

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საინჟინრო ტექნიკური ფაკულტეტი

მეგიაფრიდონიძე

**წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული პროცესების სრულყოფა**

ინჟინერიის (0400) დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარმოდგენილი

დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

შოთა რუხაძე

---

ქუთაისი 2014

## შინაარსი

შესავალი .....	4
თავი 1. ელექტრომემბრანული პროცესების ლიტერატურული მიმოხილვა.....	6
1.1. გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემები ეკოლოგიური პრობლემების გადაწყვეტაში.	6
1.1.1. სუფთა წყლის დეფიციტის პრობლემა .....	6
1.1.2. წლის გაწმენდის ეკოლოგიურად მიზანშეწონილი ტექნოლოგიები .....	8
1.1.3. ელექტრომემბრანულ სისტემებში მასაგადატანის ინტენსივობის განმსაზღვრელი ფაქტორები.....	9
1.1.4. გრავიტაციული კონვექციის მექანიზმი .....	14
1.2. იონების გადატანის ძირითადი განტოლებები.....	16
1.2.1. გადატანის კანონები ელექტროდიალიზის პროცესში .....	16
1.2.2. ელექტროლიტის გამტარებლობა, დიფუზიური პოტენციალი და გადატანის რიცხვი	21
1.2.3. მუხტის შენახვა .....	22
1.2.4. ბინარული ელექტროლიტი.....	23
1.2.5. იონების მოძრაობის უნარი და დიფუზიის კოეფიციენტები.....	24
1.3. იონების გადატანის თანამედროვე მათემატიკური მოდელები .....	25
1.3.1. ერთ განზომილებიანი მოდელი .....	25
1.3.2. ორ განზომილებიანი მოდელი .....	29
1.3.3. სამ განზომილებიანი მოდელები.....	33
1.3.4. მეტად გავრცელებული თანამედროვე მიდგომები გრავიტაციული კონვექციის მათემატიკური მოდელირებისადმი .....	36
1.4. აპარატები ელექტრომემბრანული პროცესებისათვის.....	37
1.5. ძირითადი დასკვნები და კვლევის ამოცანები.....	45
თავი 2. ელექტრომემბრანული პროცესების მათემატიკური მოდელირება გრავიტაციული კონვექციის გათვალისწინებით მემბრანებს შორის არხში პულსირებული წნევის მოქმედებისას .....	47
2.1. წნევის პულსაციის გავლენა სასაზღვრო აურევადი ფენის სისქეზე.....	47
2.1.1. მემბრანის ზედაპირზე მხები ძაბვის განსაზღვრა .....	53
2.1.2. სიჩქარისა და მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელების საშუალო კვადრატული მნიშვნელობების განსაზღვრა. ....	54
2.1.3. მიღებული შედეგების გრაფო-ანალიზური კვლევა და აურევადი სასაზღვრო ფენის სისქის დადგენა.....	55

2.2.ბინარული ელექტროლიტის ელექტროდიალზის პროცესის მათემატიკური მოდელირება. დეკომპოზიციის ალგორითმი და დეკომპოზიციური განტოლებები .....	58
2.2.1. დეკომპოზიციის ზოგადი სქემა ელექტრონეიტრალობის პირობების შესრულებისას	60
2.2.2. სამგანზომილებიან შემთხვევაში დენის სიმკვრივისათვის განტოლების გამოყვანა...	63
2.2.3. ორ განზომილებიანი შემთხვევისათვის დენის სიმკვრივისათვის განტოლების გამოყვანა .....	64
2.3. ამოცანის ფიზიკური დასმა .....	65
2.4. გადასვლა უგანზომილებო სახეზე, განტოლებაში შემავალი კრიტიკული რიცხვების შფასება.....	72
2.5. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის გარდაქმნა.....	74
2.6. ამოცანის მათემატიკური დასმა.....	75
2.6.1. გალვანოსტატიკური მოდელი .....	76
2.6.2. პოტენციოსტატიკური მოდელი .....	77
2.7. დასკვნები.....	79
თავი 3. ელექტრომემბრანულ სისტემებში მასაგადატანის რიცხვითი ანალიზი.....	80
3.1. სასრულ-სხვაობით განტოლებებზე გადასვლა .....	80
3.1.1.ცხადი სქემა.....	82
3.1.2. არაცხადი სქემა .....	86
3.2. რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები .....	90
3.3.რიცხვითი კვლევების შედეგები.....	99
3.4. შედეგების ვერიფიკაცია.....	113
3.4.1. ბიჯის დანაწევრების მეთოდი .....	114
3.4.2. შედარება სხვა ავტორების მოდელირების შედეგებთან .....	115
თავი 4. ექსპერიმენტალური კვლევა.....	120
4.1 რიცხვითი ამოხსნების შედარება ექსპერიმენტალურთან .....	120
საერთო დასკვნები .....	124
გამოყენებული ლიტერატურა.....	127
დანართები.....	139
დანართი 1.....	140
დანართი 2.....	141
დანართი 3.....	142
დანართი 4.....	143

## შესავალი

ჩამდინარე წყლების გაწმენდა, უნარჩენო ტექნოლოგიების შექმნა არის მნიშვნელოვანი ეკოლოგიური ამოცანა, რომლის გადაწყვეტის აუცილებლობა განპირობებულია გარემომცველ არეზე გაუწმენდავი ტექნოლოგიური წყლების მავნე ზემოქმედებით, მძიმე ლითონების იონების შემცველობის გამო.

დაბინძურებული წყლების გაწმენდის და მათგან განსაზღვრული სახის იონების გამოყოფის ერთ ერთ მეტად ეკოლოგიურ მეთოდებს წარმოადგენენ ელექტრომემბრანული პროცესები. ისინი საშუალებას გვაძლევენ შევამციროთ მინერალიზაცია და განვახორციელოთ ცოცხალი ორგანიზმებისათვის და მცენარეებისათვის მავნე იონური მინარევების (მძიმე ლითონების, ნიტრატების, ფოსფატების და სხვა) შერჩევითი მოცილება ჩამდინარე და ბუნებრივი წყლებიდან, გარემომცველ არეში ახალი ქიმიური რეაგენტების შეტანის გარეშე. ელექტრომემბრანულმა სისტემებმა მოახდინეს თავიანთი ეფექტურობის დემონსტრირება ისეთი რთული ეკოლოგიური პრობლემის გადაწყვეტისას, როგორცაა წყლის გაწმენდა მძიმე ლითონების იონებისგან და უნარჩენო ტექნოლოგიების შექმნამრეწველობის სხვადასხვა დარგებში (კვების, ჰიდროელექტრომეტალურგია, ქიმიური და სხვა.). ელექტრო მემბრანული ტექნოლოგიების ფართო დანერგვა ეკოლოგიაში, სოფლის მეურნეობაში და მრეწველობის სხვა და სხვა დარგებში, მოითხოვენ ელექტრო მემბრანული პროცესების ღრმა შესწავლას და იმის ცოდნას როგორ მოვახდინოთ ელექტროდიალიზის პროცესის ტექნიკო-ეკონომიური მაჩვენებლების პროგნოზირება და გამოყენების ეკოლოგიური მიზანშეწონილობა აპარატების ნებისმიერ რეჟიმებში ექსპლუატაციისას.

ელექტრომემბრანული პროცესები მიეკუთვნებიან არაწონასწორულ თერმოდინამიკურ სისტემებს, შემდგარს უმარტივეს შემთხვევაში ორი ერთგვაროვანი (ჰომოგენური) ქვესისტემისაგან, რომელთა შორის ურთიერთქმედებასაც არეგულირებს რაღაც ელემენტი, რომელსაც ჰქვია მემბრანა. შექმნილ პაკეტში ელექტრო დენის გადინება იწვევს კონცენტრაციულ პოლიარიზაციას და ხსნარის არათანაბარ გაცხელებას, რაც იწვევს გრავიტაციული კონვექციის და სხვა მეორადი, კონცენტრაციულ პოლიარიზაციასთან შეუღლებული

ეფექტების წარმოქმნას. სხვა და სხვა ავტორების ექსპერიმენტალური მონაცემები მოწმობენ, რომ გრავიტაციული კონვექცია ახდენს მნიშვნელოვან გავლენას წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემების ფიზიკო-ქიმიურ მახასიათებლებზე.

ელექტრომემბრანული გაყოფის პროცესების განხორციელებისათვის შექმნილია სხვადასხვა კონსტრუქციის მემბრანული აპარატები თავიანთი დადებითი და უარყოფითი მხარეებით. ძირითადი მიზეზი რაც ზღუდავს მათ ფართო საწარმოო გამოყენებას არის კონცენტრაციული პოლარიზაციის მოვლენა. გახსნილი ელექტროლიტის ნაკადი, რომელიც უნდა გაიყოს აპარატში, მიახლოებით პროპორციულია დენის სიმკვრივის, ამიტომ ელექტრული ენერგია დახარჯული ერთეული მოცულობის გახსნილი ნივთიერების გასაყოფად, იზრდება დენის სიმკვრივის პროპორციულად. დენის მუშა სიმკვრივე კი, პირველ რიგში იზღუდება კონცენტრაციული პოლარიზაციით და არა პროცესის ეკონომიურობით. მაშასადამე მიზანშეწონილია პროცესის ინტენსიფიკაცია, კონცენტრაციული პოლარიზაციის მავნე გავლენის შემცირების გზით.

ელექტრომემბრანულ სისტემებში კონცენტრაციული პოლარიზაციის მავნე გავლენის შემცირებისათვის გვაქვს სამუშაოების დიდი რაოდენობა, რომლებიც ეძღვნება ელექტრომემბრანული სისტემების მათემატიკური მოდელების აგებას და გამოკვლევას. მაგრამ ამ სამუშაოებში შემოვიფარგლებით შედარებით მარტივი მათემატიკური მოდელების განხილვით, სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის მათემატიკური სირთულის გამო. მათში შეისწავლება სტაციონალური პროცესი, არ განიხილება იძულებითი კონვექცია და მემბრანის გავლით სითბოს გადატანა, რასაც რიგ შემთხვევებში არსებითი მნიშვნელობა აქვს კონცენტრაციულ პოლარიზაციაზე მოქმედების თვალსაზრისით.

აქედან გამომდინარე სადისერტაციო სამუშაო, რომელიც ეძღვნება ელექტრომემბრანული პროცესების სრულყოფას აქტუალურია.

## **თავი 1. ელექტრო მემბრანული პროცესების ლიტერატურული მიმოხილვა**

მოცემულ თავში მოყვანილია ელექტრომემბრანული ტექნოლოგიების გამოყენებით ეკოლოგიური პრობლემების გადაწყვეტისადმი მიძღვნილი სამუშაოების მიმოხილვა. მოყვანილია გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის თეორიული და ექსპერიმენტალური კვლევის შედეგები ელექტრომემბრანულ სისტემებში, რომლებიც გამოიყენება გარემომცველი არის გაწმენდისა და რეაბილიტაციისათვის. გაკეთებულია ამ მიზნით გამოყენებული მოწყობილობების მიმოხილვა და ელექტრომემბრანულ სისტემებში გადატანის პროცესის აღმწერი მატემატიკური მოდელების ანალიზი, რომლის საფუძველზეც ხდება სადისერტაციო სამუშაოს მიზნებისა და ამოცანების ფორმულირება.

### **1.1. გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემები ეკოლოგიური პრობლემების გადაწყვეტაში**

#### **1.1.1. სუფთა წყლის დეფიციტის პრობლემა**

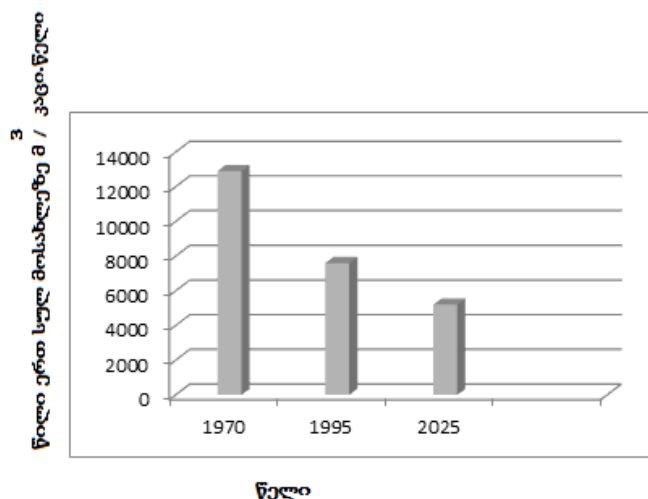
საზოგადოებისა და სახელმწიფოს მდგრადი განვითარების პროცესები პირდაპირაა დაკავშირებული კაცობრიობის ძირითადი გლობალური პრობლემების გადაწყვეტასთან - ცხოვრების უსაფრთხოებასთან, მოსახლეობის ეკოლოგიურად სუფთა საკვები პროდუქტებით და სასმელი წყლით უზრუნველყოფასთან, საჭირო ბალანსის შექმნასთან სოციალურ-ეკონომიკური პრობლემების გადაწყვეტასა და გარემოს ეკოლოგიას შორის.

წყალს უკავია განსაკუთრებული ადგილი დედამიწის ბუნებრივ სიმდიდრეებს შორის. არ არის უფრო ძვირფასი წიაღისეული, ვიდრე წყალია, რომლის გარეშეც სიცოცხლე შეუძლებელია.

მსოფლიო ჰიდროსფეროს 96% შეადგენს მარილიანი წყალი [16]. 2%-მდე - მიწისქვეშა წყლები, 2%-ზე - ნაკლები ყინულები და თოვლი (ძირითადად ანტარქტიდის და გრელანდიის), 0,02%-მდე - ხმელეთის ზედაპირული წყლები

(მდინარეები, ტბები, ჭაობები). მტკნარი წყლის მხოლოდ მცირე ნაწილი (სულ 0,36%) მდებარეობს მოპოვებისათვის ადვილადმისაღომ ადგილებში.

მიწაზე არსებული მტკნარი წყლის მარაგი ერთი შეხედვით საკმარისია. მსოფლიოს ყველა მდინარის წლიური ჩადინება საშუალოდ შეადგენს 42600 კმ<sup>3</sup>. მაგრამ მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის შედეგად ერთ სულ მოსახლეზე მოსული მტკნარი წყლის რაოდენობა მუდმივად მცირდება (ნახ.1.1): 1970 წელს ის შეადგენდა 12900 მ<sup>3</sup>, 1995 წელს - 7600 მ<sup>3</sup>, ხოლო 2025 წლისთვის შეიძლება დაეცეს 5200 მ<sup>3</sup>-მდე. ფაქტიურად დედამიწის ბევრი რაიონის მცხოვრები იღებს მნიშვნელოვნად მცირე რაოდენობის წყალს. ხშირად მტკნარი წყლის წყაროები შორს მდებარეობს იმ ადგილებიდან სადაც არის მოთხოვნილება მასზე ან არ არის წლის იმ სეზონზე, როცა ის აუცილებელია. ამჟამად მნიშვნელოვნად გაიზარდა მტკნარი წყლის მოხმარება მიწისქვეშა წყაროებიდან, რაც აძლიერებს კაცობრიობისათვის ამ სასიცოცხლოდ მნიშვნელოვანი რესურსის საერთო დეფიციტს. მსოფლიო ზედამხედველობის ინსტიტუტის (Worldwatch Institute) [73]მონაცემებით, პლანეტის მიწისქვეშა რეზერვუარები ყოველწლიურად კარგავს 160 მილიარდ კუბურ მეტრ მტკნარ წყალს. წყლის ასეთი მოცულობა არ აღდგება მისი წრებრუნვით.



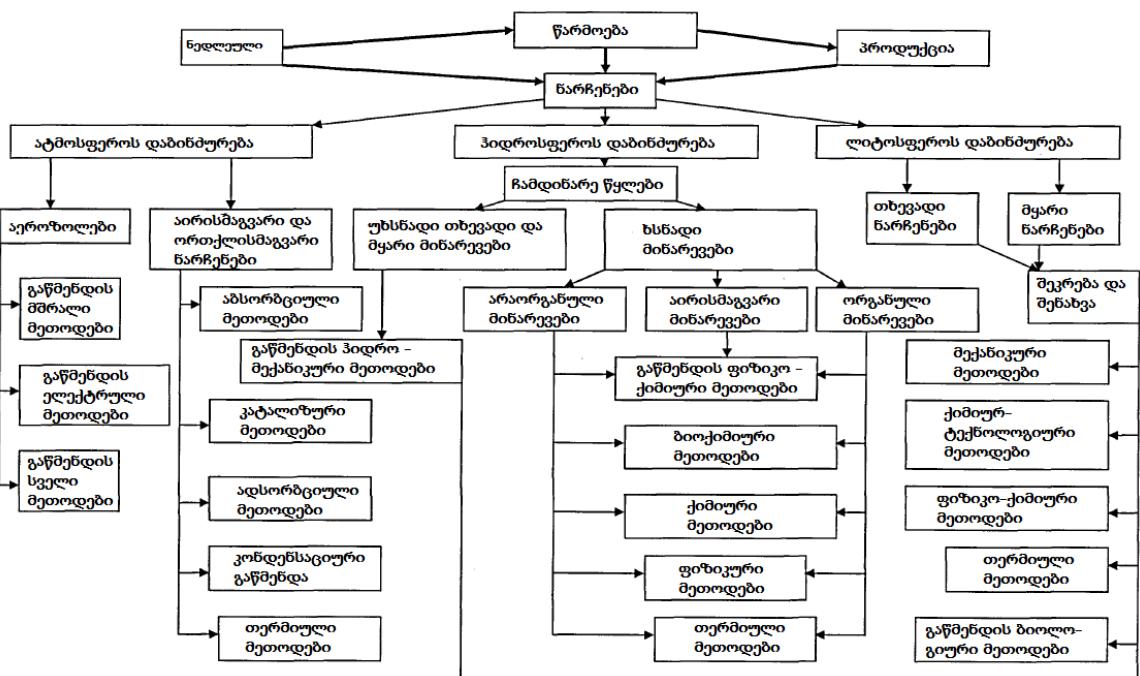
ნახ.1.1 მსოფლიო მდინარეების წლიური ჩადინების წილი ერთ სულ მოსახლეზე, მ<sup>3</sup>/(ადამიანი.წელიწადი)

სულ უფრო მეტი წყლის ობიექტი ხდება დაბინძურებული და ამის გამო გამოუსადეგი გამოსაყენებლად სპეციალური ზომების გარეშე, რასაც მივყავართ წყლის უკმარობის პრობლემის შემდგომ გამწვავებასთან [37,44]. ამასთან დაკავშირებული ზედაპირული და მიწისქვეშა წყლების დეგრადაცია მოითხოვს მათ დამატებით გაწმენდას მისი შემდგომი გამოყენებისთვის წარმოების ბევრ დარგში, ყოფა ცხოვრებაში და სოფლის მეურნეობაში. ამისათვის უნდა შეიქმნას ეკოლოგიურად მიზანშეწონილი, ენერგო დამზოგი ტექნოლოგიები.

### 1.1.2 წლის გაწმენდის ეკოლოგიურად მიზანშეწონილი ტექნოლოგიები

მტკნარი წყლის ხარისხის გაფუჭება ხდება როგორც ჰიდროსფეროს უშუალო დაბინძურებით, ისე ანთროპოგენური ხასიათის გამონაბოლქვების მოხვედრით ატმოსფეროში და ლითოსფეროში (ცხრილი 1.1) [66].

ცხრ.1.1 - გარემომცველი არის დაბინძურება ანთროპოგენული ზემოქმედებით



გადასამუშავებელ არეზე ზემოქმედების სახის მიხედვით გაწმენდის არსებული მეთოდები შეიძლება დავყოთ: *მექანიკური*, *ქიმიური*, *ფიზიკო-ქიმიური*, *ბიოლოგიური*. მათგან ყველაზე მიმზიდველი არის ეგრეთ წოდებული ურეაგენტო

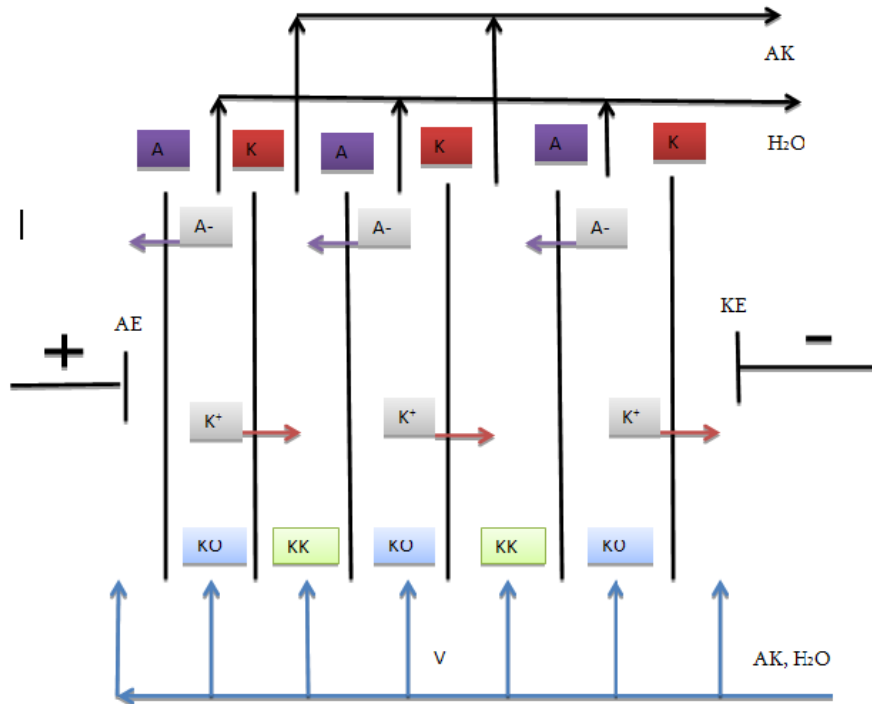


მეთოდები. უფრო მეტად ეკოლოგიურ მეთოდებათ ითვლებიან ბარომემბრანული (უკუოსმოსი) და ელექტრომემბრანული (ელექტროდიალიზი) . ეს მეთოდები არის უწყვეტი და არ მოითხოვენ მემბრანული მოდულების ქიმიურ რეგენერაციას. უნდა აღვნიშნოთ, რომ უკუ ოსმოსის შემთხვევაში გადასაადგილებელ მაკროობიექტს წარმოადგენს წყალი [3]. ამიტომ გადასამუშავებელი ხსნარის განზავებით ენერგოდანახარჯები და ამ მეთოდის გამოყენებასთან დაკავშირებული მეორადი დაბინძურება იზრდება. იმავდროულად გადასაადგილებელ მაკროკომპონენტს ელექტროდიალიზის დროს წარმოადგენს მარილი [75], ამიტომ ენერგოდანახარჯების ზრდა ხსნარის განზავებით უმნიშვნელოა. ამიტომ განხილული მეთოდებიდან ყველაზე ეკოლოგიურია ელექტროდიალიზი.

### **1.1.3 ელექტრომემბრანულ სისტემებში მასაგადატანის ინტენსივობის განმსაზღვრელი ფაქტორები**

წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემის (ელექტრომემბრანული მოდულის ანუ ელექტროდიალიზატორის) პრინციპული სქემა წარმოდგენილია ნახაზზე 1.2.

მორიგეობით განლაგებულ კათიონ- (K) და ანიონცვლადი (A) მემბრანების მიერ შექმნილ პაკეტში, რომელიც მოთავსებულია კათოდსა (KE-კათოდი) და ანოდს (AE-ანოდი) შორის ტარდება ელექტრული დენი. დასამუშავებელი ხსნარი მემბრანებს შორის არხში გადაიტუმბება  $\bar{V}$  სიჩქარით. ელექტრული ველის მოქმედებით ხდება იონების სელექციური გადატანა კათიონების კათიონცვლადი მემბრანების გავლით, ხოლო ანიონების - ანიონცვლადის გავლით. ამ დროს წარმოიქმნებიან გამტკნარების (KO) და კონცენტრირების (KK) საკნები. ამ საკნების რაოდენობა შეიძლება შეიცვალოს ელექტროდიალიზატორის მიზნობრივი დანიშნულების მიხედვით.



ნახ.1.2 ელექტროდიალიზატორის პრინციპული სქემა

თუ ელექტროდებს შორის მოთავსებულია ერთი ინერტული ან იონცვლადი მემბრანა, ასეთ აპარატებს ეწოდება ელექტროლიზერები. თუ მემბრანებს შორის ან მემბრანასა და ელექტროდს შორის იმყოფება იონცვლადი ფისი, საუბრობენ ელექტროიონირების მეთოდზე. ამას გარდა უკანასკნელ პერიოდში აქტიურად მუშავდება ჰიბრიდული პროცესები, რომლებშიაც მასაგადატანა უზრუნველყოფილია მოდებული წნევისა და ელექტრული ველის კომბინაციით. ყველა ჩამოთვლილი ელექტრომემბრანული მოდული, ხასიათდება სითბო- და მასაგადატანის საკმაოდ ახლო მექანიზმებით და შეიძლება აღწერილი იქნან მსგავსი ფიზიკური და მათემატიკური მოდელებით.

ცნობილია, რომ იონცვლად მემბრანაში ელექტრული დენის გავლის დროს, იონური კომპონენტების მემბრანაში და ხსნარში გადატანის რიცხვების განსხვავების შედეგად, ხსნარის სასაზღვრო ფენებში აღიძვრება ელექტროლიტის კონცენტრაციის გრადიენტი. თავის მხრივ, ეს კონცენტრაციის გრადიენტი არის მიზეზი, მემბრანის ზედაპირთან პოტენციალის დაძვრის, მისი წონასწორული მნიშვნელობიდან. პოტენციალის ამ დაძვრას აღნიშნავენ ტერმინით “კონცენტრაციული პოლიარიზაცია” რუსულ ლიტერატურაში და “გადაძაბვა” (overvoltage) ინგლისურენოვანში.

უკანასკნელ შემთხვევაში კონცენტრაციული პოლიარიზაციის ქვეშ იგულისხმება დენით გამოწვეული კონცენტრაციის გრადიენტის წარმოქმნა ან მოვლენების მთლიანი კომპლექსი, განპირობებული დენის გავლით. კლასიკური ელექტროქიმიის წარმოდგენების თანახმად, კონცენტრაციის გრადიენტების ფორმირებას მემბრანა(ელექტროდი)/ხსნარი საზღვრის მახლობლად მივყავართ დენის სიმკვრივის (i) შეზღუდვამდე ეგრეთ წოდებულ დენის ზღვრულ სიმკვრივემდე ( $i_{lim}$ ). ზედაპირზე ელექტროლიტის ნულოვანი კონცენტრაციის მიღწევასა  $i$  მიისწრაფის ზღვრული მნიშვნელობისაკენ  $i_{lim}$ , ხოლო პოტენციალის ნახტომი უსასრულობისაკენ. მხოლოდ რეალურ ელექტრომემბრანულ სისტემებში ზღვრული დენის სიმკვრივე შეიძლება გაიზარდოს რამოდენიმეჯერ, მემბრანის ზედაპირთან ეფექტების კომპლექსის წარმოქმნის ხარჯზე, რომლებიც გამოწვეულია გამავალი დენისა და სისტემაში კონცენტრაციული ცვლილებების ერთდროული მოქმედებით. ეს ეფექტები შეიძლება გავაერთიანოთ ტერმინით “კონცენტრაციული პოლიარიზაციის შეუღლებული ეფექტები”. მათი მექანიზმების გაგება, რომლებიც განაპირობებენ ზეზღვრულ მასაგადატანას, იძლევიან დამატებით შესაძლებლობებს თხევადი არეების ელექტროდიალიზის და საშუალებას გვაძლევენ გავაფართოოთ გამოყენების არე ნივთიერებების გაწმენდისა და გაყოფისათვის.

ამჟამად ლიტერატურაში განიხილება ოთხი ეფექტი, რომლებიც ხსნიან ზეზღვრული მასაგადატანის მოვლენას. ორი მათგანი დაკავშირებულია წყლის დისოციაციასთან საზღვარზე მემბრანა/ხსნარი. **დენის დამატებითი მატარებლების**, წარმოქმნასთან. დენის დამატებითი მატარებლების,  $H^+$  და  $OH^-$  იონების წარმოქმნა, რომლებიც ელექტრომემბრანულ სისტემებში გენერირდებიან წყლის დისოციაციის დროს, დიდი დროის განმავლობაში განიხილებოდა როგორც ზეზღვრული გამტარებლობის ძირითადი და ერთადერთი მიზეზი. ამასთან ერთად  $H^+$  და  $OH^-$  იონების გენერაცია იწვევს ზეზღვრული გადატანის სხვა ნაკლებად ცხად მექანიზმს. ეს არის ზღვრული დენის **ეგზალტაციის ეფექტი**, რომელიც ელექტრომემბრანული სისტემებისათვის პირველად გამოიყენა იური ხარკაცმა [82]. მემბრანის ზედაპირთან  $H^+$  და  $OH^-$  იონების გაჩენა შეაშფოთებს ელექტრულ ველს და შეუძლია გაზარდოს მარილის მოპირდაპირე იონების გადატანა. მაგალითად, უარყოფითად

დამუხტული  $\text{OH}^-$  იონები, რომლებიც გენერირდებიან გაღარიბებული დიფუზიური ფენის და კათიონცვლადი მემბრანის საზღვართან, მიიზიდავენ მარილის კათიონებს ხსნარის სიღრმიდან ფაზებსშორის საზღვარზე. ბინარული ელექტროლიტისთვის მარილის საპირისპირო იონების ნაკადის სიმკვრივე ( $J_i$ ) ეგზალტაციის ეფექტის გათვალისწინებით აღიწერება განტოლებით:

$$J_i = \frac{2D_i C_0}{\delta} + \frac{D_i}{D_w} J_w$$

სადაც  $D_i$  და  $C_0$ - შესაბამისად მარილის  $i$ -რი საპირისპირო იონების დიფუზიის კოეფიციენტი და ელექტროლიტის ეკვივალენტური კონცენტრაცია ხსნარის სიღრმეში,  $\delta$ -გაღარიბებული დიფუზიური ფენის სისქე,  $D_w$  და  $J_w$  დიფუზიური ფენის შიგნით მემბრანის ზედაპირთან გენერირებული წყლის დისოციაციის პროდუქტების (კათიონცვლადი მემბრანის შემთხვევაში ეს  $\text{OH}^-$  იონებია) დიფუზიის კოეფიციენტი და ნაკადის სიმკვრივე. ხარკაცის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ საპირისპირო იონების ნაკადის ნაზრდი ზღვრული მნიშვნელობის  $J_{i\text{lim}} = \frac{2D_i C_0}{\delta}$  ზემოთ პროპორციულია გენერირებული  $\text{H}^+$  და  $\text{OH}^-$  იონების ნაკადის და პროპორციულობის კოეფიციენტი ტოლია  $\frac{D_i}{D_w}$ .

ელექტრომემბრანულ სისტემებში მარილის საპირისპირო იონების ნაკადის გაზრდა ეგზალტაციის ეფექტის ხარჯზე უმნიშვნელოა. მაგალითად ის შეადგენს 0,2, როცა  $\text{OH}^-$  იონების ნაკადი აღწევს  $J_{i\text{lim}}$  ტოლ მნიშვნელობას. პრაქტიკაში მარილის საპირისპირო იონების ნამატი მნიშვნელოვნად მაღალია, შესაბამისად ეს არ შეიძლება აიხსნას მხოლოდ ეგზალტაციის ეფექტით. არსებითი წვლილი მარილის მოპირდაპირე იონების ზეზღვრულ გადატანაში უნდა შეიტანონ სხვა შეუღლებულმა ეფექტებმა. სახელდობრ საუბარია შეუღლებული კონვექციის ორ ტიპზე, რომლებიც უზრუნველყოფენ იძულებით კონვექციასთან შედარებით ხსნარის დამატებით არევას. ასეთი არევა გამოწვეულია ლოკალური გრიგალებით, აღძრულით ელექტრული დენის გავლით წარმოშობილი მოცულობითი ძალების მოქმედებით. პირველი ტიპი, *ელექტროკონვექცია*, აღიძვრება მემბრანით გაყოფილ გამტკნარებულ ხსნარში სივრცით ელექტრულ მუხტზე ელექტრული ველის მოქმედების შედეგად. შეუღლებული კონვექციის მეორე ტიპი, *გრავიტაციული კონვექცია*, ვითარდება

ხსნარის სიმკვრივის არათანაბარი განაწილების წყალობით, რომელიც არის მოცულობითი არქიმედეს ძალების წარმოქმნის მიზეზი. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ლიტერატურაში ხშირად ვხვდებით ტერმინებს “ზუნებრივი”, “თავისუფალი”, “თერმოკონცენტრაციული” კონვექცია, გამოყენებულს როგორც გრავიტაციული კონვექციის სინონიმები.

ამჟამად ჩამოყალიბებული თეორიული წარმოდგენების შესაბამისად, რომელთა მიმოხილვა შეიძლება ვნახოთ სამუშაოებში [84-91], მემბრანულ სისტემებში ელექტროკონვექციის განვითარების ძირითად მექანიზმად ითვლება მეორე გვარის ელექტროოსმოსური სრიალი. მემბრანულ სისტემებში მეორე გვარის ელექტროოსმოსი აღიძვრება ელექტრული ველის, ფაზებსშორის საზღვარზე გადარიბებულ დიფუზიურ ფენაში ამ ველით ინდუცირებულ სივრცით მუხტზე ზემოქმედების შედეგად. რადგანაც სივრცითი მუხტის ხანგრძლივობა იზრდება ხსნარის განზავებით, უნდა ველოდეთ, რომ მარილის კონცენტრაციის შემცირებით ელექტროკონვექციის წვლილი ზეზღვრულ გადატანაში უნდა გაიზარდოს. დადგენილია, რომ მემბრანულ სისტემაში ელექტროკონვექციის აღძვრისათვის აუცილებელია სამი პირობა [4,7]:

- საკმაოდ დიდი სივრცითი მუხტის არსებობა;
- მემბრანის ზედაპირიდან საკმაოდ მოცილებულ ხსნარში მუხტის ლოკალიზაცია;
- სივრცითი მუხტის არათანაბარი განაწილება.

ელექტროკონვექციის ინტენსიურობა დამოკიდებული უნდა იყოს არა მარტო სივრცითი მუხტის ხანგრძლივობაზე და სიმკვრივეზე, არამედ იმ იონების სტოქსის რადიუსზე, რომლებიც აფორმებენ სივრცითი მუხტის არეს. სინამდვილეში რაც მეტია ეს რადიუსი, სითხე მით უფრო ეფექტურად უნდა ჩაებას კონვექციურ მოძრაობაში. ს.მუნმა და თანამშრომლებმა [10] პირველებმა მიაქციეს ყურადღება ამ გარემოებას და შეადარეს სხვადასხვა ელექტროლიტების ხსნარებში მემბრანების ვოლტამპერული მახასიათებლები. მათ სინამდვილეში აღმოაჩინეს, რომ საპირისპირო იონების სტოქსის რადიუსის ზრდასთან ერთად პლატოს სიგრძე ვოლტამპერულ მახასიათებლებზე მცირდება (რაც მოკლეა პლატო, მით მცირეა ძაბვა, რომელზედაც იწყება ინტენსიური შეუღლებული

კონვექცია), ხოლო ზეზღვრულ რეჟიმებში ელექტრომემბრანული სისტემის წინაღობა მცირდება. პლატოს მაქსიმალური სიგრძე ნაპოვნია HCl ხსნარის შემთხვევაში, რამდენადაც ხსნარში  $H^+$  იონების გადატანა ხორციელდება არა ჰიდროდინამიკურად, არამედ ესტაფეტური მექანიზმით [6]. ელექტროკონვექციის არსებობას ელექტრომემბრანულ სისტემებში ამოწმებს მასაგადატანის ზრდა იმ შემთხვევებში, როცა კონცენტრაციული პოლიარიზაციის სხვა შეუღლებული ეფექტები შეზღუდულია. ამას გარდა ასეთ სისტემებში ქრონოპოტენციომეტრიის მეთოდით დაფიქსირებულია პოტენციალის მაღალი სიხშირის ოსცილაცია, ი.რუბინშტეინის თეორიით მიღებულ პირობებში [8].

#### 1.1.4 გრავიტაციული კონვექციის მექანიზმი

გრავიტაციული კონვექციის შემთხვევაში მოცულობითი ძალების აღძვრა გამოწვეულია კონცენტრაციის (*კონცენტრაციული კონვექცია*) და/ან ტემპერატურის (*თბური კონვექცია*) გრადიენტებით. კონცენტრაციული საგან განსხვავებით თბური კონვექცია გამოკვლეულია საკმაოდ დაწვრილებით [13]. ეს განპირობებულია ჯერ ერთი ცურვის ძალების მექანიზმის სიმარტივით, მეორე კი მისი უფრო ფართო გავრცელებით [99,100] და ტექნიკური დანართებით, ნაწილობრივ, გარემომცველი გარემოს მონიტორინგისათვის და მტვრის საწინააღმდეგო და ცეცხლსაწინააღმდეგო დაცვის ეფექტური საშუალებების შესაქმნელად. ელექტროქიმიურ სისტემებში ტივტივის ძალები ინდუცირდებიან ელექტროდულ პროცესებთან და გრავიტაციული კონვექცია წარმოადგენს უფრო რთულ მოვლენას. თბურ სისტემებში მხოლოდ ტემპერატურის გრადიენტი განსაზღვრავს სითხის სიმკვრივის და ტივტივის ძალების სიმკვრივის ცვლილებას. ელექტროქიმიურ სისტემებში ხსნარი შეიცავს იონების რამოდენიმე სახეს და თითოეული მათგანის კონცენტრაციის გრადიენტი გავლენას ახდენს ტივტივის ძალების სიმკვრივეზე. ამას გარდა ელექტროლიტების ხსნარებში დიფუზიურის გარდა არსებობს იონების ელექტრომიგრაციული ნაკადი, რომელიც პროპორციულია ელექტრული ველის დამაბულობის. ამიტომ ცვლადების რაოდენობა, რომელიც აღწერს გრავიტაციულ კონვექციას ელექტროქიმიურ სისტემებში, იზრდება, ხოლო განტოლებები ხდებიან უფრო

რთულები, ვიდრე თბურ სისტემებში. შედეგად აღიძვრება რთული სურათი კონცენტრაციული, ჰიდროდინამიკური და ელექტრული ველების არაწრფივი ურთიერთმოქმედების.

გრავიტაციულ კონვექციასთან დაკავშირებული მოვლენები შეიძლება დავყოთ ორ კლასად: *თავისუფალ კონვექციად და კონვექციურ მდგრადობად*. თავისუფალი კონვექცია აღიძვრება სითხეში, თუ სიმკვრივის გრადიენტის და თავისუფალი ვარდნის აჩქარების ვექტორის ვექტორული ნამრავლი აკმაყოფილებენ პირობას  $\nabla \rho \times \vec{g} \neq 0$ . თუ სიმკვრივის გრადიენტი პარალელურია თავისუფალი ვარდნის აჩქარების  $\vec{g}$ , სითხეში შესაძლებელია მექანიკური წონასწორობა. მხოლოდ ეს წონასწორობა შეიძლება იყოს არამდგრადი, თუ ცურვის ძალების სიმკვრივე გადააჭარბებს რაღაც კრიტიკულ მნიშვნელობას.

