$$

მეორეს მხრივ, ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმარტების ძალით

$$\cos B=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

რადგან $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$, ამიტომ გვექნება:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|\cdot\sqrt{1-\frac{\left(\overline{BA}\cdot\overline{BC}\right)^2}{\left(\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|\right)^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|\right)^2-\left(\overline{BA}\cdot\overline{BC}\right)^2}.$$

სირთულეს არ წარმოადგენს დავადგინოთ, რომ

$$\left|\overline{BA}\right|^2=61,\quad \left|\overline{BC}\right|^2=\left(x_0-4\right)^2+\left(y_0-5\right)^2,\quad \overline{BA}\cdot\overline{BC}=50-5x_0-6y_0.$$

თუ მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ ABC სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულაში, მივიღებთ ირაციონალურ განტოლებას ორი უცნობით:

$$\sqrt{61\left(\left(x_0-4\right)^2+\left(y_0-5\right)^2\right)-\left(50-5x_0-6y_0\right)^2}=2\cdot 9,5.$$

მეორე განტოლებად შეიძლება გამოვიყენოთ ამოცანის პირობა, რომლის თანახმად. საძიებელი C წვერო ძევს $y=5x-15$ წრფეზე. რაც ნიშნავს, რომ C წერტილის x_0 და y_0 კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$y_0=5x_0-15.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ დამოკიდებულებას ირაციონალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\sqrt{61\left(\left(x_0-4\right)^2+\left(5x_0-20\right)^2\right)-\left(140-35x_0\right)^2}=19,$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\left|x_0-4\right|=1.$$

საიდანაც

$$x_0=5 \text{ ან } x_0=3.$$

გამოვთვალეთ, რა C წვეროს აბსცისები, სირთულეს არ წარმოადგენს მათი შესაბამისი ორდინატების გამოთვლა.

როცა $x_0=3$, მაშინ $y_0=0$.

როცა $x_0=5$, მაშინ $y_0=10$.

ე.ი. საძიებელ C წერტილს შეუძლია ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მდებარეობის დაკავება და მისი კოორდინატებია:

$$C(3,0) \text{ ან } C(5,10).$$

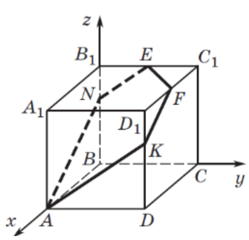
ამოცანის ამოხსნა დასრულდა. ამის შემდეგ აუცილებელია მასწავლებელმა გააკეთოს კომენტარი, თუ რით არის გამართლებული გამოყენებული ალგებრული მეთოდი. მან მოსწავლეებს უნდა უთხრას, რომ ალგებრული მეთოდით ამოხსნისას მათ კიდევ ერთხელ გაიხსენეს და გაიმეორეს ირაციონალური განტოლების ამოხსნა, მოდულის თვისებები, წერტილთა გეომეტრიული ადგილი და სხვ.

არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოსხნის დროს ზოგჯერ ალგებრული მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია კომბინირებულად სხვა მეთოდებთან ერთად. მაგალითად, ერთი და იგივე არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ კოორდინატთა სისტემის შერჩევის მეთოდი, გეომეტრიული სხეულის სიბრტყის კვეთის აგების კვალთა მეთოდი, წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდი, ალგებრული მეთოდი და სხვ. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 2. იპოვეთ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის მკვეთი სიბრტყის განტოლება და იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის A წვეროზე და B_1C_1 და C_1D_1 წიბოების შუაწერტილებზე. კუბის წიბო a–ს ტოლია.

კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა შევარჩიოთ ისე, როგორც 32–ე ნახაზზეა მოცემული. გამოვთვალოთ A,E და F წერტილების კოორდინატები. დავადგენთ, რომ

$$A(a;0;0),\ E\left(0;\frac{a}{2};a\right),\ F\left(\frac{a}{2};a;a\right).$$



ნახ. 32.

ამ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაა:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ a & -\frac{a}{2} & -a \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

დეტერმინატის გამოთვლის შედეგად მივიღებთ:

$$2x-2y+3z-2a=0.$$

გამოვთვლით, რა ქვედა ფუძესა და სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსს, მივიღებთ:

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

სიბრტყის მიერ კუბის გადაკვეთის შედეგად მიღებული ხუთკუთხედის გეგმილი კუთხის ქვედა ფუძეზე ტოლია:

$$S_{\text{გეგმ}} = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7}{8}a^2.$$

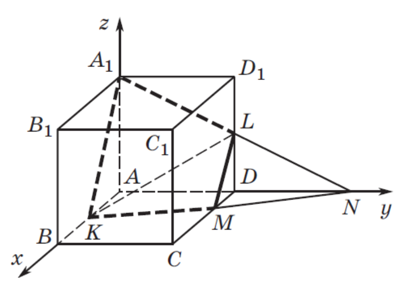
ცხადია, რომ სიბრტყისა და კუბის კვეთის შედეგად მიღებული ხუთკუთხედის საძიებელი ფართობი იქნება:

$$S = \frac{S_{\text{გეგმ}}}{\cos\varphi} = \frac{7\sqrt{17}}{24}a^2.$$

ამოცანა 3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის წიბო a–ს ტოლია. K და L წერტილები შესაბამისად AB და DD_1 წიბოების შუაწერტილებია. როგორი ფარდობით ყოფს კუბის მოცულობას სიბრტყე, რომელიც გადის A_1, K და L წერტილებზე?

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ (ნახ.33)

$$K\left(\frac{a}{2};0;0\right), L\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$



ნახ.33.

ამიტომ,

$$A_1L^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2,$$

ანუ

$$A_1L = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$A_1K = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

განვიხილოთ ორი სამკუთხა $NAKA_1$ და $NDML$ პირამიდა. მეორე პირამიდის უცნობი ND და DM წიბოები შესაბამისად აღვნიშნოთ x და y–ით. A_1NA და LND სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ $x = a$, ხოლო AKN და DMN სამკუთხედების მსგავსებიდან კი– $y = \frac{a}{4}$. მაშინ

$$KL^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3}{2}a^2,$$

საიდანაც

$$KL = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$V_{NAKA_1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot 2a = \frac{a^3}{6},$$

$$V_{NDML} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot a = \frac{a^3}{48}.$$

ამ დამოკიდებულებებიდან ვიპოვით მკვეთი სიბრტყით გაყოფილი კუბის ერთი ნაწილის მოცულობას:

$$V_1 = V_{NAKA_1} - V_{NDML} = \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{48} = \frac{7a^3}{48}.$$