იძულებითი კონვექციის არ არსებობის შემთხვევაში (არ ხდება ხსნარის გადატუმბვა) ცნობილია [45], რომ როცა ფაზებს ხსნარი/ელექტროდი შორის საზღვარი იმყოფება ვერტიკალურ მდებარეობაში და ხსნარის სიმკვრივის გრადიენტი ჰორიზონტალურია, გრავიტაციული კონვექცია აღიძვრება უზღურბლო რეჟიმში, ე.ი. ყოველთვის აქვს ადგილი და იზრდება თანდათან დენის/პოტენციალის გაზრდით. როცა ფაზებს შორის საზღვარი განლაგებულია ჰორიზონტალურად და ორ პარალელურ ჰორიზონტალურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული ხსნარის სიმკვრივე იცვლება ნორმალის გასწვრივ, შესაძლებელია ორი შემთხვევა. თუ ხსნარის უფრო მსუბუქი ფენა იმყოფება მემბრანის ზემოთ, გრავიტაციული კონვექციის განვითარებისთვის გვაქვს რაღაც ზრურბლი, განსაზღვრული რელეის რიცხვის მნიშვნელობით [13,45]:

$$Ra = GrSc = \frac{\bar{\Delta}\rho}{\rho} \frac{gX^3}{v^2} \frac{v}{D} = \frac{\bar{\Delta}\rho}{\rho} \frac{gX^3}{vD},$$

სადაც  $Gr = \frac{\bar{\Delta}\rho}{\rho} \frac{gX^3}{v^2}$  -გრასხოფის რიცხვი;  $Sc = \frac{v}{D}$  - შმიდტის რიცხვი;  $\bar{\Delta}\rho$ - ხსნარის სიმკვრივის ცვლილება X სისქის ფენის ზედა და ქვედა ნაწილებს შორის, რომელშიც ხდება ხსნარის სიმკვრივის ვარიაცია; g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება; v-ხსნარის სიბლანტე, D-ელექტროლიტის დიფუზიის კოეფიციენტი. სისტემა სტაბილურია, ე.ი. კონვექცია არ აღიძვრება, თუ  $Ra < 1708$ . ამ შემთხვევაში მახასიათებელი დრო, რომელიც აუცილებელია ხსნარის არადიდ მოცულობაში

სიმკვრივის ფლუქტუაციის დიფუზიური დისოციაციისათვის, ნაკლებია, ვიდრე ამ მოცულობის ამოტივტივების მახასიათებელი დრო. თუ  $Ra > 1708$ , მოცულობა სიმკვრივის უარყოფითი გრადიენტით ამოტივტივდება აჩქარებით, რადგანაც სიმკვრივე ამოტივტივებული მოცულობის შიგნით იზრდება უფრო ნელა, ვიდრე მის გარემომცველ ხსნარში. თერმომასაგადატანის თეორიიდან ცნობილია, რომ სწორკუთხა „ცარიელი“ არხის შემთხვევაში გრავიტაციული კონვექცია არ ითრგუნება იძულებითი კონვექციით, თუ დაცულია პირობა:  $Ri = Gr/Re^2 > 1$ , სადაც  $Ri$ -რიჩარდსონის რიცხვია, ხოლო  $Re = V_0 X / \nu$  - რეინოლდსის რიცხვი,  $V_0$  - ხსნარის დინების საშუალო სიჩქარე [95].

გამტკნარების ელექტროდიალიზურ არხებში მასაგადატანის ექსპერიმენტული კვლევის ციკლმა საშუალება მოგვცა დაგვედგინა, რომ გრავიტაციული კონვექცია დომინირებს, როცა ხსნარის კონცენტრაცია საკმაოდ მაღალია (0,05 მოლი და მეტი), მემბრანებსშორის დაცილება შეადგენს 5-7 მმ, ხოლო ხსნარის დინების სიჩქარე არ აღემატება 0,3 სმ/წმ. ხსნარის განზავებით, მემბრანებსშორის დაცილების შემცირებით და დინების სიჩქარის გაზრდით გრავიტაციული კონვექციის წვლილი მასაგადატანაში მცირდება, ხოლო ელექტროკონვექციის - იზრდება. დამატებით ფიზიკურ ველებს, ნაწილობრივ, მაგნიტური ველს, შეუძლიათ გააძლიერონ გრავიტაციული კონვექცია [21]. შესასწავლია მემბრანებსშორის არხში გასაყოფი ხსნარის პულსირებული ნაკადით გადაადგილების გავლენა კონცენტრაციული პოლიარიზაციის მოვლენაზე.

## 1.2. იონების გადატანის ძირითადი განტოლებები

### 1.2.1 გადატანის კანონები ელექტროდიალიზის პროცესში

ელექტროლიტის ხსნარში მასაგადაცემის აღწერა დაკავშირებულია ისეთ საკითხებთან, როგორცაა იონების მოძრაობა, ნივთიერებების ბალანსი, ელექტრული დენი, ელექტრონეიტრალობა და აგრეთვე ჰიდროდინამიკის საკითხები. იგულისხმება, რომ სამუშაოში განხილული არე შემდგარია არაიონიზირებული



ელექტროლიტის გამხსნელისაგან იონების სახით და დაუმუხტავი კომპონენტებისაგან. ეს აღწერა ეხება მხოლოდ განზავებულ ხსნარებს.

თითოეული გახსნილი კომპონენტის ნაკადი აღიწერება ნერსტ-პლანკის განტოლებით

$$\vec{J}_i = -z_i u_i F C_i \nabla \varphi - D_i \nabla C_i + C_i \vec{V}, \quad i = 1..n \quad (1.3)$$

სადაც  $\vec{J}_i$ - კომპონენტის ნაკადი  $i, n$  - ხსნარის კომპონენტების რაოდენობა; პირველი შესაკრები გამოხატავს ნაკადის ელექტრომიგრაციულ მდგენელს, მეორე დიფუზიას, მესამე კონვექციას.

$\vec{J}_i$  ნაკადი გამოსახული მოლი/(სმ<sup>2</sup>·წმ)-ში არის ვექტორული სიდიდე, რომელიც აჩვენებს კომპონენტების მოძრაობის მიმართულებას და მოლელების რიცხვს, რომლებიც გადაკვეთავენ კომპონენტების ნაკადის პერპენდიკულარულად ორიენტირებულ 1 სმ<sup>2</sup> ფართობს დროის ერთეულში. ეს მოძრაობა უპირველეს ყოვლისა გამოწვეულია სითხის მოძრაობით სივრცითი  $\vec{V}$  სიჩქარით. მაგრამ კომპონენტების სიჩქარე შეიძლება განსხვავდებოდეს ამ საშუალო სიჩქარისაგან დიფუზიის ხარჯზე კონცენტრაციის გრადიენტის  $\nabla C_i$  არსებობისას და ელექტრომიგრაციის ხარჯზე, თუ გვაქვს ელექტრული ველი  $\nabla \varphi$  და კომპონენტები ატარებენ ელექტრულ მუხტს ( $z_i$ - იონის მუხტი პროტონის მუხტის ერთეულებში).

ელექტრომიგრაციული წევრი არის ელექტროქიმიური სისტემების ანუ დამუხტული კომპონენტების შემცველი სისტემების თავისებურება.  $\varphi$  სიდიდე ამ წევრში აღნიშნავს ელექტროსტატიკურ პოტენციალს, რომლის გრადიენტიც ტოლია ელექტრული ველის მოპირდაპირე ნიშნით.  $u_i$  სიდიდეს ეწოდება მოძრაობის უნარი. ის წარმოადგენს ხსნარში კომპონენტის საშუალო სიჩქარეს მასზე 1ნ/მოლი ძალის მოქმედებისას ამ ძალის წარმოშობიდან დამოუკიდებლად. უკანასკნელი მიიღება კომპონენტის 1 მოლის მუხტის  $z_i F$  გამრავლებით ელექტრულ ველზე-  $\nabla \varphi$ . გამრავლება მოძრაობის უნარზე  $u_i$  გვაძლევს ელექტრომიგრაციის სიჩქარეს, და ბოლოს გამრავლება კონცენტრაციაზე  $C_i$  იძლევა სრულ წვლილს ნაკადში  $\vec{J}_i$ , ელექტრულ ველში მიგრაციის წყალობით.

მეორე და მესამე წევრი განტოლების მარჯვენა ნაწილში - ეს ჩვეულებრივი წევრებია, რომლებიც გვაქვს არაელექტრული სისტემების შემთხვევებშიც. მაშასადამე

ყველა სამი წევრი განტოლების მარჯვენა ნაწილში წარმოადგენენ მასაგადაცემის სამ მექანიზმს: დამუხტული კომპონენტების ელექტრომიგრაცია ელექტრულ ველში, მოლეკულური დიფუზია კონცენტრაციის გრადიენტის ხარჯზე და კონვექცია არის სივრცითი მოძრაობის გამო.

განტოლების მართებულობა შეიძლება დაირღვეს უპირველეს ყოვლისა იმიტომ, რომ ელექტრომიგრაციული და დიფუზიური ნაკადები უნდა განისაზღვროს სითხის რაღაც საშუალო  $\vec{V}$  სიჩქარის მიმართ და გამოსახულება ნაკადებისათვის უნდა შეუთანხმდეს ამ არჩევანს. კონცენტრირებულ ხსნარებში ეს სიჩქარე არ ემთხვევა გამხსნელის სიჩქარეს, რომელიც არის საშუალო სიჩქარის მხოლოდ ნაწილი. ამ სირთულეს აქ შემოუვლიან იმის ხარჯზე, რომ განტოლება არ გამოიყენება თვით გამხსნელის მიმართ და განიხილება მხოლოდ განზავებული ხსნარების შემთხვევაში, სადაც  $\vec{V}$  პრაქტიკულად ემთხვევა გამხსნელის სიჩქარეს.

ამას გარდა განტოლებაში განიხილება ურთიერთქმედება მხოლოდ გახსნილ კომპონენტებსა და გამხსნელს შორის, მაშინ როცა ურთიერთქმედება გახსნილ კომპონენტებს შორის არ გაითვალისწინება. განზავებულ ხსნარებში კი ეს ურთიერთქმედება შეიძლება უგულებელვყოთ.

მაშასადამე, განზავებული ხსნარების შემთხვევაში განტოლება საკმაოდ კორექტულად და სწორად ასახავს ფიზიკური პროცესების არსს.

დენი ხსნარში განპირობებულია დამუხტული კომპონენტების მოძრაობით, რაც რაოდენობრივად გამოისახება განტოლებით:

$$\vec{i} = F \sum_{i=1}^n z_i \vec{j}_i. \quad (1.4)$$

სადაც  $\vec{i}$  - დენის სიმკვრივე, გამოსახული ა/სმ<sup>2</sup>, ხოლო  $z_i F$  - ერთ მოლზე მოსული მუხტი.

მატერიალური ბალანსის პირობას აქვს სახე

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_i) + R_i, \quad i = 1..n, \quad (1.5)$$

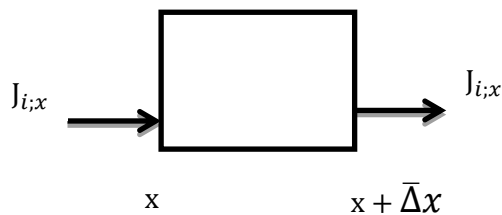
სადაც  $R_i$ - წყარო, განპირობებული ჰომოგენური ქიმიური რეაქციით.

$R_i$  ნივთიერების წარმოქმნა ხდება ხსნარის სიღრმეში ჰომოგენური ქიმიური რეაქციის ხარჯზე და არა ხსნარის საზღვრებზე მიმდინარე ელექტროდული რეაქციით. ელექტროქიმიურ სისტემებში რეაქციები ხშირად მიმდინარეობს მხოლოდ ელექტროდების ზედაპირზე ან მემბრანის ზედაპირის მახლობლობაში და  $R_i$  ამ შემთხვევაში ტოლია ნულის.

ნაკადის დივერგენცია, რომ გავიანგარიშოთ აუცილებელია გამოვთვალოთ ნივთიერების ჯამური რაოდენობა, რომელიც გაიტანება სხვადასხვა ნაკადებით მოცულობის ელემენტის სხვადასხვა წახნაგებში (ნახ.1.3) ამ ნაკადების სხვაობა იძლევა წვლილს კონცენტრაციის დროით წარმოებულში:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{J}_{i,x}|_x - \vec{J}_{i,x}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial \vec{J}_{i,x}}{\partial x},$$

სადაც  $\Delta x$  მნიშვნელში ხვდება ელემენტის მოცულობაზე გაყოფის შედეგად.



ნახ.1.3 ნივთიერების დაგროვება გამოწვეული მოცულობის ელემენტის წახნაგებთან ნაკადების განსხვავებით

$$\text{div}(J_i) = \frac{\partial J_{i,x}}{\partial x} + \frac{\partial J_{i,y}}{\partial y}$$

განტოლებები (1.4) და (1.5) შეიძლება განვიხილოთ როგორც ძირითადი ფიზიკური კანონების გამოსახულება, რომელთა თანახმადაც, ჯერ ერთი, ელექტრული დენი დაკავშირებულია დამუხტული კომპონენტების მოძრაობასთან და მეორეც მოცემული ტიპის კომპონენტები ინახებიან ან იღებენ მონაწილეობას ჰომოგენურ ქიმიურ რეაქციებში.

უნდა ჩავთვალოთ, რომ ხსნარი ელექტრულად ნეიტრალურია:

$$\sum_{i=1}^n z_i C_i = 0 \quad (1.6)$$

ასეთი ელექტრონიტრალობა შეიმჩნევა ყველა ხსნარში, მემბრანა/ხსნარი და გაყოფის სხვა საზღვრებზე, ელექტროდების მახლობლობაში ორმაგი თხელი ფენის გამოკლებით. ორმაგი ფენის სისქე შეიძლება იყოს 10-100Å რიგის. ელექტროდებთან ან მემბრანებთან, ორმაგ ფენასთან დაკავშირებული მოვლენები, ჩვეულებრივ შეიძლება გავითვალისწინოთ სასაზღვრო პირობებით. აქედან გამომდინარე, ელექტრონიტრალობა სრულდება საკმაოდ კარგი მიახლოებით და ხსნარის მოცულობის აღწერისათვის (1.6) განტოლება სრულიად მისაღებია. მემბრანის ფაზისათვის, ელექტრონიტრალობის პირობას აქვს სახე:

$$\sum_{i=1}^n z_i C_i = Q \quad (1.7)$$

სადაც  $Q$ - მემბრანის მოცულობითი ტევადობა. მარილების ხსნარებისათვის, რომლებიც წარმოდგენენ ძლიერ ელექტროლიტებს, მოცულობითი ტევადობა ეკვივალენტურია მემბრანაში ფიქსირებული იონების ჯგუფების მუხტის სიმკვრივის [15].

მასაგადატანის პრობლემის გადასწყვეტად აუცილებელია აგრეთვე ვიცოდეთ კონვექციური სიჩქარე  $\vec{V}$ , რომელიც შეიძლება ვიპოვოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებიდან [24,49,70]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}, \quad (1.8)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0. \quad (1.9)$$

სადაც  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - ლაპლასის ოპერატორი, ჩაწერილი დეკარტის  $x, y, z$  კოორდინატებისათვის,  $t$ -დრო,  $\rho$  და  $\nu$  ხსნარის სიმკვრივე და კინემატიკური სიბლანტის კოეფიციენტი,  $P$ - წნევა, შექმნილი ზედაპირული ძალების მოქმედებით ხსნარის თითოეულ წერტილში,  $\vec{F}$  მოქმედი მოცულობითი ძალების ვექტორი.

განტოლება (1.9) გამოსახავს უკუმშვადი სითხის ნაკადის უწყვეტობის პირობას.

### 1.2.2. ელექტროლიტის გამტარებლობა, დიფუზიური პოტენციალი და გადატანის რიცხვი

ჩავწეროთ (1.4) განტოლება ხსნარში დენის სიმკვრივისათვის, მასში კომპონენტების (1.3) ნაკადის ჩასმით:

$$\vec{i} = -F^2 \nabla \varphi \sum_{i=1}^n z_i^2 u_i C_i - F \sum_{i=1}^n z_i D_i \nabla C_i + F \vec{V} \sum_{i=1}^n z_i C_i.$$

ელექტრონეიტრალობის (1.6) გამო ამ განტოლების ბოლო წევრი ტოლია ნულის. ეს ნიშნავს, რომ სითხის მოძრაობა მუხტის ნულოვანი სიმკვრივის პირობებში გავლენას ვერ მოახდენს დენის სიმკვრივეზე. როცა კონცენტრაცია ხსნარში ერთგვაროვანია, მაშინ  $\nabla C_i = 0, i = 1..n$ , და ეს განტოლება დაიყვანება ჩვეულებრივ თანაფარდობაზე დენისათვის ელექტროლიტში:

$$\vec{i} = -\chi \nabla \varphi, (1.11)$$

სადაც

$$\chi = F^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 u_i C_i \quad (1.12)$$

არის ხსნარის გამტარებლობა. ეს ტოლობა გამოსახავს ომის კანონს და სამართლიანია ელექტროლიტებისათვის კონცენტრაციული გრადიენტების არ არსებობის შემთხვევაში.

ამ შემთხვევაში შეიძლება ვთქვათ, რომ  $\kappa$  კომპონენტებით გადატანილი დენის სიმკვრივე ტოლია

$$t_k \vec{i} = -F^2 Z_k^2 u_k C_i \nabla \varphi = \frac{z_k^2 u_k C_k}{\sum_{i=1}^n z_i^2 u_i C_i} \vec{i} \quad (1.13)$$

სადაც

$$t_k = \frac{z_k^2 u_k C_k}{\sum_{i=1}^n z_i^2 u_i C_i}, \quad (1.14)$$

$\kappa$  კომპონენტებით გადატანილი დენის ნაწილია, რომელსაც ეწოდება აგრეთვე გადატანის რიცხვი. ამ შემთხვევაში მოხერხებულია ამოწეროთ  $i$  კომპონენტის ელექტრომიგრაციული ნაკადი:

$$\vec{J}_i^{მოგრ.} = -z_i u_i F C_i \nabla \varphi = \frac{t_i}{z_i F} \vec{i} \quad (1.15)$$

კონცენტრაციული გრადიენტების არსებობის შემთხვევაში დენის სიმკვრივე არ არის პროპორციული ელექტრული ველის დამაბულობის და არ სრულდება ომის კანონი. დიფუზიური ნაკადის წყალობით, რომელიც წარმოდგენილია მეორე წევრით (1.10) განტოლებაში, დენის სიმკვრივეს შეუძლია ჰქონდეს სხვა მიმართულება, ვიდრე ელექტრული ველის მიმართულება. (1.10) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\nabla \varphi = \frac{\vec{i}}{\chi} - \frac{F}{\chi} \sum_{i=1}^n z_i D_i \nabla C_i \quad (1.16)$$

და გავაკეთოთ უკუ მტკიცება: უდენოდაც კი შეიძლება არსებობდეს პოტენციალის გრადიენტი. მეორე წევრს ამ განტოლებაში მივყავართ ეფექტამდე, რომელიც ცნობილია დიფუზიური პოტენციალის სახელწოდებით. თუ დიფუზიის ყველა კოეფიციენტი იქნება ტოლი, მაშინ ეს წევრი გაუტოლდება ნულს ელექტრონეიტრალობის გამო.

### 1.2.3 მუხტის შენახვა

მუხტის შენახვა წარმოადგენს ფუნდამენტალურ ფიზიკურ კანონს. ეს კანონი შედის გადატანის ძირითად განტოლებებში. თუ 1.5 განტოლებას გავამრავლებთ  $z_i F$ -ზე და შევკრებთ კომპონენტების ტიპების მიხედვით მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial t} F \sum_{i=1}^n z_i C_i = -\text{div} \left( F \sum_{i=1}^n z_i \vec{J}_i \right) + F \sum_{i=1}^n z_i R_i. \quad (1.17)$$

წონასწორული რეაქციების შემთხვევაში (ე.ი. როცა ყველა ჰომოგენური რეაქცია, რომელიც იძლევა წვლილს  $R_i$ -ში, ელექტრულად დაბალანსებულია), მაშინ უკანასკნელი წევრი განტოლებაში 1.17 გადაიქცევა ნულად. მაშინ გამოსახულება მარცხნივ არის მუხტის სიმკვრივის ცვლილების სიჩქარე; პირველი წევრი მარჯვნივ არის დენის სიმკვრივის დივერგენცია უარყოფითი ნიშნით, ხოლო მთლიანი

განტოლება აღწერს მუხტის შენახვას. ელექტრონეიტრალობის პირობის გათვალისწინებით ეს განტოლება დაიყვანება

$$\operatorname{div}(\vec{i}) = 0 \quad (1.18)$$

ფიზიკური თვალსაზრისით ეს აღნიშნავს, რომ მუხტი გადაიტანება მასალის ნაწილაკებით და რომ ამ ნაწილაკების შენახვა (ან ელექტრულად ბალანსირებული რეაქცია) განაპირობებს მუხტის შენახვას.

#### 1.2.4 ბინარული ელექტროლიტი

ბინარული ელექტროლიტის ქვეშ იგულისხმება უბრალო მარილის ხსნარი, შემდგარი ერთი ტიპის კათიონებისა და ანიონებისაგან. დადებითი კომპონენტები აღვნიშნოთ ინდექსით „1“, ხოლო უარყოფითი კომპონენტები - ინდექსით „2“. მოძრაობის უნარი და დიფუზიის კოეფიციენტები იგულისხმება მუდმივი.

დავუშვათ  $n_1$  და  $n_2$  - ელექტროლიტის ერთი მოლეკულის დისოციაციის შედეგად წარმოშობილი კათიონების და ანიონების რიცხვია შესაბამისად. მაშინ ელექტროლიტის კონცენტრაცია განისაზღვრება თანაფარდობით

$$C = \frac{c_1}{n_1} = \frac{c_2}{n_2} \quad (1.19)$$

მაშასადამე ელექტრონეიტრალობის პირობა (1.6) კმაყოფილდება. ნაკადის გამოსახულების (1.3) ჩასმა მატერიალური ბალანსის (1.5) პირობაში როცა  $R_i = 0$  მიძლევა განტოლებებს იონების თითოეული ტიპისათვის:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla C) = z_1 u_1 F \cdot \operatorname{div}(C \nabla \varphi) + D_1 \Delta C, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla C) = z_2 u_2 F \cdot \operatorname{div}(C \nabla \varphi) + D_2 \Delta C. \quad (1.21)$$

მეორე განტოლების პირველზე გამოკლებით, მივიღებთ

$$(z_1 u_1 - z_2 u_2) F \cdot \operatorname{div}(C \nabla \varphi) + (D_1 - D_2) \Delta C = 0. \quad (1.22)$$

ეს გამოსახულება შეიძლება გამოვიყენოთ (1.20) ან (1.21) განტოლებებიდან პოტენციალის გამოსარიცხად, შედეგად ვღებულობთ

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla C) = D \Delta C, \quad (1.23)$$

სადაც

$$D = \frac{z_1 u_1 D_2 - z_2 u_2 D_1}{z_1 u_1 - z_2 u_2}. \quad (1.24)$$

(1.23) გამოსახულებას ეწოდება კონვექციური დიფუზიის განტოლება. ის გვიჩვენებს, რომ დენის არ არსებობის შემთხვევაში მარილი, ისეთი, როგორცაა ნატრიუმის ქლორიდი წყალში ქცევით, ერთი ტიპის კომპონენტებისაგან შემდგარი სისტემისანალოგიურია. ეს განპირობებულია ელექტრონეიტრალობის მოთხოვნებით. კონცენტრაციას  $C$  მოცემული პირობებისათვის უწოდებენ *კვივალენტურ კონცენტრაციას*. ფაქტიურად არსებული დიფუზიის კოეფიციენტი  $D$  წარმოადგენს საშუალოს ანიონისა და კათიონის დიფუზიის კოეფიციენტებს შორის [48].

(1.23) განტოლება მიღებულია დენის სიმკვრივის ნულთან ტოლობის ვარაუდის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს დასკვნა, რომ დენის არსებობის შემთხვევაშიც კი უბრალო მარილის იონების კონცენტრაციის განაწილება ხსნარში ემორჩილება იმავე განტოლებას, რასაც ნეიტრალური კომპონენტების კონცენტრაციის განაწილება.

ბინარული ელექტროლიტისათვის ტოლობა გადატანის რიცხვებისათვის (1.14) დაიყვანება განტოლებაზე

$$t_1 = 1 - t_2 = \frac{z_1^2 u_1 n_1}{z_1^2 u_1 n_1 - z_2^2 u_2 n_2}, \quad (1.25)$$

სადაც  $t_1$  და  $t_2$  - შესაბამისად კათიონის და ანიონის გადატანის რიცხვებია.

კერძო შემთხვევაში უბრალო მარილის ბინარული ელექტროლიტისათვის (ე.ი. სიმეტრიული ელექტროლიტისათვის, რომელიც დისოცირდება კათიონებისა და ანიონების ერთნაირი რაოდენობით) (1.25) ტოლობას ექნება სახე:

$$t_1 = 1 - t_2 = \frac{z_1 u_1}{z_1 u_1 - z_2 u_2}. \quad 1.26$$

### 1.2.5 იონების მოძრაობის უნარი და დიფუზიის კოეფიციენტები

იონების მოძრაობის უნარი და დიფუზიის კოეფიციენტები დაკავშირებულია ნერნსტ-ეინშტეინის განტოლებასთან:



$$D_i = RTu_i, (1.27)$$

რომელიც მკაცრად გამოყენებულია უსასრულოდ განზავებისას, თუმცა მისი დარღვევა დაკავშირებულია ნაკადის განტოლების (1.3) მიახლოებით ხასიათთან.

ნერნსტ-ეინშტეინის თანაფარდობის გათვალისწინებით გამოსახულება (1.24) ბინარული ელექტროლიტის დიფუზიის კოეფიციენტისათვის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$D = \frac{D_1 D_2 (z_1 - z_2)}{z_1 D_1 - z_2 D_2}. (1.28)$$

უბრალო მარილის ხსნარისათვის გადატანის რიცხვი ნომინალურად არ არის დამოკიდებული კონცენტრაციისაგან (ელექტრონეიტრალობის წყალობით) და მოცემულია (1.25) განტოლებით.

განტოლებიდან (1.27) გვაქვს

$$t_1 = \frac{z_1^2 n_1 D_1}{z_1^2 n_1 D_1 - z_2^2 n_2 D_2}, \quad t_2 = \frac{-z_2^2 n_2 D_2}{z_1^2 n_1 D_1 - z_2^2 n_2 D_2}. (1.29)$$

### 1.3. იონების გადატანის თანამედროვე მათემატიკური მოდელები

#### 1.3.1. ერთ განზომილებიანი მოდელი

იონების გადატანის და მასთან დაკავშირებული კონცენტრაციული პოლიარიზაციის უბრალო ანალიზი შეიძლება ჩავატაროთ სამფენიანი ერთგანზომილებიანი მოდელის ჩარჩოში, რომელიც განიხილავს სტაციონალურ გადატანას სისტემაში დიფუზიური ფენა/მემბრანა/დიფუზიური ფენა [15,35,54]. დიფუზიური ფენის  $\delta$  ქვეშ იგულისხმება ხსნარის, მემბრანის სასაზღვრო ფენა, სადაც ელექტროლიტის კონვექციური გადატანა შეიძლება უგულებელვყოთ. ამ მოდელის თანახმად  $i$  სიმკვრივის დენი მიედინება ელექტროლიტის ორი I (გამტკნარებული ხსნარი) და II (კონცენტრირებული ხსნარი) ხსნარის, რომელთა იონური კონცენტრაციაა  $C_i'$  და  $C_i''$  ( $i = 1, \dots, N$ ). შესაბამისად, გამყოფი მემბრანის ზედაპირის პერპენდიკულარულად. გადატანის განტოლება თითოეული ფენისათვის ჩაიწერება ნერსტ-პლანკის ტოლობის ფორმით კონვექციური წევრის გარეშე:

$$J_i = -D_i \left( \frac{dc_i}{dx} + z_i c_i \frac{F}{RT} \frac{d\varphi}{dx} \right), (1.30)$$

ივარაუდება ლოკალური ელექტრონეიტრალობის პირობის შესრულება დიფუზიურ ფენებში (1.6) და მემბრანაში (1.7), აგრეთვე საზღვრებზე მემბრანა/დიფუზიური ფენა ელექტროქიმიური პოტენციალების ტოლობის პირობა, რომლებსაც მივყავართ ნიკოლსკის განტოლებებთან I საზღვარზე:

$$\frac{(\bar{c}_i^I)^{1/z_i}}{(\bar{c}_i^I)^{1/z_i}} = \bar{K}_{Ii} \frac{(c_{is}^I)^{1/z_i}}{(c_{is}^I)^{1/z_i}}. (1.31)$$

ანალოგიური პირობები მიიღება II საზღვარზე. აქ  $J_i$  - i იონების ნაკადის სიმკვრივე,  $\bar{K}_{Ii}$  - იონცვლადი წონასწორობის თერმოდინამიკური მუდმივა,  $\bar{c}_i$  - I იონის კონცენტრაცია მემბრანაში,  $c_{is}$  - i იონის კონცენტრაცია მემბრანის ზედაპირთან, I და II ინდექსები შესაბამისად ეკუთვნიან მემბრანის მარცხენა და მარჯვენა საზღვრებს. ხსნარისა და იონცვლადი მემბრანის ფაზებს შორის მყარდება ეგრეთ წოდებული პოტენციალის დონანის ნახტომი, რომელიც ძლიერი ელექტროლიტების საკმაოდ განზავებული ხსნარების შემთხვევაში ტოლია [15]

$$\Delta\varphi_D = -\frac{RT}{z_1 F} \ln \frac{\bar{c}_1}{c_{1s}} = -\frac{RT}{z_2 F} \ln \frac{\bar{c}_2}{c_{2s}}. (1.32)$$

მოდელებში ივარაუდება ხსნარების სიღრმეში კონცენტრაციის მუდმივობა. უმარტივეს შემთხვევაში იონების ელექტროსმოსური გადატანა არ გაითვალისწინება, მით უმეტეს რომ ავტორების [98,109] შეფასებით ელექტროსმოსური ტრანსპორტის გათვალისწინება არ ახდენს მნიშვნელოვან გავლენას საანგარიშო ვოლტამპერული მრუდის ფორმაზე მოცულობის კონვექციური გადატანის სიჩქარის  $10^{-4}$  მმ/წმ ტოლ მნიშვნელობამდე გაზრდის დროსაც კი. კონცენტრაციული პოლიარიზაციის შეუღლებული ეფექტები, რომლებიც ზემოთ განვიხილეთ, ერთგანზომილებიან მოდელში არ გაითვალისწინება. სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნიდან გამომდინარეობს, რომ კათიონცვლადი მემბრანის შემთხვევაში ბინარული ელექტროლიტისათვის ( $i=1$  (საწინააღმდეგო იონი), 2 (კოიონი);  $z_1 > 0, z_2 < 0$ ) კონცენტრაციული პროფილები მემბრანის მოსაზღვრე დიფუზიურ ფენებში

ხაზოვანია, ხოლო სასაზღვრო კონცენტრაცია შეიძლება აღწერილი იყოს გამოსახულებით [35]:

$$C_s^{I(II)} = C^{I(II)} \pm \frac{z_1 z_2}{z_1 - z_2} \left( \frac{J_1}{D_1} + \frac{J_2}{D_2} \right) \delta^{I(II)}. \quad (1.33)$$

პლიუს ნიშანი ეკუთვნის „გამტკნარებულ“ (I), ხოლო მინუს ნიშანი - „კონცენტრირებულ“ (II) ხსნარებს, რომლებიც გაბანს მემბრანას. მიღებული გამოსახულების (1.33) ანალიზი აჩვენებს, რომ დენის გაზრდით მარილის კონცენტრაცია  $C_s^I$ , მემბრანის ზედაპირთან, რომელიც იბანება „გამტკნარებული“ ხსნარით, მცირდება, ხოლო  $C_s^{II}$  „კონცენტრირებული“ ხსნარით გაბანილ ზედაპირთან იზრდება. თუ ვივარაუდებთ, რომ როცა გამტკნარებული ხსნარით მემბრანის გაბანის ზედაპირთან ნულოვანი კონცენტრაციის მიღწევის შემდეგ ელექტროლიტის იონების გადატანის ელექტროდიფუზიური მექანიზმი არ იცვლება, დენის შემდგომი ზრდა დაკავშირებული  $C_s$  -ის შემცირებასთან შეუძლებელია. ამიტომ დენის სიმკვრივეს  $i_{lim}$  რომელზედაც  $C_s^I$  ხდება ნული, ეწოდება ზღვრული. ზღვრული დენი წარმოადგენს აბსტრაქციას, მინიჭებულს მოცემულ მათემატიკურ მოდელში.

თუ მემბრანა იდეალურად სელექციურია და არ ატარებს კოიონებს ( $J_2 = 0$ ), მაშინ (1.33) და (1.4) -დან გამომდინარეობს, რომ ზღვრული დენისათვის  $i_{lim}^0$  ამ შემთხვევაში სამართლიანია გამოსახულება:

$$i_{lim\ i}^0 = \frac{D_i C_i^F}{\delta} \left( 1 - \frac{z_i}{z_2} \right). \quad (1.34)$$

ამ ფორმულის სამართლიანობა ზომიერად განზავებულ ხსნარებში მემბრანებისათვის გადატანის რიცხვით  $\bar{t}_i \approx 1$  არაერთხელ დასაბუთებულია ექსპერიმენტალურად [35]. ერთ ასეთ დასაბუთებას წარმოადგენს ჩოის (Choi) და თანაავტორების [104] სამუშაო, რომელთაც განსაზღვრული აქვთ მემბრანის CMX ზღვრული დენი LiCl, KCl, NaCl, CaCl<sub>2</sub>, MgCl<sub>2</sub>, AlCl<sub>3</sub> 0,025 მოლურ ხსნარებში. თუ მემბრანა ატარებს კოიონებს, მაშინ  $C_s^I = 0$  მნიშვნელობა მიიღწევა როცა  $i_{lim\ i} > i_{lim\ i}^0$ , სადაც  $i_{lim\ i}^0$  შეესაბამება ზღვრულ დენს იდეალურად სელექციური მემბრანისათვის. ანალიზური ფორმულა  $i_{lim\ i}$  -ის გაანგარიშებისათვის არ არსებობს, ვინაიდან (1.33) განტოლება შეცავს ორ უცნობ სიდიდეს  $J_1$  და  $J_2$ . მაგრამ გამოსახულებიდან იონების  $i$

ნაკადისათვის, რომელიც ჩაწერილია ფორმით, სადაც შემოტანილია ეფექტური გადატანის რიცხვი  $\bar{t}_i$ :

$$J_i = -D \frac{dC_i}{dx} + \frac{i\bar{t}_i}{z_i F} = \frac{i\bar{t}_i}{z_i F} \quad (1.35)$$

ბინარული ელექტროლიტისათვის ადვილია მივიღოთ ფორმულა

$$i_{lim i} = \frac{DC_i^I}{(\bar{t}_i - t_i)\delta} \quad (1.36)$$

რომლიდანაც გამომდინარებს, რომ ელექტროდიფუზიური დენის სიმკვრივე პირდაპირპროპორციულია „გასამტკნარებელ“ ხსნარში ელექტროლიტის კონცენტრაციის  $C^I$ .

ტერნარული ელექტროლიტის შემთხვევაში სამფენიანი მოდელის ანალიზიდან გამომდინარეობს [35,36], რომ ზღვრულ მდგომარეობაში საწინააღმდეგო იონების ნაკადები ფორმირდებიან ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად და ტოლება მათი სიდიდეების სისტემის ზღვრულ მდგომარეობაში ყოფნისას ბინარული ელექტროლიტის შესაბამისად, რომელთა კონცენტრაციები არევად ხსნარში ტოლია მოცემული საპირისპირო იონის კონცენტრაციისა ტერნარულ სისტემაში. ზღვრული პარციალური დენი თითოეული საპირისპირო იონისათვის შეიძლება ვიანგარიშოთ ფორმულით:

$$i_{lim i}^0 = \frac{D_i C_i^I}{\delta} \left( 1 - \frac{z_i}{z_2} - \frac{z_i i_{lim 2} \delta}{z_2 D_2 C_2^I} \right). \quad (1.37)$$

ეს ფორმულა ტრანსფორმირდება 1.34-ად, თუ უგულებელვყოფთ კოიონების გადატანას.

მთლიანად ასეთი მოდელები საშუალებას გვძლევენ აღვწეროთ ელექტროდიფუზიური მასაგადატანის კანონზომიერებები და მოვახდინოთ მემბრანული სისტემების ქცევის პროგნოზირება, მაგრამ მათ აქვთ რიგი შეზღუდვები. კერძოდ ფორმულებით (1.34), (1.36), (1.37) ზღვრული დენის გაანგარიშებისათვის აუცილებელია ვიცოდეთ დიფუზიური ფენის სისქე.

### 1.3.2ორ განზომილებიანი მოდელი

ელექტროდიალიზის პროცესის უფრო დაწვრილებითი მათემატიკური აღწერის საშუალებას გვაძლევენ ორგანზომილებიანი მოდელები, რომლებიც პრინციპში საშუალებას გვაძლევენ გავიანგარიშოთ მემბრანის ზედაპირზე დიფუზიური ფენის სისქე. ამ მოდელებში გაითვალისწინება, რომ ნივთიერების ნაკადის სიმკვრივის ვექტორი ჯამია ელექტროდიფუზიური და კონვექციური მდგენელების:

$$\vec{J}_i = -D\nabla C_i + \frac{it_i}{z_i F} + C_i \vec{V} \quad (1.38)$$

ნერნსტ-პლანკის განტოლებას 1.38 ემატება სითხის ნაკადის უწყვეტობის განტოლება 1.9 და მატერიალური ბალანსის განტოლება სტაციონალური რეჟიმისათვის 1.5

$$\operatorname{div}(\vec{J}_i) = 0, (1.39)$$

აგრეთვე ნავიე-სტოქსის განტოლება 1.8 რომელიც განსაზღვრავს სითხის სიჩქარის განაწილების კანონს.

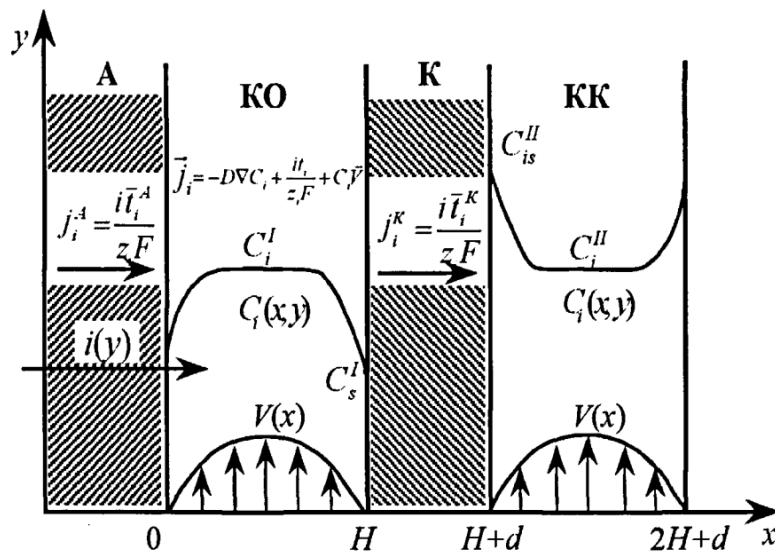
შემოვიფარგლებით მხოლოდ „ცარიელი“ (შემავსებლის გარეშე) გამტკნარების არხების მოდელების განხილვით. უმარტივეს შემთხვევაში ბრტყელ ღრეჩოსმაგვარ არხში სითხის ლამინარული დინებისას პულსირებული წნევის მოქმედებით სიჩქარეების განაწილება მოცემულია ფორმულით, რომელიც მიღებულია ნავიე-სტოქსის განტოლების ანალიზური ამოხსნით:

$$V_y = 6V_0 \left( \frac{x}{H} - \frac{x^2}{H^2} \right), \quad V_x = 0, (1.40)$$

სადაც  $x = 0$  და  $x = H$  შეესაბამებიან მემბრანა/ხსნარი ფაზებსშორის საზღვრებს,  $V_0$ - არხში სითხის დინების საშუალო სიჩქარე.

კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის ვერსიის თანახმად, რომელიც ავრცობს და ანვითარებს წინა კვლევებს, ელექტროდიალიზის აპარატის ელემენტარულ რგოლს წარმოადგენს ეგრეთწოდებული „დაწყვილებული“ საკანი ნახ.1.4. რადგანაც ხსნარი მემბრანებს შორის გავლასთან ერთად იცვლის თავის კონცენტრაციას, ამიტომ დენის სიმკვრივე და პაკეტის წინაღობა ზედაპირის ფართობის ერთეულზე გაანგარიშებით არათანაბრადაა განაწილებული არხის

სიგრძეზე. მაგრამ თუ უგულებელვყოფთ ელექტროდებზე გადაძაბვის დენის სიმკვრივეზე დამოკიდებულებას (რაც შეიძლება გავაკეთოთ საკნების საკმაოდ დიდი რიცხვის დროს) და მივიღებთ, რომ ყველა „დაწყვილებული“ საკანი თანასწორუფლებიანია, ხოლო გამტკნარებისა და კონცენტრირების საკნები საკმაოდ გრძელია ( $L \gg H$ ), მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ დენის წირები მართობულია მემბრანის ზედაპირის, ხოლო საკნების მემბრანებს შორის სივრცეში ადგილი აქვს ხსნარის ლამინარულ დინებას და სიჩქარის პარაბოლურ განაწილებას (1.40).



ნახ.1.4 ელექტროდიალიზატორის მემბრანული პაკეტის დაწყვილებული საკნის სქემა

ამ შემთხვევაში ბინარული ელექტროლიტის ხსნარის გამტკნარების პროცესი აღიწერება განტოლებით (1.38). სასაზღვრო პირობები მიღებულია (1.35) განტოლებების გამოყენებით. კონცენტრაცია შესასვლელში განსაზღვრავს საწყის პირობებს  $C(x, 0) = C_0$ . ხსნარის კონცენტრაცია კონცენტრირების საკნის ყველა წერტილში ითვლება მუდმივად და ტოლია  $C_b$ . დავუშვათ ასეთი გამარტივება გამართლებულია იმით, რომ ამ საკანში სასაზღვრო კონცენტრაციის ფარდობითი ცვლილება დიდი არ არის და სუსტ გავლენას ახდენს „დაწყვილებულ საკანში“ პოტენციალის ჯამურ ნახტომზე. „დაწყვილებულ საკანში“ პოტენციალის ნახტომი  $\Delta\phi$  იკრიბება მემბრანის მახლობლობაში დიფუზიურ ფენებში, გამტკნარების საკნის ნაკადის ბირთვში, კონცენტრირების საკანში და აგრეთვე მემბრანებზე ფაზებს შორის

ნახტომების გათვალისწინებით. ცნობილ მუდმივ სიდიდეებად აიღებინ შესასვლელში ელექტროლიტის კონცენტრაცია, ხსნარის ნაკადის საშვალო სიჩქარე, დაწყვილებულ საკანში პოტენციალის ნახტომი, გადატანის რიცხვი ხსნარში და მემბრანაში, მემბრანების ელექტროგამტარებლობა.

მოცემული მოდელი საშვალებას გვაძლევს ვიპოვოთ კონცენტრაციის განაწილების  $C(x, y)$ , გამტკნარების ხარისხის და დენის სიმკვრივის როგორც ფუნქციის დამოკიდებულება მემბრანის პარამეტრებზე, პოტენციალის ნახტომზე და არხის უგანზომილებო სიგრძეზე  $Y = \frac{(LD)}{(VH^2)}$  [19,34,35,53], აგრეთვე განვახორციელოთ ელექტროდიალიზის ეკონომიური შეფასება მათი სხვადასხვა პირობებში ექსპლოატაციისას. მივაქციოთ ყურადღება, რომ არხის უგანზომილებო სიგრძე დამოკიდებულია არა მარტო ფიზიკურ სიგრძეზე, არამედ ასევე ელექტროლიტის დიფუზიის კოეფიციენტზე, გამტკნარების არხში ხსნარის დინების საშვალო სიჩქარეზე და მემბრანებს შორის დაცილებაზე.

კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის ჩარჩოში მიღებულია მიახლოებითი ფორმულა დიფუზიური ფენის სისქის გასაანგარიშებლად [19, 34,53]:

$$\delta = 1.02(LDH/V)^{1/3} \quad (1.41)$$

და გამოსახულება ზღვრული დენისათვის გამომდინარე განტოლებებიდან 1.36 და 1.41:

$$i_{lim} = \frac{1.43FC^0D^{2/3}V^{1/3}}{L^{1/3}H^{1/3}(\bar{t}_i - t_i)} \quad (1.42)$$

ეს ფორმულები სამართლიანია, როცა  $10^{-4} < Y \leq 0.02$ . როცა  $Y \leq 10^{-4}$ , ზღვრული ელექტროდიფუზიური დენი კარგად აღიწერება ლევეკის განტოლებით:

$$i_{lim} = \frac{1.47FC^0D^{2/3}V^{1/3}}{L^{1/3}H^{1/3}(\bar{t}_i - t_i)} \quad (1.43)$$

(1.12) გამოსახულების გათვალისწინებით, განტოლებები მიღებული კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის ჩარჩოში და ზღვრული მასაგადატანის დამაკავშირებელი გამტკნარების „ცარიელი“ არხების ჰიდროდინამიკურ პირობებთან

და გეომეტრიულ პარამეტრებთან, შეიძლება წარმოდგენილი იყვნენ უგანზომილებო ფორმით [19,34,35,53]:

$$Sh_L = 1.85[Re Sc (2H/L)]^{1/3}, \quad Y \leq 0.02, (1.44)$$

$$Sh_L = 1.85[Re Sc (2H/L)]^{1/3} - 0.4, \quad Y \leq 0.04 (1.45)$$

უფრო გრძელი არხებისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ რიცხობრივად აგებული მრუდებით [19]. არხებში სიგრძით  $Y > 0.05$  კონცენტრაციული პროფილის ფორმა სტაბილიზირდება, ხდება პარაბოლურთან ახლო. დიფუზიური ფენის ეფექტური სისქე, განსაზღვრული მემბრანასთან საზღვარზე კონცენტრაციული პროფილის და  $C(x)$  მაქსიმუმის წერტილში მხებების გადაკვეთით, ტოლი ხდება  $0.37H$ , რაც შეესაბამება შერვუდის ლოკალურ რიცხვს  $Sh = 5.4$ .

კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის გამოყენებით გაკეთებული გაანგარიშების შედეგების ანალიზიდან, გამომდინარეობს, რომ ანიონ- და კათიონცვლად მემბრანებთან კონცენტრაციის გრადიენტების განსხვავების მიუხედავად, რაც დაკავშირებულია  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  (NaCl შემთხვევა) არაერთნაირ მნიშვნელობებთან, დიფუზიური ფენების სისქეები ორივე მემბრანის მახლობლობაში პირველი მიახლოებით ერთი და იგივეა და არ არის დამოკიდებული მოდებულ ძაბვაზე [35].

იმ პირობების შესრულებისას, რომელიც ჩადებულია მოდელში (ლამინარული ჰიდროდინამიკური რეჟიმი, გადატანა შეზღუდულია ელექტროდიფუზიით, მემბრანების ჰომოგენური გლუვი ზედაპირი), ლაზერული ინტერფერომეტრიის [95,116,117], ვოლტამპერმეტრიის და ქრონოპოტენციომეტრიის [57] მონაცემები ამტკიცებენ „ცარიელ“ არხებში მასაგადატანის პროცესებისთვის კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის ადეკვატურობას.

მატემატიკური მოდელები, რომლებიც საშვალებას გვაძლევენ ადეკვატურად აღვწეროთ კონვექციური ელექტროდიფუზიური მასაგადატანა უფრო რთულ შემთხვევებში (ტურბულენტური ან ტურბულიზებული ჰიდროდინამიკური რეჟიმი, გამტკნარების ვიწრო არხში ინერტული ან იონგამტარი ჩანართების არსებობა [85,87], პულსირებული წნევის მოქმედება [69,74] და ა.შ.) დამუშავების სტადიაშია.

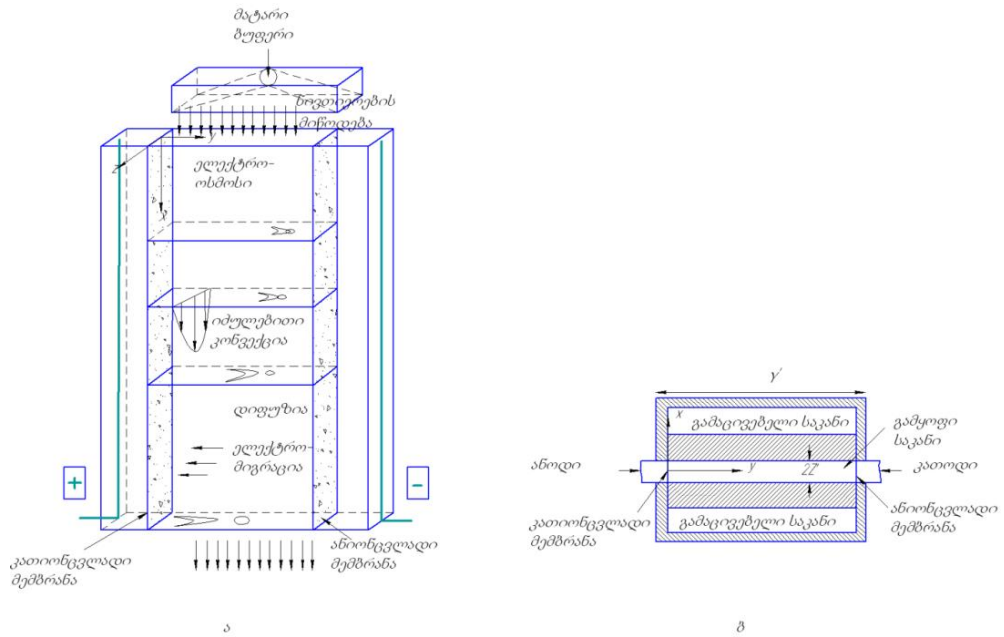


### 1.3.3 სამ განზომილებიანი მოდელები

მათემატიკურ მოდელებში მესამე განზომილების შემოტანა მკვეთრად ზრდის ამოცანის გამოთვლით სირთულეს. გამოთვლითი ტექნიკის ახლანდელი დონე უფლებას არ გვაძლევს ეფექტურად გადავწყვიტოთ ასეთი ამოცანები პირდაპირ, ამიტომ არსებული სამგანზომილებიანი მოდელების უმრავლესობა არის ფსევდო სამგანზომილებიანი. ეს ნიშნავს, რომ სამეზბნი ფუნქციის განაწილება რომელიმე ერთი კორდინატის მიხედვით იგულისხმება საკმარისად მარტივად, მაგალითად, პოლინომური ან ლოგარითმული.

ცნობილი სამგანზომილებიანი მოდელებიდან ელექტრომემბრანული ტექნოლოგიების დარგში ყველაზე მეტ ინტერესს იწვევს იძულებითი კონვექციის პირობებში ჰემოგლობინის ელექტროფორეზის არასტაციონალური სამგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელი („continuous-flow electrophoresis“), შემოთავაზებული აფონსოს (Afonso) და კლიფტონის (Clifton) მიერ [96]. ავტორებმა განიხილეს ბრტყელპარალელური არხი, რომელშიაც გადაიტუმბება მატარი ჰემოგლობინი ბუფერული ხსნარი (ნახ.1.5), რომელიც შეიცავს სუსტი ფუძის B და სუსტი მჟავის A ნარევეს.

არხის კედლებს ქმნიან კათიონ- და ანიონცვლადი მემბრანები, რომლებიც იმყოფებიან შესაბამისად ანოდთან და კათოდთან. ელექტრული დენის გავლას ელექტრომემბრანულ სისტემაში თან ერთვის ელექტროდულ საკნებში pH-ის ცვლილება. ამ საკნებიდან  $H^+$  იონები გადაიტანებიან კათიონცვლადი მემბრანით, ხოლო  $OH^-$  იონები - ანიონცვლადი მემბრანების გავლით გამოსაკვლევ საკანში. ელექტრული დენი იწვევს მატარი ბუფერის ჯოულურ გაცხელებას. მემბრანებისა და ელექტროდების პერპენდიკულარული უჯრედის კედლები, უწყვეტად ცივდება მაცივარაგენტით (გამაცივებელი საკნების, ნახ. 1.5 ბ). ბუფერისა და წყლის იონების და მოლეკულების კონცენტრაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ლოკალური ქიმიური წონასწორობის განტოლებებით.



ნახ.1.5 (ა)- გამდინარე ელექტროფორეზის გამყოფი და ელექტროდული საკნები გაყოფის პრინციპის ახსნით. (ბ)-ელექტროფორეზის საკნის ჰორიზონტალური კვეთი, რომელიც აჩვენებს გამყოფი, ელექტროდული და გამაცივებელი საკნების განლაგებას.

თითეული ნაწილაკის მასაგადატანა აღიწერება ნერსტ-პლანკის განტოლებით (1.3), რომელიც შეიცავს დიფუზიურ, მიგრაციულ და კონვექციურ წევრებს. სისტემაში შეიმჩნევიან ლოკალური ელექტრონეიტრალობის პირობები (1.6), (1.7). სუსტი ელექტროლიტების მოლეკულების და იონების მოძრაობის უნარი ითვლება ერთნაირად, ხოლო მემბრანები - იდეალურად სელექციურად.

სიჩქარისა და ტემპერატურის განაწილება გამყოფი საკნის სისქეზე ( $z$  კორდინატზე) იგულისხმება პარაბოლური. სიჩქარეთა ორგანზომილებიანი ველი  $x$  და  $y$  კორდინატების გასწვრივ) ნიუტონური სითხის ლამინარული ნაკადისათვის პოულობენ ნავიე-სტოქსის განტოლებებიდან (1.8) (1,9) ბუსინეკის [49,103] მიახლოებით, გრიგალის ფუნქციის და სითხის დინების ტერმინებში [65,67]. ტემპერატურის განაწილება  $x$  და  $y$  კორდინატების მიმართულებით განისაზღვრება ჯოულის ეფექტის გათვალისწინებით კონვექციური თბოგამტარობის განტოლებით [115].

მოცემული განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მსვლელობისას მიღებული იქნა გამოსახულება დენის ზღვრული სიმკვრივის შესაფასებლად, რომელსაც აქვს სახე:

$$i_{Alim} = \frac{Pe_A + Pe_B}{Pe_A^2} \frac{D_i C_A F}{\delta_A},$$

სადაც  $Pe = V_0 Z / D_i$  - პეკლეს რიცხვია,  $V_0$  - ხსნარის გადატუმბვის ხაზოვანი სიჩქარე,  $Z$  - გამყოფი საკნის სისქის ნახევარი,  $C$  - გახსნილი ნაწილაკების კონცენტრაცია,  $D_i$  - გახსნილი ნაწილაკის დიფუზიის კოეფიციენტი,  $\delta$  - დიფუზიური ფენის სისქე დიფუზიურ საკანში.

მოდელის ავტორებმა გაიანგარიშეს არხში გადატუმბული სითხის ტემპერატურათა ნაკადის, მჟავის A და ფუძის B კონცენტრაციების, აგრეთვე პოტენციალების განაწილება დენის სიმკვრივეებზე, რომლებიც ახლოსაა ზღვრულთან და აჭარბებენ მას. გაანგარიშებებიდან გამომდინარეობს, რომ მოდებული პოტენციალთა სხვაობის ზრდასთან ერთად ხდება pH-ის ცვლილება, ხოლო ამასთან ერთად მატარი ბუფერის შემადგენლობის, რასაც მივყავართ ზღვრული დენის სიდიდის ზრდასთან. გაანგარიშების შედეგები შეადარეს არხის სიგანეზე pH-ის და ხსნარის ელექტროგამტარებლობის განაწილების ექსპერიმენტალურ მონაცემებს. ავტორებმა [96] აღნიშნეს გრავიტაციული კონვექციის დიდი როლი განხილულ სისტემებში და აჩვენეს, რომ მისი როლი მასაგადატანაში იზრდება მოდებული პოტენციალთა სხვაობის ზრდით, მაგრამ მცირდება ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარის გაზრდით, არხის სიგანის შემცირებით და არხის სიგრძეზე და სიგანეზე ხსნარის სიმკვრივეთა სხვაობის შემცირებით. ჩატარებული კვლევის ერთ ერთ ძირითად დასკვნას წარმოადგენს მასაგადაცემის, სითბოგადაცემის და ჰიდროდინამიკური პირობების ურთიერთქმედების გათვალისწინების მნიშვნელობა განხილული სისტემის ელექტროქიმიური მახასიათებლების პროგნოზირებისთვის.

### 1.3.4 მეტად გავრცელებული თანამედროვე მიდგომები გრავიტაციული კონვექციის მათემატიკური მოდელირებისადმი

სამეცნიერო ლიტერატურის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ თბური კონვექციის თეორიულ გამოკვლევებში მიღებული იქნა უმნიშვნელოვანესი შედეგები, ნაწილობრივ აგებულია ავტომოდელური გადაწყვეტა, რომელიც აღწერს თავისუფალ კონვექციას გრასხოფის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისთვის [26,38,45]. მაგრამ ამ შედეგების ელექტროქიმიურ სისტემებზე გავრცელების ცდა ეჯახება სერიოზულ პრობლემებს, განპირობებულს უპირველეს ყოვლისა ცურვის ძალების მრავალკომპონენტური ბუნებით და მიგრაციული დენის არსებობით. როგორც ნაჩვენებია მიმოხილვით სამუშაოში [13] ამ პრობლემებიდან უმრავლესობამ ვერ ჰპოვა ადეკვატური გადაწყვეტა და თანამედროვე პირობებში სწორედ ისინი იქცევენ სულ უფრო მეტ ყურადღებას, რადგანაც მათი გადაწყვეტა ხსნის თბურ კონვექციაში უცნობ, ახალ ფიზიკო-ქიმიურ მოვლენებს.

ამავდროულად კონვექციის წვლილი და მისი გათვალისწინება ელექტროქიმიურ და მემბრანულ სისტემებში, გადატანის აღწერისა და ანალიზისათვის ძალიან მნიშვნელოვანია. ბევრ შემთხვევაში ამ გვარის ამოცანების ამოხსნისას საკმარისია შემოვფარგლოთ ნერნსტის [27,35,47] დიფუზიური ფენის მოდელის გამოყენებით. მაგრამ არსებობს რიგი ამოცანებისა, როცა შეუძლებელია კორექტულად აღწეროთ პროცესი, კონვექციური გადატანის უშვალო გათვალისწინების გარეშე. საუბარია ელექტრომემბრანულ სისტემებში გრძელ არხებზე, როცა დიფუზიური ფენის სისქე იცვლება სიგრძეზე და განსაკუთრებით იმ შემთხვევებში, როცა ხდება დიფუზიური ფენების გადაფარვა. ამ დროს დიფუზიური ფენის, როგორც სასაზღვრო ფენის ცნება ფაქტიურად კარგავს აზრს [19,34,35,42,53]. სხვა საინტერესო შემთხვევას, როცა აუცილებელია გრავიტაციული კონვექციის გათვალისწინება, წარმოადგენს მასაგადატანა მემბრანულ სისტემაში იძულებითი კონვექციის გარეშე, ეგრეთ წოდებული ზეზღვრული დენის გავლისას. ამ პირობებში ხშირად სისტემაში ხდება ჰიდროდინამიკური არამდგრადობის წარმოქმნა, რომელიც არღვევს დიფუზიურ ფენას ელექტროდის/მემბრანის მახლობლობაში და იწვევს

რეაგირებადი ნივთიერებების მათ ზედაპირებთან მიყვანის სიჩქარის მკვეთრ გაზრდას [4,10,18,25,62].

გრავიტაციული კონვექციის გათვალისწინების პრობლემა მნიშვნელოვანია აგრეთვე ქრონოპოტენციომეტრული გაზომვების თეორიაში, სადაც გრავიტაციული კონვექცია მნიშვნელოვნად განსაზღვრავს მასაგადატანის სიჩქარეს და არსებითად მოქმედებს გარდამავალი დროის სიდიდეზე. ელექტროდულ სისტემებში გრავიტაციული კონვექციის გათვალისწინებით მასაგადაცემის თეორიის თანამედროვე მდგომარეობა გაანალიზებულია სამუშაოში [24]. მემბრანულ სისტემებში გრავიტაციული კონვექციის აღწერა, კონცენტრაციის ცვლილების და ჯოულური გაცხელების გათვალისწინებით შესრულებულია სამუშაოებში [25,41]. ამ სამუშაოებში შესწავლილია მხოლოდ სტაციონალური პროცესი და არ განიხილება იძულებითი კონვექცია და მემბრანის გავლით სითბოს გადატანა, რაც რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვანია.

არასრულყოფილი მოდელები წარმოდგენები, შეუძლებელს ხდის რეალურ ელექტრომემბრანულ სისტემებში მიმდინარე პროცესების აღწერის. ამ მოდელები წარმოდგენების განვითარება, უფრო კორექტული მათემატიკური აღწერა შეუძლებელი კონვექციის, ნაწილობრივ, გრავიტაციული კონვექციის, შესაძლებელს გახდის გამოვავლინოთ პირობები, სადაც ეს ეფექტი უდიდესი ხარისხით უზრუნველყოფს მასაგადაცემის ინტენსივობას და გამოავლენს ახალ შესაძლებლობებს საწარმოო ჩამდინარე და ბუნებრივი წყლების ანტროპოგენური და ბუნებრივი დაბინძურებისაგან, გაწმენდისათვის დანიშნული მოწყობილობების სრულყოფისათვის.

#### 1.4 აპარატები ელექტრომემბრანული პროცესებისათვის

ელექტრომემბრანული აპარატები დანადგარები, რომლებიც მუშაობენ ელექტროდიალიზის პრინციპზე - არიან უნიკალური სპეციალური ნაკეთობა და დანიშნული არიან ლაბორატორიული და საცდელ-საწარმოო სამუშაოების შესასრულებლად გამტკნარების, დარბილების, არაორგანული

ხსნარების კონცენტრირების, ახალი ნივთიერებების სინთეზის, pH კორექტირების, ამინომჟავების გაყოფის, ორგანული ნივთიერებების წყალ ხსნარებში არაორგანული მდგენელების მოცილების ან შეცვლის, ტექნოლოგიურ ხსნარებში არასასურველი არაორგანული მინარევების მოცილების, ორგანული ხსნარებიდან ტუტის მოცილების, მჟავებისა და ტუტეების კონცენტრირების და სხვა პროცესების საკვლევი მიზნებისათვის. უნივერსალური საცდელ-ლაბორატორიული დანადგარი YOLIMY (სურათი 1.6) დაკომპლექტებულია ორი- ან სამტრაქტიანი ლაბორატორიული ელექტრომემბრანული აპარატით ЛЭМА. დანადგარი სამაგიდო შესრულებისაა.



სურათი 1.6 ელექტროდიალიზის დანადგარი YOLIMY,  
საერთო ხედი აპარატით ЛЭМА



სურათი 1.7 აპარატი  $PMMA_2$  ან  $PMMA_3$  ტრაქტიანი აკრება საკნების განცალკევებული გარეცხვით



სურათი 1.8 აპარატი  $PMMA_2$  ტრაქტიანი აკრება

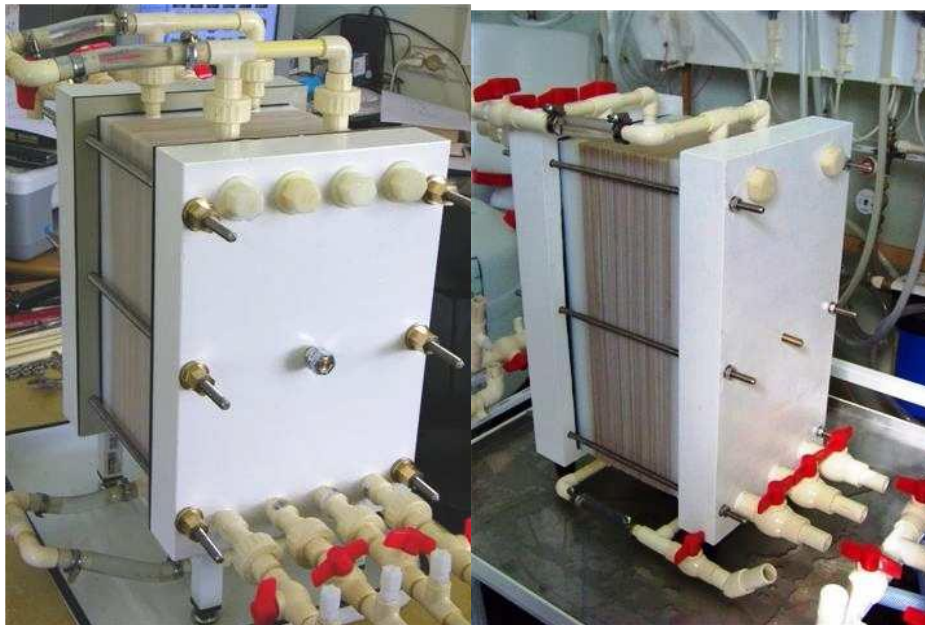
YOLIMY კომპლექტაციაში შემავალი აპარატების  $PMMA$  განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ სამტრაქტიანი შესრულების ვარიანტში (სურათი 1.7) შესაძლებელია როგორც ორტრაქტიანი აპარატის გამოყენება ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვით, ან სამტრაქტიანი აპარატის ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვის გარეშე. ორტრაქტიანი კლასიკური აკრების ვარიანტში (სურათი 1.8) ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვა არ არის გათვალისწინებული.

პილოტური (საცდელი) ელექტრომემბრანული დანადგარი  $EMOY-1$  (სურათი 1.9) აღჭურვილია  $EMA$  სერიის უფრო მწარმოებლური აპარატით ელექტროდული საკნების აუცილებელი ცალკე გარეცხვით და შესრულების ხვადასხვა ვარიანტით.

$EMA$  სერიის აპარატების განსხვავება იმაშია, რომ აპარატი  $EMA-100$  (სურათი 1.10) საშუალებას აძლევს შემკვეთს დამოუკიდებლად ააწყოს მემბრანული პაკეტის მოთხოვნილი ვარიანტი - ორი, სამი ან ოთხ ტრაქტიანი ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვით. აპარატი  $EMA-60$  (სურათი 1.11) შეიძლება გამოვიყენოთ ორ



სურათი 1.9 პილოტური ელექტრომემბრანული დანადგარი ЭМОУ-1  
აპარატით ЭМА

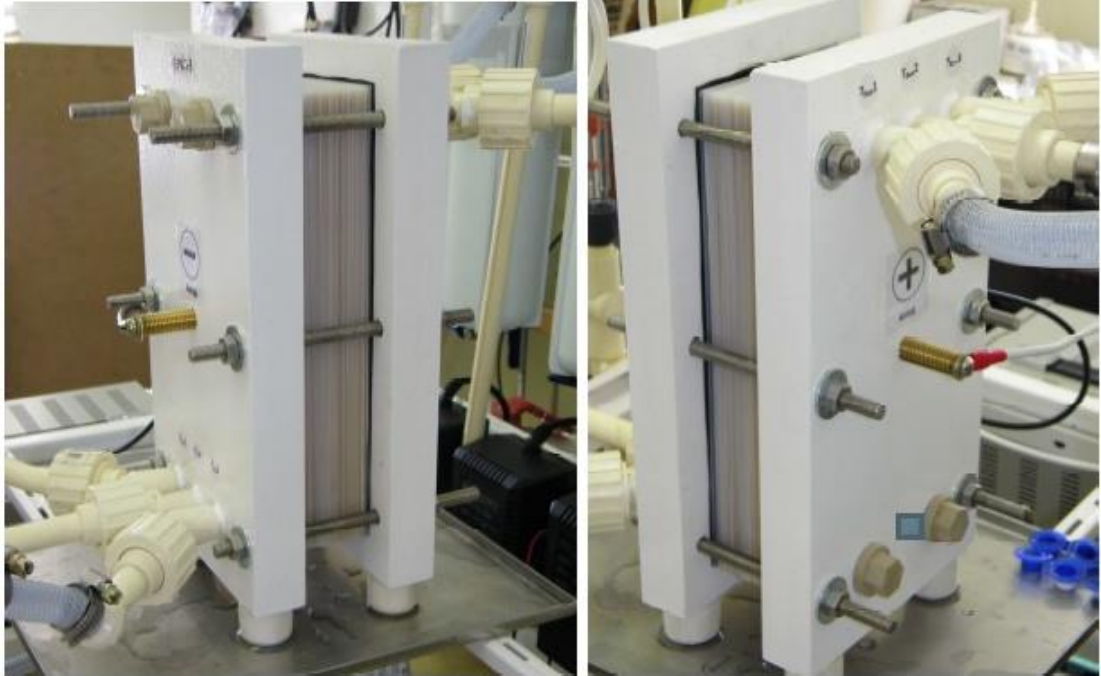


სურათი 1.10 აპარატი ЭМА-100

სურათი 1.11 აპარატი ЭМА-60



და სამ ტრაქტიანი აკრებვით ელექტრონული საკნების ცალკე გარეცხვით, მაშინ როცა აპარატი EMA-30 მზადდება მემბრანული პაკეტის მხოლოდ ორ ტრაქტიანი აკრებვის ვარიანტით ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვით.



ელექტრომემბრანული აპარატები შესდგებიან შემდეგი ძირითადი დეტალებისა და კვანძებისაგან:

- დამწნეხი ფილები ანტიკოროზიული ქიმიურად მდგრადი დაფარვით;
- მემბრანებსშორისი პოლიეთილენის სადებები ბადე - სეპარატორებით;
- იონცვლადი მემბრანები;
- დამწნეხ ფილებში ჩამონტაჟებული ელექტროდები;
- დასაშლელი ხრახნული შეერთებები ტექნოლოგიურ მილგაყვანილობებთან მისაერთებლად.

კონსტრუქციულად ელექტრომემბრანული აპარატი წარმოადგენს პაკეტს აკრებილს იონცვლადი მემბრანების და მემბრანებსშორის საფენის მონაცვლეობით დამწნეხ ფილებს შორის და შემჭიდროებულია სარკებით.

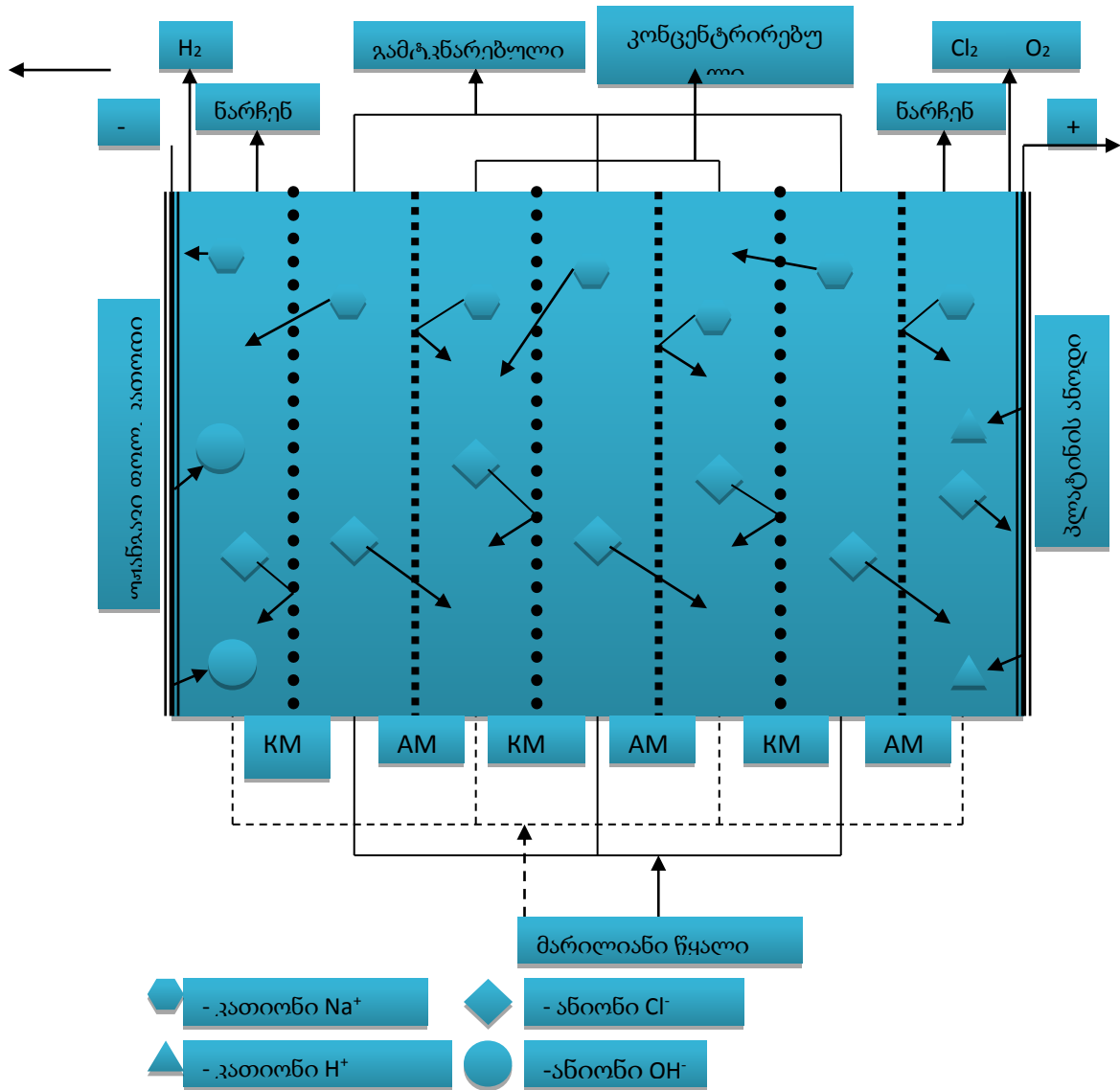
თითეული საფენი ორი მეზობელი - ზედა და ქვედა - მემბრანებით ქმნის საკანს, რომელიც წარმოადგენს ჰერმეტიკულ გამდინარე საკანს, რომლის სიღრუეშიც მოტავსებულია სეპარატორ-ტურბულიზატორები, რომელთა დანიშნულებაა შექმნან ხსნარის ნაკადის მოთხოვნილი ტურბულიზაცია და გამორიცხონ მემბრანების

ერთმანეთთან შეხება. მემბრანებს შორის საფენებში მოკლე მხარეებში შესრულებულია ნახვრეტები, რომლებიც აწყობისას პაკეტის მთელ სიმაღლეზე ქმნიან ვერტიკალურ არხებს (გამანაწილებელი-კოლექტორები) გადამუშავებაზე მიწოდებული ხსნარების შეყვანისა და გამოყვანის სისტემისათვის. მემბრანებს შორის საფენები ამ სახის აპარატებისათვის - ორი ტიპისაა: მკვებავი ღრეჩოთი შუა და განაპირა ნახვრეტებში. ორ ურთიერთსაპირისპირო ნახვრეტს გააჩნია გამდინარე არხის მკვებავი ღრეჩო. პაკეტის აკრებისას საფენის ვერტიკალური ღერძის გარშემო მობრუნებით იცვლება მკვებავი ღრეჩოების მდებარეობა - ღრეჩოების გადაადგილება ერთი ნახვრეტიდან მეორეზე. ასეთნაირად იქმნებიან ერთმანეთისაგან იზოლირებული საკნების ჯგუფები.

მუშაობის პროცესში ხსნარები უწყვეტად გაედინებიან აპარატის შესაბამის საკნებში. თითოეული ტრაქტის გამომდინარე ნაკადები ერთიანდებიან შემკრებ გამომყვან არხებში.

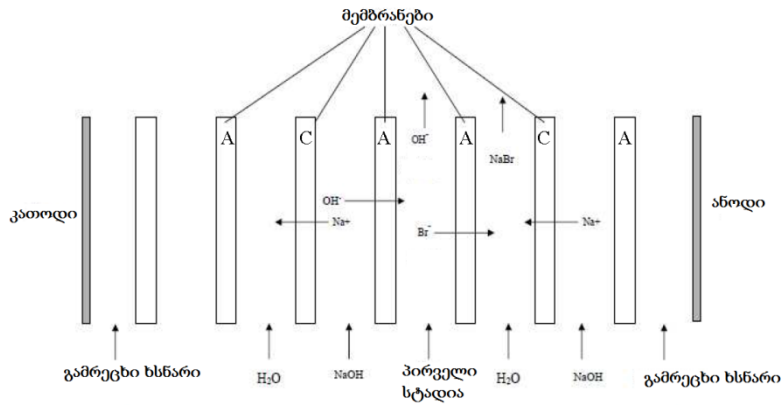
პაკეტის განაპირა საკნები, განლაგებული უშვალოდ ელექტროდებთან, წარმოადგენენ ელექტროდულს. აპარატის კონსტრუქცია გამორიცხავს გადასამუშავებელი ხსნარების კონტაქტს ნებისმიერ დეტალებთან და კვანძებთან, გარდა ხსნარების მიმყვანი და გამყვანი შეერთებებისა, პოლიეთილენის საფენებისა და მემბრანებისა. აპარატის ჩართვის სისტემაში გათვალისწინებულია განრთვის ადგილები ტექნოლოგიურ მილგაყვანილობებთან მისაერთებლად და ელექტრული კვების ჩასართავად. ამის წყალობით აპარატი შეიძლება გადავადგილოთ აწყობილი სახით.

აპარატის ორ ტრაქტიანი აწყობის ვარიანტში (ნახ.1.12) ელექტროდული საკნების ცალკე გარეცხვის გარეშე გამოიყენებიან მხოლოდ საფენები გვერდითი მკვებავი ღრეჩოებით და იქმნება ორი ერთმანეთისაგან იზოლირებული საკნების ჯგუფები - გასამტკნარებელი ხსნარის ტრაქტი და კონცენტრირების ტრაქტი. გამტკნარების ტრაქტში მიეწოდება ხსნარი, რომელიც ექვემდებარება გადამუშავებას (გამტკნარებას). კონცენტრირების ტრაქტში - მიეწოდება დისტილირებული წყალი ან საწყისი ხსნარი (კონცენტრატი). პროცესის შედეგად არაორგანული მინარევები ცილდება პროდუქტის ტრაქტიდან და გადადის კონცენტრირების ტრაქტში.



ნახ.1.12. მემბრანული პაკეტის ორტრაქტიანი (კლასიკური) აკრების სქემა

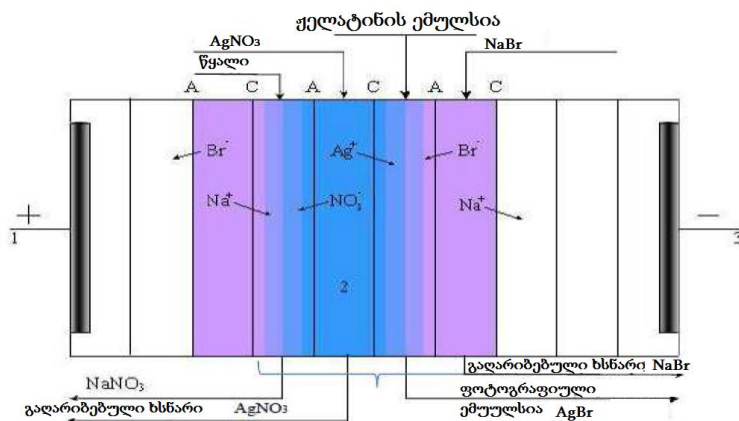
მრავალსაკნიანი სამტრაქტიანი ელექტრომემბრანული აპარატი შესდგება სამი ტრაქტისაგან, რომლებიც დაყოფილია თანმიმდევრობით განლაგებული კათიონცვლადი და ანიონცვლადი მემბრანებისაგან. ნახ.1.13 მოყვანილია სამ ტრაქტიანი აპარატის მუშაობის სქემა (წყლის არეში ტუტე ჰიდროლიზის ეფექტურად განხორციელების პროცესი).



ნახ.1.13 მემბრანული პაკეტის სამ ტრაქტიანი აკრების ვარიანტი

ტრაქტებში მუდმივად ცირკულირდებიან პირველი სტადიის ხსნარები ბრომიანი ან იოდიანი ან ქლორიანი მეთილპროპიონატი, NaOH ხსნარი და დისტილირებული წყალი. მუდმივი ელექტრული ველის დადება იწვევს იონების მიმართულ მოძრაობას ველის ორიენტაციის თანახმად. შედეგად პირველი სტადიის ხსნარი განიცდის ტუტე ჰიდროლიზს, ჰალოგენ-იონი გადაადგილდება შერეულ საკანში დისტილირებულ წყალთან მიღებული შენაერთის შემდგომი გაძვევებით.

მაგალითის სახით - ქვემოთ მოცემულია აპარატის ოთხტრაქტიანი აწყობის სქემა (ნახ. 1.14) ელექტროლიტების ორმაგი დაშლის რეაქციის განხორციელებისათვის:  $NaBr + AgNO_3 = AgBr + NaNO_3$ .



ნახ.1.14 მემბრანული პაკეტის ოთხ ტრაქტიანი აწყობის სქემა

ამ ტიპის რეაქცია უწყვეტად მიმდინარეობს ელექტროდიალიზის

აპარატში, რომელშიც ანიონ და კათიონცვლადი მემბრანები განლაგებულია გარკვეული თანმიმდევრობით. NaBr-ში შემავალი ბრომის იონი, ელექტროლიზის მოქმედებით გადაიტანება ჟელატინის ემულსიის ნაკადში ანიონცვლადი მემბრანის გავლით. ვერცხლის იონი ემულსიის ნაკადში გადაიტანება კათიონცვლადი მემბრანის გავლით  $AgNO_3$ -ის მეზობელი

სექციიდან. ამგვარად ფოტოგრაფიული ემულსია AgBr, თავისუფალი გარეშე ელექტროლიტებისაგან მოცემულ აპარატში მიიღება უწყვეტად. ელექტროლიტი  $\text{NaNO}_3$  წარმოიქმნება ცალკე სექციაში.

ასევე შეიძლება ვაწარმოოთ სხვა გაცვლითი რეაქციები, ისეთები როგორცაა  $\text{NaOH}$ -დან და  $\text{CaCl}$  მიღება  $\text{NaCl}$ -ის და  $\text{Ca(OH)}_2$ ;  $\text{KNO}_3$  და  $\text{NaCl}$ -დან  $\text{KCl}$ -ის და  $\text{NaNO}_3$ .

### 1.5 ძირითადი დასკვნები და კვლევის ამოცანები

ჩატარებული ექსპერიმენტალური და თეორიული სამუშაოების ანალიზიდან შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. წყლის გაწმენდის ბევრი ტრადიციული მეთოდი, მაგალითად, აორთქლებისა და დისტილიაციის მეთოდები, ისე როგორც თანამედროვე პირობებში უპირატესად გამოყენებული იონცვლის ტექნოლოგია, პირდაპირ და ირიბად იწვევენ გარემომცველი გარემოს მნიშვნელოვან მეორად დაბინძურებას. ერთ მეტად ეკოლოგიურად სუფთა, რესურსდამზოგ და ეკონომიურად ეფექტურს წარმოადგენს ელექტრომემბრანული ტექნოლოგიები.

2. გვაქვს სამუშაოების დიდი რაოდენობა, რომლებიც ეძღვნება ელექტრომემბრანული სისტემების მათემატიკური მოდელების აგებას და გამოკვლევას. მაგრამ ამ სამუშაოებში შემოვიფარგლებით შედარებით მარტივი მათემატიკური მოდელების განხილვით, სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის მათემატიკური სირთულის გამო. მათში შეისწავლება სტაციონალური პროცესი, არ განიხილება იძულებითი კონვექცია და მემბრანის გავლით სითბოს გადატანა, რასაც რიგ შემთხვევებში არსებითი მნიშვნელობა აქვს კონცენტრაციულ პოლიარიზაციაზე მოქმედების თვალსაზრისით.

3. არ არსებობს მათემატიკური მოდელები, რომლებიც საკმაოდ ადეკვატურად აღწერენ წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანულ სისტემებში მასაგადატანის არასტაციონალურ არაიზოთერმულ პროცესებს გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედებისას პულსაციური წნევის გათვალისწინებით.

ელექტრომემბრანული სისტემების წარმატებით გამოყენებისათვის და წყლის გაწმენდის მნიშვნელოვანი ეკოლოგიური პრობლემის გადასაწყვეტად აუცილებელი

ხდება ამ სისტემებში მასაგადატანის პროცესების უფრო ღრმა შესწავლა. აქედან ჩნდება აუცილებლობა გადავწყვიტოთ კვლევის შემდეგი ამოცანები :

ა) მემბრანებს შორის საკანში წნევის პულსაციის დროს გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროულად მოქმედების პირობებში სითბო- და მასაგადატანის კანონზომიერებების თეორიული და ექსპერიმენტალური კვლევა;

ბ) ადეკვატური მათემატიკური მოდელების აგება;

გ) ამ დროს წარმოქმნილი სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი გადაწყვეტის ეფექტური ალგორითმების დამუშავება;

დ) წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანულ სისტემებში მიმდინარე ჰიდრომექანიკური, ელექტროქიმიური და თბური პროცესების იმიტაციური მოდელირების პროგრამების შექმნა;

ე) ელექტროდიალიზის აპარატის რაციონალური კონსტრუქციის გათვლა.

მაშასადამე სადისერტაციო სამუშაო მიძღვნილი წყლის გაწმენდის არასტაციონალური ელექტრომემბრანული პოცესების სრულყოფასთან არის აქტუალური.

## თავი 2. ელექტრომემბრანული პოცესების მათემატიკური მოდელირება გრავიტაციული კონვექციის გათვალისწინებით მემბრანებს შორის არხში პულსირებული წნევის მოქმედებისას

ამ თავში მოცემულია მემბრანებს შორის საკანში წნევის პულსაციის დროს გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროულად მოქმედების პირობებში სითბო- და მასაგადატანის კანონზომიერებების თეორიული კვლევა. დადგენილია მემბრანებს შორის არხის იჩქარის განაწილების სურათი და მემბრანების დაცილება. გამოყენებულია დეკომპოზიციის მეთოდი, წარმოდგენილია დეკომპოზიციური განტოლებები და აღწერილია მათ საფუძველზე დამუშავებული ბინარული ელექტროლიტისთვის წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემის გამტკნარების საკანში გადატანის არასტაციონალური არაიზოთერმული პროცესების მათემატიკური მოდელი გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედებისას პულსირებული წნევის გათვალისწინებით.

### 2.1. წნევის პულსაციის გავლენა სასაზღვრო აურევადი ფენის სისქეზე

როგორც აღვნიშნეთ დენის სიმკვრივის ზღვრული მნიშვნელობის გაზრდისათვის საჭიროა სასაზღვრო დიფუზიური ფენის სისქის  $\delta$  შემცირება. შემოთავაზებულია რიგი მეთოდები  $\delta$ -ს სიდიდის შესამცირებლად (მემბრანებს შორის არხში სითხის ნაკადის სიჩქარის გაზრდა, მასში სხვადასხვა სახის ტურბულიზატორების განლაგება [84,85] და ა.შ.), რომელთაგან ვერცერთი მთლიანად ვერ ხსნის პრობლემებს დაკავშირებულს აურევადი ფენის არსებობასთან და ენერგეტიკული დანახარჯების გაზრდასთან.

აურევადი სასაზღვრო ფენა, რომ არ გვექონდეს, მაშინ მეტად მიზანშეწონილი იქნებოდა მემბრანული გაყოფის პროცესის წარმართვა ლამინარულ რეჟიმში.

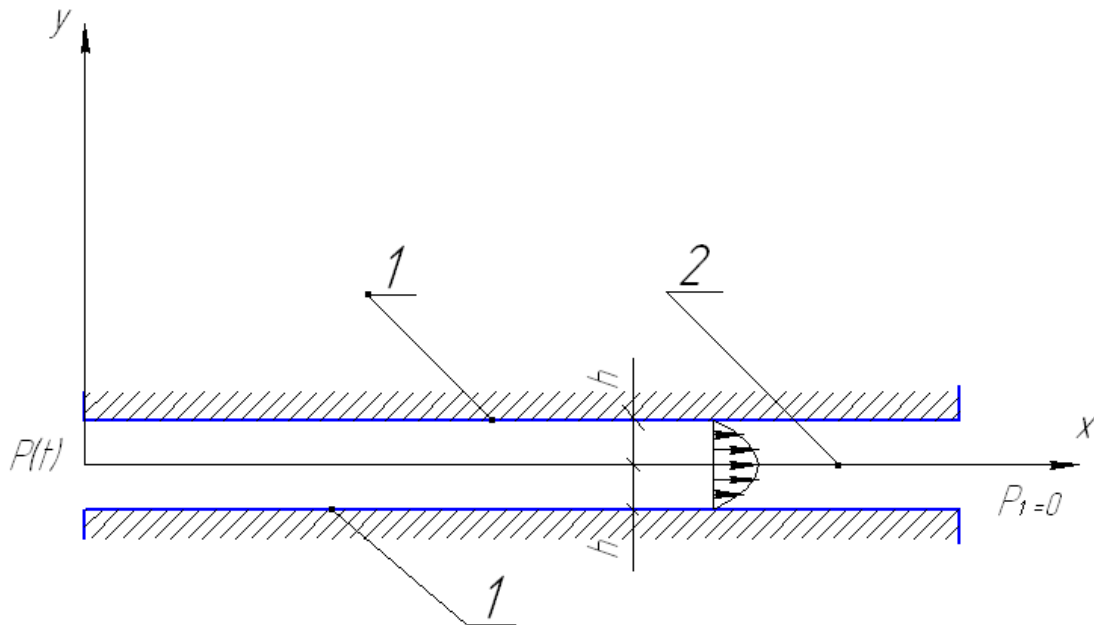
სამუშაოში შემოთავაზებულია გამდინარე უჯრედში მემბრანის მახლობლობაში აურევადი სასაზღვრო ფენის შემცირების მეთოდი, რომელიც მდგომარეობს ძირითად ლამინარულ ნაკადზე პულსირებული ჰიდროსტატიკური წნევის დადებაში.

მემბრანებს შორის მართკუთხა კვეთის არხში (ნახ.2.1) სითხის ბრტყელი არასტაციონალური მოძრაობა წნევის გრადიენტის

$$\frac{\partial P}{\partial X} = -P_0 + a \cos \omega t \quad (2.1)$$

სადაც:  $P_0$  – წნევის მუდმივი გრადიენტი;

$a, \omega$  – წნევის პულსაციის ამპლიტუდა და სიხშირე



ნახ.2.1 გამდინარე საკნის სქემატური გამოსახვა.

1-მემბრანები; 2-არხის შუა ნაწილი

მოქმედებით, მემბრანაში გამხსნელის გასვლის გაუთვალისწინებლად აღიწერება განტოლებებით (2,9), (2.10), (2.11) , რომლებიც შეიძლება მივიღოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებიდან [74] შემდეგი სახით:

$$\rho \left( \frac{d\bar{V}}{dt} \right) = \text{grad}P + \mu \nabla^2 \bar{V} + \rho \bar{g}, \quad (2.2)$$

გეგმილს  $x$  მიმართულებაზე აქვს სახე:

$$\rho \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 V_x + \rho g_x, \quad (2.3)$$

სადაც:  $\rho$  – სითხის სიმკვრივე;



$V_x$  – სითხის სიჩქარე  $x$  – ის გასწვრივ;

$\mu$  – დინამიური სიბლანტის კოეფიციენტი;

$g_x$  – აჩქარების მუდმივა  $x$  – ის გასწვრივ, ჩვენი შემთხვევისათვის

$V_x = U; g_x = 0$  (ვინაიდან სიმძიმის ძალა მიმართულია  $y$  ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით).

მაშინ განტოლებიდან (2.3) მივიღებთ:

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U \quad (2.4)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 U. \quad (2.5)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} V \quad (2.6)$$

(2.6)-ის (2.5)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.7)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ  $V = 0$  და  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$  ( ვინაიდან უკუმშვადი

ნავთიერებისათვის  $\text{div} \bar{V} = 0$  ), მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

(2.8)-ში ჩავსვათ (2.1) , მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} (P_0 - a \cos \omega t) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

სასაზღვრო პირობებს ვაყენებთ იმ მოსაზრებიდან, რომ სიჩქარე არხის კედლებთან ტოლია ნულის, ხოლო ღერძისმიმართ სიმეტრიულია, მაშინ

$$U(\pm h) = 0 \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.11)$$

ამოცანის წრფივობის გამო მის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$U(t, y) = U_1(y) + U_2(t, y)$$

სადაც  $U_1$  და  $U_2$  აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$\frac{P_0}{\rho} + \nu \frac{d^2 U_1}{dy^2} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = -\frac{a}{\rho} \cos \omega t + \nu \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

და ერთნაირ სასაზღვროპირობებს (2.10) და (2.11).

შესაბამისად,  $U_1(y)$  აღწერს წნევის მუდმივი გრადიენტის მოქმედებით მოძრაობის ჩვეულებრივ ბრტყელ პუაზელის პროფილს, ხოლო  $U_2(t, y)$ - სიჩქარის პულსაციური კომპონენტი.

განტოლებებიდან (2.12), (2.10), (2.11) ვიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dy} &= -\frac{P_0}{\rho\nu} y + c_1, \quad c_1 = 0 \\ U_1 &= -\frac{P_0}{2\rho\nu} h^2 + c_2, \quad U(\pm h) = 0 \\ 0 &= -\frac{P_0}{2\rho\nu} y^2 + c_2, \\ c_2 &= \frac{P_0}{2\rho\nu} h^2 \\ U_1 &= \frac{P_0}{2\rho\nu} (h^2 - y^2) = \frac{P_0}{2\mu} (h^2 - y^2) \quad (2.14) \end{aligned}$$

ამოცანის (2.14), (2.10), (2.11) ამოხსნას ვაწარმოებთ ისე როგორც შრომაში [28] კომპლექსური ფორმით, ე.ი.  $\cos \omega t$ -ს შევცვლით რა  $e^{i\omega t}$ -თი  $U_2(t, y)$ -ს ვეძებთ ფორმით:

$$U_2(t, y) = f(y)e^{i\omega t}$$

ამ გამოსახულების (2.13)-ში ჩასმით, მივიღებთ:

$$i\omega f(y)e^{i\omega t} = -\frac{a}{\rho}e^{i\omega t} + \nu e^{i\omega t} f''(y),$$

$$f''(y) - \frac{i\omega}{\nu} f(y) = -\frac{a}{\rho\nu}. \quad (2.15)$$

განტოლების (2.15) ამონახსნს ვეძებთ სახით

$$f(y) = f_0(y) + f_1 \quad f_1 = \text{const}$$

$$f_1'' - \frac{i\omega}{\nu} f_1 = -\frac{a}{\rho\nu}$$

$$f_1 = \frac{a\nu}{i\omega\rho\nu} = -\frac{ai}{\omega\rho}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $f_0(y) = e^{\lambda y}$ , მივიღებთ

$$f_0''(y) - \frac{i\omega}{\nu} f_0(y) = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda y} - \frac{i\omega}{\nu} e^{\lambda y} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{i\omega}{\nu} = 0 \quad \text{ან} \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)$$

აღვნიშნოთ  $\theta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ , მაშინ (2.15) განტოლების საერთო ამონახსნი:

$$f(y) = -\frac{a}{\rho\omega} i + C_1 \exp\{\theta_y(1+i)\} + C_2 \exp\{-\theta_y(1+i)\}$$

განვსაზღვროთ  $C_1$  და  $C_2$  (2.10) და (2.11)-ის გათვალისწინებით, რომელთაგან გამომდინარეობს:

$$f(h) = -\frac{a}{\rho\omega} i + C_1 \exp\{\theta_y(1+i)\} + C_2 \exp\{-\theta_y(1+i)\} = 0 \quad , \quad (2.16)$$

$$f'(0) = C_1 \theta(1+i)e^0 - C_2 \theta(1+i)e^0 = 0, \quad (2.17)$$

უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ  $C_1 = C_2$ , მაშინ

$$-\frac{a}{\rho\omega}i + C_1 \{e^{\theta(1+i)}\} = 0$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$e^{\theta(1+i)} + e^{-\theta(1+i)} = 2ch[\theta(1+i)]$$

მივიღებთ

$$C_1 = C_2 = \frac{ai}{2\rho\omega ch[\theta(1+i)]}$$

მაშინ

$$f(y) = -\frac{a}{\rho\omega}i + \frac{ai}{\rho\omega} \cdot \frac{ch[\theta y(1+i)]}{ch[\theta(1+i)]} = -\frac{ai}{\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{ch[\theta y(1+i)]}{ch[\theta(1+i)]} \right\} \quad (2.18)$$

შესაბამისად

$$U_2(t, y) = \frac{a}{\rho\omega} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{ch[\theta y(1+i)]}{ch[\theta(1+i)]} \right] \right\} \quad (2.19)$$

გარდაქმნის (დანართი 1) შემდეგ ვიღებთ:

$$U_2(t, y) = \frac{a}{\rho\omega} \{(1-A)\sin \omega t + B \cos \omega t\} \quad (2.20)$$

სადაც

$$A = \frac{ch(\theta y)ch(\theta h)\cos(\theta h)\cos(\theta y) + \sin(\theta y)\sin(\theta h)sh(\theta y)sh(\theta h)}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)} \quad (2.21)$$

$$B = \frac{\sin(\theta y)sh(\theta y)ch(\theta h)\cos(\theta h) - ch(\theta y)\cos(\theta y)sh(\theta h)\sin(\theta h)}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)} \quad (2.22)$$

ფორმულა (2.20) ნაშრომში [74] მიღებულ გამოსახულებასთან შედარებით გრანდიოზულია, მაგრამ ის მიღებულია ცხადი სახით სიხშირის ყველა მნიშვნელობებისათვის. ის შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$U_2(t, y) = \frac{a}{\rho\omega} \sqrt{(1-A)^2 + B^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.23)$$

სადაც

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1-A}{B}$$

(2.23)-დან გამომდინარეობს, რომ  $y$ -ის თითოეული მნიშვნელობისთვის არსებობს თავისი, სიხშირისგან დამოკიდებული, ფაზის ძვრა. რხევის ამპლიტუდაც დამოკიდებულია როგორც  $y$ -ზე, ასევე სიხშირეზე  $\omega$ .

### 2.1.1. მემბრანის ზედაპირზე მხები ძაბვის განსაზღვრა

მხები ძაბვა მემბრანების ზედაპირზე

$$\tau(t) = \tau_1 + \tau_2(t) \quad (2.24)$$

სადაც

$\tau_1$  - მხები ძაბვის მუდმივი მდგენელი;

$\tau_2(t)$  - მხები ძაბვის კულსაციური მდგენელი.

სითხის დინებისას ორ ფირფიტას შორის, რომლებიც ერთმანეთისგან დაცილებულია  $2h$  მანძილით, მხები ძაბვა კედელთან  $\tau_1$ , ისე როგორც შრომაში [74]

ტოლია:

$$\tau_1 = P_0 \cdot h, \quad (2.25)$$

ხოლო ჭეშმარიტად ბლანტი ნიუტონური სითხეების ბლანტი დინება აღიწერება ნიუტონის განტოლებით:

$$\tau_2(t) = \mu \frac{dU_2(t, y)}{dy}$$

თუ ჩავსვამთ  $U_2(t, y)$ -ის მნიშვნელობას (2.20)-დან მივიღებთ:

$$\tau_2(t) = \frac{a\mu}{\rho\omega} \left\{ \left( \frac{dA}{dy} \right)_{y=h} \cdot \sin \omega t - \left( \frac{dB}{dy} \right)_{y=h} \cdot \cos \omega t \right\} \quad (2.26)$$

$$\left( \frac{dA}{dy} \right)_{y=h} = \frac{\theta sh(\theta h) ch(\theta h) - \theta \sin(\theta h) \cos(\theta h)}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)}$$

$$\left( \frac{dB}{dy} \right)_{y=h} = \frac{\theta \sin(\theta h) ch(\theta h) + \theta sh(\theta h) ch(\theta h)}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)}$$

$$\tau_2(t) = \frac{a\mu}{\rho\omega} \cdot \frac{\theta \{ [sh(\theta h) ch(\theta h)] (\sin \omega t - \cos \omega t) - [\sin(\theta h) \cos(\theta h)] (\sin \omega t + \cos \omega t) \}}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)}$$

აღნიშნოთ  $\chi = \theta h$

$$\tau_2(t) = \frac{a\nu\theta}{\omega} \cdot \frac{sh\chi ch\chi (\sin \omega t - \cos \omega t) - \sin \chi \cos \chi (\sin \omega t + \cos \omega t)}{\cos^2 \chi + sh^2 \chi} \quad (2.27)$$

### 2.1.2. სიჩქარისა და მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელების საშუალო კვადრატული მნიშვნელობების განსაზღვრა.

იმისათვის, რომ შევაფასოთ სიჩქარისა და მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელების ინტენსივობა, გამოვთვალოთ სითხის სიჩქარისა და მხები ძაბვის კვადრატების საშუალო მნიშვნელობები:

$$\bar{U}_2^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_2^2(t, y) dt = \frac{a^2}{2\rho^2\omega^2} \left\{ 1 + \frac{\cos^2(\chi z) sh^2(\chi z)}{\cos^2 \chi + sh^2 \chi} - 2A \right\} \text{ (იხილეთ დანართი 2)}$$

ანუ

$$\frac{\bar{U}_2^2}{a^2} = 1 + \frac{\cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z)}{\cos^2 \chi + sh^2 \chi} - 2A = f(\chi; \chi z) \quad (2.28)$$

$$\bar{\tau}_2^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \tau_2^2(t) dt = \frac{a^2 \nu}{2\omega} \cdot \frac{sh^2 \chi + \sin^2 \chi}{sh^2 \chi + \cos^2 \chi} \quad (\text{იხილეთ დანართი 3})$$

ანუ

$$\frac{\bar{\tau}_2^2}{\frac{a^2 \nu}{2\omega}} = \frac{sh^2 \chi + \sin^2 \chi}{sh^2 \chi + \cos^2 \chi} = f_1(\chi) \quad (2.29)$$

$$\text{აქ} \quad z = \frac{y}{h}, \quad \chi = h \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

### 2.1.3. მიღებული შედეგების გრაფო-ანალიზური კვლევა და აურევადი სასაზღვრო ფენის სისქის დადგენა

წყლისა და წყლის ხსნარებისათვის  $\nu \approx 0,01$  კ, მაშინ  $\chi = 7.07h\sqrt{\omega}$ . თუ მივიღებთ  $\omega \approx 10$  1/წმ, მაშინ  $\chi \approx 22h$ ; როცა  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  მ,  $\chi \approx 11$ ; როცა  $h = 5 \cdot 10^{-4}$  მ  $\chi \approx 1,1$ . შესაბამისად უნდა ველოდეთ, რომ  $\chi \sim 1$ , ან  $\chi \gg 1$ . შემთხვევისათვის, როცა  $\chi \gg 1$  ფორმულებიდან (2.28) და (2.29) ვპოულობთ:

$$\frac{\bar{U}_2^2}{\frac{a^2}{2\rho^2\omega^2}} \approx 1 + e^{-2\chi(1-z)} \cos[\chi(1-z)] = f_2[\chi(1-z)], \quad (2.30)$$

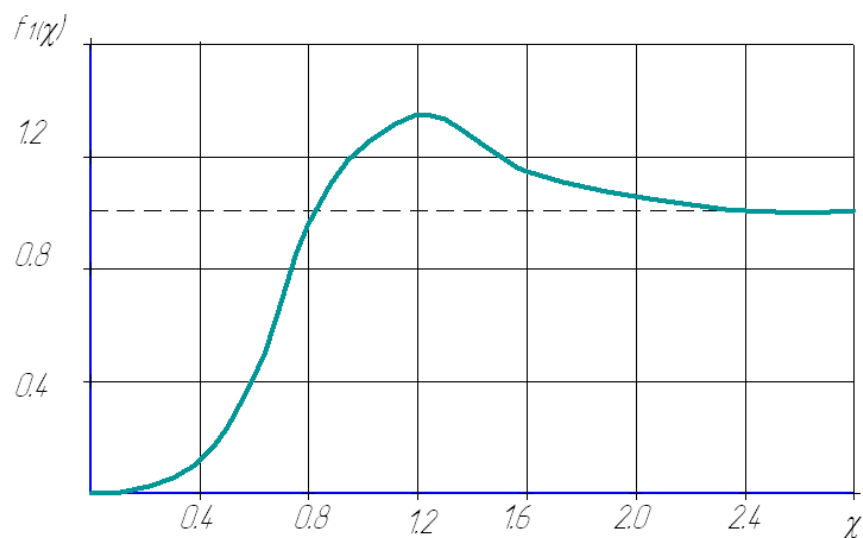
$$\frac{\bar{\tau}_2^2}{\frac{a^2 \nu}{2\omega}} \approx 1 \quad (2.31)$$

გამოსახულება (2.30) ემთხვევა ასიმპტოტურ გამოსახულებას, რომელიც მიღებულია მილში პულსაციისათვის.

თუ ავაგებთ დამოკიდებულებებს  $f(\chi, \chi z)$ , რომლებიც ახასიათებს სიჩქარის პულსაციის ინტენსივობას მემბრანებიდან დაცილების მიხედვით (ნახ.2. 3), ჩანს, რომ როცა  $\chi > 1$  მრუდებზე ჩნდებიან მაქსიმუმები, რომლებიც უახლოვდებიან მემბრანების ზედაპირებს  $\chi$ -ს გაზრდით.  $f(\chi, \chi z)$ -ის მაქსიმალური მნიშვნელობის სიდიდე,  $\chi = 3$ -დან დაწყებული პრაქტიკულად არ იცვლება და რჩება დაახლოებით 1,15-ის ტოლი.  $\chi$ -ს ამ მნიშვნელობიდან დაწყებული მრუდები  $f(\varphi, \chi z)$  და  $f[\chi(1-z)]$  ძალიან მცირედ განსხვავდებიან. მაქსიმუმის მდებარეობა მრუდებზე  $f(\chi, \chi z)$ , როგორც უკვე აღვნიშნეთ უახლოვდება მემბრანის ზედაპირებს, რომლის დროსაც როცა  $\chi > 3$  ასიმპტოტური დამოკიდებულების  $f_2[\chi(1-z)]$  დახმარებით ვპოულობთ:

$$z_m \approx 1 - \frac{2,28}{\chi} \quad (2.32)$$

ნახ.2.2 მოყვანილია  $f_1(\chi)$  დამოკიდებულების გრაფიკი (2.29) ფორმულის თანახმად, რომელიც ახასიათებს მხები ძაბვების პულსაციური მდგენელების ინტენსივობას. გამოსახულებიდან  $f_1(\chi)$ -თვის უშუალოდ ვასკვნით, რომ  $f_1(0) = 0$ ,  $f_1(\chi) \rightarrow 1$  როცა  $\chi \rightarrow \infty$ . ნახ. 2 აჩვენებს, რომ მემბრანის ზედაპირზე მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელის ინტენსივობის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა როცა  $\chi \approx 1,2$ .



ნახ.2.2 მემბრანის ზედაპირზე მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელის დამოკიდებულება პარამეტრზე  $\chi$



ვიპოვოთ გამოსახულება თანაფარდობისთვის

$\bar{\tau}_2 = \sqrt{\bar{\tau}_2^2} \tau_1$ -თან ფორმულების (2.25) და (2.30) თანახმად:

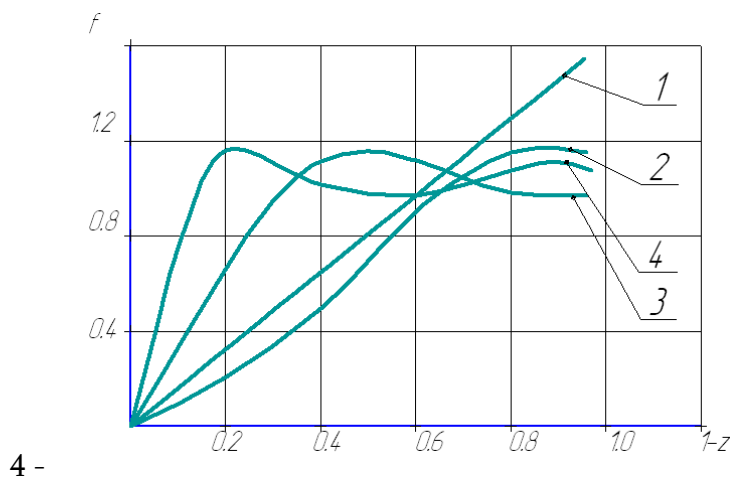
$$\frac{\bar{\tau}_2}{\tau_1} = \frac{a}{P_0} \cdot \frac{\sqrt{f_1(\chi)}}{2\chi} = \frac{a}{P_0} \cdot f_3(\chi) \quad (2.33)$$

$f_3(\chi)$  დამოკიდებულების გრაფიკი მოყვანილია ნახ.2.4, რომლისგანაც გამომდინარეობს, რომ დამოკიდებულება  $f_3(\chi)$  მონოტონურად კლებულობს  $\chi$ -ს ზრდასთან ერთად დარჩება მიახლოებით მუდმივი და ტოლი  $\approx 0,7$  როცა  $\chi \leq 0,6$ .

ნახ.2.3 აჩვენებს, რომ როცა  $\chi \gg 1$  ნაკადის “ბირთვში” რხევის ინტენსივობა პრაქტიკულად მუდმივია, ე.ი. “ბირთვში” ხდება ინტენსიური არევა, რასაც მივყავართ გახსნილი ნივთიერების კონცენტრაციის გათანაბრებასთან. რხევის ინტენსივობა მკვეთრად ეცემა ნულამდე მხოლოდ მემბრანის ზედაპირის მახლობლობაში, სწორედ ეს რხევის მკვეთრი დახშობის არე უნდა მივიღოთ აურევადი ფენის სისქედ.

ფორმულიდან (2.32) და ნახ.2.3 ვასკვნით, რომ

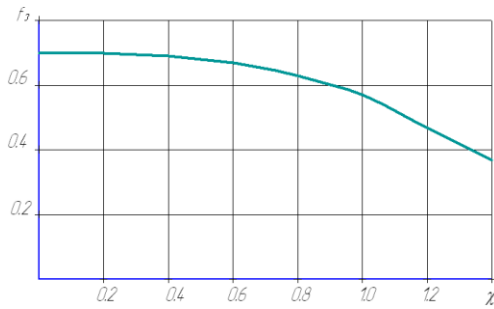
$$\delta \sim \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (2.34)$$



ნახ.2.3 სითხის სიჩქარის პულსაციის ინტენსივობის დამოკიდებულება მემბრანიდან დაცილებაზე.

1 -  $\chi=1,2$ ; 2 -  $\chi=2$ ; 3 -  $\chi=5$ ;  
4 -  $\chi=10$ .

შესაბამისად, წნევის პულსაციის სიხშირის გაზრდასას აურევადი ფენის სისქე ეცემა. აღვნიშნავთ, რომ ლამინარული დინებისას პულსაციის გარაშე  $\delta \sim h$ .



ნახ.2.4 მემბრანის ზედაპირზე მხევი ძაბვის პულსაციის ფარდობითი ინტენსივობა.

მაშასადამე, წნევის პულსაციას საკმარისად მაღალი სიხშირით, როცა  $\chi = h\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \gg 1$ , მივყავართ აურევადი ფენის სისქის არსებით შემცირებასთან, (2.34)-ის თანახმად და შესაბამისად ხსნარების მემბრანული გაყოფის პროცესის ეფექტურობის ამაღლებასთან.

## 2.2. ბინარული ელექტროლიტის ელექტროდიალზის პროცესის მათემატიკური მოდელირება. დეკომპოზიციის ალგორითმი და დეკომპოზიციური განტოლებები

რადგანაც მოცემულ თავში წარმოდგენილია განტოლებათა სისტემები, როგორც განზომილებიან ისე უგანზომილებო სახით პირობითად (d) ინდექსით აღვნიშნოთ ის განზომილებიანი სიდიდეები, რომლებიც შემდგომში გამოიყენებიან უგანზომილებო ფორმით.

საწყისი განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს ბინარული ელექტროლიტის იონების გადატანას მოდებული ელექტრული ველის მოქმედებით, შესდგება 1.2 პარაგრაფში წარმოდგენილი განტოლებებისაგან, რომლებიც შევსებულია ჰიდროდინამიკური და თბური პროცესების აღმწერი განტოლებებით და აქვს შემდეგი სახე:

$$\vec{J}_i^{(d)} = -\frac{F}{RT^{(d)}} z_i D_i^{(d)} C_i^{(d)} \nabla \varphi^{(d)} - D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} + C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = -\text{div}(\vec{J}_i^{(d)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i C_i^{(d)} = Q_i^{(d)}, \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \vec{j}_i^{(d)} = \frac{\vec{i}^{(d)}}{F}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial T^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + (\vec{V}^{(d)}, \nabla T^{(d)}) = \frac{1}{\rho_0^{(d)} c_p^{(d)}} \left( \lambda^{(d)} \Delta T^{(d)} - (\nabla \varphi^{(d)}, \vec{i}^{(d)}) \right), \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \vec{V}^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + (\vec{V}^{(d)}, \nabla) \vec{V}^{(d)} = -\frac{1}{\rho_0^{(d)}} \nabla P^{(d)} + \nu^{(d)} \Delta \vec{V}^{(d)} + \frac{1}{\rho_0^{(d)}} \vec{j}_g^{(d)}, \quad (2.40)$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}^{(d)}) = 0, \quad (2.41)$$

სადაც  $\nabla$  - გრადიენტი,  $\Delta$  - ლაპლასის ოპერატორი,  $\bar{\Delta}$  - სხვაობა, ნაზრდი;  $\vec{j}_g = \bar{g} \bar{\Delta} \rho$  - ცურვადობის არქიმედეს ძალების სიმკვრივე,  $\bar{\Delta} \rho = \rho - \rho_0$  - სიმკვრივის ცვლილება,  $\rho_0$  - ხსნარის მახასიათებელი სიმკვრივე,  $\bar{g}$  - სიმძიმის ძალის აჩქარება,  $\varphi$  - ელექტრული პოტენციალი,  $\vec{i}$  - ელექტროდენის სიმკვრივე,  $\vec{V}$  - სითხის დინების სიჩქარე,  $P$  - წნევა,  $T$  - აბსოლიტური ტემპერატურა,  $\vec{j}_i, C_i$  - ნაკადები და კონცენტრაციები,  $D_i, z_i$  -  $i$  სორტის იონების დიფუზიის კოეფიციენტი და მუხტი,  $\nu, \lambda$  - კინემატიკური და თბოგამტარობის კოეფიციენტები,  $F$  - ფარადეის რიცხვი,  $R$  - უნივერსალური გაზური მუდმივა,

$c_p$  - ხსნარის კუთრი სითბოტევადობა,  $Q$  - მემბრანაში ფიქსირებული იონების ჯგუფის მუხტის სიმკვრივე ( $Q=0$  ხსნარისათვის და  $Q \neq 0$  მემბრანისათვის). აქ  $\vec{j}, C_i, \varphi, \vec{i}, T, \vec{V}, P$  - უცნობი ფუნქციებია ზოგად შემთხვევაში დამოკიდებული  $t$  დროზე და  $x, y, z$  კორდინატებზე, ხოლო სხვა სიდიდეები ცნობილად ითვლებიან.

აქ (2.35) - ნერსტ-პლანკის განტოლება (1.3) ნერსტ-ეინშტეინის თანაფარდობის (1.27) გათვალისწინებით, (2.36) - მატერიალური ბალანსის პირობა, (2.37) ელექტრონეიტრალობის პირობა, (2.38) - ელექტროდენის გადინების პირობა, (2.39) - თბოგამტარობის განტოლება, (2.40), (2.41) - ნავიე-სტოქსის განტოლებები.

როგორც 1.2.3 პუნქტში იყო ნაჩვენები წონასწორული რეაქციებისთვის ელექტრონეიტრალობის პირობის შესრულებიდან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\operatorname{div}(\vec{i}^{(d)}) = 0. \quad (2.42)$$

(2.35)-(2.41) სისტემა შეიცავს განტოლებათა დიდ რაოდენობას და შესაბამისად, უცნობ ფუნქციებს, რაც მის რიცხოვრივ ამოხსნას ხდის საკმაოდ რთულ ამოცანად. ამავ დროს შეიძლება განტოლებათა ამ სისტემის გახლეჩვა (დეკომპოზიცია) ისე, რომ შედეგად მიღებული ქვესისტემები შეიცავდნენ

განტოლებათა და უცნობების ნაკლებ რაოდენობას და იხსნებოდნენ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად. დეკომპოზიციური განტოლებათა სისტემები გაცილებით მარტივია რიცხვითი ანალიზისთვის, სხვადასხვა გამარტივებული მოდელების გამოსაყვანად, და მათგან უფრო ადვილია აუცილებელი ინფორმაციის მიღება, ვიდრე განტოლებათა საწყისი სისტემიდან.

### 2.2.1. დეკომპოზიციის ზოგადი სქემა ელექტრონეიტრალობის პირობების შესრულებისას

1. ელექტრული ველის დაძაბულობას გამოვსახავთ დენის სიმკვრივის და კონცენტრაციის საშუალებით.