მკვეთი სიბრტყით გაყოფილი კუბის მეორე ნაწილის მოცულობაა:

$$V_2 = \frac{41a^3}{48}.$$

საიდანაც,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{41}.$$

განხილული ბოლო ორი გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს ჩვენ ალგებრულ მეთოდთან ერთად გამოვიყენეთ რამოდენიმე სხვა მეთოდიც (კოორდინატთა სისტემის შერჩევის მეთოდი, გეომეტრიული სხეულის კვეთის აგება კვალთა მეთოდით, წერტილთა გეომეტრიული ადგილის მეთოდი, დეტერმინანტთა თეორიის საკითხები, ანალიზური გეომეტრიის სხვადასხვა მეთოდი), რითაც მოსწავლეებს ვაჩვენეთ, რომ გეომეტრიული მასალის შესწავლა მჭიდრო კავშირშია მათემატიკის სხვადასხვა დარგებთან. ამით ხაზი გავუსვით იმას, რომ მათემატიკა ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში უნდა შეისწავლებოდეს არა დიფერენცირებულად, დანაწევრებულად, არამედ როგორც ერთიანი მეცნიერება, რომლის სხვადასხვა ნაწილებსაც სწავლების სპეციფიკური თავისებურებები გააჩნია და კონკრეტული სასწავლო თემის, თუ ამოცანის ამოხსნის დროს უნდა იყოს გათვალისწინებული მისი სწავლების თავისებურებები, რაც თავის მხრივ მოითხოვს კონკრეტული საკითხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების შესწავლას დაახლოებით იმ ფორმით როგორც წარმოდგენილ დისერტაციაშია დამუშავებული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში.

§8. პედაგოგიური ექსპერიმენტი

მათემატიკის სასკოლო კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკის თავისებურებებმა, რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული იყო დისერტაციის I და II თავებში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა ექვსი წლის (2011-2017 წლებში) განმავლობაში პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა ქართულ–ამერიკულ სკოლა „პროგრესში“, შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის ჟონეთის საშუალო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის №1 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში და ვანის მუნიციპალიტეტის ზედა გორას საჯარო სკოლაში. ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო წერებისა და დამოუკიდებელი სამუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც შეეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2011-2013 წლები) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის პროცესში ზოგიერთი არაარსებითი ხასიათის ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2013-2017 წლები) დადასტურდა მათემატიკის სასკოლო კურსში გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა. სულ პედაგოგიურ ექსპერიმენტში მონაწილეობდა 162 მოსწავლე.

ანალიზმა ცხადყო, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმოადგენს ისეთი გეომეტრიული ამოცანები, რომელთა ამოხსნა უკავშირდება სპეციალური ხერხების

გამოყენებას. თემატიკის მიხედვით ეს ეხება საოლიმპიადო შინაარსის იმ ამოცანებს, რომლებშიც მოთხოვნილია გეომეტრიული ფიგურების ან/და მისი ნაწილების ფართობთა გამოთვლა, სივრცითი სხეულების ან/და მისი ნაწილების მოცულობების გამოთვლა, ფიგურების ფართობთან და სხეულების მოცულობასთან დაკავშირებული მინი–მაქსის ამოცანები, ვექტორების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები, აგებაზე, დამტკიცებაზე და გამოანგარიშებაზე ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური, არასტანდარტული მეთოდებისა და ხერხების ცოდნას, კერძოდ, ისეთ მიდგომებს, რომლებიც მოიცავს ინვარიანტებისა და ნახევარინვარიანტების გამოყენებას, დირიხლეს პრინციპის ცოდნას, კოორდინატთა მეთოდს და სხვ. რომელთა გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ხორციელდება მარტივად, ზედმეტი სირთულეების გარეშე.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის კურსი ისეთი ფორმით არის აგებული, რომ მასში დისერტაციაში განხილული კონკრეტული საკითხების გადაწყვეტისათვის საჭირო თეორიული საკითხების უმრავლესობა შეტანილი არ არის, ხოლო მოცულობით იმ მცირე მასალის შესახებ, რომელსაც სკოლის სასწავლო კურსი შეიცავს და ჩვენს მიერ დეტალურად იყო განხილული იყო დისერტაციაში, შეგვიძლია დაბეჯითებით ვთქვათ, რომ მათზე მასწავლებლები ყურადღებას არ ამახვილებენ, რასაც უმრავლეს შემთხვევაში დროის სიმცირით ხსნიან. ამიტომ ჩვენს მიერ ძირითადი ყურადღება გადატანილი იყო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკის თავისებურებებზე. ამოცანები სირთულის მიხედვით განსხვავდებოდა მათემატიკის სპეციალიზირებულ და სტაციონარული სკოლების მოსწავლეებისათვის.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის დროს ვიყენებდით მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში და დამხმარე ლიტერატურიდან აღებულ ამოცანებს და ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილ ამოცანებს.

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ ის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებასთან სკოლებში მასწავლებლების მიერ ან სულ არ განიხილება, ან განიხილება ძალზე მცირე

რაოდენობით. მეორეს მხრივ, როდესაც იშვიათ გამონაკლისებში ხდება გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა სპეციალური ხერხების გამოყენებით, მასწავლებლები არ ახდენენ მოსწავლეებისათვის ამოცანის ამოხსნის პროცესში გამოყენებული მეთოდის თუ ხერხის სრულფასოვან მეცნიერულ ახსნას.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

პირველი ეტაპი-მოსამზადებელი ექსპერიმენტი-რომელიც ჩატარდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. გაკვეთილებზე განიხილებოდა ისეთი გეომეტრიული შინაარსის შედარებით რთული ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვდა სპეციალურ მიდგომებს, ამოხსნის კერძო მეთოდიკის ღრმა და საფუძვლიან ცოდნას. ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე კი ვიხილავდით საოლიმპიადო სირთულის მქონე გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ, არასტანდარტულ ხერხებს.

მეორე ეტაპი–სასწავლო ექსპერიმენტი ჩატარდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა მოსწავლეთა საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმება. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ გეომეტრიული შინაარსის შემცველი სასკოლო მასალის თეორიულ საკითხებს და როგორ ახერხებდნენ მიღებული თეორიული ცოდნის პრაქტიკულ რეალიზებას–როგორ იყენებდნენ მიღებულ ცოდნას ამოცანების ამოხსნისას.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა ორი წლის (2011-2013 წლები) განმავლობაში და მასში მონაწილეობა მიიღო ქართულ–ამერიკული სკოლა „პროგრესის“, შპს ქუთაისის №1 სკოლის, ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლის, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლის, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმის, წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის ჟონეთის საჯარო სკოლის, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლის, ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლის, თერჯოლის №1 საჯარო სკოლის, თერჯოლის მუნიციპლიტეტის

რუფოთის საჯარო სკოლის, თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლის, ვანის მუნიციპალიტეტის ზედა გორას საჯარო სკოლის მოსწავლეებმა.

მოსწავლეებს მათემატიკის გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე ვასწავლიდით გეომეტრიული შინაარსის მქომე არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს და ხერხებს. სწავლება ითვალისწინებდა როგორც თეორიულ მასალას, ისე პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნას. სასწავლო პროცესში თემატიკის მიხედვით ვახდენდით ისეთი ამოცანების ჩართვას, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენება, ამისათვის დამატებით სასწავლო დროს არ ვიყენებდით. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახილავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

მოსწავლეებს ეძლეოდათ ისეთი გეომეტრიული ამოცანები, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური ხერხების გამოყენება სასკოლო სახელმძღვანელოებიდან და კრებულებიდან [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [103], [104], [105], [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116]. აგრეთვე ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილი ამოცანები.

განსაკუთრებული სიძნელე წარმოშვა ისეთმა ამოცანებმა, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდებისა და ხერხების ცოდნა.

მოსამზადებელმა ექსპერიმენტმა საშუალება მოგვცა გაგვეკეთებინა შემდეგი დასკვნები:

1. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხების სწავლებას საკმარისი ყურადღება არ ექცევა;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო მოსწავლეთა უმრავლესობა ვერ ფლობს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის იმ სპეციალურ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ბევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. მოსწავლეთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები, მარტივად ახერხებენ არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე კონკრეტული ამოცანების ამოხსნას.

4. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის რომელი სპეციალური ხერხების სწავლებაა აუცილებელი?

ბ) სწავლების პროცესში გეომეტრიული შინაარსის მქონე რომელი პრაქტიკული ამოცანების განხილვაა მიზანშეწონილი?

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების შესახებ არსებული მეთოდიკური ლიტერატურა, რომელიც არსებობს. შევარჩიეთ ჩვენთვის მისაღები მიდგომები და ის ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან ჩვეულებრივი ტრადიციული მიდგომებით, მაგრამ მოითხოვს დიდი მოცულობის მათემატიკურ გარდაქმნებს და ამავე დროს მათი ამოხსნა მარტივად და ეფექტურად შეიძლება სპეციალური ხერხების გამოყენებით, რაც გვაძლევს დროში საგრძნობ ეფექტს და მოსწავლეებს უნვითარებს ლოგიკურ აზროვნებასა და მიხვედრილობის უნარს. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ და დავამუშავეთ ის საკითხები, რომელთა განხილვა აუცილებელია იმისათვის, რომ მომზადდეს შესაბამისი თეორიული ბაზა არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური სერხების შესასწავლად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დავამუშავეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები.

- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანათა კლასიფიკაცია ამოხსნის ხერხების მიხედვით;

• გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიური საფუძვლები;

• გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები მათემატიკის სასკოლო კურსში;

ამ საკითხების დამუშავების პარალელურად მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მათე–მატიკის სასკოლო კურსიდან შეგვერჩია გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ის მეთოდები, რომლებიც შედარებით ხშირად გამოიყენება სასკოლო პრაქტიკაში და მათი საშუალებით შესაძლებელია აგებაზე, დამტკიცებაზე და გამოანგარიშებაზე გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა. ჩვენს მიერ შერჩეული და განხილული მეთოდები დავყავით თითქმის უნივერსალურ (ამ კლასს მივაკუთვნეთ არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ის მეთოდები, რომელთა გამოყენებით ხდება სამივე სახის გეომეტრიული ამოცანების–ამოცანები აგებაზე, ამოცანები გამოანგარიშებაზე და ამოცანები დამტკიცებაზე ამოხსნა), ნახევრად უნივერსალურ–(ამ კლასს მივაკუთვნეთ არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ის მეთოდები, რომელთა გამოყენებით ხდება სამივე სახის გეომეტრიული ამოცანებიდან–ამოცანები აგებაზე, ამოცანები გამოანგარიშებაზე და ამოცანები დამტკიცებაზე–რომელიმე ორი სახის ამოცანების ამოხსნა, მაგალითად, მხოლოდ გამოანგარიშებაზე და აგებაზე ამოცანების ამოხსნა, ან მხოლოდ აგებაზე და დამტკიცებაზე ამოცანების ამოხსნა, ან მხოლოდ გამოანგარიშებაზე და დამტკიცებაზე ამოცანების ამოხსნა) და ნაკლებად უნივერსალური მეთოდები, (ამ კლასს მივაკუთვნეთ ის მეთოდები, რომლებიც გამოიყე–ნება მხოლოდ ერთი სახის, მაგალითად, მხოლოდ აგებაზე, ან მხოლოდ გამოანგარიშებაზე ან მხოლოდ დამტკიცებაზე გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნისას).

დავამუშავეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების კერძო მეთოდიკა და შევადგინეთ მეთოდურად გამართული არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემა განხილული ამოხსნის სპეციალური მეთოდისათვის, რომელთა ჩართვას რეკომენდირებულად ვთვლით

სასწავლო პრაქტიკაში. დავაუშავეთ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის შემდეგი სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების კერძო მეთოდიკა:

- ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- დაჭრის და შეწებების მეთოდი და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- ფართობისა და მოცულობის მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნა და სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- არასტანდარტული პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა;
- დამხმარე ელემენტის მეთოდით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში;
- გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა ვექტორული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- გეომეტრიული შინაარსის არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით და მისი სწავლება საშუალო სკოლაში;
- გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა ალგებრული მეთოდით და მისი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები.

ეს საკითხები პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის პროცესში განიხილებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე .

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის II თავში დამუშავებული მეთოდიკა, რომელიც შემოწმებას გადიოდა გაკვეთილებზე მთელ კლასთან, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. ექსპერიმენტის მიმდინარეობის პროცესში ვახდენდით სწავლების მეთოდიკის და დასმული ამოცანების კორექტირებას მათი დახვეწისთვის. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული

მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ყველა ამოცანის საგაკვეთილო პროცესში განხილვა და მათი პრაქტიკული ამოხსნა რა თქმა უნდა ვერ ხერხდებოდა დროის ფაქტორის გამო, მაგრამ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სემესტრის მანძილზე. ერთ გაკვეთილზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე განიხილებოდა ერთი საკითხი, ხოლო მოსწავლეებს დავალების სახით ეძლეოდათ შედარებით მარტივი სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ ამოცანით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში და მოყვანილია დანართში. მათგან ზოგიერთი მათგანი განვიხილეთ გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე. დანარჩენი მოსწავლეებს მივეცით დამოუკი–დებელი მუშაობისათვის. ვსარგებლობდით სხვადასხვა სახელმძღვანელოებითა და კრებუ–ლებით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს. სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება. ის მიმდინარეობდა ორი სასწავლო წლის (2015-2017 წლები) განმავლობაში ქართულ–ამერიკულ სკოლა „პროგრესში“, შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის ჟონეთის საჯარო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის №1 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში და ვანის მუნიციპალიტეტის ზედა გორას საჯარო სკოლაში.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მიმდინარეობის მთელი პერიოდის მანძილზე ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს მოსწავლეებს მათთვის სასურველი ხერხით უნდა ამოეხსნათ არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, დაახლოებით იმ სახის, რაც მოცემული იყო

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა მოსწავლეთა 30-35%. მთელი სემესტრის განმავლობაში მიმდინარეობდა გეომეტრიული შინაარსის მქონე არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა სემესტრის ბოლოს. მოსწავლეთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად მოსწავლეთა 70%-მდე ასრულებდა. რაც ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა მასში მონაწილე ჯგუფებისა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებსაც. ამ ჯგუფების მოსწავლეთა ცოდნის დონე მათემატიკაში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,4 და 7,3. ექსპერიმენტულ ჯგუფებში სწავლება მიმდინარეობდა ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით სემესტრის ბოლოს ფინალურ გამოცდაზე მიცემული ამოცანების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნას სპეციალური მეთოდების ან ხერხის გამოყენებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელი იყო სხვა ხერხითაც, ოღონდ საჭიროა რთული გამოთვლების ჩატარება.