დაძაბულობა  $\vec{E}$  ელექტრულ პოტენციალთან  $\varphi$  დაკავშირებულია გამოსახულებით:

$$\vec{E}^{(d)} = -\nabla\varphi^{(d)}. \quad (2.43)$$

ამ გამოსახულებისა და ნერსტ-აინშტაინის თანაფარდობის (1.27) გათვალისწინებით (1.3) განტოლება ნაკადებისათვის მიიღებს სახეს:

$$\vec{J}_i^{(d)} = \frac{F}{RT^{(d)}} z_i D_i^{(d)} C_i^{(d)} \vec{E}^{(d)} - D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} + C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}, \quad i = 1..n \quad (2.44)$$

(2.44) განტოლებები გავამრავლოთ  $z_i$ -ზე და შევკრიბოთ:

$$\sum_{i=1}^n z_i \vec{J}_i^{(d)} = \frac{F}{RT^{(d)}} \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)} \vec{E}^{(d)} - \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} + \sum_{i=1}^n z_i C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}.$$

(1.4) და (1.6) გათვალისწინებით ეგრეთ წოდებულ დენის გასვლის პირობას:

$$\frac{\vec{I}^{(d)}}{F} = \frac{F}{RT^{(d)}} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)} \right) \vec{E}^{(d)} - \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)}. \quad (2.45)$$

ამ განტოლებიდან ვპოულობთ  $\vec{E}^{(d)}$ :

$$\vec{E}^{(d)} = \frac{F}{RT^{(d)}} \left( \frac{1}{F \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)}} \vec{i}^{(d)} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)}} \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} \right). \quad (2.46)$$

2. თუ ჩავსვამთ 2.46-ს 2.44-ში მივიღებთ ნაკადების გამოსახულებას კონცენტრაციებით:

$$\begin{aligned} \vec{j}_i^{(d)} = & C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)} - D_i^{(d)} (1 - t_i) \nabla C_i^{(d)} \\ & + \frac{t_i}{z_i} \sum_{m=1}^n z_m D_m^{(d)} \nabla C_m^{(d)} + \frac{t_i}{z_i F} \vec{i}^{(d)}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.47)$$

სადაც  $t_i = z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)} / \sum_{k=1}^n z_k^2 D_k^{(d)} C_k^{(d)}$ ,  $i = 1, \dots, n - i$  სახის იონების გადატანის რიცხვი.

3. ფორმულის (2.47) გამოყენებით განტოლებიდან 1.5 გამოვრიცხავთ  $\vec{j}_i^{(d)}$  ნაკადებს და ვიღებთ განტოლებებს კონცენტრაციისათვის, რომლებიც არ შეიცავენ ნაკადებს და ელექტრული ველის დაძაბულობებს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + \operatorname{div} (C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}) \\ = & D_i^{(d)} \operatorname{div} \left( (1 - t_i) \nabla C_i^{(d)} \right) - \frac{1}{z_i} \operatorname{div} \left( t_i \sum_{m=1}^n z_m D_m^{(d)} \nabla C_m^{(d)} \right) - \frac{1}{z_i F} \operatorname{div} (t_i \vec{i}^{(d)}) \\ & + R_i^{(d)}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.48)$$

მაშასადამე შეიძლება დასაწყისში ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა (2.48), რომელიც არ არის დამოკიდებული  $\vec{E}^{(d)}$ -ზე და  $\vec{j}_i^{(d)}$  -ზე,  $i = 1, \dots, n$ , ხოლო შემდეგ ფორმულებით (2.46) (2.47) ვიპოვოთ  $\vec{E}^{(d)}$  და  $\vec{j}_i^{(d)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

4. განტოლების (2.48) გამოსახულებებში (2.46), (2.47), და ფორმულაში  $t_i$  - თვის ელექტრონეიტრალობის პირობის (1.6) გამოყენებით შეიძლება გამოვრიცხოთ კონცენტრაციებიდან ერთ ერთი, მაგალითად  $C_n^{(d)}$ , გამოვსახავთ რა მას დანარჩენი კონცენტრაციებით:

$$C_n^{(d)} = \frac{Q^{(d)}}{z_n} - \frac{1}{z_n} \sum_{i=1}^{n-1} z_i C_i^{(d)}. \quad (2.49)$$

ბინარული და ტერნარული ელექტროლიტების მეტად გავრცელებულ შემთხვევებში (2.48) განტოლება მარტივდება. მაგალითის სახით განვიხილოთ ბინარული ელექტროლიტის შემთხვევა. დავუშვათ ხსნარში იმყოფება იონების მხოლოდ ორი სახე, მაშინ  $n=2$ , გამოვრიცხავთ რა  $C_2^{(d)}$ -ს ვიღებთ, რომ  $t_I$  დამოკიდებულია მხოლოდ  $C_I^{(d)}$ -ზე, სახელდობრ

$$t_I = \frac{z_I^2 D_I^{(d)} C_I^{(d)}}{z_2 D_2^{(d)} Q^{(d)} + z_I (z_I D_I^{(d)} - z_2 D_2^{(d)}) C_I^{(d)}}.$$

პირველი და მეორე შესაკრებები (2.48) განტოლების მარჯვენა ნაწილში (2.49)-ის გათვალისწინებით გარდაიქმნება და განტოლება (2.48) მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial C_1^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + \operatorname{div}(C_1^{(d)} \vec{V}^{(d)}) = \operatorname{div}((D_1^{(d)} + (D_2^{(d)} - D_1^{(d)}) t_I) \nabla C_1^{(d)}) - \frac{1}{z_{1F}} \operatorname{div}(t_I \vec{i}^{(d)}). \quad (2.50)$$

ხსნარის ფაზისათვის  $Q = 0$ , შესაბამისად,  $t_I$  არ არის დამოკიდებული  $C_I^{(d)}$ -ზე:

$$t_I = \frac{z_I D_I^{(d)}}{z_I D_I^{(d)} - z_2 D_2^{(d)}}.$$

შემოვიტანოთ განსახილველად ელექტროლიტის დიფუზიის კოეფიციენტი

$$D^{(d)} = \frac{D_I^{(d)} D_2^{(d)} (z_I - z_2)}{z_I D_I^{(d)} - z_2 D_2^{(d)}}.$$

(2.40)-ის გათვალისწინებით (2.50) - დან მივიღებთ:

$$\frac{\partial C_I^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + \operatorname{div}(C_I^{(d)} \vec{V}^{(d)}) = D^{(d)} \Delta C_I^{(d)}. \quad (2.51)$$

მემბრანის ფაზისათვის  $Q \neq 0$ , მაგრამ  $\vec{V} = 0$ , ამიტომ 2.50 განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial C_1^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = \operatorname{div}((D_1^{(d)} + (D_2^{(d)} - D_1^{(d)}) t_I) \nabla C_1^{(d)}) - \frac{1}{z_{1F}} \operatorname{div}(t_I \vec{i}^{(d)}). \quad (2.52)$$

## 2.2.2. სამგანზომილებიან შემთხვევაში დენის სიმკვრივისათვის განტოლების გამოყვანა

5. დეკომპოზიციური განტოლებათა სისტემის (2.48) ჩაკეტვისათვის გამოყვანილია განტოლება, რომელიც დენის სიმკვრივეს  $\vec{i}$  აკავშირებს ნებისმიერი ელექტროლიტის  $C$  კონცენტრაციასთან სამგანზომილებიან და ორგანზომილებიან შემთხვევებში, ელექტრონეიტრალობის პირობების გათვალისწინებით.

5.1. ვინაიდან დენის სიმკვრივისათვის შესრულებულია განტოლება (2.42), მაშინ ერთმნიშვნელოვანი გადაწყვეტისათვის უნდა ვიპოვოთ  $rot(\vec{i})$ .

(2.44) განტოლებიდან გამომდინარეობს:

$$rot(\vec{i}^{(d)}) = F \sum_{i=1}^n z_i rot(J_i^{(d)}),$$

ხოლო (2.44) განტოლებიდან:

$$rot(\vec{J}_i^{(d)}) = \frac{F}{RT^{(d)}} z_i D_i^{(d)} rot(C_i^{(d)} \vec{E}^{(d)}) - D_i^{(d)} rot(\nabla C_i^{(d)}) + rot(C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

შესაბამისად თუ გავითვალისწინებთ იგივობას  $rot(\nabla U) = 0, \forall U$ :

$$rot(\vec{i}^{(d)}) = \frac{F^2}{RT^{(d)}} \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} rot(C_i^{(d)} \vec{E}^{(d)}) + F \sum_{i=1}^n z_i rot(C_i^{(d)} \vec{V}^{(d)}). \quad (2.53)$$

გავითვალისწინოთ აგრეთვე, რომ

$$rot(U\vec{V}) = \nabla U \times \vec{V} + U rot(\vec{V}), \quad \forall U, \vec{V} \text{ და } \vec{E}^{(d)} = -\nabla \varphi^{(d)} \Rightarrow rot(\vec{E}^{(d)}) = 0.$$

მაშინ

$$\begin{aligned} rot(\vec{i}^{(d)}) &= \frac{F^2}{RT^{(d)}} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} \right) \times \vec{E}^{(d)} + F \left( \sum_{i=1}^n z_i \nabla C_i^{(d)} \right) \times \vec{V}^{(d)} \\ &\quad + F \left( \sum_{i=1}^n z_i C_i^{(d)} \right) rot(\vec{V}^{(d)}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

ელექტრონეიტრალობის პირობის (1.6) შესრულებისას, (2.54) განტოლება მარტივდება და იღებს სახეს:

$$rot(\vec{i}^{(d)}) = \frac{F^2}{RT^{(d)}} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)} \right) \times \vec{E}^{(d)}. \quad (2.55)$$

### 2.2.3. ორ განზომილებიანი შემთხვევისათვის დენის სიმკვრივისათვის განტოლების გამოყვანა

5.2. ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის(2.55) განტოლება მარტივდება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_y^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - \frac{\partial i_x^{(d)}}{\partial y^{(d)}} &= \frac{F^2}{RT^{(d)}} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) E_y^{(d)} \\ &\quad - \frac{F^2}{RT^{(d)}} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) E_x^{(d)}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.46-ის გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_y^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - \frac{\partial i_x^{(d)}}{\partial y^{(d)}} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)}} \left[ \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \left( i_y^{(d)} + F \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \left( i_x^{(d)} + F \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

განტოლებიდან 2.42 გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი ფუნქცია  $\eta$ , რომ

$$\frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)}} = i_y^{(d)}, \quad \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial y^{(d)}} = -i_x^{(d)}. \quad (2.58)$$

გამოთვლითი ჰიდროდინამიკის ტერმინების ანალოგიურად  $\eta$  ფუნქციას ვუწოდოთ „ელექტრო დენის დენის ფუნქცია“.

უკანასკნელი ცვლილების გათვალისწინებით განტოლება 2.57 შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \Delta \eta^{(d)} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)}} \left[ \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \left( F \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} + \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \left( F \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \right], \end{aligned}$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ  $D_i > 0, C_i > 0, i = 1, \dots, n$ :



$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} C_i^{(d)} \right) \Delta \eta^{(d)} - \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \nabla C_i^{(d)}, \Delta \eta^{(d)} \right) \\
& = F \left[ \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \left( \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) \left( \sum_{i=1}^n z_i D_i^{(d)} \frac{\partial C_i^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right) \right] \quad (2.59)
\end{aligned}$$

2.59 განტოლების ამოხსნით, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ელექტროლიტის იონების კონცენტრაციაზე  $C_i^{(d)}, i = 1, \dots, n, \eta^{(d)}$  ფუნქციის მიმართ, ფორმულებით 2.59 ადვილია ვიპოვოთ ელექტრული დენის სიმკვრივეები  $\vec{i}^{(d)}$ .

ბინარული ელექტროლიტის შემთხვევისათვის განტოლება 2.59 მნიშვნელოვნად მარტივდება და იღებს სახეს:

$$C_i^{(d)} \Delta \eta^{(d)} - (\nabla C^{(d)}, \Delta \eta^{(d)}) = 0 \quad (2.60)$$

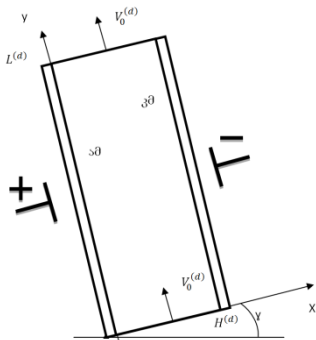
სადაც  $C^{(d)} = C_1^{(d)}/n_1 = C_2^{(d)}/n_2$  - ხსნარში ელექტროლიტის ეკვივალენტური კონცენტრაცია,  $n_1, n_2$  - კათიონებისა და ანიონების რიცხვი, აღძრული ელექტროლიტის ერთი მოლეკულის დისოციაციისას.

სტაციონალური 2.60 განტოლების ამოხსნა მოსახერხებელია ვიპოვოთ რიცხობრივად დადგენის მეთოდით.

### 2.3. ამოცანის ფიზიკური დასმა

რომ შევაფასოთ მასაგადაცემაში გრავიტაციული კონვექციის წვლილი, განვიხილოთ წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემის გამტკნარების „ცარიელ“ სწორკუთხა არხში (ნახ. 2.5) ბინარული ელექტროლიტის არასტაციონალური გადატანის ორ გსწომილებიანი ამოცანა, ელექტრონეიტრალობის პირობის მოქმედებისას (2.37) გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის, აგრეთვე ჯოულური გაცხელებისა და მემბრანის გავლით

სითბოს გადატანის გათვალისწინებით. განსახილველი მემბრანები ჩავთვალოთ ჰომოგენურად (ერთგვაროვნად).



ნახ. 2.5 გამტკნარების არხის სქემატური გამოსახულება:  $\gamma$ -დახრის კუთხე;  $am$  - ანიონცვლადი მემბრანა;  $cm$  - კათიონცვლადი მემბრანა;  $H^{(d)}$  - არხის სიგანე (მემბრანებს შორის დაცილება);  $L^{(d)}$  - არხის სიგრძე;  $V_0^{(d)}$  - ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე.

განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს არაიზოთერმულ ბუნებრივ კონვექციას მოცემულ პირობებში, შესდგება ჰიდროდინამიკის განტოლებებისაგან [24], განტოლებებისაგან რომლებიც გამოსახავენ ნაწილაკების რიცხვის შენახვის კანონებს (პარაგრაფი 1.2), კონვექციური სითბოგამტარებლობის განტოლებისაგან [92] და განტოლებისაგან ელექტრული ველისათვის.

ამ სისტემის ვექტორულ ჩანაწერს ბინარული ელექტროლიტისათვის აქვს სახე:

$$\frac{\partial \vec{V}^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + (\vec{V}^{(d)}, \nabla) \vec{V}^{(d)} = -\frac{1}{\rho_0^{(d)}} \nabla P^{(d)} + \nu^{(d)} \Delta \vec{V}^{(d)} + \frac{\bar{\Delta} \rho^{(d)}}{\rho_0^{(d)}} \vec{g}, \quad (2.61)$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}^{(d)}) = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial C^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = -(\vec{V}^{(d)}, \nabla C^{(d)}) + D^{(d)} \Delta C^{(d)}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial T^{(d)}}{\partial t^{(d)}} + (\vec{V}^{(d)}, \nabla T^{(d)}) = \alpha^{(d)} \Delta T^{(d)} + \frac{1}{\rho_0^{(d)} c_p^{(d)}} (\vec{E}^{(d)}, \vec{i}^{(d)}), \quad (2.64)$$

$$\operatorname{div}(\vec{i}^{(d)}) = 0. \quad (2.65)$$

სადაც  $\vec{V} = \{V_x, V_y\}^T$  - ელექტროლიტის ხსნარის დინების სიჩქარე,  $C$  - ხსნარში ელექტროლიტის ეკვივალენტური კონცენტრაცია,  $\vec{i} = \{i_x, i_y\}^T$  - ელექტროდენის სიმკვრივე,  $\vec{E} = \{E_x, E_y\}^T = -\nabla \varphi$  - ელექტრული ველის დამაბულობა,  $\alpha = \lambda / (\rho_0 c_p)$  - სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტი,  $D$  - დიფუზიის კოეფიციენტი.  $P, C, T, \vec{V}, \vec{E}, \vec{i}$  - უცნობი ფუნქციები დამოკიდებული  $t$  დროზე და  $x, y$  კორდინატებზე.

შემოთავაზებულ სისტემაში ნავიე-სტოქსის განტოლებები (2.61), (2.62) აღწერენ სითხის მოძრაობას მემბრანულ არხში. კონვექციური დიფუზიის განტოლება (2.63) აღწერს მასაგადაცემას ელექტრომემბრანულ სისტემაში. მეორე შესაკრები სითბოგამტარებლობის განტოლების (2.64) მარჯვენა ნაწილში აღწერს ხსნარის ჯოულურ გაცხელებას. (2.65) განტოლება წარმოადგენს მუხტის შენახვის კანონს ელექტრონეიტრალობის პირობის გათვალისწინებით.

ლოკალურ თერმოდინამიკურ წონასწორობასთან მიახლოებით ელექტროლიტის ხსნარის სიმკვრივე წარმოადგენს წნევის  $P$ , ტემპერატურის  $T$  და კონცენტრაციის  $C$  ფუნქციას [24]. ავირჩიოთ სითხეში ნებისმიერი მოცულობა  $V$  და  $\rho(P, T, C)$  ფუნქცია დავშალოთ ტეილორის მწკრივად წნევის  $P_0$ , ტემპერატურის  $T_0$  და კონცენტრაციის  $C_0$  მახასიათებელი მნიშვნელობების მახლობლობაში. თუ შემოვიფარგლებით დასლის პირველი წევრებით მივიღებთ

$$\rho^{(d)} = \rho_0^{(d)} + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial P^{(d)}} (P^{(d)} - P_0^{(d)}) + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial T^{(d)}} (T^{(d)} - T_0^{(d)}) + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial C^{(d)}} (C^{(d)} - C_0^{(d)}),$$

ბუსინესკის მიახლოებით, მეორე შესაკრები შეიძლება უგულებელვყოთ. ამრიგად განსახილველი ამოცანისათვის

$$\bar{\Delta} \rho^{(d)} = \rho^{(d)} - \rho_0^{(d)} = \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial T^{(d)}} (T^{(d)} - T_0^{(d)}) + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial C^{(d)}} (C^{(d)} - C_0^{(d)}), \quad (2.66)$$

(2.61)-(2.65) სისტემის ჩაკეტვისათვის აუცილებელია განტოლებები (2.64) განტოლებაში შემავალი ელექტრული პოტენციალის  $\varphi$  და დენის სიმკვრივის  $\vec{i}$  განსაზღვრისათვის.

განვიხილავთ განტოლებათა სისტემის ორ ვარიანტს, რომლებიც სემდგომი გამოყენებული იქნება გალვანოსტატიკური და პოტენციოსტატიკური მატემატიკური მოდელების ასაგებათ.

**ა სისტემა.**  $\vec{i}$  და  $\vec{E}$  უცნობების გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლებები (2.60), (2.58) და (2.46) გამოსახულება უბრალო ბინარული ელექტროლიტის შემთხვევისათვის ეკვივალენტურ კონცენტრაციაზე (1.19) გადასვლით. ამ შემთხვევაში დეკომპოზიციური განტოლებების ცაკეტილ სისტემას ექნება სახე

$$\frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = -V_x^{(d)} \frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - V_y^{(d)} \frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial y^{(d)}} - \frac{1}{\rho_0^{(d)}} \frac{\partial P^{(d)}}{\partial x^{(d)}} + v^{(d)} \left( \frac{\partial^2 V_x^{(d)}}{\partial x^{(d)2}} + \frac{\partial^2 V_x^{(d)}}{\partial y^{(d)2}} \right) - \frac{g \sin \gamma}{\rho_0^{(d)}} \left( \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial C^{(d)}} \left( C^{(d)} - C_0^{(d)} \right) + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial T^{(d)}} \left( T^{(d)} - T_0^{(d)} \right) \right), \quad (2.67 \text{ ა})$$

$$\frac{\partial V_y^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = -V_x^{(d)} \frac{\partial V_y^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - V_y^{(d)} \frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial y^{(d)}} - \frac{1}{\rho_0^{(d)}} \frac{\partial P^{(d)}}{\partial y^{(d)}} + v^{(d)} \left( \frac{\partial^2 V_y^{(d)}}{\partial x^{(d)2}} + \frac{\partial^2 V_y^{(d)}}{\partial y^{(d)2}} \right) - \frac{g \cos \gamma}{\rho_0^{(d)}} \left( \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial C^{(d)}} \left( C^{(d)} - C_0^{(d)} \right) + \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial T^{(d)}} \left( T^{(d)} - T_0^{(d)} \right) \right), \quad (2.67 \text{ ბ})$$

$$\frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial x^{(d)}} + \frac{\partial V_x^{(d)}}{\partial y^{(d)}} = 0, \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial C^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = V_x^{(d)} \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - V_y^{(d)} \frac{\partial C^{(d)}}{\partial y^{(d)}} + D^{(d)} \left( \frac{\partial^2 C^{(d)}}{\partial x^{(d)2}} + \frac{\partial^2 C^{(d)}}{\partial y^{(d)2}} \right) \quad (2.69)$$

$$C^{(d)} \left( \frac{\partial^2 \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)2}} + \frac{\partial^2 \eta^{(d)}}{\partial y^{(d)2}} \right) - \left( \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}} + \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \frac{\partial C^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right) = 0 \quad (2.70)$$

$$i_x^{(d)} = \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial y^{(d)}}, \quad i_y^{(d)} = -\frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)}}, \quad (2.71)$$

$$E_x^{(d)} = \frac{RT_0^{(d)}}{C^{(d)} F (n_1 z_1^2 D_1^{(d)} + n_2 z_2^2 D_2^{(d)})} \left( \frac{i_x^{(d)}}{F} + (n_1 z_1 D_1^{(d)} + n_2 z_2 D_2^{(d)}) \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right), \quad (2.72 \text{ ა})$$

$$E_y^{(d)} = \frac{RT_0^{(d)}}{C^{(d)} F (n_1 z_1^2 D_1^{(d)} + n_2 z_2^2 D_2^{(d)})} \left( \frac{i_y^{(d)}}{F} + (n_1 z_1 D_1^{(d)} + n_2 z_2 D_2^{(d)}) \frac{\partial C^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right), \quad (2.72 \text{ ბ})$$

$$\frac{\partial T^{(d)}}{\partial t^{(d)}} = -V_x^{(d)} \frac{\partial T^{(d)}}{\partial x^{(d)}} - V_y^{(d)} \frac{\partial T^{(d)}}{\partial y^{(d)}} + \alpha^{(d)} \left( \frac{\partial^2 T^{(d)}}{\partial x^{(d)2}} + \frac{\partial^2 T^{(d)}}{\partial y^{(d)2}} \right) + \frac{1}{\rho_0^{(d)} C_p^{(d)}} \left( i_x^{(d)} E_x^{(d)} + i_y^{(d)} E_y^{(d)} \right), \quad (2.73)$$

აქ გამოსახულება დენის სიმკვრივის კომპონენტისათვის (2.71) აღებულია მოპირდაპირე ნიშნით, (2.58) გამოსახულებასთან შედარებით, რაც არ ცვლის (2.57) და მის ეკვივალენტურ (2.60) განტოლებათა სახეს. (2.67)...( 2.73) განტოლებათა სისტემას ვუწოდოთ ა სისტემა. აღვნიშნოთ, რომ ელექტრული პოტენციალი  $\varphi$  მასში არ შედის ცხადად და როგორც (2.43) განტოლებიდან გამომდინარეობს შეიძლება გამოთვლილი იქნას ფორმულით:

$$\varphi^{(d)} = -\int_0^{x^{(d)}} E_x^{(d)} dx^{(d)} - \int_0^{y^{(d)}} E_y^{(d)} dy^{(d)} + \varphi_0^{(d)}, \quad (2.74)$$

სადაც  $\varphi_0$ -რადაც მუდმივა, რადგანაც არსებითია მხოლოდ  $\bar{\Delta} \varphi$  პოტენციალის დაცემა, ჩავთვალოთ  $\varphi_0 = 0$ .

**ბ სისტემა.** ელექტრო დენის გავლის პირობა (2.35) უბრალო ბინარული ელექტროლიტისათვის ეკვივალენტურ კონცენტრაციაში გადასვლის გათვალისწინებით (1.19) მიიღებს სახეს

$$\frac{\vec{i}^{(d)}}{F} = -\frac{F\nabla\varphi^{(d)}}{RT_0^{(d)}} \left( n_1 z_1^2 D_1^{(d)} + n_2 z_2^2 D_2^{(d)} \right) C^{(d)} - \left( n_1 z_1 D_1^{(d)} + n_2 z_2 D_2^{(d)} \right) \nabla C^{(d)}, \quad (2.75)$$

(1.6) და (1.19)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$z_1 n_1 + z_2 n_2 = 0, \quad (2.76)$$

ჩავსვათ (2.75) (2.65)-ში და მივიღოთ მხედველობაში (2.76), მივიღებთ განტოლებას ელექტრული პოტენციალის საპოვნელად:

$$\frac{F(z_1 D_1^{(d)} - z_2 D_2^{(d)})}{RT_0^{(d)}} \operatorname{div}(C^{(d)} \nabla \varphi^{(d)}) + (D_1^{(d)} - D_2^{(d)}) \Delta C^{(d)} = 0, \quad (2.77)$$

იგივე განტოლება უბრალო ბინარული ელექტროლიტისათვის პირდაპირ გამომდინარეობს (1.22) და (1.27)-დან.

ელექტრო ველის უცნობი მახასიათებლების  $\vec{i}$ ,  $\vec{E}$  და  $\varphi$  პოვნის მეორე ხერხი მდგომარეობს (2.77), (2.75), (2.43) განტოლებათა ამოხსნაში. დეკომპოზიციური განტოლებების ჩაკეტილი სისტემა ემთხვევა ა სისტემას, (2.70)...(2.72) განტოლებების გარდა, რომლებიც იცვლებიან შემდეგით:

$$\frac{F(z_1 D_1^{(d)} - z_2 D_2^{(d)})}{RT_0^{(d)}} \operatorname{div}(C^{(d)} \nabla \varphi^{(d)}) + (D_1^{(d)} - D_2^{(d)}) \Delta C^{(d)} = 0, \quad (2.78)$$

$$E_x^{(d)} = -\frac{\partial \varphi^{(d)}}{\partial x^{(d)}}, \quad E_y^{(d)} = -\frac{\partial \varphi^{(d)}}{\partial y^{(d)}}, \quad (2.79)$$

$$\frac{\vec{i}_x^{(d)}}{F} = \frac{F E_x^{(d)}}{RT_0^{(d)}} \left( n_1 z_1^2 D_1^{(d)} + n_2 z_2^2 D_2^{(d)} \right) C^{(d)} - \left( n_1 z_1 D_1^{(d)} + n_2 z_2 D_2^{(d)} \right) \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}}, \quad (2.80a)$$

$$\frac{\vec{i}_y^{(d)}}{F} = \frac{F E_y^{(d)}}{RT_0^{(d)}} \left( n_1 z_1^2 D_1^{(d)} + n_2 z_2^2 D_2^{(d)} \right) C^{(d)} - \left( n_1 z_1 D_1^{(d)} + n_2 z_2 D_2^{(d)} \right) \frac{\partial C^{(d)}}{\partial y^{(d)}}. \quad (2.80b)$$

ქვემოთ მოყვანილი სასაზღვრო პირობები საერთოა ორივე სისტემისათვის:

$$\left. \begin{pmatrix} V_x^{(d)} \\ V_y^{(d)} \end{pmatrix} \right|_{x^{(d)}=0, x^{(d)}=H^{(d)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{pmatrix} V_x^{(d)} \\ V_y^{(d)} \end{pmatrix} \right|_{y^{(d)}=0, y^{(d)}=L^{(d)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0^{(d)} \end{pmatrix};$$

$$\left. \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right|_{x^{(d)}=0} = \frac{i_x^{(d)}}{FD^{(d)}} t_A, \quad \left. \frac{\partial C^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right|_{x^{(d)}=H^{(d)}} = \frac{i_x^{(d)}}{FD^{(d)}} t_K,$$

$$C^{(d)} \Big|_{y^{(d)}=0} = C_0^{(d)}, \quad \left. \frac{\partial C^{(d)}}{\partial y^{(d)}} \right|_{y^{(d)}=L^{(d)}} = 0; (2.81)$$

აქ  $t_A = t_1 - t_{1A} = t_{2A} - t_2$ ,  $t_K = t_{1K} - t_1 = t_2 - t_{2K}$ ,  $t_i, t_{iA}, t_{iK}$  – შესაბამისად ხსნარში და აგრეთვე ანიონ- და კათიონცვლად მემბრანებში  $i$  სახის იონების გადატანათა რიცხვებია, (იგულისხმება, რომ  $t_{iA}$  და  $t_{iK}$ -ცნობილი მუდმივებია),  $k$ -თბოცვლის კოეფიციენტი. როგორც 2.81-დან ჩანს ხსნარის სიჩქარისათვის  $\vec{V}$  ფაზებს შორის საზღვრებზე გამოიყენება მიწებების პირობა, გამტკნარების არხის შესასვლელში და გამოსასვლელში მოცემული მუდმივი სიჩქარე, კონცენტრაციისათვის ფაზებს შორის საზღვარზე გამოიყენება ფიკის პირობები [80], ტემპერატურისათვის  $T$ -ნიუტონის პირობები [77]. გამტკნარების შესასვლელში მუდმივი სიჩქარის მიცემის კორექტულობა დასაბუთებულია სამუშაოში [64]. წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანულ ტექნოლოგიებში, როგორც წესი გამოიყენება ელექტროდიალიზის აპარატების ექსპლოატაციის ორი ძირითადი რეჟიმი: გალვანოსტატიკური და პოტენციოსტატიკური.

*გალვანოსტატიკური რეჟიმი* განისაზღვრება პირობით

$$i_{av}^{(d)} = \frac{1}{L^{(d)}} \int_0^{L^{(d)}} i_x^{(d)}(t^{(d)}, 0, y^{(d)}) dy^{(d)} = \frac{1}{L^{(d)}} \int_0^{L^{(d)}} i_x^{(d)}(t^{(d)}, H^{(d)}, y^{(d)}) dy^{(d)} = const, \quad (2.82)$$

რომელიც აღნიშნავს, რომ დენის საშუალო ინტეგრალური სიმკვრივე  $i_{av}$  სისტემაში მუდმივია.

ელექტრომემბრანული პროცესების მათემატიკური მოდელირების დროს მოცემულ შემთხვევაში მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ა სისტემა, შევავსებთ რა სასაზღვრო პირობებს (2.81) შემდეგი პირობებით

$$i_y^{(d)} \Big|_{x^{(d)}=0, x^{(d)}=H^{(d)}, y^{(d)}=0, y^{(d)}=L^{(d)}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \eta^{(d)}}{\partial x^{(d)}} \right|_{x^{(d)}=0, x^{(d)}=H^{(d)}} = 0, \quad \eta^{(d)} \Big|_{y^{(d)}=0} = 0, \quad \eta^{(d)} \Big|_{y^{(d)}=L^{(d)}} = i_{av}^{(d)} L^{(d)}. \quad (2.81a)$$

d განისაზღვრებიან ფორმულებით (2.71), (2.72) და (2.74), შესაბამისად მოდელს დაფუძნებულს ა სისტემაზე სასაზღვრო პირობებით (2.81), (2.81ა) ჩვენ ვუწოდებთ გალვანოსტატიკური.

პოტენციოსტატიკურს შეესაბამება პირობა:

$$\bar{\Delta}\varphi^{(d)} = \varphi^{(d)}|_{x^{(d)}=H^{(d)}} - \varphi^{(d)}|_{x^{(d)}=0} = d_{\varphi}^{(d)} = const, \quad (2.84)$$

რომელიც აღნიშნავს, რომ მემბრანებს შორის სივრცეში პოტენციალის ვარდნის სიდიდე  $\bar{\Delta}\varphi$  მუდმივია და ტოლია რაღაც  $d\varphi$ . ამ შემთხვევაში მათემატიკური მოდელი ეფუძნება ბ სისტემაზე სასაზღვრო პირობებით (2.81), რომლებიც შევსებულია შემდეგით:

$$\begin{aligned} \varphi^{(d)}|_{x^{(d)}=0} &= 0 & \varphi^{(d)}|_{x^{(d)}=H^{(d)}} &= d_{\varphi}^{(d)}, \\ \varphi^{(d)}|_{y^{(d)}=0} &= d_{\varphi}^{(d)} x^{(d)}, & \frac{\partial \varphi^{(d)}}{\partial y^{(d)}}|_{y^{(d)}=L^{(d)}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.81.ბ)$$

$\vec{E}$  დასასაზღვრო მნიშვნელობები ამ დროს გამოითვლება ფორმულებით (2.79) და (2.80).

შესაბამის მოდელს ჩვენ ვუწოდებთ პოტენციოსტატიკური.

$\frac{\partial \rho}{\partial C}$  და  $\frac{\partial \rho}{\partial T}$  სიდიდეები (2.67) და მომდევნო განტოლებებში, საერთოდ დამოკიდებულია კონცენტრაციაზე C და ტემპერატურაზე T შესაბამისად, მაგრამ C და T მცირე ცვლილებისას ისინი შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივებად:

$$\frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial C^{(d)}} = A_C^{(d)} = 0.04127 \frac{\text{კგ}}{\text{მოლი}}, \quad \frac{\partial \rho^{(d)}}{\partial T^{(d)}} = A_T^{(d)} = -0.23 \frac{\text{კგ}}{\text{მ}^3 \text{K}}. \quad (2.85)$$

ხსნარში სიმკვრივეების მახასიათებელი (მაქსიმალური) სიმკვრივეთა სხვაობა  $\bar{\Delta}\rho_0^{(d)}$  აიღება 4 კგ/მ<sup>3</sup> ტოლი, ხოლო ხსნარის კუთრი სითბოტევადობა  $C_p^{(d)} = C_p^{(d)}(\text{H}_2\text{O}, P=1 \text{ ატმ.}, T=20^\circ\text{C})=4083 \text{ ჯ}/(\text{კგ}\cdot\text{K})$ . მონაცემები აღებულია საცნობარო ლიტერატურიდან [38].

## 2.4. გადასვლა უგანზომილებო სახეზე, განტოლებაში შემავალი კრიტიკული რიცხვების შფასება

ამოცანის მათემატიკური დასმისათვის და მისი რიცხვითი ამოხსნისათვის აუცილებელია განტოლებები მივიყვანოთ უგანზომილებო სახემდე. ამისათვის გავაკეთებთ შემდეგ შეცვლებს :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x^{(d)}}{H^{(d)}}, & y &= \frac{y^{(d)}}{H^{(d)}}, & L &= \frac{L^{(d)}}{H^{(d)}}, & t &= \frac{V_0^{(d)} t^{(d)}}{H^{(d)}}, & \rho &= \frac{\rho^{(d)}}{\rho_0^{(d)}}, \\
 C &= \frac{C^{(d)}}{C_0^{(d)}}, & T &= \frac{T^{(d)}}{T_0^{(d)}}, & \vec{V} &= \frac{\vec{V}^{(d)}}{V_0^{(d)}}, & P &= \frac{P^{(d)}}{\rho_0^{(d)} V_0^{(d)2}}, \\
 \vec{i} &= \frac{\vec{i}^{(d)} H^{(d)}}{D^{(d)} C_0^{(d)} F}, & \eta &= \frac{\eta^{(d)}}{D^{(d)} C_0^{(d)} F}, & \vec{E} &= \frac{\vec{E}^{(d)} H^{(d)} F}{R T_0^{(d)}}, & \varphi &= \frac{\varphi^{(d)} F}{R T_0^{(d)}} \\
 B_E &= \frac{R C_0^{(d)}}{\rho_0^{(d)} C_0^{(d)}}, & A_C &= \frac{C_0^{(d)} A_C^{(d)}}{\Delta \rho_0^{(d)}} = \frac{C_0^{(d)} \partial \rho^{(d)}}{\Delta \rho_0^{(d)} \partial C^{(d)}}, & A_T &= \frac{T_0^{(d)} A_T^{(d)}}{\Delta \rho_0^{(d)}} = \frac{T_0^{(d)} \partial \rho^{(d)}}{\Delta \rho_0^{(d)} \partial T^{(d)}}, \\
 D_i &= \frac{D_i^{(d)}}{D^{(d)}}, & i &= 1, 2, & k &= k^{(d)} H^{(d)};
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$Gr = \frac{\bar{\Delta} \rho_0^{(d)} g^{(d)} (H^{(d)})^3}{\rho_0^{(d)} (\nu^{(d)})^2}, \quad Re = \frac{V_0^{(d)} H^{(d)}}{\nu^{(d)}}, \quad Pe = \frac{V_0^{(d)} H^{(d)}}{D^{(d)}}, \quad Pr = \frac{\nu^{(d)}}{\alpha^{(d)}} - \text{გრასხოვის,}$$

რეინოლდსის, პეკლეს და პრანდტლის კრიტერიალური რიცხვები შესბამისად.

$$i_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L i_x(t, 0, y) dy = \frac{1}{L} \int_0^L i_x(t, 1, y) dy = const, \tag{2.87}$$

აწ  $i_{av} = (i_{av}^{(d)} H^{(d)}) / (D^{(d)} C_0^{(d)} F^{(d)})$ , ხოლო ა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_x}{\partial t} &= -V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) - \\
 &- \frac{Gr}{Re^2} (A_C (C - 1) + A_T (T - 1)) \sin \gamma,
 \end{aligned} \tag{2.88.ა}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = -V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) -$$



$$-\frac{Gr}{Re^2} (A_C(C-1) + A_T(T-1)) \cos \gamma, \quad (2.88.ბ)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad (2.90)$$

$$C \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.91)$$

$$i_x = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad i_y = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.92)$$

$$E_x = \frac{1}{K_{I1}C} \left( i_x - K_{I2} \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad E_y = \frac{1}{K_{I1}C} \left( i_y - K_{I2} \frac{\partial C}{\partial y} \right), \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -V_x \frac{\partial T}{\partial x} - V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{B_E}{Pe} (i_x E_x + i_y E_y). \quad (2.94)$$

$$\text{ს) } K_{I1} = z_1^2 n_1 D_1 + z_2^2 n_2 D_2, \quad K_{I2} = -(z_1 n_1 D_1 + z_2 n_2 D_2).$$

უგანზომილებო ელექტრული პოტენციალი გამოითვლება ფორმულით:

$$\varphi = -\int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dy. \quad (2.95)$$

ზ სისტემა იღებს (2.88)...(2.94) - ის ანალოგიურ სახეს, (2.91)...(2.93) განტოლებების გამოკლებით, რომლებიც იცვლებიან შემდეგებით:

$$\operatorname{div}(C \nabla \varphi) + K_\varphi \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$i_x = K_{I1} C E_x + K_{I2} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad i_y = K_{I2} C E_y + K_{I2} \frac{\partial C}{\partial y},$$

$$\text{სადაც } K_\varphi = \frac{z_1 n_1 D_1 + z_2 n_2 D_2}{z_1^2 n_1 D_1 + z_2^2 n_2 D_2} = \frac{D_1 - D_2}{z_1 D_1 - z_2 D_2} = -\frac{K_{I2}}{K_{I1}}$$

(2.50) პირობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\bar{\Delta} \varphi = \varphi|_{x=1} - \varphi|_{x=0} = d_\varphi = \text{const}. \quad (2.96)$$

(2.81), (2.81ა), (2.81ბ) სასაზღვრო პირობები მიიღებენ შემდეგ ორგანზომილებიან სახეს:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \Big|_{x=0, x=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \Big|_{y=0, y=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = i_x t_A, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=1} = -i_x t_K, \quad C|_{y=0} = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0; \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k(T-1), \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = k(T-1), \quad T|_{y=0} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0;$$

$$i_y \Big|_{x=x=1, y=0, y=L} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad \eta|_{y=0} = 0, \quad \eta|_{y=L} = i_{\alpha\nu} L; \quad (2.97\text{ა})$$

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=1} = d_\varphi, \quad \varphi|_{y=0} = d_\varphi x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0. \quad (2.97\text{ბ})$$

ამ განტოლებებში შემავალი კრიტერიალური რიცხვების მნიშვნელობები, შესწავლილი ელექტრო ქიმიური სისტემებისთვის იცვლებიან ცხრილი 2.1 ნაჩვენებ ზღვარებში

ცხრილი 2.1 – Re Pe Gr Pr რიცხვების მნიშვნელობები შესასწავლი სისტემებისათვის

რიცხვი	Re	Pe	Gr	Pr
მნიშვნელობა	0.1 - 100	100 - 10000	10 - 10000	1 - 10

## 2.5. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის გარდაქმნა

რომ ჩამოვიცილოთ P წნევის ფუნქცია, (2.88ა) გავაწარმოოთ y-ით, ხოლო (2.88ბ) x-ით და 1-ს გამოვაკლოთ მე-2. მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = \\ & = - \left[ \frac{\partial V_x}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + V_x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial V_y}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + V_y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right]. \quad (2.98)$$

შემოვიტანოთ გრიგალის  $\xi$  და დენის  $\psi$  ფუნქციები [71]:

$$\xi = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad (2.99)$$

ხოლო  $\psi$  ფუნქციას განვსაზღვრავთ თანაფარდობებით

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y. \quad (2.100)$$

მაშინ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \xi. \quad (2.101)$$

(2.64) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & -\frac{\partial(V_x \xi)}{\partial x} - \frac{\partial(V_y \xi)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \\ & -\frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

ეს ეგრეთ წოდებული კონსერვატიული, ან დივერგენციული ფორმა განტოლებების. თუ გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას (2.89) შეიძლება მივიღოთ არაკონსერვატიული ფორმა.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & -V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \\ & -\frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

## 2.6. ამოცანის მათემატიკური დასმა

ამოცანის მათემატიკური დასმის ქვეშ უნდა მივიღოთ სასაზღვრო ამოცანა უგანზომილებო სახით, რომლის ამოხსნის შედეგადაც ყველა რიცხვითი და ფუნქციონალური მახასიათებლები გამოითვლებიან კონკრეტული ფორმულით.

### 2.6.1. გალვანოსტატიკური მოდელი

გალვანოსტატიკური მოდელი, დაფუძნებული ა სისტემაზე აღიწერება შემდეგი სასაზღვრო ამოცანით. განტოლებები წარმოდგენილია იმ თანმიმდევრობით რომლითაც შემდგომში ხდება მათი რიცხვითი ამოხსნა.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad (2.104)$$

$$C \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (2.105)$$

$$i_x = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad i_y = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.106)$$

$$E_x = \frac{1}{K_{I1}C} \left( i_x - K_{I2} \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad E_y = \frac{1}{K_{I1}C} \left( i_y - K_{I2} \frac{\partial C}{\partial y} \right). \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -V_x \frac{\partial T}{\partial x} - V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{BE}{Pe} (i_x E_x + i_y E_y), \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & -V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \\ & - \frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right], \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \xi, \quad (2.110)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.111)$$

სადაც  $K_{I1} = z_1^2 n_1 D_1 + z_2^2 n_2 D_2$ ,  $K_{I2} = -(z_1 n_1 D_1 + z_2 n_2 D_2)$ ;

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \Big|_{x=0, x=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \Big|_{y=0, y=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = i_x t_A, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=1} = -i_x t_K, \quad C|_{y=0} = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k(T-1), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = k(T-1), \quad T|_{y=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=L} = 0; \quad (2.112)$$

$$i_y|_{x=,x=1,y=0,y=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0,x=1} = 0, \quad \eta|_{y=0} = 0, \quad \eta|_{y=L} = i_{av}L;$$

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას (2.111) და სასაზღვრო პირობებებს (2.112) სიჩქარეზე  $\vec{V}$ , დენის  $\psi$  ფუნქციისათვის განისაზღვრება სასაზღვრო პირობები

$$\psi|_{(x,y) \in \epsilon} = -x + \psi_0, \quad (2.113)$$

სადაც  $s$  - გამტკნარების არხის განსახილველი სწორხაზოვანი უბნის საზღვარი,  $\psi_0$ -რადაც მუდმივა. რადგან არსებითს წარმოადგენს მხოლოდ  $\psi$ -ს დაცემა, მოხერხებულობისათვის ჩავთვალოთ  $\psi_0=1$ ,

გრიგალის  $\xi$  ფუნქციისათვის მოცემულია ტომის სასაზღვრო პირობები ( პუნქტი 3.1.1) როგორც წინა პუნქტებში აღვნიშნავდით, არაკოსერვატიული ფორმის (2.120) ნაცვლად შეიძლება განვიხილოთ განტოლების კონსერვატიული (დივერგენციული) ფორმა .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & \frac{\partial(-V_x \xi)}{\partial x} - \frac{\partial(V_y \xi)}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \\ & - \frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right], \end{aligned} \quad (2.114)$$

ელექტრული პოტენციალი გამოითვლება ფორმულით (2.95)

## 2.6.2. პოტენციოსტატიკური მოდელი

პოტენციოსტატიკური მოდელი დაფუძნებული  $\mathcal{B}$  სისტემაზე, აღიწერება (2.70)- ( 2.79) ანალოგიური სასაზღვრო ამოცანით, გამონაკლისია ელექტრული მახასიათებლების განტოლებები (2.71)..( 2.73) და სასაზღვრო პირობები დენის სიმკვრივის  $\vec{i}$  და  $\eta$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad (2.115)$$

$$\operatorname{div}(C\nabla\varphi) + K_\varphi \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.116)$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad (2.117)$$

$$i_x = K_{I1} C E_x + K_{I2} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad i_y = K_{I1} C E_y + K_{I2} \frac{\partial C}{\partial y}, \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -V_x \frac{\partial T}{\partial x} - V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{B_E}{Pe} (i_x E_x + i_y E_y), \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = & -V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - V_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) - \\ & - \frac{Gr}{Re^2} \left[ A_C \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial C}{\partial x} \cos \gamma \right) + A_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \sin \gamma - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \gamma \right) \right], \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \xi, \quad (2.121)$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.122)$$

სადაც 
$$K_\varphi = \frac{z_1 n_1 D_1 + z_2 n_2 D_2}{z_1^2 n_1 D_1 + z_2^2 n_2 D_2} = \frac{D_1 - D_2}{z_1 D_1 - z_2 D_2} = -\frac{K_{I2}}{K_{I1}},$$

$$K_{I1} = z_1^2 n_1 D_1 + z_2^2 n_2 D_2, \quad K_{I2} = -(z_1 n_1 D_1 + z_2 n_2 D_2);$$

$$\left. \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \right|_{x=0, x=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \right|_{y=0, y=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \psi|_{(x,y) \in b} = 1 - x$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = i_x t_A, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=1} = -i_x t_K, \quad C|_{y=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=1} = 0; \quad (2.123)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -k(T-1), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = k(T-1), \quad T|_{y=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=L} = 0;$$

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=1} = d_\varphi, \quad \varphi|_{y=0} = d_\varphi x, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=L} = 0.$$

სადაც ს-გამტკნარების არხის განსახილველი სწორხაზოვანი უბნის საზღვარი,  $d_\varphi$ -პოტენციალის მოცემული ვარდნა მემბრანებს შორის სივრცეზე.

## 2.7. დასკვნები

1. თეორიული კვლევის საფუძველზე მოხდა განტოლებების (2.14), (2.20), (2.27) მიღება, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ გავიანგარიშოთ მემბრანის ზედაპირზე სიჩქარის და მხები ძაბვის პულსაციური მდგენელები და აურევადი სასაზღვრო ფენის სისქე.

2. მოხდა ნავიე-სტოქსის, ნერსტ-პლანკის, მატერიალური ბალანსის, სითბოგამტარობის, ელექტრო ნეიტრალობის და ელექტრული დენის გავლის პირობების საწყის განტოლებათა სისტემის დეკომპოზიცია. შედეგად მიღებულია გახლეჩილი განტოლებები სითხის გრიგალის და დენის ფუნქციისათვის, ხსნარის მოძრაობის სიჩქარისათვის, მისი კონცენტრაციის, ტემპერატურის და აგრეთვე ელექტრული პოტენციალის, დამაბულობის და დენის სიმკვრივის გამტკნარების არხის შიგნით და მემბრანა ხსნარი ფაზებსშორის საზღვრებზე.

3. გამოყვანილია ახალი განტოლება ელექტრული დენის სიმკვრივისათვის, რომელიც ადგენს შესაბამისობას დენის სიმკვრივესა და ელექტროლიტის კონცენტრაციას შორის.

4. ზემოდ მიღებული დეკომპოზიციური განტოლებების საფუძველზე აგებულია ორი საკმაოდ ზოგადი ელექტრო მემბრანული სისტემებში განზავებულ ხსნარებში ბინარული ელექტროლიტის არასტაციონალური არაიზოთერმული გადატანის მათემატიკური მოდელი, ელექტრო ნეიტრალობის პირობების შესრულების დროს, გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედების გათვალისწინებით. ეს მოდელები წარმოადგენენ სასაზღვრო ამოცანებს ზემოდ ნაჩვენები კერძო წარმოებულებიანი არა წრფივი განტოლებათა სისტემისათვის. პირველ მათგანს ვუწოდეთ პოტენციოსტატიკური, ხოლო მეორეს-გალვანოსტატიკური.

### თავი 3. ელექტრომემბრანულ სისტემებში მასაგადატანის რიცხვითი ანალიზი

ეს თავი ეძღვნება მე-2-ე თავში მოცემული მათემატიკური მოდელების რიცხვით ანალიზს.

#### 3.1. სასრულ-სხვაობით განტოლებებზე გადასვლა

მოცემულ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ განსახილველ ბადეზე სასრულ-სხვაობითი მეთოდით [7,20]. საანგარიშო არეს  $x$  კორდინატით (ინტერვალი  $[0;1]$ ) დავყოფთ  $h_x = 1/M$  (ბიჯი სიგანეზე) სიგრძის ტოლ  $M$  ინტერვალად.  $Y$  კორდინატით (ინტერვალი  $[0;1]$ )- ტოლ  $N$  ინტერვალად სიგრძით  $h_y = L/N$  (ბიჯი სიგრძეზე). ვსაზღვრავთ აგრეთვე სიდიდეს  $h_t$ -ბიჯი ძირითადი  $t$  დროის მიხედვით და ბიჯებს დროებით  $\tau_1$  და  $\tau_2$  (2.105), (2.110), (2.116) განტოლებების ამოსახსნელად დადგენის მეთოდით - შესაბამისად,  $h_{\tau_1}$  და  $h_{\tau_2}$ .

$x_i$ -  $i$  წერტილის კორდინატი  $x$  ღერძზე,  $y_j$  -  $j$  წერტილის კორდინატი  $y$  ღერძზე,  $t_n$ -  $n$  წერტილის კორდინატი დროის ღერძზე.

$$x_i = ih_x (i = 0, 1, \dots, M), \quad y_j = jh_y (j = 0, 1, \dots, N), \quad t_n = nh_t (n = 0, 1, \dots).$$

ფუნქციისათვის  $f(x, y, t)$  რიცხვითი ამოხსნა კვანძში  $(i, j, n)$  აღვნიშნოთ  $f_{ij}^n$ . ამ დროს ვიტყვი, რომ  $f$  ფუნქცია გამოთვლილია  $n$ -ურ დროით ფენაში.

როგორც ცნობილია [7] ცხადი სქემა ადებს ხისტ შეზღუდვებს ბიჯზე დროის მიხედვით  $h_t$ . მაგალითად [67], ნავიე-სტოქსის განტოლებისათვის:

$$h_t \leq \frac{1}{2(1/h_x^2 + 1/h_y^2)}.$$

ამიტომ სამუშაოში რეალიზებულია აგრეთვე უფრო რთული, მაგრამ უფრო მწარმოებლური და მდგრადი არაცხადი სქემა.

გალვანოსტატიკური და პოტენციოსტატიკური მოდელების განტოლებათა სისტემებში კერძო წარმოებულების შესაცვლელად (პარაგრაფი 2.5) გამოვიყენებთ 5-



წერტილიან შაბლონს (განსხვავებული ცხადი და არაცხადი სქემებისათვის) და შევადგენთ ამ სისტემის სასრულ-სხვაობით სქემებს. წინასწარ (ჩაწერის შემოკლებისათვის) ვსაზღვრავთ შემდეგ სხვაობით ოპერატორებს:

$$\bar{\Delta}(\Phi) = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j-1}}{h_y^2}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{d}_0(\Phi, p) = \begin{cases} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h_x}, & p = 1 \\ \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2h_y}, & p = 2' \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\tilde{d}(\Phi, p) = \begin{cases} \text{თუ, } p = 1, \text{ მაშინ } \begin{cases} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i-1,j}}{h_x}, & V_{x;y} \geq 0 \\ \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{ij}}{h_x}, & V_{x;y} < 0 \end{cases} \\ \text{თუ, } p = 2, \text{ მაშინ } \begin{cases} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i,j-1}}{h_y}, & V_{y;ij} \geq 0 \\ \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{ij}}{h_y}, & V_{y;ij} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\tilde{d}_M(\Phi, p) = \begin{cases} \text{თუ, } p = 1, \text{ მაშინ } \begin{cases} V_{x;ij} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i-1,j}}{h_x}, & V_{x;y} \geq 0 \\ V_{x;ij} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{ij}}{h_x}, & V_{x;y} < 0 \end{cases} \\ \text{თუ, } p = 2, \text{ მაშინ } \begin{cases} V_{y;ij} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i,j-1}}{h_y}, & V_{y;ij} \geq 0 \\ V_{y;ij} \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{ij}}{h_y}, & V_{y;ij} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.4a)$$

ან თუ გამოიყენება კონსერვატიული სქემა,

$$\tilde{d}_M(\Phi, p) = \begin{cases} \text{თუ, } p = 1, \text{ მაშინ } \begin{cases} \frac{V_{x;ij}\Phi_{ij} - V_{x;i-1,j}\Phi_{i-1,j}}{h_x}, & V_{x;ij} > 0 \\ \frac{V_{x;i+1,j}\Phi_{i+1,j} - V_{x;ij}\Phi_{ij}}{h_x}, & V_{x;ij} < 0 \\ 0, & V_{x;ij} = 0 \end{cases} \\ \text{თუ, } p = 2, \text{ მაშინ } \begin{cases} \frac{V_{y;ij}\Phi_{ij} - V_{y;i,j-1}\Phi_{i,j-1}}{h_y}, & V_{y;ij} > 0 \\ \frac{V_{y;i,j+1}\Phi_{i,j+1} - V_{y;ij}\Phi_{ij}}{h_y}, & V_{y;ij} < 0 \\ 0, & V_{y;ij} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.4b)$$

ქვემოთ წარმოდგენილია სხვაობითი განტოლებები გალვანოსტატიკური და პოტენციოსტატიკური მოდელებისათვის.

### 3.1.1. ცხადი სქემა

სხვაობითი სქემის თეორიის შესაბამისად კერძო წარმოებულებიანი განტოლებები (2.104)...(2.109) იცვლებიან შესაბამისად შემდეგი სხვაობითი განტოლებებით:

$$C_{ij}^{n+1} = C_{ij}^n + h_t \left[ \frac{\tilde{\Delta}(C^n)}{Pe} - \tilde{d}_M(C^n, 1) - \tilde{d}_M(C^n, 2) \right], \quad (3.5)$$

$$\eta_{ij}^{n+1} = \eta_{ij}^n + h_{r2} [C_{ij}^{n+1} \tilde{\Delta}(\eta^n) - \tilde{d}(C^{n+1}, 1) \cdot \tilde{d}(\eta^n, 1) - \tilde{d}(C^{n+1}, 2) \cdot \tilde{d}(\eta^n, 2)], \quad (3.6)$$

$$i_{x;ij}^{n+1} = \tilde{d}_0(\eta^{n+1}, 2), \quad i_{y;ij}^{n+1} = -\tilde{d}_0(\eta^{n+1}, 1), \quad (3.7)$$

$$E_{x;ij}^{n+1} = \frac{i_{x;ij}^{n+1} - K_{I2} \tilde{d}_0(C^{n+1}, 1)}{K_{I1} C_{ij}^{n+1}}, \quad E_{y;ij}^{n+1} = \frac{i_{y;ij}^{n+1} - K_{I2} \tilde{d}_0(C^{n+1}, 2)}{K_{I1} C_{ij}^{n+1}}, \quad (3.8)$$

$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^n + h_t \left[ \frac{\tilde{\Delta}(T^n)}{RePr} - \tilde{d}_M(T^n, 1) - \tilde{d}_M(T^n, 2) + \frac{BE}{Pe} (i_{x;ij}^{n+1} E_{x;ij}^{n+1} + i_{y;ij}^{n+1} E_{y;ij}^{n+1}) \right], \quad (3.9)$$

$$\xi_{ij}^{n+1} = \xi_{ij}^n + h_t \left[ \frac{\tilde{\Delta}(\xi^n)}{Re} - \tilde{d}_M(\xi^n, 1) - \tilde{d}_M(\xi^n, 2) - \frac{Gr}{Re^2} \left\{ (A_c \tilde{d}(C^{n+1}, 2) + A_T \tilde{d}(T^{n+1}, 2)) \sin \gamma - (A_c \tilde{d}(C^{n+1}, 1) + A_T \tilde{d}(T^{n+1}, 1)) \cos \gamma \right\} \right], \quad (3.10)$$

$$(i = 1..M - 1, j = 1..N - 1).$$

(2.41ბ) განტოლების ამოხსნისათვის ვიყენებთ ლიბმანის ექსტრაპოლირებულ მეთოდს („თანმიმდევრობით ზემო რელაქსაციის მეთოდი“) [67] რელაქსაციის პარამეტრის  $W_0$  ოპტიმალური მნიშვნელობით:

$$\psi_{ij}^{n+1} = (1 - w_0) \psi_{ij}^n + \frac{w_0}{2(1+\beta^2)} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^{n+1} + \beta^2 \psi_{i,j+1}^n + \beta^2 \psi_{i,j-1}^{n+1} - h_x^2 \xi_{ij}^n), \quad (3.11)$$

$$\text{სადაც } w_0 = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - w_1}}{w_1}, \quad w_1 = \left[ \frac{\cos(\pi/(M-1)) + \beta^2 \cos(\pi/(N-1))}{1 + \beta^2} \right]^2,$$

$$\beta = h_x/h_y, i = 1..M - 1, j = 1..N - 1.$$

სიჩქარის ახალ (n+1) ფენაში (2.111) ფორმულებით საპოვნელად გამოიყენება გამოსახულებები:

$$V_{x;ij}^{n+1} = \tilde{d}_0(\psi^{n+1}, 2), \quad (3.12ა)$$

$$V_{y;ij}^{n+1} = -\tilde{d}_0(\psi^{n+1}, 1), \quad (i = 1..M - 1, j = 1..N - 1). \quad (3.12ბ)$$

ინტეგრალები ფორმულაში (2.95) იცვლება ტრაპეციის კვადრატული ფორმულებით, ე.ი. ბადის მეზობელ კვანძებში დამაბულობის E საშუალო მნიშვნელობების ნამრავლის ჯამებით:

$$\varphi_{ij}^{n+1} = -h_x \sum_{k=1}^i \frac{E_{x;kj}^{n+1} + E_{x;k-1}^{n+1}}{2} - h_y \sum_{l=1}^j \frac{E_{y;il}^{n+1} + E_{y;i,l-1}^{n+1}}{2}, \quad (i = 0..M, j = 0..N). \quad (3.13)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ  $\sum_{i=1}^0 X_m = 0, \forall X_m$ .

სასაზღვრო პირობები მოცემულია შემდეგი ტოლობებით:

$$\begin{aligned} \psi_{i,0} &= 1 - i \cdot h_x, & \psi_{i,N} &= 1 - i \cdot h_x, \\ V_{x;i,0} &= 0, & V_{x;i,N} &= 0, & V_{y;i,0} &= 1, & V_{y;i,N} &= 1, \\ C_{i,0} &= 1, & C_{i,N} &= C_{i,N-1}, \\ T_{i,0} &= 1, & T_{i,N} &= T_{i,N-1}, \\ \eta_{i,0} &= 0, & \eta_{i,N} &= i_{\alpha\nu} L, & & & (i = 1..M - 1), \\ i_{x;i,0} &= (\eta_{i,1} - \eta_{i,0})/h_y, & i_{x;i,N} &= (\eta_{i,N} - \eta_{i,N-1})/h_y, \\ i_{y;i,0} &= 0, & i_{y;i,N} &= 0, & & & (i = 0..M), \\ E_{x;i,0} &= \frac{i_{x;i,0} - K_{I2} \tilde{d}_0(C, 1)}{K_{I1} C_{i,0}}, & E_{x;i,N} &= \frac{i_{x;i,N} - K_{I2} \tilde{d}_0(C, 1)}{K_{I1} C_{i,N}}, & & & (i = 1..M - 1), \\ E_{y;i,0} &= \frac{i_{y;i,0} - K_{I2} (C_{I,1} - C_{i,0})/h_y}{K_{I1} C_{i,0}}, & E_{y;i,N} &= \frac{i_{y;i,N} - K_{I2} (C_{I,N} - C_{i,N-1})/h_y}{K_{I1} C_{i,N}}, & & & (i = 0..M); \\ \psi_{0,j} &= 1, & \psi_{M,j} &= 0, & & & (3.14) \\ V_{x;0,j} &= 0, & V_{x;M,j} &= 0, & V_{y;0,j} &= 0, & V_{y;M,j} &= 0, \\ C_{0,j} &= c_{1j} - h_x t_A i_{x,0,j}, & C_{M,j} &= C_{M-1,j} - h_x t_k i_{x,M,j}, \\ T_{0,j} &= T_{1,j} + h_x k (T_{1,j} - 1), & T_{M,j} &= T_{M-1,j} + h_x k (T_{M-1,j} - 1), \\ \eta_{0,j} &= \eta_{1,j}, & \eta_{M,j} &= \eta_{M-1,j} & & & (i=0..N), \\ i_{x;0,j} &= \tilde{d}_0(\eta), & i_{x;M,j} &= \tilde{d}_0(\eta), \end{aligned}$$

$$i_{y;0,j} = 0, \quad i_{y;M,j} = 0, \quad (j = 1..N - 1),$$

$$E_{x;0,j} = \frac{i_{x;0,j} - K_{I2}(C_{1,i} - C_{0,j})/h_x}{K_{I1}C_{0,j}}, \quad E_{x;i,N}$$

$$= \frac{i_{x;M,j} - K_{I2}(C_{M,i} - C_{M-1,j})/h_x}{K_{I1}C_{M,j}}, \quad (j = 0..N),$$

$$E_{y;0,j} = \frac{i_{y;0,j} - K_{I2}\tilde{d}_0(C, 2)}{K_{I1}C_{0,j}}, \quad E_{y;M,j} = \frac{i_{y;M,j} - K_{I2}\tilde{d}_0(C, 2)}{K_{I1}C_{M,j}}, \quad (j = 1..N - 1).$$

გრიგალის ფუნქციის სასაზღვრო პირობები განისაზღვრება სპეციალური სახით. გრიგალის გადატანის განტოლება (2.109) აღწერს გრიგალის გავრცელებას კონვექციისა და დიფუზიის ხარჯზე, მაგრამ გრიგალი წარმოიშობა არა შიგა წერტილებში, არამედ საზღვრებზე, სადაც ისმება მიწებების პირობები. ამიტომ მნიშვნელოვანია განვსაზღვროთ გრიგალის მნიშვნელობა კედელზე. ასეთი სასაზღვრო პირობის მაგალითად აღებულია ტომის პირველი რიგის პირობა [67], კედლის ორიენტაციისა და საზღვარზე მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად შეიძლება ჩავწეროთ

$$\xi_w = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\delta n^2} + O(\delta n), \quad (3.15)$$

სადაც  $\delta n$ -მანძილი კედელთან უახლოესი საკვანძო  $W+1$  წერტილიდან მისი კედელზე პროექციამდე  $W$ .

ეს პირობა საკმაოდ საიმედოა და როგორც ექსპერიმენტებმა გვიჩვენეს [113], მივყავართ შედეგებთან, რომლებიც ახლოსაა უმაღლესი რიგის ფორმებით მიღებულ შედეგებთან.

ტომის პირობის გამოყენებით, ვადგენთ სხვაობით სქემებს გრიგალის ფუნქციის  $\xi$  სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის

$$\xi_{i,0} = 0, \quad \xi_{i,N} = 0, \quad (i = 1.. M - 1),$$

$$\xi_{0,j} = \frac{2(\psi_{1,j} - \psi_{0,j})}{h_x^2}, \quad \xi_{M,j} = \frac{2(\psi_{M-1,j} - \psi_{M,j})}{h_x^2}, \quad (j = ..N). \quad (3.16)$$

განტოლებაში ელექტრული პოტენციალისათვის (2.116) შედის გამოსახულება  $div(C \cdot \nabla \varphi)$  რომლის სხვაობით წარმოდგენიდან დამოკიდებულია (2.116) -თვის სხვაობითი სქემის სახე. [68] დაყრდნობით, ვიღებთ შემდეგ წარმოდგენებს:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C \cdot \nabla \varphi) = & \frac{1}{h_x} \left[ \frac{C_{i+1,j} + C_{i,j}}{2} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} - \frac{C_{i,j} + C_{i-1,j}}{2} \cdot \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_x} \right] + \\ & + \frac{1}{h_y} \left[ \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j}}{2} \cdot \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} - \frac{C_{i,j} + C_{i,j-1}}{2} \cdot \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{h_y} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

აქედან ვიღებთ სხვაობით სქემას განტოლებებისათვის (2.116):

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{n+1} = & \varphi_{ij}^n + h_{r2} \left[ \frac{1}{2h_x^2} \left( (C_{i+1,j}^{n+1} + C_{ij}^{n+1}) (\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{ij}^n) - (C_{ij}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1}) (\varphi_{ij}^n - \varphi_{i-1,j}^{n+1}) \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2h_y^2} \left( (C_{i,j+1}^{n+1} + C_{ij}^{n+1}) (\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{ij}^n) - (C_{ij}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}) (\varphi_{ij}^n - \varphi_{i,j-1}^{n+1}) \right) + K_\varphi \tilde{\Delta}(C^{n+1}) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(i = 1..M - 1, j = 1..N - 1).$$

სასრულ-სხვაობითი სქემები განტოლებებისათვის 2.117 და 2.118 გამოიყურებიან შემდეგი სახით:

$$E_{x,ij}^{n+1} = -\tilde{d}_0(\varphi^{n+1}, 1), \quad (3.19a)$$

$$E_{y,ij}^{n+1} = -\tilde{d}_0(\varphi^{n+1}, 2), \quad (3.19b)$$

$$i_{x,ij}^{n+1} = K_{I1} C_{ij}^{n+1} E_{x,ij}^{n+1} + K_{I2} \tilde{d}_0(C^{n+1}, 1), \quad (3.20a)$$

$$i_{y,ij}^{n+1} = K_{I1} C_{ij}^{n+1} E_{y,ij}^{n+1} + K_{I2} \tilde{d}_0(C^{n+1}, 2), \quad (i = 1..M - 1, j = 1..N - 1) \quad (3.20b)$$

სასაზღვრო პირობები განისაზღვრებიან (3.14) ანალოგიურად გამონაკლისია შემდეგი:

$$\varphi_{i,0} = d_\varphi \cdot i \cdot h_x,$$

$$\varphi_{i,N} = \varphi_{i,N-1},$$

$$E_{x;i,0} = -d_\varphi, E_{x;i,N} = -\tilde{d}_0(\varphi, 1),$$

$$E_{y;i,0} = (\varphi_{i,0} - \varphi_{i,1})/h_y, \quad E_{y;i,N} = 0,$$

$$i_{x;i,0} = K_{I1} C_{i,0} E_{x,i,0}, \quad i_{x;i,N} = K_{I1} C_{i,N} E_{x,i,N} + K_{I2} \tilde{d}_0(C, 1), \quad (i = 1..M - 1),$$

$$i_{y;i,0} = K_{I1} C_{i,0} E_{y,i,0} + K_{I2} (C_{i,1} - C_{i,0})/h_y, \quad i_{y;i,N} = K_{I1} C_{i,N} E_{y,i,N}, \quad (i = 0..M);$$

$$\varphi_{0j} = 0, \quad \varphi_{Mj} = d_\varphi, \quad (3.21)$$

$$E_{x;0,j} = (\varphi_{0j} - \varphi_{1j})/h_x E_{x;M,j} = (\varphi_{M-1,j} - \varphi_{M,j})/h_x E_{y;0,j} = 0, \quad E_{y;M,j} = 0,$$

$$i_{x;0,j} = K_{I1} C_{0,j} E_{x;0,j} + K_{I2} t_A i_{x;0,j}, \quad i_{x;M,j} = K_{I1} C_{M,j} E_{x;M,j} - K_{I2} t_K i_{x;M,j},$$

$$(j = 0..N)$$

$$i_{y;0,j} = K_{I1} C_{0,j} E_{y;0,j} + K_{I2} \tilde{d}_0(C, 2), \quad i_{y;M,j} = K_{I1} C_{M,j} E_{y;M,j} + K_{I2} \tilde{d}_0(C, 2), \quad (j = 1..N - 1)$$

### 3.1.2. არაცხადი სქემა

გალვანო და პოტენციოსტატიკური მოდელების განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის, არაცხადი სქემის დახმარებით გამოიყენება ცვლადი მიმართულების მეთოდი ან უფრო ზუსტად, განივ-გრძივი დევნის მეთოდი [67]. განტოლება (2.104) გრიგალის ფუნქციისათვის თითოეულ ფენაში რიცხობრივად იხსნება სქემით

$$\frac{C_{ij}^* - C_{ij}^n}{h_t/2} = -V_{x,ij}^n \frac{C_{i+1,j}^* - C_{i-1,j}^*}{2h_x} - V_{y,ij}^n \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2h_y} +$$

$$+ \frac{1}{Pe} \left( \frac{C_{i+1,j}^* - 2C_{ij}^* + C_{i-1,j}^*}{h_x^2} + \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right), \quad (3.22a)$$

$$\frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^*}{h_t/2} = -V_{x,ij}^n \frac{C_{i+1,j}^* - C_{i-1,j}^*}{2h_x} - V_{y,ij}^n \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y} +$$

$$+ \frac{1}{Pe} \left( \frac{C_{i+1,j}^* - 2C_{ij}^* + C_{i-1,j}^*}{h_x^2} + \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{ij}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right), \quad (3.22b)$$

$$(i = 1..M - 1, j = 1..N - 1).$$

აქ გამოყენებულია ეგრეთ წოდებული „ცენტრალური სხვაობა“ პირველი წარმოებულის აპროქსიმაციისათვის. ინდექსით \* აღნიშნულია  $(n+1/2)$  შუალედური ფენა. აღვნიშნოთ  $K_{Cx} = 1/(Pe \cdot h_x^2)$ ,  $K_{Cy} = 1/(Pe \cdot h_y^2)$  და განვსაზღვროთ სასაზღვრო პირობები (3.14) შესაბამისად, მივიღებთ სისტემების ორ ერთობლიობას კოეფიციენტების 3 დიაგონალიანი მატრიცებით:

როცა  $j=1..N-1$  :

$$\begin{aligned} & \left( K_{Cx} + \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) C_{i-1,j}^* - 2 \left( K_{Cx} + \frac{1}{h_t} \right) C_{ij}^* + \left( K_{Cx} - \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) C_{i+1,j}^* = \\ & = \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} - K_{Cy} \right) C_{i,j+1}^n - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{Cy} \right) C_{ij}^n - \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} + K_{Cy} \right) C_{i,j-1}^n, \quad (i = 1..M-1), \end{aligned} \quad (3.23\alpha)$$

$$C_{0,j}^* = C_{1,i}^* - t_a h_x i_{x;0}^n, \quad C_{M,j}^* = C_{M-1,j}^* - t_k h_x i_{x;M,j}^n;$$

როცა  $i=1..M-1$

$$\begin{aligned} & \left( K_{Cy} + \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) C_{i,j-1}^{n+1} - 2 \left( K_{Cy} + \frac{1}{h_t} \right) C_{ij}^{n+1} + \left( K_{Cy} - \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) C_{i,j+1}^{n+1} = \\ & = \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} - K_{Cx} \right) C_{i+1,j}^* - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{Cx} \right) C_{ij}^* - \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} + K_{Cx} \right) C_{i-1,j}^*, \quad (i = 1..N-1), \end{aligned} \quad (3.23\beta)$$

$$C_{i,0}^{n+1} = 1, \quad C_{i,N}^{n+1} = C_{i,N-1}^{n+1}.$$

ანალოგიურად (3.14),(3.16) სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მივიღებთ სისტემებს განტოლებებისათვის (2.105),( 2.108) და (2.109);

როცა  $j=i..N-1$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} + \frac{\tilde{d}_0(C,1)}{2h_x} \right) \eta_{i-1,j}^* - 2 \left( \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} + \frac{1}{h_{r2}} \right) \eta_{ij}^* + \left( \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} - \frac{\tilde{d}_0(C,1)}{2h_x} \right) \eta_{i+1,j}^* = \\ & = \left( \frac{\tilde{d}_0(C,2)}{2h_y} - \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} \right) \eta_{i,j+1}^n - 2 \left( \frac{1}{h_{r2}} - \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} \right) \eta_{ij}^n - \left( \frac{\tilde{d}_0(C,2)}{2h_y} + \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} \right) \eta_{i,j-1}^n, \end{aligned} \quad (3.24\alpha)$$

$$(i = 1..M-1), \quad \eta_{0,j}^* = \eta_{1,j}^*, \quad \eta_{M,j}^* = \eta_{M-1,j}^*;$$

როცა  $i=1..M-1$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} + \frac{\tilde{d}_0(C,2)}{2h_y} \right) \eta_{i,j-1}^{n+1} - 2 \left( \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} + \frac{1}{h_{r2}} \right) \eta_{ij}^{n+1} + \left( \frac{C_{ij}^n}{h_y^2} - \frac{\tilde{d}_0(C,2)}{2h_y} \right) \eta_{i,j+1}^{n+1} = \\ & = \left( \frac{\tilde{d}_0(C,1)}{2h_x} - \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} \right) \eta_{i+1,j}^* - 2 \left( \frac{1}{h_{r2}} - \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} \right) \eta_{ij}^* - \left( \frac{\tilde{d}_0(C,1)}{2h_x} + \frac{C_{ij}^n}{h_x^2} \right) \eta_{i-1,j}^*, \end{aligned} \quad (3.24\beta)$$

$$(i = 1..N-1), \quad \eta_{i,0}^{n+1} = 0, \quad \eta_{i,N}^{n+1} = i_{\alpha\nu} L;$$

როცა  $j=1..N-1$ :

$$\begin{aligned}
& \left( K_{Tx} + \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) T_{i-1,j}^* - 2 \left( K_{Tx} + \frac{1}{h_t} \right) T_{ij}^* + \left( K_{Tx} - \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) T_{i+1,j}^* = \\
& = \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} - K_{Ty} \right) C_{i,j+1}^n - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{Ty} \right) T_{ij}^n - \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} + K_{Ty} \right) T_{i,j-1}^n - F_j^n, \\
& \quad (i = 1..M-1), \tag{3.25\delta}
\end{aligned}$$

$$T_{0,j}^* = T_{1,j}^* - h_x K_T (T_{0,j}^n - 1), \quad T_{M,j}^* = T_{M-1,j}^* - h_x K_T (T_{M,j}^n - 1);$$

for  $i=1..M-1$

$$\begin{aligned}
& \left( K_{Ty} + \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) T_{i,j-1}^{n+1} - 2 \left( K_{Ty} + \frac{1}{h_t} \right) T_{ij}^{n+1} + \left( K_{Ty} - \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) T_{i,j+1}^{n+1} = \\
& = \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} - K_{Tx} \right) T_{i+1,j}^* - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{Tx} \right) T_{ij}^* - \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} + K_{Tx} \right) T_{i-1,j}^* - F_j^n, \quad (j \\
& = 1..N \\
& - 1), \tag{3.25\delta}
\end{aligned}$$

$$T_{i,0}^{n+1} = 1, \quad T_{i,N}^{n+1} = T_{i,N-1}^{n+1}.$$

$$\text{so } K_{Tx} = 1/(Re \cdot Pr \cdot h_x^2), \quad K_{Ty} = 1/(Re \cdot Pr \cdot h_y^2); \quad F_j^n = \frac{B_E}{p_e} (i_{x,ij}^n E_x^n + i_{y,ij}^n E_y^n).$$

for  $j=1..N-1$ :

$$\begin{aligned}
& \left( K_{\xi x} + \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) \xi_{i-1,j}^* - 2 \left( K_{\xi x} + \frac{1}{h_t} \right) \xi_{ij}^* + \left( K_{\xi x} - \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} \right) \xi_{i+1,j}^* = \\
& = \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} - K_{\xi y} \right) C_{i,j+1}^n - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{\xi y} \right) \xi_{ij}^n - \left( \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} + K_{\xi y} \right) \xi_{i,j-1}^n - F_A^n, \\
& \quad (i \\
& = 1..M \\
& - 1), \tag{3.26\delta}
\end{aligned}$$

$$\xi_{0,j}^* = 2(\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n)/h_x^2, \quad \xi_{M,j}^* = 2(\psi_{M-1,j}^n - \psi_{M,j}^n)/h_x^2;$$

for  $i=1..M-1$ :

$$\left( K_{\xi y} + \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) \xi_{i,j-1}^{n+1} - 2 \left( K_{\xi y} + \frac{1}{h_t} \right) \xi_{ij}^{n+1} + \left( K_{\xi y} - \frac{V_{y,ij}^n}{2h_y} \right) \xi_{i,j+1}^{n+1} =$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} - K_{\xi x} \right) \xi_{i+1,j}^* - 2 \left( \frac{1}{h_t} - K_{\xi x} \right) \xi_{ij}^* - \left( \frac{V_{x,ij}^n}{2h_x} + K_{\xi x} \right) \xi_{i-1,j}^* - F_A^n, \quad j \\
&= 1..N \\
&- 1), \tag{3.26\beta}
\end{aligned}$$

$$\xi_{i,0}^{n+1} = 0, \quad \xi_{i,N}^{n+1} = 0.$$

$$\text{ს) } K_{\xi x} = 1/(Re \cdot h_x^2), \quad K_{\xi y} = 1/(Re \cdot h_y^2);$$

$$F_A^n = -\frac{Gr}{Re^2} \left[ (A_C \tilde{d}(C^n, 2) + A_T \tilde{d}(T^n, 2)) \sin \gamma - (A_C \tilde{d}(T^n, 1)) \cos \gamma \right].$$

სისტემები (2.110) განტოლებების ამოსახსნისათვის წარმოდგენილია შემდეგი სახით:

როცა  $j=1..N-1$ :

$$\begin{aligned}
&\psi_{i-1,j}^* - (2 + K_\psi) \psi_{ij}^* + \psi_{i,j+1}^* = \\
&= -\beta^2 \left[ \psi_{i,j-1}^n - \left( 2 - \frac{K_\psi}{\beta^2} \right) \psi_{ij}^n + \psi_{i,j+1}^n \right] + h_x^2 \xi_{ij}^n, \quad (i = 1..M-1), \tag{3.27\alpha}
\end{aligned}$$

$$\psi_{0,j}^* = 1, \quad \psi_{M,j}^* = 0;$$

როცა  $i=1..M-1$ :

$$\begin{aligned}
&\psi_{i,j-1}^{n+1} - \left( 2 + \frac{K_\psi}{\beta^2} \right) \psi_{ij}^n + \psi_{i,j+1}^{n+1} = \\
&= -[\psi_{i-1,j}^* - (2 - K_\psi) \psi_{ij}^* + \psi_{i+1,j}^*] + h_y^2 \xi_{ij}^n, \quad (j = 1..N-1), \tag{3.27\beta}
\end{aligned}$$

$$\psi_{i,0}^{n+1} = 1 - i \cdot h_x, \quad \psi_{i,N}^{n+1} + 1 = 1 - i \cdot h_x;$$

$$\text{ს) } K_\psi = 2h_x^2/h_{r1}, \quad \beta = h_x/h_y.$$

პოტენციოსტატიკური მოდელის განტოლების (2.62) ამოსახსნისათვის ვიყენებთ ოპერატორის  $div(C\nabla\varphi)$  სხვაობით გამოსახულებას (3.17). მივიღებთ შემდეგ სისტემებს:

როცა  $j = 1..N-1$ :

$$\begin{aligned}
& (C_{ij}^n + C_{i-1,j}^n)\varphi_{i-1,j}^* - (C_{i+1,j}^n + 2C_{ij}^n + C_{i-1,j}^n + K_{\varphi x})\varphi_{ij}^* + (C_{i+1,j}^n + C_{ij}^n)\varphi_{i+1,j}^* \\
& = \beta^2[(C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n)(\varphi_{ij}^n - \varphi_{i,j-1}^n) - (C_{i,j+1}^n + C_{ij}^n)(\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{ij}^n)] - \\
& - K_{\varphi x}\varphi_{ij}^n - 2h_x^2 K_{\varphi} \tilde{\Delta}(C^n), \quad (i = 1..M-1),
\end{aligned} \tag{3.28a}$$

$$\varphi_{0,j}^* = 0, \quad \varphi_{M,j}^* = d_{\varphi};$$

როცა  $i=1..M-1$ :

$$\begin{aligned}
& (C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n)\varphi_{i,j-1}^{n+1} - (C_{i,j+1}^n + 2C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n + K_{\varphi y})\varphi_{ij}^{n+1} + (C_{i,j+1}^n + C_{ij}^n)\varphi_{i,j+1}^{n+1} \\
& = [(C_{ij}^n + C_{i-1,j}^n)(\varphi_{ij}^* - \varphi_{i-1,j}^*) - (C_{i+1,j}^n + C_{ij}^n)(\varphi_{i+1,j}^* - \varphi_{ij}^*)]/\beta^2 - \\
& - K_{\varphi y}\varphi_{ij}^* - 2h_y^2 K_{\varphi} \tilde{\Delta}(C^n), \quad (j = 1..N-1),
\end{aligned} \tag{3.28a}$$

$$\varphi_{i,0}^{n+1} = d_{\varphi} i h_x, \quad \varphi_{i,N}^{n+1} = \varphi_{i,N-1}^{n+1};$$

აქ  $K_{\varphi x} = 4h_x^2/h_{r2}$ ,  $K_{\varphi y} = 4h_y^2/h_{r2}$ ,  $K_{\varphi} = (D_1 - D_2)/(z_1 D_1 - z_2 D_2)$ .