მოვიყვანოთ სპეციალური ხერხებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფებისათვის ექსპერიმენტის სამი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწ–მების შედეგები. პირველი შემოწმება ითვალისწინებდა მოსწავლეთა საერთო დონის დადგენას, დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფები სტატისტიკურად შეფასდა ორი ნიშნით:

1. რამდენი მოსწავლე შეეცადა არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას სპეციალური მეთოდებით და ხერხებით;

2. ამ მოსწავლეებიდან რამდენმა ამოხსნა ამოცანა სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1

ჯგუფები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
მოსწავლეთა რაოდენობა	86	86	86	86	86	76	76	76	76	76
ამოხსნა I	61	62	63	60	59	40	38	39	41	42
ვერ ამოხსნა	25	24	23	26	27	36	38	27	25	24
ამოხსნა II	53	54	56	53	54	29	28	30	27	31
ვერ ამოხსნა	8	8	7	7	5	11	10	9	14	11

იმის გამო, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე. ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [51]. კრიტერიუმის სტატისტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან [1] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68. T_0 ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის მოსწავლეთა შორის შემთხვევითია. ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის. შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ცხრილი 2

ჯგუფები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
მოსწავლეთა რაოდენობა	86	76
ამოხსნა I	61	40
ვერ ამოხსნა	25	36
ამოხსნა II	54	29
ვერ ამოხსნა	7	11

ჩატარებული ექსპერიმენტის $T_ნ$ კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_ნ = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2 \left(\mathrm{O}_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \quad [51]$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3

I ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 61$	$O_{21} = 40$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 25$	$O_{22} = 36$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 86$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 76$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 162$

ცხრილი 4

II ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11} = 54$	$O'_{21} = 29$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12} = 7$	$O'_{22} = 11$
	$O'_{11} + O'_{12} = n'_1 = 61$	$O'_{21} + O'_{22} = n'_2 = 40$

სადაც $n'_1 + n'_2 = N' = 101$.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: $T_{ნ}$=11,51. მეორე ნიშნისათვის: $T'_{ნ}$=8,47. რადგან ორივე მნიშვნელობა აღემატება $T_{კრ}$, ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების T_0 ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მოსწავლეები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ამოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენ–ტულ ჯგუფებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ზემოთ მოყვანილი პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში გეომეტრიის სასწავლო მასალის სწავლებისას, როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

2. გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ან/და ხერხებით ამოხსნის სწავლება, რომელიც განხილულია დისერტაციაში ხელს უწყობს მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის დონის გაღრმავებას, ამაღლებს ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საშუალო სკოლაში არასტანდარტული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები დავყოთ მსგავსების და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები მოსწავლეებს მივცეთ საშინაო დავალებად ან დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია მოსწავლეებისათვის სწავლების პროცესში სპეციალური მეთოდების გამოყენებით რთული გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება მოსწავლეთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს შიშს და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა, რომელიც საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთ საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში სპეციალური მეთოდების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების ქმედითუნარიანობა, მოსწავლეებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს. ამის დასტური იყო ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტი.

ზოგადი დასკვნები და რეკომენდაციები

თეორიული სამეცნიერო კვლევების, საკუთარი მრავალწლიანი პედაგოგიური გამოცდილებით, მოწინავე ნოვატორი პედაგოგებთან კონსულტაციების და ჩატარებული პედაგოგიური ესპერიმენტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ დასკვნები და რეკომენდაციები შემდეგი ფორმულირებით:

1. მასწავლებელმა ისეთი გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას კონკრეტული თემატიკის მიხედვით უნდა ჩართოს საკლასო მეცადინეობაზე, რომლისთვისაც დამატებითი სასწავლო დროის გამოყენება საჭირო არ არის. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან სწავლების პროცესი დაფუძნებული უნდა იყოს მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებაზე.

2. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების დაუფლება მოითხოვს მოსწავლეებისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, მათი თავისებურებების გათვალისწინებას, საშინაო დავალებების და დამოუკიდებელი სამუშაოების ინდივიდუალიზაციას და სხვ. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების სპეციალური მეთოდებით ან/და ხერხებით ამოხსნის სწავლების მთლიანი პროცესი.

3. გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების რეალიზება დამოკიდებულია როგორც მასწავლებლის გამოცდილებაზე, ისე ამოცანების ამოხსნის მეთოდებსა და სპეციალური ხერხების ფორმებსა და მეთოდიკურ თავისებურებებზე. ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და სპეციალური ხერხები მოითხოვს მეცნიერულ შესწავლას. ჩვენი აზრით არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და სპეციალური ხერხების სწავლებას მეტად უნდა ექცეოდეს ყურადღება უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის აკადემიური პროგრამის განათლების მეცნიერებების მაინორ პროგრამებზე და მასწავლებელთა გადასამზადებელ ტრენინგებზე,

რადგან ვთვლით, რომ არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდებსა და სპეციალურ ხერხებს უნდა ფლობდეს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის სამივე საფეხურის მათემატიკის ყველა მასწავლებელი.

4. სწავლების პროცესში მოსწავლეებს საფუძვლიანად უნდა გავაცნოთ გამოყენებული გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდები და ხერხები. მიზანშეწონილია, თუ ამის შესაძლებლობა არსებობს ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდი ან/და ხერხი, ამასთან მეთოდურად უნდა დავასაბუთოთ გამოყენებული მეთოდის ან/და ხერხის უპირატესობა.

5. საკუთარმა პედაგოგიურმა გამოცდილებამ, კოლეგებთან კონსულტაციებმა და პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასატურა, რომ გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;
- მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ყველაზე პერსპექტიული გზის მოძებნაში;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომლის მიზანია ამოცანის პირობაში ჩადებული ინფორმაციის სრული აღქმა და მის საფუძველზე ამოხსნის გზის მიგნება;
- გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანის ამოხსნის ახალი სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი მეთოდის ან/და ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ შესაძლებელია მოვახდინოთ მისი განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან

დამოუკიდეელი მუშაობისათვის მივცეთ შედარებით ნაკლები სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა.