ფუნქციების  $C$ ,  $\eta$ ,  $T$ ,  $\xi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  მნიშვნელობები კუთხით კვანძებში განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებით (3.14),(3.16),(3.21).

გალვანოსტატიკური მოდელის განტოლებები ელექტრული დენის სიმკვრივისათვის (2.106), დამაბულობისათვის (2.107) და პოტენციალისათვის (2.95) იცვლებიან ცხადი სხვაობითი ფორმულებით (3.7),(3.8) და (3.13), შესაბამისად, ხოლო პოტენციოსტატიკური მოდელის განტოლებები (2.117) და (2.119) - ფორმულებით (3.19) და (3.20). გამოსახულებები სიჩქარისათვის (2.111)/(2.122) ორივე შემთხვევაში აპროქსიმირდება ფორმულებით (3.12). მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში ამ დროს განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებით (3.14)/(3.21).

### 3.2. რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები

(3.27) და (2.62) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტების მატრიცებში შესრულებულია დიაგონალური გადაჭარბების პირობა, რაც ნიშნავს, რომ მთავარი დიაგონალის ნებისმიერი ელემენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია შესაბამისი ბზვარის დანარჩენი ელემენტების აბსოლუტური მნიშვნელობების ჯამზე.

შესაბამისად, ეს სისტემები შეიძლება ეფექტურად ამოვხსნათ მორგების მეთოდით, რომელიც როგორც ცნობილია [7] მოცემულ შემთხვევაში იქნება რიცხობრივად მდგრადი. სისტემებში (3.23)...(3.25) დიაგონალურ გადაჭარბებას ადგილი აქვს სიჩქარის  $V$  არა დიდი მნიშვნელობებისას. მაგრამ თუ ამ განტოლებების გამოყვანის დროს გამოვიყენებთ არა „ცენტრალურ სხვაობას“ არამედ უკვე ნახსენებ „სქემას სხვაობით ნაკადის საწინააღმდეგოდ“ მაშინ დიაგონალური გადაჭარბების პირობა გახდება შესრულებული. მაშასადამე, სისტემები (3.23)...(3.25) გარდაქმნის შემდეგ შეიძლება აგრეთვე ამოვხსნათ მორგების მეთოდით.

გამოსახულებებში (3.7),(3.8),(3.19),(3.20) და (3.12) „ცენტრალური სხვაობების“ გამოყენებას არ მივყავართ რიცხვით არამდგრადობასთან.

(2.104)...(2.113) და (2.115)..(2.123) სასაზღვრო ამოცანების (გალვანოსტატიკურის და პოტენციოსტატიკურის შესაბამისად) რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი დაფუძნებულია ცხადი (პუნქტი 3.1.1) ან არაცხადი (პუნქტი 3.1.2) სხვაობითი სქემების გამოყენებაზე. ის წარმოადგენს გადასვლის იტერაციულ (ციკლურ) პროცესს მიმდინარე ფენაზე დროით ( $n$ ) მიახლოებითი ამოხსნიდან ახალ მიახლოებაზე მომდევნო ფენაზე ( $n+1$ ). საძებნი მნიშვნელობების გამოსათვლელად ახალ ფენაზე უკვე ცნობილებით (წინა ბიჯზე გაანგარიშებულთ ან მოცემულთ საწყისი ან სასაზღვრო პირობით) გამოიყენებიან სასრულ-სხვაობითი ფორმულები აღწერილი 3.1 პარაგრაფში. ამ დროს გამოითვლებიან შემდეგი დისკრეტული ფუნქციები:  $C, E_x, E_y, I_x, I_y, T, V_x, V_y, \eta, \varphi, \xi$ .

$C, \eta, T, \xi$  ველების ელემენტების გამოსათვლელად ცხადი სხვაობითი სქემის გამოყენებისას როგორც გამომდინარეობს შესაბამისი სხვაობითი სქემიდან, საჭიროა იგივე ზომის დამატებითი მასივი „ახალი“ (ან პირიქით „ძველი“) მნიშვნელობების შესანახად, სითხის დენის  $\psi$  და ელექტრული პოტენციალის  $\varphi$  გასაანგარიშებლად საკმარისია ერთი მასივი (თითულისათვის ორი ველიდან). დანარჩენი ფუნქციების მნიშვნელობები გამოითვლებიან უშუალოდ „ახალ“ დროით ფენაზე ცნობილი მნიშვნელობებით და აგრეთვე არ მოითხოვენ დამატებით მასივებს.

არაცხადი სხვაობითი სქემის რეალიზაცია საშუალებას გვაძლევს შემოვიფარგლოთ „შუალედური“ მნიშვნელობების  $C^*, \eta^*, T^*, \xi^*, \psi^*, \text{ და } \varphi^*$  შენახვისათვის მხოლოდ ერთი დამატებითი მასივის შემოტანით, ხოლო ( $n+1$ ) ფენაზე

მნიშვნელობების ჩასაწერად გამოვიყენოთ  $C^n, \eta^n, T^n, \xi^n, \psi^n, და \varphi^n$  მასივები შესაბამისად.

ცხადი სქემის გამოყენებისას სასაზღვრო პირობები (მასივების სასაზღვრო ელემენტების მნიშვნელობები) გამოითვლებიან (3.14),(3.16),(3.21) შესაბამისად. არაცხად სქემაში ეს პირობები გამოიყენებიან არაცხადად, მხოლოდ კვანძებში  $(n+1, i, j)$  სადაც  $i=0, M, j=0..N$ , სასაზღვრო მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის მაინც აუცილებელია (3.14),(3.16),(3.21) პირობების ცხადი გამოყენება.

განვსაზღვროთ იტერაციული პროცესის შეჩერების შემდეგი პირობები:

**S1.** მიღწეულია მოცემული  $t^*$  დრო, რომლისთვისაც მოითხოვება ვიპოვოთ სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა.

**S2.** ნაპოვნია სტაციონალური ამოხსნა, ე.ი. ზემოთ ნაჩვენები ველები განსხვავდებიან მათი მნიშვნელობებისაგან წინა დროით ფენაზე, არა უმეტეს ვიდრე მოცემული მცირე სიდიდე.

**S3.** გამოთვლილი პროცესის შესრულება შეწყვეტილია იძულებით.

რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები შედგებიან შემდეგი ნაბიჯებისაგან.

**გალვანოსტატიკური მოდელის ცხადი სქემა.**

1. დროის  $t$  ( $n=0$ ) საწყის მომენტში მასივები  $C, \eta, T, \xi, \psi, V_x, V_y$  ინიციალიზდება რაღაც მნიშვნელობებით, შეთანხმებულით ამოცანის ფიზიკურ დასმასთან, და აგრეთვე ერთმანეთთან, სასაზღვრო მნიშვნელობები (მასივების სასაზღვრო ელემენტების მნიშვნელობები) მოცემულია შესაბამისად გამოსახულებებით (3.14) (3.16)
2. გამოითვლებიან კონცენტრაციის ველის  $C$  მნიშვნელობები ახალ  $n+1$  ფენაზე სხვაობითი ბადის შიდა კვანძებზე სხვაობითი გამოსახულების (3.5) დახმარებით და სასაზღვრო კვანძებში შესაბამისი ფორმულებით (3.4)
3. ორგანიზდება ცალკე იტერაციული პროცესი ველის  $\eta$  გამოსათვლელად ფორმულით (3.6) სასაზღვრო პირობებით (3.14) გაჩერების პირობის  $S2$  შესრულებამდე. ამ დროს  $C$  მნიშვნელობები გამოყენებული (3.6) გამოსახულებაში, აიღებიან „ახალი“  $C$  მასივიდან, გაანგარიშებულით ბიჯზე 2, ე.ი.  $C^n$ -ის ნაცვლად ისმება  $C^{n+1}$ .

4.  $\eta$  ნაპოვნი მნიშვნელობებით გამოითვლებიან დენის სიმკვრივის კომპონენტები  $J_x$ ,  $J_y$ , ფორმულებით (3.7) შიგა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე.
5.  $C$  და  $J_x$ ,  $J_y$  მნიშვნელობებით, გაანგარიშებულით ბიჯებზე 2 და 4 შესაბამისად, გამოითვლებიან დაძაბულობის  $E_x$ ,  $E_y$  კომპონენტები ფორმულებით (3.8) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე .
6.  $J_x$ ,  $J_y$  და  $E_x$ ,  $E_y$  ბიჯებზე 4 და 5 მიღებული მნიშვნელობების აგრეთვე წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული სიჩქარის  $V_x$ ,  $V_y$  და ტემპერატურის  $T$  მნიშვნელობების გამოყენებით, გამოითვლებიან  $T$  ველის ახალი მნიშვნელობები ფორმულებით (3.9) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
7. მნიშვნელობებით, გაანგარიშებულით წინა დროით ფენაზე და  $C$  და  $T$  „ახალი“ მნიშვნელობებით გამოითვლებიან გრიგალის ფუნქციის  $\xi$  მნიშვნელობები ფორმულებით (3.10) ( $C^n, T^n$  ნაცვლად  $C^{n+1}, T^{n+1}$  ჩასმით ) შიგა კვანძებში და (3.6) საზღვრებზე.
8. ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება ფორმულებით (3.11) სითხის დენის ველის  $\psi$  გასაანგარიშებლად შიგა კვანძებზე გაჩერების S2 პირობის შესრულებამდე. ამ დროს გამოიყენებიან  $\xi$  „ახალი“ მნიშვნელობები , მიღებული ბიჯზე 7(  $\xi^{n+1}\xi^n$  – ის ნაცვლად) მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში რჩებიან უცვლელი.
9.  $\Psi$  ნაპოვნი მნიშვნელობების მიხედვით გამოითვლებიან  $V_x$ ,  $V_y$  სიჩქარეთა ველები ფორმულებით (3.12) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
10. ხდება გაჩერების S1-S3 პირობების შემოწმება. თუ არც ერთი მათგანი არ სრულდება, ხდება ძველ მასივებზე ( $C^n=C^{n+1}$  ,  $\eta^n=\eta^{n+1}$ ,  $T^n=T^{n+1}$ ,  $\xi^n=\xi^{n+1}$  ) ახალი მასივების მნიშვნელობების მინიჭება და გადასვლა ბიჯზე 2. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება ელექტრული პოტენციალი  $\phi$  ფორმულით (3.13) და მასივების მნიშვნელობები ჩაიწერებიან გარე ფაილებში.

#### გალვანოსტატიკური მოდელი, არაცხადი სქემა.

1. დროის საწყის  $t$  ( $n=0$ ) მომენტში  $C$ ,  $\eta$  ,  $T$ ,  $\xi$ ,  $\psi$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  მასივები ინიციალიზირდებიან რაღაც მნიშვნელობებით, რომლებიც შეთანხმებულია ამოცანის ფიზიკურ დასმასთან და აგრეთვე ერთმანეთთან. სასაზღვრო

მნიშვნელობები ( მასივის სასაზღვრო ელემენტების მნიშვნელობები) მოიცემა (3.14) , (3.16) გამოსახულების შესაბამისად.

2. წინა დროით ფენაზე  $n$  გაანგარიშებული მნიშვნელობებით გამოითვლებიან კონცენტრაციის ველების  $C$  მნიშვნელობები საანგარიშო ბადის კვანძებში ახალ ფენაზე (3.23) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გზით.  $C_{ij}^{n+1}$ ,  $i=0, M$ ,  $j=0..N$  სასაზღვრო მნიშვნელობები განისაზღვრებიან ცხადად შესაბამისი ფორმულებით (3.14).
3. ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება  $\eta$  ველის გამოსათვლელად განტოლებებით (3.24) გაჩერების პირობების  $S_2$  შესრულებამდე. ამ დროს სასაზღვრო მნიშვნელობები  $\eta_{ij}$  ,  $i=0, M$ ,  $j=0..N$ , განისაზღვრებიან ფორმულებით (3.14) ხოლო  $C$ -ს მნიშვნელობა გამოყენებული გამოსახულებებში (3.24) აიღებიან „ახალი“  $C$  მასივიდან, რომელიც გაანგარიშებულია ბიჯზე 2, ე.ი.  $C^n$  -ის ნაცვლად ისმებიან  $C^{n+1}$ .
4.  $\eta$  ნაპოვნი მნიშვნელობებით გამოითვლება დენის სიმკვრივის კომპონენტები  $J_x$ ,  $J_y$  ფორმულებით (3.7) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
5.  $C$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ , მნიშვნელობებით გაანგარიშებული ბიჯებზე 2 და 4, შესაბამისად გამოითვლებიან დაძაბულობის კომპონენტები  $E_x$  ,  $E_y$  ფორმულებით (3.8) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
6.  $J_x$  ,  $J_y$  და  $E_x$ ,  $E_y$  ბიჯებზე 4 და 5 მიღებული მნიშვნელობების და აგრეთვე წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული სიჩქარის მნიშვნელობების  $V_x$ ,  $V_y$  და ტემპერატურის  $T$  გამოყენებით, გამოითვლება  $T$  ველის ახალი მნიშვნელობები განტოლებებით (3.25). სასაზღვრო მნიშვნელობები  $T_{ij}^{n+1}$ ;  $i= 0, M$ ,  $j=0..N$ , განისაზღვრება ფორმულებით (3.14).
7. წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული მნიშვნელობებითა და  $C$  და  $T$  „ახალი“ მნიშვნელობებით გამოითვლება გრიგალის ფუნქციის  $\xi$  მნიშვნელობები ფორმულებით (3.26) ( $C^n T^n$  ნაცვლად  $C^{n+1}$ ,  $T^{n+1}$  ჩასმით ) კვანძებში  $(n+1, i, j)$  ,  $i=1.. M-1$ ,  $j=0..N$  და ფორმულებით (3.16) სასაზღვრო კვანძებში  $(n+1, i, j)$  ,  $i=0, M$ ,  $j=0.. N$
8. ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება სითხის დენის ველის  $\psi$  გაანგარიშებისათვის განტოლებებით (3.27) კვანძებში  $(i, j)$  ,  $i=1..M-1$  ,  $j=0..N$ , გაჩერების  $S_2$  პირობის შესრულებამდე. ამ დროს გამოიყენებიან  $\xi$  „ახალი“

მნიშვნელობები, მიღებულ ბიჯზე 7 ( $\xi^{n+1}$   $\xi^n$ -ისნაცვლად ) მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში (i,j) ,  $i=0, M, j=0..N$  რჩებიან უცვლელნი.

9.  $\Psi$  ნაპოვნი მნიშვნელობების მიხედვით გამოითვლება სიჩქარის ველები  $V_x, V_y$  ფორმულებით ( 3.12) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
10. ხდება გაჩერების S1-S3 პირობების შემოწმება. თუ არც ერთი მათგანი არ სრულდება, ხდება გადასვლა ბიჯზე 2. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება ელექტრული პოტენციალი  $\phi$  ფორმულით (3.13) და მასივების მნიშვნელობები ჩაიწერებიან გარე ფაილებში.

### პოტენციოსტატიკური მოდელი, ცხადი სქემა

1. დროის საწყის  $t$  ( $n=0$ ) მომენტში  $C, \phi, T, \xi, \psi, V_x, V_y$  მასივები ინიციალიზდებიან ამოცანის ფიზიკურ დასმასთან და ურთიერთშორის შეთანხმებულ რაღაც მნიშვნელობებთან. სასაზღვრო მნიშვნელობები (მასივების განაპირა ელემენტების მნიშვნელობები) მოცემულია (3,14),(3,16),(3,21) გამოსახულებების შესაბამისად.
2. წინა დროით  $n$  ფენაზე გაანგარიშებული მნიშვნელობებით, გამოთვლიან კონცენტრაციის  $C$  ველებს საანგარიშო ბადის შიგა კვანძებში ახალ  $n+1$  ფენაზე სხვაობითი გამოსახულების (3.5) დახმარებით და სასაზღვრო კვანძებში შესაბამისი ფორმულებით (3.14).
3. ორგანიზდება ცალკე იტერაციული პროცესი ელექტროპოტენციალის  $\phi$  გამოსათვლელად ფორმულებით (3.18) შიგა კვანძებში და (3.21) სასაზღვროებში გაჩერების S2 პირობის შესრულებამდე. ამ დროს (3.18) გამოსახულებაში გამოყენებული  $C$ -ს მნიშვნელობები აიღება  $C$ -ს „ახალი“ მასივიდან, რომელიც გაანგარიშებულია ბიჯზე 2, ე.ი.  $C^n$ -ის ნაცვლად ისმება  $C^{n+1}$ .
4.  $\phi$ -ს ნაპოვნი მნიშვნელობების მიხედვით გამოითვლებიან  $E_x$  და  $E_y$  დაძაბულობების კომპონენტები ფორმულებით (3.19) შიგა კვანძებში და (3.21)-ით საზღვრებზე.
5.  $C$  და  $E_x, E_y$  მნიშვნელობებით გაანგარიშებულით შესაბამისად ბიჯებზე 2 და 4 ფორმულებით (3.20) შიგა კვანძებში და (3.21)-ით საზღვრებზე გამოითვლებიან დენის სიმკვრივის  $I_x$  და  $I_y$  კომპონენტები.

6. ბიჯებზე 4 და 5  $E_x, E_y$  და  $I_x, I_y$  მიღებული მნიშვნელობების, აგრეთვე წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული სიჩქარეების  $V_x, V_y$  მნიშვნელობების და ტემპერატურის  $T$  გამოყენებით, გამოითვლება  $T$  ველის ახალი მნიშვნელობები ფორმულებით (3.9) შიდა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე.
7. წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული და  $C$  და  $T$  „ახალი“ მნიშვნელობებით გამოთვლიან გრიგალის ფუნქციის მნიშვნელობებს ფორმულებით (3.10) ( $C^n, T^n$  – ისნაცვლად  $C^{n+1}, T^{n+1}$  – ისჩასმით) შიგა კვანძებში და (3.16)-ით საზღვრებზე.
8. გაჩერების  $S_2$  პირობის შესრულებამდე სითხის დინების ველის  $\Psi$  (3.11) ფორმულით გამოსათვლელად ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება. ამ დროს გამოიყენებიან  $\xi$  „ახალი“ მნიშვნელობები, მიღებული ბიჯზე 7 ( $\xi^n$  – ისნაცვლად  $\xi^{n+1}$ ). მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში რჩებიან უცვლელნი.
9.  $\Psi$  -ს ნაპოვნი მნიშვნელობებით ფორმულებით (3.12) შიგა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე გამოითვლება სიჩქარეთა ველი  $V_x, V_y$ .
10. მოწმდება  $S_1$ - $S_3$  გაჩერების პირობა. თუ არც ერთი მათგანი არ სრულდება, ხდება „ახალი“ მასივების  $C, \varphi, T, \xi$ , მნიშვნელობების „ძველ“ მასივებზე ( $C^n = C^{n+1}, \varphi^n = \varphi^{n+1}, T^n = T^{n+1}, \xi^n = \xi^{n+1}$ ) მინიჭება და ბიჯზე 2 გადასვლა. წინააღმდეგ შემთხვევაში მასივების მნიშვნელობები ჩაიწერება გარე ფაილებში.

### პოტენციოსტატიკური მოდელი, არაცხადი სქემა

1. დროის საწყის  $t$  ( $n=0$ ) მომენტში  $C, \varphi, T, \xi, \psi, V_x, V_y$  მასივები ინიციალიზდებიან ამოცანის ფიზიკურ დასმასთან და ურთიერთშორის შეთანხმებულ რაღაც მნიშვნელობებთან. სასაზღვრო მნიშვნელობები (მასივების განაპირა ელემენტების მნიშვნელობები) მოცემულია (3,14),(3,16),(3,21) გამოსახულებების შესაბამისად.
2. წინა დროით  $n$  ფენაზე გაანგარიშებული მნიშვნელობებით, გამოთვლიან კონცენტრაციის  $C$  ველებს საანგარიშო ბადის შიგა კვანძებში ახალ  $n+1$  ფენაზე წინა დროით  $n$  ფენაზე გაანგარიშებული მნიშვნელობებით, გამოთვლიან კონცენტრაციის  $C$  ველებს საანგარიშო ბადის შიგა კვანძებში ახალ  $(n+1, i, j)$ ,  $i=1..M-$



- 1,  $j=0..N$  ფენაზე, განტოლებათა სისტემის (3.23) ამოხსნის გზით. სასაზღვრო მნიშვნელობები  $C_{ij}^{n+1}, i = 0, M, j = 0..N$ , ცხადად განისაზღვრებიან შესაბამისი ფორმულებით (3.14).
3. გაჩერების S2 პირობის შესრულებამდე ელექტრული პოტენციალის  $\varphi$  (3.28) ფორმულით გამოსათვლელად ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება. ამ დროს სასაზღვრო მნიშვნელობები  $\varphi_{ij}, i = 0, M, j = 0..N$ , განისაზღვრებიან ფორმულებით (3.21), ხოლო C-ს მნიშვნელობები, გამოყენებული (3.28) გამოსახულებაში, აიღებიან „ახალი“ მასივიდან C, რომელიც გაანგარიშებულია ბიჯზე 2,  $C^n$  ნაცვლად ისმება  $C^{n+1}$ .
4.  $\Phi$ -ს ნაპოვნი მნიშვნელობებით გამოითვლებიან დამაბულობის კომპონენტები  $E_x, E_y$  ფორმულებით (3.19) შიგა კვანძებში და (3.21) საზღვრებზე.
5. C და  $E_x, E_y$  მნიშვნელობებით გაანგარიშებული ბიჯებზე 2 და 4 შესაბამისად, გამოითვლებიან დენის სიმკვრივეების  $I_x, I_y$  კომპონენტები ფორმულებით (3.20) შიგა კვანძებში და (3.21) საზღვრებზე.
6. ბიჯებზე 4 და 5  $E_x, E_y$  და  $I_x, I_y$  მიღებული მნიშვნელობების, აგრეთვე წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული სიჩქარეების  $V_x, V_y$  მნიშვნელობების და ტემპერატურის T გამოყენებით, გამოითვლება T ველის ახალი მნიშვნელობები ფორმულებით ბიჯებზე 4 და 5  $E_x, E_y$  და  $I_x, I_y$  მიღებული მნიშვნელობების, აგრეთვე წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული სიჩქარეების  $V_x, V_y$  მნიშვნელობების და ტემპერატურის T გამოყენებით, გამოითვლება T ველის ახალი მნიშვნელობები ფორმულებით (3.25) სასაზღვრო მნიშვნელობები  $T_{ij}^{n+1}, i = 0, M, j = 0..N$  განისაზღვრებიან ფორმულებით (3.14).
7. მნიშვნელობებით, გაანგარიშებული წინა დროით ფენაზე და C და T „ახალი“ მნიშვნელობებით გამოითვლებიან გრიგალის ფუნქციის  $\xi$  მნიშვნელობები ფორმულებით (3.26) ( $C^n T^n$  ნაცვლად  $C^{n+1}, T^{n+1}$  ჩასმით ) კვანძებში  $(n+1, i, j)$ ,  $i=1.. M-1, j=0..N$  და ფორმულებით (3.16) სასაზღვრო კვანძებში  $(n+1, i, j)$ ,  $i=0, M, j=0.. N$
8. ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება სითხის დენის ველის  $\psi$  გაანგარიშებისათვის განტოლებებით (3.27) კვანძებში  $(i, j)$ ,  $i=1..M-1, j=0..N$ , გაჩერების S2 პირობის შესრულებამდე. ამ დროს გამოიყენებიან  $\xi$  „ახალი“

მნიშვნელობები, მიღებულ ბიჯზე 7 ( $\xi^{n+1}$   $\xi^n$ -ისნაცვლად ) მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში (i,j) ,  $i=0, M, j=0..N$  რჩებიან უცვლელნი.

9.  $\Psi$  ნაპოვნი მნიშვნელობების მიხედვით გამოითვლებიან სიჩქარის ველები  $V_x, V_y$  ფორმულებით ( 3.12) შიგა კვანძებზე და (3.14) საზღვრებზე.
10. ხდება გაჩერების S1-S3 პირობების შემოწმება. თუ არც ერთი მათგანი არ სრულდება, ხდება გადასვლა ბიჯზე 2. წინააღმდეგ შემთხვევაში მასივების მნიშვნელობები ჩაიწერებიან გარე ფაილებში.

განგარიშებებმა გვიჩვენეს, რომ პოტენციოსტატიკური მოდელის ორივე სქემის ალგორითმისათვის (3.2) ფორმულებით დენის სიმკვრივის  $I_x$  და  $I_y$  ბიჯზე 5 გამოთვლილი მნიშვნელობები იძლევიან მნიშვნელოვან ცდომილებას საზღვრის მემბრანა/ხსნარი მახლობლობაში, სადაც  $\|\nabla C\| \gg 1$ , და პირობა  $div \vec{v} = 0$  არ სრულდება. ეს ცდომილება შემოაქვს სხვაობით აპროქსიმაციას  $\vec{d}_0(C^{n+1}, 1)$  წარმოებულის  $\frac{\partial C}{\partial x}$  განტოლებაში (3.20ა). მოცემული პრობლემის გადაწყვეტის ერთ ერთი გზაა საანგარიშო ბადის დაქუცმაცება, რაც თუმცა არსებითად ანელებს მოცემული ალგორითმის მარეალიზებელი პროგრამის მუშაობას. მეორე გზა, რომელიც პროგრამულად იქნა რეალიზებული მდგომარეობს შემდეგში:

- 1) ბიჯზე 5 ზემოთ აღწერილი პოტენციოსტატიკური მოდელის ალგორითმებისათვის განტოლებით (3.20ბ) გამოითვლება დენის სიმკვრივის მხოლოდ  $y$  კომპონენტი  $I_y$ . არხის სიგრძის გასწვრივ ( $y$  კოორდინატი) კონცენტრაცია მცირედ იცვლება, ამიტომ მისი წარმოებულის გავლენა მოცემულ შემთხვევაში მცირეა.
- 2) დენის სიმკვრივის  $x$  კომპონენტის  $I_x$  პოვნა ხდება უშუალოდ განტოლებიდან  $div \vec{v} = 0$ .
- 3) შემდეგ ხდება „მიმუშავება“ ბიჯზე 2, და ყველა ველი გამოითვლება თავიდან  $I_x$  და  $I_y$  დაზუსტებული მნიშვნელობების გამოყენებით.
- 4) ეს მოქმედებები გრძელდება მანამდე, სანამ მიმდინარე დროით ფენაზე არ მიიღწევა გამოთვლის აუცილებელი სიზუსტე. რის შემდეგაც ხდება გადასვლა შემდეგ ფენაზე (ბიჯი 2 ველების „ახალი“ მნიშვნელობებით).

მიუხედავად ალგორითმის მუშაობის ცოტა შენელებისა, რიცხვითი ამოხსნის მეთოდის უკანასკნელი მოდიფიკაცია უზრუნველყოფს დიდ ეფექტურობას ბადის დაქუცმაცებასთან შედარებით, რაც დადასტურდა რიცხვითი გაანგარიშებებით.

### 3.3. რიცხვითი კვლევების შედეგები

განხორციელებულია ზემოთ გადმოცემული ალგორითმების პროგრამული რეალიზება. შესაბამისი პროგრამის კომპლექსის "Sarma" აღწერა მოყვანილია დანართში 4. მოყვანილია რიცხვითი ექსპერიმენტები  $NaCl$  ხსნარისათვის ისეთი პარამეტრების ფართო სპექტრისათვის, როგორცაა საწყისი კონცენტრაცია, ხსნარის ტემპერატურა და გადატუმბვის სიჩქარე, მემბრანებს შორის დაცილება, გამტკნარების არხის სიგრძე და დახრის კუთხე და ელექტრო დენის სიმკვრივე (გალვანოსტატიკური მოდელისათვის), ან ელექტრული პოტენციალის ნახტომი ამ არხში (პოტენციოსტატიკური მოდელისათვის). ქვემოთ მოყვანილია რიცხვითი ექსპერიმენტების ზოგიერთი შედეგი, ჩატარებული  $NaCl$  ხსნარისათვის შემდეგ შემავალ პარამეტრებზე:

- გამტკნარების არხის სიგანე  $H^{(d)} = 7\text{მმ}$ , უგანზომილებო სიგრძე  $H=1$ ;
- არხის სიგრძე  $L^{(d)} = 20\text{მმ}$ , უგანზომილებო სიგრძე  $L=2.85714$ ;
- არხის დახრის კუთხე ა)  $\gamma=0^\circ$  (ვერტიკალური განლაგება, ხსნარი გადაიტუმბება ქვემოდან-ზემოდ), ბ)  $\gamma=-90^\circ$  (ჰორიზონტალური განლაგება, ხსნარი გადაიტუმბება მარცხნიდან-მარჯვნივ);
- ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე ა)  $V_0^{(d)}=0.1\text{მმ/წმ}$ , ბ)  $V_0^{(d)}=0.5\text{მმ/წმ}$ , გ)  $V_0^{(d)}=3\text{მმ/წმ}$ , უგანზომილებო სიჩქარე  $V_0=1$ ;
- ხსნარის საწყისი კონცენტრაცია  $C_0^{(d)}=0.1(100\text{ მოლი/მ}^3)$ , უგანზომილებო კონცენტრაცია  $C_0=1$ ;
- ხსნარის საწყისი ტემპერატურა  $T_0^{(d)}=20^\circ\text{C}$ , უგანზომილებო ტემპერატურა  $T_0=1$ ;
- ხსნარის საწყისი სიმკვრივე  $\rho_0^{(d)}=1002.5\text{ კგ/მ}^3$ , უგანზომილებო სიმკვრივე  $\rho_0=1$ ;

- კოეფიციენტები: კინემატიკური სიბლანტის  $\gamma^{(d)}=1006 \cdot 10^{-9}$  მ<sup>2</sup>/წმ, დიფუზიის კათიონის და ანიონის შესაბამისად  $D_1^{(d)}=1.33 \cdot 10^{-9}$ ,  $D_2^{(d)}=2.051.33 \cdot 10^{-9}$ , ტემპერატურაგამტარებლობის  $\alpha^{(d)}=142.5$ .
- ელექტრული დენის სიმკვრივე ა)  $i_{av}^{(d)}=70$  ა/მ<sup>2</sup>, ბ)  $i_{av}^{(d)}=50$  ა/მ<sup>2</sup>, უგანზომილებო მნიშვნელობები დამოკიდებულია  $D_1^{(d)}, D_2^{(d)}, C_0^{(d)}, H^{(d)}$  (გალვანოსტატიკური მოდელი);
- ელექტრული პოტენციალის ვარდნა მემბრანებს შორის სივრცეში ა)  $d_\phi^{(d)}=-0.4$  ვ, უგანზომილებო მნიშვნელობა  $d_\phi \approx -15.8432$ , ბ)  $d_\phi^{(d)}=-0.3$  ვ, უგანზომილებო მნიშვნელობა  $d_\phi \approx -11.8824$  (პოტენციოსტატიკური მოდელისათვის).

სიმკვრივეების და კოეფიციენტების მნიშვნელობები აღებულია საცნობარო მასალიდან (ნაწილობრივ [38]) და ექსპერიმენტული მონაცემებიდან. ყველა შედეგი ქრონოპოტენციოგრამის გარდა წარმოდგენილია უგანზომილებო სახით. კოორდინატები  $x=0$  და  $x=1$  შეესაბამებიან ანიონ- და კათიონცვლადი მემბრანების ზედაპირებს შესაბამისად.  $i_{lim}$  აღნიშნავს ზღვრულ დენს, რომელიც მიიღწევა სისტემაში გრავიტაციული კონვექციის არ არსებობის შემთხვევაში და განისაზღვრება ფორმულით (1.42).

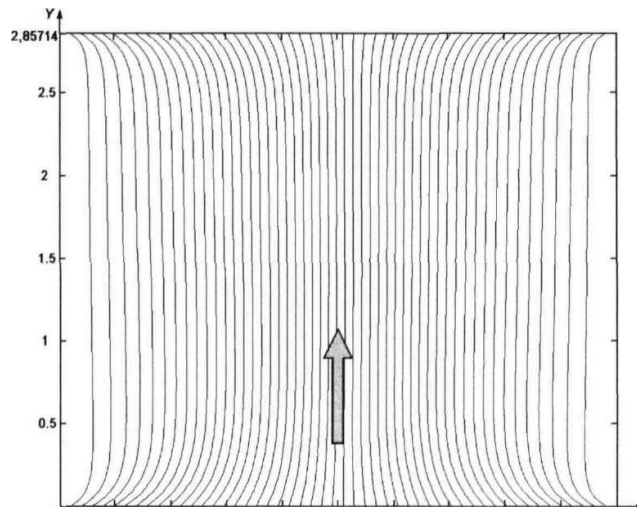
იონების გადატანის რიცხვი მემბრანებში არსებითად მეტია ვიდრე ხსნარში. კერძოდ, გაანგარიშებებში მიღებულია  $t_{1K} = t_{2K} = 0,99$ , და გამოითვლებიან  $t_1 \approx 0,39, t_2 \approx 0,61$ , სადაც  $t_i, t_{iA}, t_{iK}$  - შესაბამისად,  $i$ -რი სორტის იონების გადატანის რიცხვები ხსნარში და აგრეთვე ანიონცვლად და კათიონცვლად მემბრანებში. ამიტომ ელექტროდენის გავლისას ხდება ხსნარის გამტკნარება (კონცენტრაციის შემცირება) მემბრანების ზედაპირის მახლობლობაში (ნახ. 3.2), რასთანაც მიყვავართ ხსნარის ჯოჯოხეთურ გაცხელებას და მისი სიმკვრივის შემცირებას ამ არეში. ამ დროს აღძრული არქიმედეს ძალა აიძულებს გამტკნარებულ ხსნარს აიწიოს რაღაც სიჩქარით.

ნახაზი 3.1 აჩვენებს, რომ გადტუმბვის საკმაოდ მაღალი ( $V_0^{(d)} = 3 \text{ მმ} / \text{წმ}$ ) სიჩქარის დროს ხსნარის „ამოცურვის“ სიჩქარე შედარებით მცირეა და გრავიტაციული კონვექცია არ შეიმჩნევა. შეიძლება ითქვას, რომ ის ითრგუნება იძულებითი კონვექციით. ამ პირობებში სისტემაში მყარდება სტაციონალური რეჟიმი, ადგილი აქვს სითხის დინების ლამინარულ ხასიათს, ხოლო კონცენტრაციის განაწილება

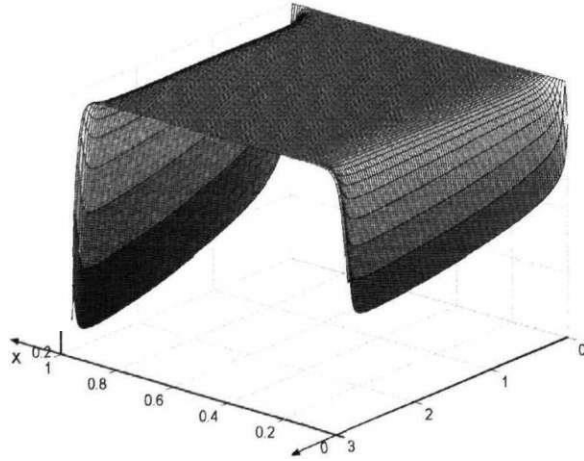
გამტკნარების არხში (ნახ. 3.2), საკმარისი სიზუსტით ემთხვევა გაანგარიშებას, წარმოებულს კონვექციურ დიფუზიური მოდელით [19,34,35,53]. შედეგების რიცხვითი შედარება მოყვანილია 3.4.2 პუნქტში.