- მეთოდურად უნდა დამუშავდეს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები დადგინდეს გამოყენებული მეთოდის უპირატესობები.

6. დირიხლეს პრინციპის გამოყენება შესაძლებელია მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის დროს. კარგ შედეგს იძლევა დირიხლეს პრინციპის გამოყენება გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნისას. არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დაწყებამდე მოსწავლეებმა კარგად უნდა შეისწავლონ დირიხლეს პრინციპის არსი, საფუძვლიანად დაეუფლონ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნას დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით, კონკრეტულ ამოცანებში შეძლონ თვითონ დამოუკიდებლად გაარკვიონ, რა წარმოადგენს მისთვის „გალიებს“ და რა „კურდღლებს“.

7. საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილებით, ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოწინავე, შემოქმედი მასწავლებლი ეფექტურად ახერხებს დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ჩართვას სასწავლო პროცესში, მოსწავლეებს აქვთ მზაობა სასწავლო პროცესში მეცადინეობაზე განიხილონ პროგრამაში მოცემულ ამოცანებთან შედარებით რთული საოლიმპიადო ამოცანები, რომელებიც მასწავლებლის მიერ ისეა შერჩეული, რომ მათი ამოხსნა მოითხოვს გონებამახვილობას და ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნას, მაშინ როცა ასეთი ამოცანები ჩვეულებრივი, ტრადიციული მიდგომით ან არ ამოიხსნება, ან საკმაოდ დიდ დროს და რთული გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს.

8. ამოცანები ინვარიანტებზე-ეს საოლიმპიადო ამოცანებია, რომლებშიც გარდაქმნების ჩატარების დროს რაღაც სიდიდე რჩება უცვლელი. ასეთი ამოცანების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუ არ ვიცით მათი ამოხსნის პრინციპი. მათ ამოსახსნელად საკმარისია მოვძებნოთ ის სიდიდე, რომელიც არ იცვლება ამოცანის პირობებში აღწერილი გარდაქმნების დროს. გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები ინვარიანტებზე საკმაოდ გონებამახვილურ მიგნებებს მოითხოვს და ერთი შეხედვით მოცემული ამოცანისათვის

ინვარიანტის მოძებნა შესაძლებელია რთულიც კი იყოს. პედაგოგიური პრაქტიკით დასტურდება, რომ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეები შედარებით ადვილად ახერხებენ კონკრეტული ამოცანისათვის ინვარიანტის, ზოგჯერ ერთი ამოცანისათვის რამდენიმე ინვარიანტის პოვნასაც კი, მაშინ როცა, გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს მოსწავლეებს ეს უჭირთ, რადგან იქმნება გარკვეული სირთულეები. ჩვენ რამოდენიმე ათეული წელია პრაქტიკაში ვიყენებთ ასეთ სისტემას: ინვარიანტების შესწავლის დაწყებას ვახდენთ არითმეტიკული და ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების განხილვით. როცა მოსწავლეები კარგად გაერკვევიან ინვარიანტის არსში და ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნაში, ამის შემდეგ გადავდივართ ინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნაზე. მიზანშეწონილია, რომ ინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული შინაარსის შემცველი პირველი ამოცანები დაკავშირებული უნდა იყოს არითმეტიკასა და ალგებრასთან, რაც აადვილებს სწავლების პროცესს და გვეხმარება მათემატიკის შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებაში. ეს განამტკიცებს მოსწავლეებში აზრს, რომ მათემატიკა, როგორც სასწავლო საგანი უნდა განიხილებოდეს როგორც ერთიანი, მთლიანი, მაგრამ ცხადია, რომ სასწავლო მასალაში ჩართული უნდა იყოს ძირითადი საკითხები მათემატიკის სხვადასხვა დარგებიდან, ეს ეხება გეომეტრიული შინაარსის მასალას, რომელსაც განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მოსწავლეთა გონებრივ განვითრებაში.

9. არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ნახევარინვარიანტების გამოყენებით ითვალისწინებს პასუხს კითხვაზე: „რას არ უნდა აღემატებოდეს“ ან „რაზე ნაკლები არ უნდა იყოს“ საძიებელი სიდიდე? ნახევარინვარიანტების სწავლების პროცესის წარმართვა მიმდინარეობს იმავე პრინციპით, რა პრინციპითაც ვასწავლით ინვარიანტებს, კერძოდ, გეომეტრიული შინაარსის ამოცანები ნახევარინვარიანტების გამოყენებით გაცილებით რთულია, ვიდრე ინვარიანტების გამოყენებით, ასეთი ამოცანების ამოხსნა დაკავშირებულია რაიმე სიდიდის უდიდესი/უმცირესი მნიშვნელობის დადგენასთან, მოითხოვს გონების დაძაბვას და გეომეტრიული ფაქტების გარდა უტოლობათა თვისებების ცოდნასაც. დასტურდებულია, რომ ნახევარინვარიანტების გამოყენებით არითმეტიკული

და ალგებრული ამოცანების ამოხსნას მოსწავლეები შედარებით იოლად ახერხებენ, მაშინ როცა, გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს მოსწავლეებს ეს უძნელდებათ, რადგან იქმნება გარკვეული სახის სირთულეები, რაც დაკავშირებულია გეომეტრიის, არითმეტიკის, ალგებრის, ტრიგონომეტრიის და ფიზიკის საკითხების ერთმანეთთან დაკავშირებაში, რადგან სუსტია საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები საშუალო სკოლის სასწავლო კურსებს შორის.

10. ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისათვის ჩვენ შევიმუშავეთ და შემდეგ პრაქტიკაში წარმატებით დავნერგეთ სისტემა, რომლის თანახმადაც, ნახევრადინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას ვიწყებთ მას შემდეგ, რაც მოსწავლეები კარგად დაეუფლებიან ინვარიანტების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას და ალგებრის/არითმეტიკის ამოცანების ამოხსნას ნახევარინვარიანტების გამოყენებით. მიგვაჩნია, რომ ნახევარინვარიანტების გამოყენებით ამოსახსნელი პირველი ამოცანები გეომეტრიიდან დაკავშირებული უნდა იყოს არითმეტიკასთან, ალგებრასთან, ტრიგონომეტრიასთან, ფიზიკასთან და სხვ. რაც აადვილებს სწავლების პროცესს და გვეხმარება საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებაში.

11. საოლიმპიადო გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ინვარიანტების და ნახევარ–ინვარიანტების გამოყენებით სასწავლო პროცესს ეფექტურს ხდის და მოსწავლეებს უადვილებს საკითხის სწავლებას, იძლევა სასწავლო დროის ეკონომიას და ისინი ფიგურების და სივრცითი სხეულების გეომეტრიულ თვისებებს აღიქვამენ არა მარტო როგორც მშრალ ფაქტებს, არამედ ინვარიანტის ან ნახევარინვარიანტის პოვნით დამოუკიდებლად ახდენენ ფიგურების და სივრცითი სხეულების ისეთი სიდიდის/სი–დიდეების, ან ობიექტის თვისების/თვისებების დადგენას, რომელიც უცვლელი რჩება ამა თუ იმ გარდაქმნების შესრულების შემდეგ ან აქვთ უდიდესი/უმცირესი მნიშვნელობები, რაც მათ უნვითარებთ ინტუიციას და აძლიერებს მიხვედრის უნარებს. ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების გამოყენება შესაძლებელია არა მარტო გეომეტრიის საოლიმპი–ადო ამოცანების ამოხსნის დროს, არამედ ის გამოიყენება ზოგადად მათემატიკური

შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას, რომელიც მეცნიერების სხვადასხვა დარგებს განე–კუთვნება. მაგალითად, ფიზიკას, ეკონომიკას, საინჟინრო მეცნიერებებს, არქიტექტურას და სხვ. ინვარიანტების და ნახევარინვარიანტების გამოყენება მტკიცე ბაზას აყალიბებს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების დამყარებისათვის.

12. ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენების იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ განვიხილავთ რაიმე ფიგურის ფართობს/მოცულობას როგორც მისი ნაწილების ფართობთა/მოცულობათა ჯამს, ამასთან თითოეული ნაწილის ფართობის/მოცულობის ჩაწერას ვახდენთ ჩვენთვის ხელსაყრელი სახით, რის შედეგადაც მივიღებთ განტოლებას, ან განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს ამოცანის საძიებელ სიდიდეს/სიდიდეებს და საძიებელი სიდიდის/სიდიდეების პოვნა საგრძნობლად მარტივდება. ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენება სასურველ ეფექტს იძლევა ისეთი არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს, რომელთა პირობებში ფიგურათა ფართობები და მოცულობები მოცემული არ არის. ამ შემთხვევაში ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესში ფიგურის ფართობის და გეომეტრიული სხეულის მოცულობის შემოტანა განიხილება როგორც დამხმარე ელემენტი. მიუხედავად სიმარტივისა, ფართობის და მოცულობის მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია საკმაოდ რთული გეომეტრიული არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის დროს და საგანმანათლებლო პროცესში მისი ჩართვა მეთოდურად გამართლებულია. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის არსიდან გამომდინარე მისი გამოყენება ხდება როგორც პლანიმეტრიული, ისე სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას. ცხადია, რომ პირველ შემთხვევაში ვიყენებთ ფართობს, ხოლო მეორე შემთხვევაში მოცულობას.

14. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა იწყება ნახაზის აგებით, რომლის აკურატულად შესრულება და შემდგომ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო დამხმარე ელემენტის/ელე–მენტების აგება გვეხმარება ვიპოვოთ ყველა ის კავშირი, რომელიც არსებობს მოცემული და საძებნი ფიგურის/ფიგურების ელემენტებს შორის. ამის შემდეგ დავსახოთ ამოცანის ამოხსნის გზა. ამოცანიდან გამომდინარე, დამხმარე ელემენტი შესაძლებელია იყოს როგორც

გეომეტრიული ფიგურა, ასევე ფიგურის ფართობი, გეომეტრიული სხეულის მოცულობა და სხვ. დამხმარე ელემენტის მეთოდის გამოიყენებისას საშუალება გვაქვს ამოცანის ამოხსნის პროცესში ჩავრთოთ ახალი გეომეტრიული ფიგურები, თავიანთი თვისებებით, რითაც ვაღწევთ ამოცანის ამოხსნის პროცესში გამოყენებული თეორიული საკითხების მოცულობის გაზრდას იმ თეორემების, ფიგურათა თვისებების განხილვით, რომელსაც გამოვიყენებთ ამოცანის ამოხსნის პროცესში და მათზე დაყრდნობით შევქმნით ახალ ცოდნას. დამატებითი აგებების შესრულება ხშირად გამოიყენება იმისათვის, რომ მოცემული ამოცანა დავიყვანოთ ადრე ამოხსნილ ამოცანაზე, ან დავიყვანოთ სირთულით უფრო მარტივ ამოცანაზე, ვიდრე მოცემული ამოცანაა.

15. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ვექტორების გამოყენება ტრადიციული სასწავლო კურსისაგან განსხვავებით მიზანშეწონილია ფართობების და მოცულობის გამოთვლისათვის. რითაც ერთის მხრივ შესაძლებელია განვლილი მასალის საფუძვლიანი განმტკიცება, მეორეს მხრივ ახალი მასალის ეფექტური გადაცემა, ხოლო მოსწავლეებმა იძენენ ახალ ცოდნას, რომელიც ლოგიკურ კავშირშია ადრე მიღებულ ცოდნასთან. დაცულია სწავლების დიდაქტიკური პრინციპები, მათ შორის მარტივიდან რთულზე გადასვლის დიდაქტიკური პრინციპი.

16. კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების დროს მიზანშეწონილია სასწავლო პროცესის ისე დაგეგმვა, რომ პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების განხილვა მოხდეს პარალელურ რეჟიმში. მიგვაჩნია, რომ მეტი ყურადღება დავუთმოთ სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას პლანიმეტრიულთან შედარებით. ზოგჯერ, შესაძლებელია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე შევარჩიოთ, რომ მოვახდინოთ ამოცანის დაყვანა (რედუქცია) მარტივ ამოცანაზე, რომლის ამოხსნა რაიმე სირთულესთან არ იქნება დაკავშირებული, დაყვანილი მარტივი ამოცანის ამოხსნის შემდეგ კი შესაძლებელია დავუბრუნდეთ თავიდან მოცემულ ამოცანას და მარტივად ამოვხსნათ ის.

17. არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს ზოგჯერ ალგებრულ მეთოდთან ერთად მიზანშეწონილია კომპლექსურად გამოვიყენოთ სხვა მეთოდი/მეთო–დები, რითაც მოსწავლეებს ვაჩვენებთ, რომ გეომეტრიული მასალის შესწავლა მჭიდრო

კავშირშია მათემატიკის სხვადასხვა დარგებთან და მათემატიკა უნდა შეისწავლებოდეს არა დიფერენცირებულად, დანაწევრებულად, არამედ როგორც ერთიანი მეცნიერება, რომლის სხვადასხვა ნაწილებსაც სწავლების სპეციფიკური თავისებურებები გააჩნია. კონკრეტული სასწავლო თემის, თუ ამოცანის ამოხსნის დროს გათვალისწინებული უნდა იყოს მისი სწავლების თავისებურებები, რაც თავის მხრივ მოითხოვს განსახილავი საკითხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების შესწავლას.

18. ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერმენტით დადასტურდა, რომ სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ დამუშავებული სწავლების მეთოდიკა ეფექტურია ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში და მისი გამოყენება შესაძლებელია გეომეტრიული მასალის სწავლებისას და წარმოადგენს მათემატიკის სწავლების სპეციალურ მეთოდიკას.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ბერძულიშვილი გ., ონიანი–საღინაძე ნ., ბაკურაძე ზ. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება მათემატიკის სასკოლო კურსში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2014 წ. 248 გვ.
2. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ. მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2015 წელი. 252 გვ.
3. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძეგ. საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანები დაწყებით კლასებში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2016 წელი. 680 გვ.
4. ბერულიშვილი გ. 2017 წელი საოლიმპიადო ამოცანებში და არა მარტო. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2016 წელი. 102 გვ.
5. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ. საოლიმპიადო მათემატიკურ ამოცანათა ამოხსნის პრაქტიკული ჩვევების ფორმირება საშუალო სკოლაში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2017 წელი. 404 გვ.
6. ბრეგაძე გ.–განტოლებების, უტოლებების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში. განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის ავტორეფერატი. ქუთაისი, 2013 წ.
7. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა V კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
8. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა VI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
9. ოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა VII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
10. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა VIII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.

11. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა IX კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
12. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა X კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
13. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა XI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
14. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა XII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
15. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, I ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
16. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, II ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
17. დოგრაშვილი ა.-დაწყებითი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი. 2003 წელი.
18. ეროვნული სასწავლო გეგმა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებისათვის. თბილისი, 2016 წელი.
19. ეროვნული სასწავლო გეგმა, საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში VII-XII კლასები. თბილისი, 2016 წელი.
20. ვახანია ზ.-სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1999წ. 36 გვ.
21. ნადირაშვილი შ.-განზოგადების განვითარება სასკოლო ასაკის ბავშვებში. თბილისი. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია. 2009 წელი. 284 გვ.
22. კოტეტიშვილი ი.-ექსპერიმენტული სწავლების ფსიქოლოგიური შინაარსი. თბილისი. გამომცემლობა „მეცნიერება“. 2007 წელი. 171 გვ.

23. იმერლიშვილი ე.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა, ზოგადი მეთოდიკა. თსუ გამომცემლობა. თბილისი, 2001 წ.

24. მორალიშვილი თ.-ამოცანათა ამოხსნის ძიების სწავლება საშუალო სკოლაში. გამომცემლობა „განათლება". თბილისი. 1991 წ. 128 გვ.

25. მორალიშვილი თ. სასკოლო მათემატიკის ამოცანების ამოხსნის ძიების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები. პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია. თბილისი, 2003.– 292 გვ.

26. მორალიშვილი თ., ჯინჯიხაძე გ.-არასტანდარტული ამოცანების მნიშვნელობა მათემატიკის კურსის სწავლების პრაქტიკაში. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი", №19, თბილისი, 2005, გვ. 46-54.

27. მორალიშვილი თ., ონიანი გ., ჯინჯიხაძე გ.-სასწავლო საქმიანობის სუბიექტის ფორმირება დაწყებით და საბაზო სკოლაში არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეშვეობით. თბილისი, გამომცემლობა „უნივერსალი", თბილისი, 2008 წელი.

28. ნახუცრიშვილი ნ.-პრობლემურ-განმავითარებელი სწავლების საკითხები დაწყებითი სკოლის საფეხურზე თელავის ი.გოგებაშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო შრომების კრებული № 2 (20) . 2006 წ. გვ.237-239.

29. ნოზაძე გ., ოჩხიკიძე მ.-მათემატიკის სახელმძღვანელოებისათვის სავარჯი-შოთა შერჩევის კრიტერიუმები. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში", №117, გვ. 59-62.

30. სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი მათემატიკაში. სქართველოს საკანონმდებლო მაცნე. თბილისი. 2015 წელი.

31. უზნაძე დ. შრომები. ზოგადი ფსიქოლოგია. ტ. III-IV. გამომცემლობა „აღმაშე-ნებელი", თბილისი, 1998.–637 გვ.

32. ქელბაქიანი ვ.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ქუთაისი, 2001 წ.

33. ჩხიკვაძე ი.-განმავითარებელი სწავლების სისტემაში დაწყებითი კლასე-ბისათვის ტექსტური ამოცანების შედგენისა და გამოყენების დიდაქტიკური ასპექტები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი, 2009 წელი.
34. წერეთელი თ. სასკოლო მათემატიკის კურსში აგების ამოცანების სწავლების მეთოდიკის შესახებ. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი" 1(51). თბილისი. 2015. გვ.63-65.
35. წერეთელი თ. პრაქტიკული შინაარსის მქონე ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში და მათი რეალიზების მეთოდური საფუძვლები. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 3(56). თბილისი. 2016. გვ.66-68.
36. წერეთელი თ. ზოგიერთი არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 1(57). თბილისი. 2017. გვ. 111-115.
37. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების მეთოდის გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 45–48.
38. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 49–52.
39. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 53–56.
40. ჯინჯიხაძე გ.-არასატანდარტული ამოცანა, როგორც მათემატიკის კურსის ამოცანათა სისტემის ელემენტი. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიკურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი", №19. თბილისი,. 2005, გვ. 54-58.

41. ჯინჯიხაძე გ.-ცნებები „ამოცანა“ და „არასტანდარტული მათემატიკური ამოცა-ნა“ თანამედროვე მეცნიერულ გამოკვლევებში: იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“ №18, თბილისი. 2005, გვ. 51-55.

42. Алиев С. Дж., Эфенди С.Н.-Применение метода площадей в геометрических задачах. УДК 372. 851.4. Бакинский государственний университет. Азербаиджан. 2016.

43. Арсеньев Н.А. Приемы решения задач на сравнение площадей // Математика в школе. - 1952.- №6. - С. 20-26.

44. Блинков А.Д., Блинков Ю.А.-Геометрические задачи на построение.-Москва. Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2016.-152с.

45. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. - М.: Гостехиздат, 1956. - 64с.

46. Брунер Дж.-Психология понятия. Москва. Изд. „Просвещение“. 1977 г

47. Быковских А.М.-Нестандартные задачи. Красноярский Государственный университет. Заочная естественно научная школа про КрасГУ. Красноярск. 2006.

48. Васильев Н., Гуттенмахер В., Раббот Ж., Тоом А.-Заочные математические олимпиады Москва. Наука. 1987 г.

49. Войтишек В.В. Вычисление площадей. - В кн.: Лекции по математике. Для учащихся летней математической школы при НГУ. Под ред. Л.Я. Савельева. Новосибирск, 2004. -С. 3-29.

50. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике.Челябинск. Взгляд. 448 с.2004г.

51. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. - М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 2006. - 240с.

52. Готман Э.Г. Совершенствование содержания геометрических задач и методов их решения как средство повышения качества знаний учащихся по математике. - Арзамас, 2007. - 202 с.

53. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непарамстрические методы /М. И. Грабарь, К. А. Красняпская М.: Педагогика, 1977.-136 с.

54. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Москва. Просвещение. 2010 г.

55. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения.-Москва. Интор, 1996.-544с.

56. Депман И.Я. Задачи на деление площадей // Математика в школе. -1946.- №2.-С. 10-14.

57. Дорофеев Г.В. Отношение отрезков, площадей и объемов // Квант. -1975.- №1.-С. 55-59,77.

58. Иванова Е.Ю.-Площады многоугольников. Москва. изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете при МГУ. 2016. 27 с.

59. Канель-Белов А.Я., Ковалджи А.К.-Как решают нестандартные задачи. под ред. В.Д. Бугалина. Изд. четвертое. Москва. Изд.юательство МЦНМО. 2008 г.

60. Кантор П.Р., Раббот Ж.М. Площади многоугольников // Квант.-1972.-№2.-С.36-41.

61. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. М.-Л.. ГИТТЛ, 1952.- 159с.

62. Кушнир И.А. Метод вспомогательного элемента // Квант. - 1974. - № 2.С. 46-51.

63. Левитас Г.Г.-Нестандартные задачи по математике в 7-11 классах. Москва. изд. ИЛЕКСА. 2009 г.

64. Методика преподования математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для ст-ов физ.-мат. фак-ов пед. инст. /В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др.-2-е изд.-Москва. Просвещение, 1980. – 368с.

65. Натадзе Р. К.-К онтогенезису формирования понятия. Тбилиси. Изд. „Мецниереба“, 1976. 264 стр.

66. Новиков И. Д. Метод площадей//Квант. - 1971.- № 12.-С. 41-46

67. Овчинникова Е.Е. Использование метода площадей и объемов при решении школьных геометрических задач. Автореферат диссертации кандидата педагогических наук. Москва. 2002 г.

68. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. - М.: АСТ .ПРЕСС: Магистр-S, 2015. - 256с.

69. Понарин Я. Вычисление площадей //Квант.-1976 - № 7.- С. 25-27.

70. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Пер. с англ. / Под ред. С. А. Яновской.- Москва. Наука, 1976.-448 с.

71. Пойа Д. Как решать задачу .Пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; Под ред. Ю. М. Гайдука.- Москва. Учпедгиз, 1959.-207 с.

72. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. И. А. Вайпштейпа; Под ред. С. А. Яновской. 2-е изд., испр. Москва. Наука, 1975.-463 с.

73. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Москва. Изд. „Просвещение“. 1969. 659 стр.

74. Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия. Вопросы психологии. 1966 г. №4. стр. 121-126.

75. Прасолов В.В. Используя площадь // Квант. - 1986. - № 5. - С. 16-19, 43.

76. Рабинович Е.М. Равновеликие треугольники в задачах // Математика в школе. - 1993. - № 6. - С. 63-65.

77. Развивающие задачи для математического досуга /Сост. Э. А. Кремнев, З. С. Сухотина. Москва. Школа-пресс, 1993. - 95 с.

78. Рахимов А. З. Формирование творческого мышления школьников. Автореф. дисс. . докт. пед. наук.- Москва. 1993.31 с.

79. Романов Ю. В.-Различные подходы к класификации математических методов решения геометрических задач. Международное периодическое издание (ISSN 2412-1118) «Педагогический советник». 2015.

80. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. Т. 1. /С.Л. Рубинштейн.-Москва. Педагогика, 1989.-485 с.

81. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии /С.Л. Рубинштейн. Москва. Педагогика,1976.-417 с.

82. Столяр А. А. Методы обучения математике: Учебное пособие для пединститутов /А. А. Столяр. -Минск: Народная асвета, 1981. 191 с.

83. Столяр А. А. Педагогика математики /А.А.Столяр.-3-е изд.-Минск: Вышэйшая школа, 1986.-158 с.

84. Цыганова Н.Я. О некоторых теоремах элементарной геометрии //Математика в школе.- 1959. - № 4. - С. 60-61.

85. Цыпкин А., Пинский А. -Справочник по методам решения задач по математике. Москва. Наука. 1989 г.

86. Чаплыгин В. Ф.-Нестандартные задачи. Некоторые методические аспекты. Ярославский педагогический вестник. 1998 №3 (15). стр. 96-104.

87. Шарыгип, И. Ф. Математика: задами па смекалку. Учеб. пособие для 5-6 кл. / И. Ф. Шарыгип, А. В. Шевкин. Москва. Просвещение, 1995.

88. Шарыгип, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред.шк. /И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.-М. Просвещение, 1991.-384 с.

89. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии // Математика в школе. - 1989. - №2. - С.87-101. - №3. - С.95-103. - №4. - С.73-81

90. Шарыгин И.Ф. Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. -М.: Просвещение, 1994.-252 с.

91. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды /Д. Б. Элькопин / Под ред. В. В. Давыдова. Москва. Педагогика, 1989. -554 с.

92. Эльконин Д.Б. Психология обучения младшего школьника. Москва. Знание, 1974. – 64с.

93. Якиманская И. С. Развивающее обучение /И. С. Якиманская.-Москва. Педагогика, 1979.- 144 с.- (Б-ка учителя.-Воспитание и обучение).

94. Якуба Э.Г.-Из опита преподавания математики в VII-VIII классах. Москва., "Педагогика", 2006 г.

95. Ingrid Bohm, Jens Schneider. Productive Learning–An Educational Opportunity for Young People in Europe. Berlin, 2009.

96. Productive Learning in the Learning Workshops: Pilot Projects in Pecs, St. Petersburg, and Berlin Present Their Work. Berlin, 2011.

97. Learning mathematics. Q.E.Lapointe, N.A.Mead, J.M.Askew.-The International Assessment of Educational Progress, Educational Testing service, –2009.–158 p.

98. Mathematics. Cole W.L., Haubher M.A., Sparks J.M., W.G.Quast / Coordinating Author E.R.Duncan.–Boston: Houghton Mifflin Company, 2010.–486 p.
99. Ross Honsberger. More mathematical morsels.–The Mathematical association of America, 2011.–237 p.
100. Assessment Standards for Scool mathematics. Working Draft.–Nationai Council of teachers of mathematics, 2008.–244 p.
101. Eisenmann, B. (2009) Curriculum vision and coherence Adapting curriculum to focus on authentic mathematics Mathematics Teacher, 103 (1), 70 -75.
102. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics Reston, VA: Author.Nowlin, D. 2007). Precision: The neglected part of the measurement standard. Mathematics Teacher, 100 (5), 356-360.
103. http://problems.ru/
104. http://olympnew.ncfu.ru/
105. http://www.5egena5.ru/
106. http://rupark.com/
107. http://zaba.ru/
108. http://pikabu.ru/
109. http://nsportal.ru/
110. http://olehnik.ru/
111. http://ilib.mccme.ru/
112. http://matica.narod.ru/
113. http://lyamb-da.livejournal.com/
114. http://mmmf.msu.ru/
115. http://concurs.mziuri.ge
116. http://imedi.mziuri.ge