გადატუმბვის სიჩქარის შემცირებისას აღიმკვრება სიტუაცია, როცა გამტკნარებული ხსნარი აიწევს ცოტათი სწრაფად, ვიდრე ხსნარი, რომელიც უფრო მეტადაა დაცილებული მემბრანებიდან (ნახ. 3.3ა). ამ დროს დიფუზიური ფენის ნაწილი „ირეცხება“ ნაკადით, მისი სისქე მცირდება (ნახ. 3.3ბ), ხოლო სისტემაში ზღვრული დენი იზრდება ზღვრულ ელექტროდიფუზიურ დენთან  $i_{lim}$  შედარებით.

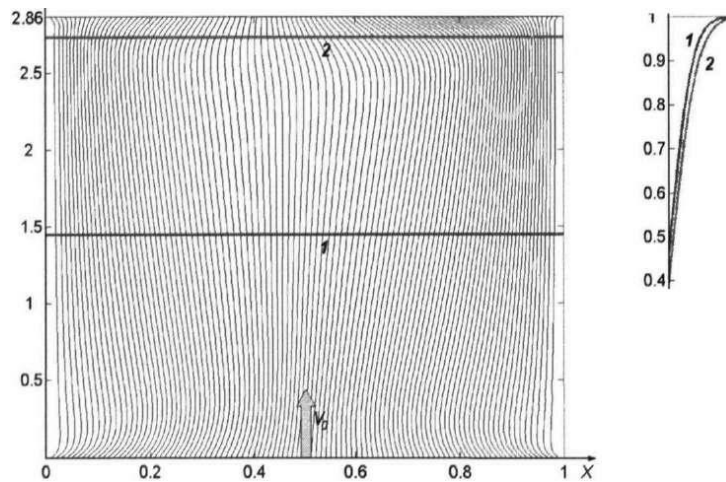
სითხის დინების წირები, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელის დახმარებით, რომლებიც გამოსახულია ნახ. 3.4, მოწმობენ, რომ შემავალი სიჩქარის შემდგომი შემცირება ( $V_0^{(d)} \leq \frac{3\partial\partial}{\partial\partial}$  ზემოდნაჩვენებიშემავალიპარამეტრებისთვის) იწვევს შეწყვილებული გრიგალის აღმკვრას. გრიგალებიდან ერთი განლაგებულია ანიონცვლად მემბრანასთან, ხოლო მეორე კათიონცვლად მემბრანასთან.



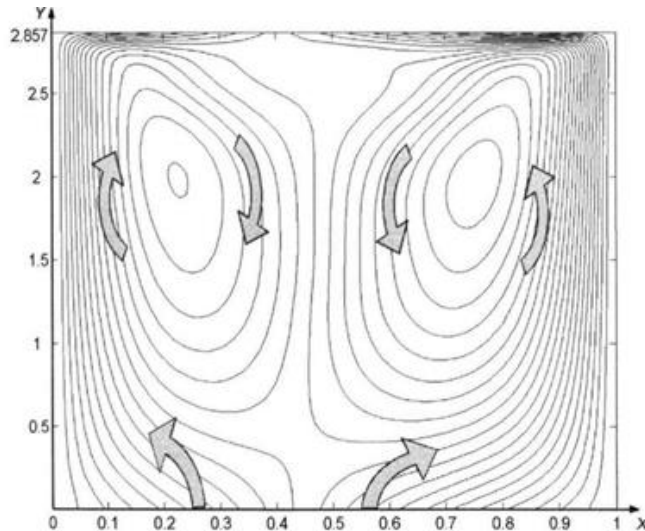
ნახ. 3.1 - გამტკნარების არხში სითხის დინების წირები, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 3\partial\partial/\partial\partial$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\varphi^{(d)} = -0,4 \text{ ვ} (\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 0,8)$



ნახ. 3.2 - კონცენტრაციის ველი გამტკნარების არხში, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, ელექტრო დენის ჩართვიდან 60 წამის შემდეგ, არხის ვერტიკალური განლაგებისას, სითხის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 3 \text{ მმ/წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\phi^{(d)} = -0,4 \text{ ვ}$  ( $\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 0,8$ );



ნახ.3.3 - სითხის დინების წირები, გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელით,  $i_{av}^{(d)} = 70 \frac{\text{ვ}}{\text{წმ}}$  ( $\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,46$ ) სიმკვრივის დენის ჩართვის მომენტიდან 20 წთ შემდეგ; ხსნარი გადაიტუმბება ქვემოდან ზემოთ სიჩქარით  $V_0^{(d)} = 0,5 \text{ მმ/წმ}$  ;

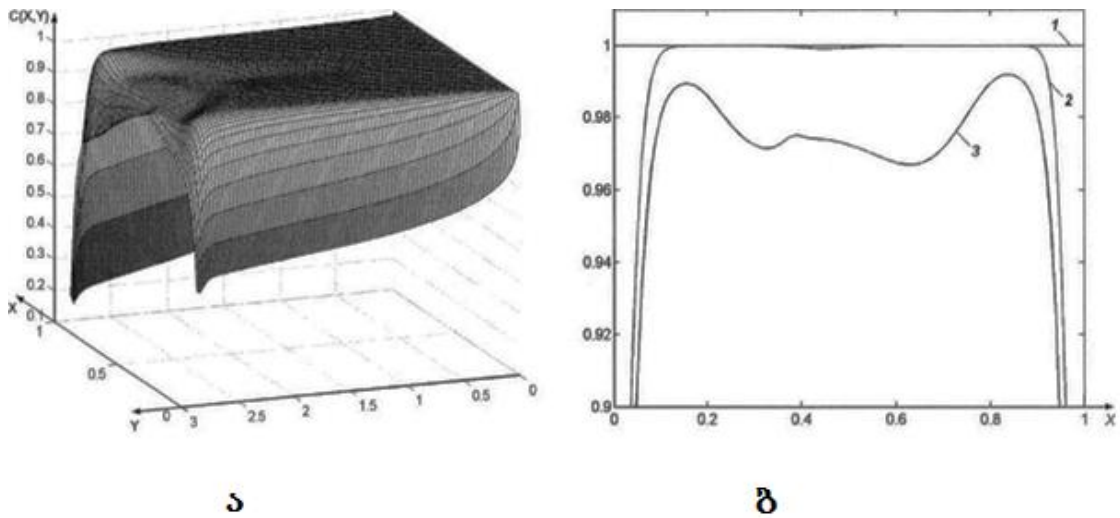


ნახ. 3.4 - სითხის დინების წირები გამტკნარების არხში, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, ელექტროდენის ჩართვიდან 60 წამში, არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ} / \text{წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\varphi^{(d)} = -0,4 \beta \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5 \right)$ .

ჩატარებული გაანგარიშებები გვიჩვენებენ, რომ ელექტროდიალიზის პროცესის წარმართვიდან უკვე 60 წამის შემდეგ სითხის დინების სიჩქარეები ამ გრიგალების შიგნით შეიძლება შეადგენდნენ 1,7-მდე (გრიგალი ანიონცვლად მემბრანასთან) და 2,0 (გრიგალი კათიონცვლად მემბრანასთან). ხსნარის მოცემული იძულებითი კონვექციის სიჩქარისა  $V_0^{(d)}$  და გამტკნარების არხის მოცემული გეომეტრიული პარამეტრების დროს დაწყვილებული გრიგალი იკავებს მემბრანებს შორის მთლიან სივრცეს და ამავდროულად სითხის დინების სიჩქარე თითოეულ გრიგალში იზრდება ხსნარის კონცენტრაციის  $C$  შემცირებით და ფაზებს შორის საზღვრის მახლობლობაში ტემპერატურის  $T$  გაზრდით. თითოეული გრიგალი ანხორციელებს ხსნარის არევას, ნივთიერების მიწოდებას მისი სიღრმიდან ფაზებს შორის საზღვარზე მემბრანა/ხსნარი, არღვევს რა ამით დიფუზიურ ფენას, ზრდის ზღვრულ დენს და უზრუნველყოფს გამტკნარების პროცესის ინტენსიფიკაციას.

სითხის გრიგალური ნაკადის მოქმედებით ფორმირდება კონცენტრაციის ველი, რომელიც წარმოდგენილია ნახაზზე 3.5. ცხადია, რომ ამ დროს გამტკნარების არხში კონცენტრაციის განაწილება განსხვავდება კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის

ჩარჩოებში მიღებულისაგან, რასაც ადგილი ჰქონდა გადატუმბვის მაღალი სიჩქარის დროს. კონვექციურ-დიფუზიური მოდელის დროს კონცენტრაციის ველის კვეთი  $Oy$  ის მიმართ წარმოადგენს პარაბოლის მსგავს მრუდს (ნახაზი 6.2, [35], გვ.267), დაძრულს ანიონცვლადი მემბრანისაკენ. ასეთი კონცენტრაციული პროფილი განპირობებულია კათიონის დიფუზიის კოეფიციენტის  $D_1$  უფრო მაღალი მნიშვნელობით ვიდრე ანიონის  $D_2$ . განსახილველ სისტემაში კონცენტრაციული პროფილი ტრანსფორმირდება მრუდში, რომელსაც აქვს ტრაპეციისმაგვარი ფორმა, ერთი ლოკალური მინიმუმით როცა  $x \approx 0,43$  (ნახ.3.5ბ, მრუდი 2) გამტკნარების არხის გამოსასვლელში ( $2,5 < y < L$ ) ფაზებს შორის საზღვრიდან სითხის ნაკადის მიერ გამტკნარებული ხსნარის მის სიღრმეში გადატანის შედეგად. სითხის არევის მაღალი სიჩქარის ზონაში ( $1 < y < L$ ) ნივთიერების მიწოდება არხის ბოლოში ( $2,5 < y < L$ ) ფაზებს შორის საზღვრიდან ხსნარის სიღრმეში არის მიზეზი კონცენტრაციული პროფილის ორი ლოკალური მინიმუმის (ნახ. 3.5ბ, მრუდი 3).

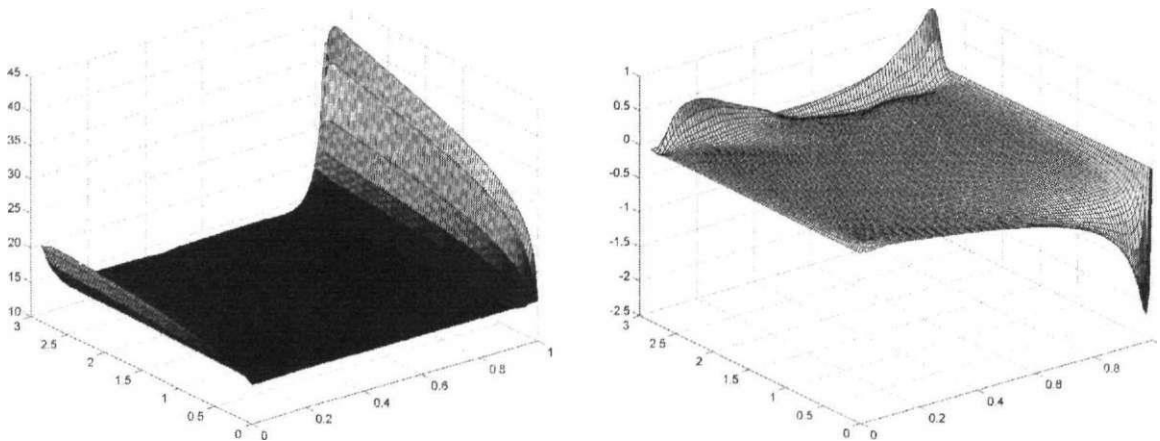


ნახ. 3.5-კონცენტრაციის ველი (ა) და კონცენტრაციის პროფილი (ბ) გამტკნარების არხში, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, ელექტრული დენის ჩართვიდან 60 წამის გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1\theta\theta/\text{წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\phi^{(d)} = -0,4 \vartheta (\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5)$ ; 1-შესასვლელში ( $y = 0$ ), 2-შუაში ( $y = 0,5L$ ), 3-არხის გამოსასვლელში ( $y = 0,95L$ )



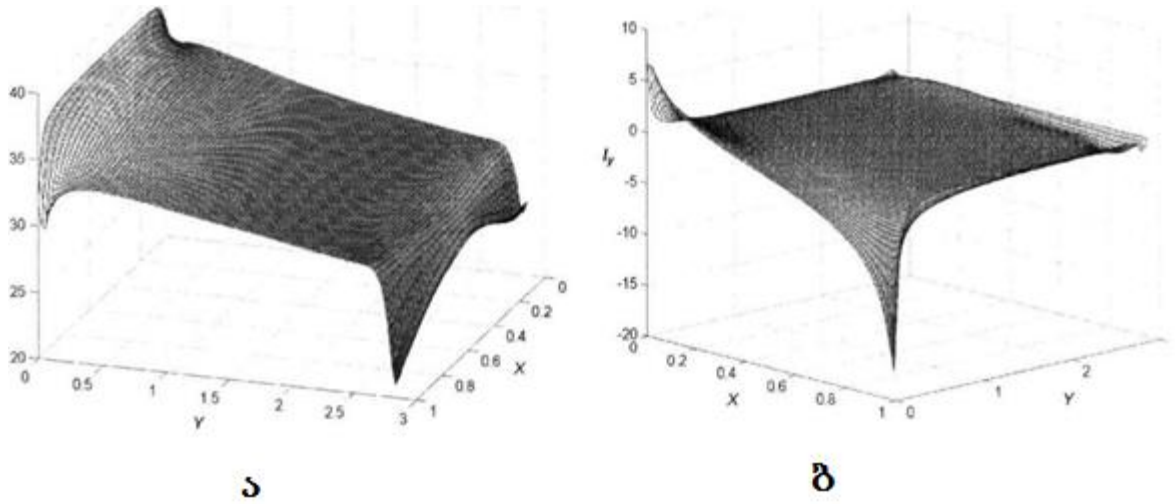
უკანასკნელი მრუდის კორელაცია ხდება მონაცემებთან, რომლებიც მიღებულია ლაზერული ინტერფერომეტრით [72].

ელექტროლიტის კონცენტრაცია არხის სიგრძის გასწვრივ მცირდება კათიონების კათიონცვლად და ანიონების ანიონცვლად მემბრანებში გადატანის შედეგად. ელექტრული ველი იცვლება კონცენტრაციული ველის ცვლილების შესაბამისად (ნახაზები 3.6, 3.7): მისი დამაბულობა  $\vec{E}$  მცირდება კონცენტრაციის გაზრდით და იზრდება კონცენტრაციის შემცირებით (ნახ. 3.6). ეს თავის მხრივ იწვევს ტემპერატურული ველის ტრანსფორმირებას: კონცენტრაციის შემცირებით ხსნარის ტემპერატურა იზრდება ჯოულური გაცხელების შედეგად (ნახ. 3.8). მაგალითად, როცა  $y = 2,5$  განსახილველ სისტემაში ეს ზრდა  $y = 0+$  დან ხსნარის სიღრმეში შეადგენს  $10^{-4}$  რიგის უგანზომილებო სიდიდეს, იმ დროს როცა ფაზებს შორის საზღვართან ის მაგალითად ტოლია  $1,4 \cdot 10^{-4}$  და  $1,5 \cdot 10^{-4}$  ანიონცვლად და კათიონცვლად მემბრანებთან შესაბამისად.

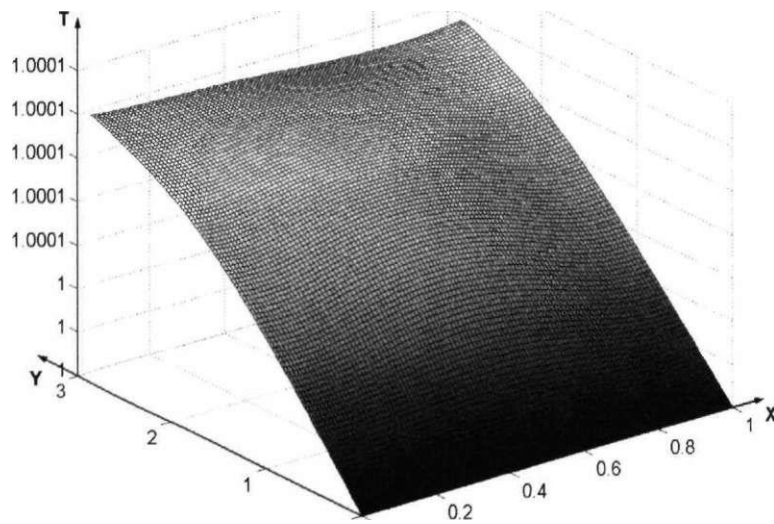


ნახ. 3.6 - ელექტრული ველის დამაბულობა  $E_x$  (ა) და  $E_y$  (ბ), გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, ელექტრული დენის ჩართვიდან 60 წამის გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე

$$V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ} \text{ და პოტენციალის ნახტომი } d_\varphi^{(d)} = -0,4 \beta \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5 \right);$$



ნახ. 3.7 - ელექტროდენის სიმკვრივების  $I_x$  (ა) და  $I_y$  (ბ), განაწილება პოტენციოსტატიკური მოდელის მიხედვით, ელექტრული დენის ჩართვიდან 60 წამის გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\varphi^{(d)} = -0,4 \text{ ვ}$  ( $\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5$ );



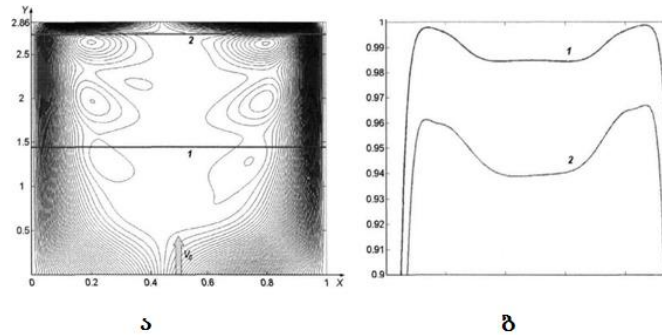
ნახ. 3.8 - ტემპერატურის განაწილება გამტკნარების არხში ელექტრული დენის ჩართვიდან 60 წამის გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ}$

ზემოდ წარმოდგენილი შედეგები მიღებულია ცხად სხვაობით სქემებზე დაფუძნებული ალგორითმებისაგან. არაცხადი სქემების გამოყენებით მიღებულმა გაანგარიშებებმა პირველად საშუალება მოგვცეს მიგველო შედეგები დროის მნიშვნელოვნად მაღალი მონაკვეთისთვის (3 საათი და მეტი დენის ჩართვის მომენტიდან). ამ შედეგების ანალიზმა გვიჩვენეს, რომ დროის გასვლასთან ერთად (როცა  $t \rightarrow \infty$ ) გამტკნარების საკანში გრავიტაციული კონვექციით აღძრული პროცესები გადიან სტაციონალურ რეჟიმზე არხის ვერტიკალური განლაგების დროს და არ გადიან მასზე ჰორიზონტალური განლაგების დროს. ორივე შემთხვევაში სითხის გრიგალური მოძრაობის განვითარებას და მარილის კონცენტრაციის შესაბამის ცვლილებას აქვს რამდენიმე ფაზა.

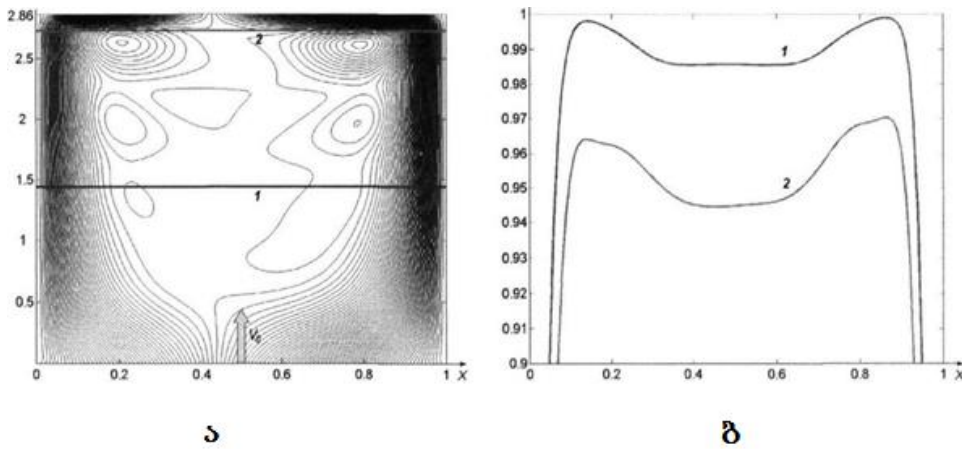
არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, როცა ხსნარი გადაიტუმბება ქვემოდან ზემოთ:

- 1) რამოდენიმე ათეული წამის ხანგრძლივობის პირველ ფაზაზე ( არხის სიგრძეზე, ელექტროლიტის კონცენტრაციაზე, ელექტრული დენის ძალაზე,  $Gr/Re^2$  რიცხვებზე და სხვა დამოკიდებულებით) ხსნარის გაღარიბებული დიფუზიური ფენები, აიწევიან რა მემბრანების ზედაპირების გასწვრივ სიჩქარით, რომელიც აჭარბებს ხსნარის მიწოდებისა და გამოყვანის ხაზოვან სიჩქარეს, ახდენენ შეწყვილებული გრიგალის აღძვრის ინიცირებას, რომელიც აღწერილია ზემოდ და გამოსახულია ნახაზზე 3.4.
- 2) მეორე რამოდენიმე წუთის (ათის მახლობლობაში ზემოთნაჩვენები შემავალი პარამეტრების დროს) ხანგრძლივობის ფაზაზე გრძელდება ხსნარის მოძრაობა შეწყვილებული გრიგალით, რომელიც იკავებს გამტკნარების მთელ არხს. ამავე დროს ხდება გრიგალების თანდათან ბიფურკაცია და ისინი დინებით გაიტანებიან გამოსასვლელის მხარეს.
- 3) ამ დროის გასვლის შემდეგ მყარდება სტაციონალური ჰიდროდინამიკური რეჟიმი (ნახაზები 3.9 ა, 3.10 ა), რომელიც აყალიბებს სტაციონალურ კონცენტრაციულ ველს. ამ ველის კვეთები 1 და 2 სიბრტყეებში (ნახაზები 3.9 ა, 3.10 ა) წარმოდგენილია ნახაზებზე 3.9ბ, 3.10ბ მრუდებით 1 და 2 შესაბამისად,

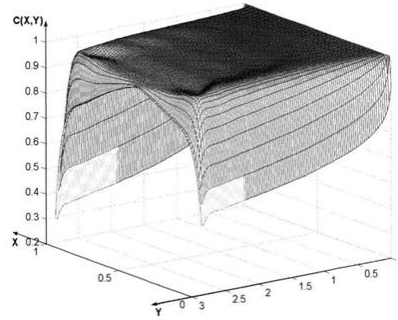
ხოლო საერთო ხედი - ნახაზზე 3.11. ამ დროს შეიმჩნევა ყველა დანარჩენი ველის სტაციონალურობა.



ნახ. 3.9 - სითხის დინების წირები (ა) და კონცენტრაციული პროფილები (ბ), გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელით,  $i_{av}^{(d)} = 70 \frac{\rho}{\rho^2} \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,46 \right)$  სიმკვრივის დენის ჩართვის მომენტიდან 20 წთ შემდეგ, არხის ვერტიკალური განლაგების და ხსნარის  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ}^2/\text{წმ}$  გადატუმბვის სიჩქარე დროს; 1- კონცენტრაცია არხის შუაში ( $y = 0,5L$ ), 2- გამოსასვლელში ( $y = 0,95L$ )



ნახ. 3.10 - სითხის დინების წირები (ა) და კონცენტრაციული პროფილები (ბ), გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, დენის ჩართვის მომენტიდან 20 წთ შემდეგ, არხის ვერტიკალური განლაგების, ხსნარის  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ}^2/\text{წმ}$  გადატუმბვის სიჩქარის და  $d_{\varphi}^{(d)} = -0,4 \rho \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5 \right)$  პოტენციალის ნახტომის დროს; 1- კონცენტრაცია არხის შუაში ( $y = 0,5L$ ), 2- გამოსასვლელში ( $y = 0,95L$ )



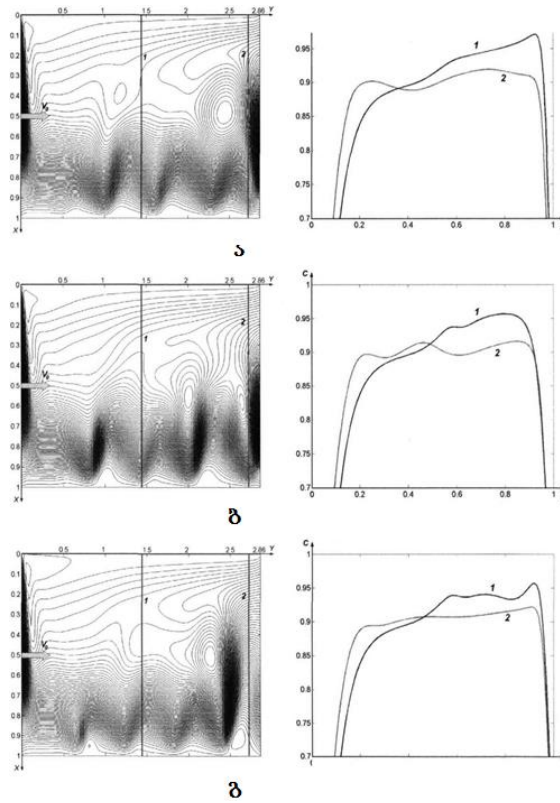
ნახ. 3.11 - კონცენტრაციების ველი, დენის ჩართვის მომენტიდან 20 წთ შემდეგ, არხის ვერტიკალური განლაგების, ხსნარის  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ}^3/\text{წმ}$  გადატუმბვის სიჩქარის და  $d_\varphi^{(d)} = -0,4 \vartheta \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5 \right)$  პოტენციალისნახტომისდრო

მიღებული შედეგების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ არხის *ჰორიზონტალური* განლაგების დროს სითხის მოძრაობა არის აგრეთვე გრიგალური, მხოლოდ ადგილი აქვს პროცესის კვაზისტაციონალურობას (ნახ.3.12). გრიგალის სტრუქტურაც განსხვავებულია აგრეთვე არხების ვერტიკალურად განლაგების დროს შემჩნეული სტრუქტურისაგან. სითხის დინების წირები მოწმობენ გამტკნარების არხის შესასვლელის მახლობლად კათიონცვლადი მემბრანის ზედაპირთან გრიგალების პერიოდულ წარმოშობაზე, სადაც გაღარიბებული დიფუზიური ფენა განლაგებულია მემბრანის ზემოთ. ეს გრიგალები წაილეკებიან ნაკადით გამოსასვლელის მხარეს, ზემოქმედებენ დიფუზიურ ფენაზე, რასაც მოწმობს 3.12 ნახაზზე კონცენტრაციული პროფილების ცვლილება. ამ შემთხვევისთვის სრული ციკლის დრო შეიძლება შეადგენდეს რამდენიმე ათეულ წამს (დაახლოებით 40 ნაჩვენები შემავალი პარამეტრების დროს). ანალოგიური სურათი შეიმჩნევა, როცა ანიონცვლადი მემბრანა იმყოფება ქვემოთ, ხოლო კათიონცვლადი - ზემოდან.

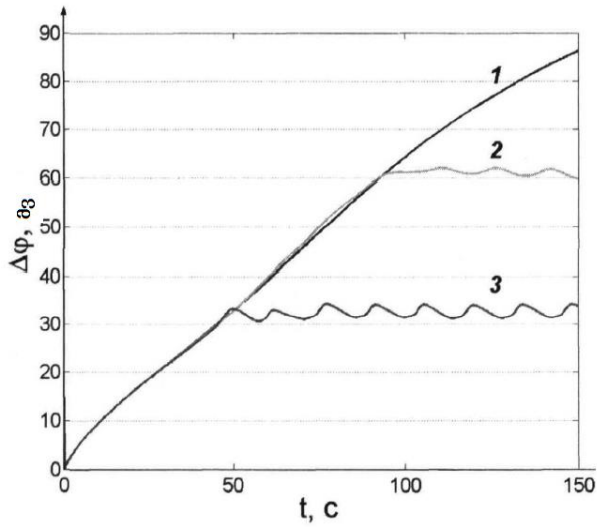
კონცენტრაციის პერიოდულ ცვლილებას (ნახ. 3.12) მივყავართ პოტენციალის შესაბამის ცვლილებასთან საზღვრის მემბრანა/ხსნარი მახლობლად, რაც ხსნის ექსპერიმენტის დროს ქრონოპოტენციოგრამებზე ოსცილაციას. გაანგარიშებები მიღებული ელექტროლიტის განსხვავებული კონცენტრაციებით გვიჩვენებენ, რომ კონცენტრაციის გაზრდა ხელს უწყობს გრავიტაციული კონვექციის უფრო სწრაფ განვითარებას და ინტენსიურ გამოვლენას, რაზეც თვალსაჩინოდ მოწმობენ ნახ. 3.13 წარმოდგენილი ქრონოპოტენციოგრამები. ეს მრუდები წარმოადგენენ [AB]

მონაკვეთზე ელექტრული პოტენციალის ვარდნას დროის მიხედვით, სადაც  $A(x, y) = (\frac{7H}{8}, L/2)$ ,  $B(x, y) = (H, L/2)$ , დონანისებური ნახტომის გათვალისწინებით და ოსმოსური მდგენელის გამოკლებით.

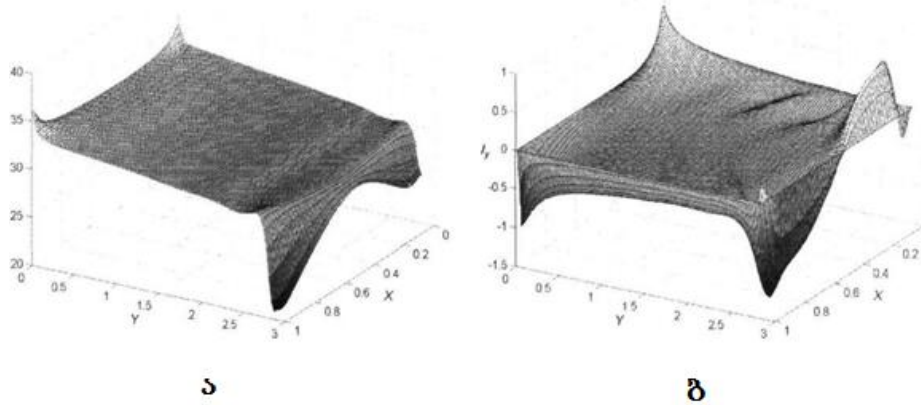
ელექტრული დენის სიმკვრივე, გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელით, წარმოდგენილია ნახაზებზე 3.14-3.17. დენის სიმკვრივის შემცირება გამტკნარების არხის გასწვრივ (Oy ღერძი), რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 3.14ა, 3.15ა, დაკავშირებულია ხსნარის წინააღობის ზრდასთან, განპირობებულით ელექტროლიტის კონცენტრაციის შემცირებით, განსაკუთრებით დიფუზიურ ფენებში.



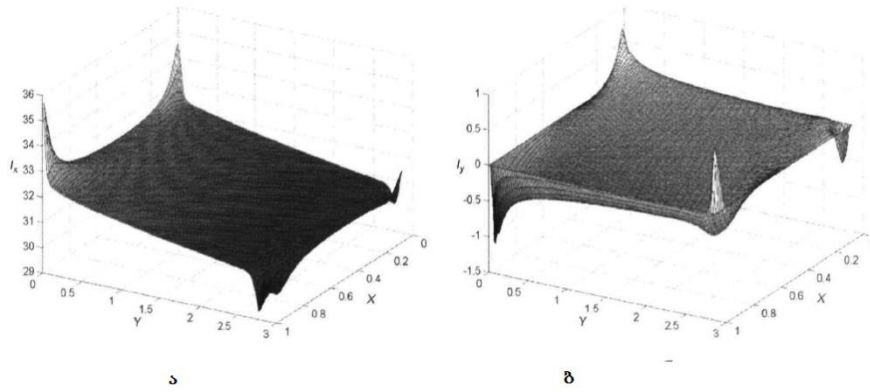
ნახ.3.12 - სითხის დინების წირები და კონცენტრაციული პროფილები, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით, დენის ჩართვის მომენტიდან 2 სთ (ა), 2 სთ + 14 წმ (ბ), 3 სთ + 28 წმ (გ) გავლის შემდეგ, არხის ჰორიზონტალური განლაგების დროს, ხსნარის  $V_0^{(d)} = 0,1 მმ/წმ$  გადატუმბვის სიჩქარის და  $d_{\phi}^{(d)} = -0,3 \vartheta (\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 1,9)$  პოტენციალის ნახტომის დროს; 1 - კონცენტრაცია არხის შუაში, ( $y = 0,5L$ ), 2-გამოსასვლელში ( $y = 0,95L$ )



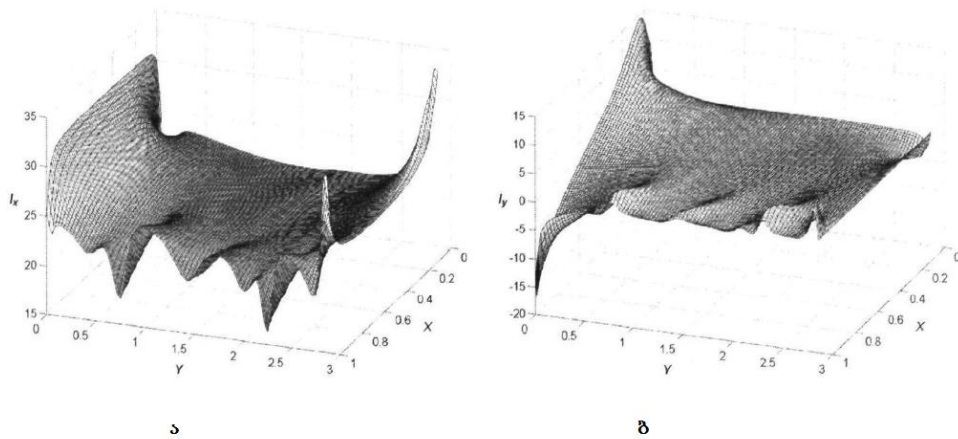
ნახ. 3.13 - ქრონოპოტენციოგრამები, გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელით ხსნარებისათვის კონცენტრაციებით  $C^{(d)} = 0,01$  მოლი(1),  $C^{(d)} = 0,05$  მოლი(2),  $C^{(d)}=0,1$  მოლი (3) არხის ჰორიზონტალური განლაგების, ხსნარის  $V_0^{(d)} = 0,5$  მმ/წმ გადატუმბვის სიჩქარის და  $\frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 0,91$  ელექტრო დენის სიმკვრივის დროს



ნახ. 3.14 - ელექტროდენის სიმკვრივეების  $I_x$  (ა) და  $I_y$  (ბ), განაწილება გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელის მიხედვით, მისი ჩართვიდან 20 წთ გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1$  მმ/წმ და დენის საშუალო სიმკვრივე  $i_{av}^{(d)} = 70 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,46 \right)$

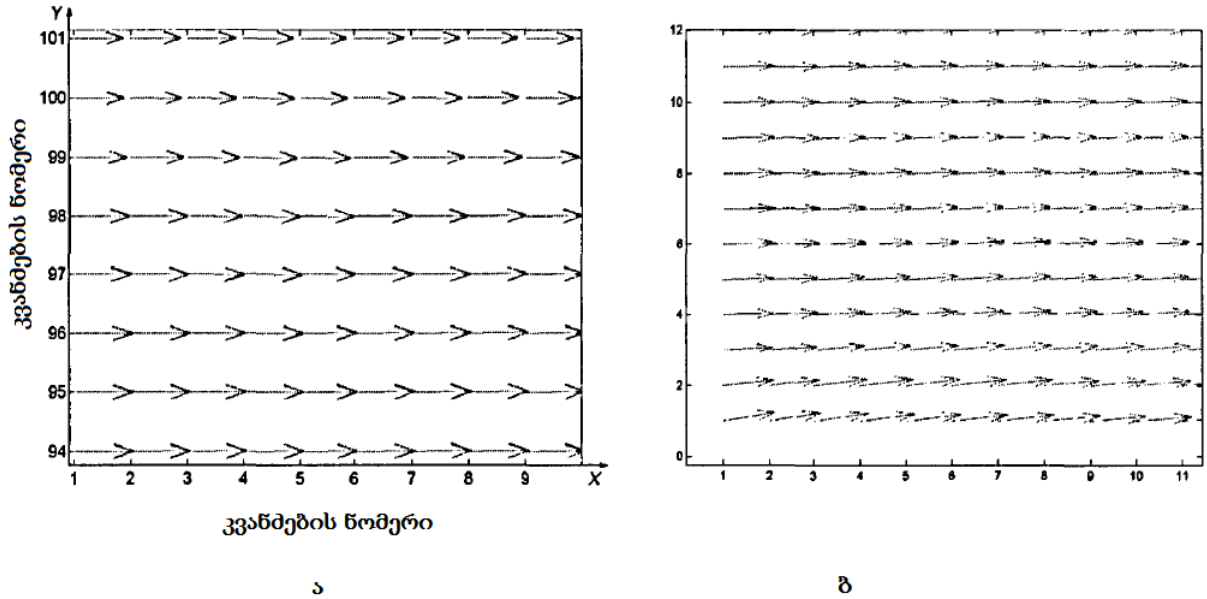


ნახ. 3.15 - ელექტროდენის სიმკვრივების  $I_x$  (ა) და  $I_y$  (ბ), განაწილება გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური მოდელის მიხედვით, მისი ჩართვიდან 20 წთ გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,5 \text{ მმ/წმ}$  და დენის საშუალო სიმკვრივე  $i_{av}^{(d)} = 70 \frac{\text{ჯ}}{\text{წ}^2} \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 1,44 \right)$



ნახ. 3.16 - - ელექტროდენის სიმკვრივების  $I_x$  (ა) და  $I_y$  (ბ), განაწილება გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელის მიხედვით, მისი ჩართვიდან 20 წთ გასვლის შემდეგ არხის ჰორიზონტალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\phi^{(d)} = -0,3 \text{ ვ} \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 1,9 \right)$





ნახ. 3.17 - ელექტრო დენის სიმკვრივის ვექტორული ველის ფრაგმენტი გაანგარიშებული გალვანოსტატიკური (ა) და პოტენციოსტატიკური (ბ) მოდელების მიხედვით, მიხედვით, მისი ჩართვიდან 20 წთ გასვლის შემდეგ არხის ვერტიკალური

განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ}$  და დენის

$$\text{საშუალო სიმკვრივე } i_{av}^{(d)} = 70 \frac{\text{ა}}{\text{ფ}} \text{ (ა) და } d_{\phi}^{(d)} = -0,4 \text{ ვ (ბ) } \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2,5 \right)$$

გაანგარიშებების შედეგები გვიჩვენებენ, რომ მოცემულ ამოცანაში, ისე როგორც სითბოს გადატანის კლასიკურ პროცესებში, კრიტერიალურ რიცხვს, რომელიც განსაზღვრავს იძულებითი კონვექციის პირობებში გრავიტაციული კონვექციის განვითარების ხარისხს წარმოადგენს რიჩარდსონის რიცხვი  $Ri = Gr/Re^2$  და შეფასებულია მისი კრიტიკული მნიშვნელობი გრავიტაციული ველის მიმართ გამტკნარების არხის განლაგების მიხედვით. არხის ჰორიზონტალური განლაგების დროს  $Ri_{cr\_hor} \approx 300$ , ვერტიკალურისათვის -  $Ri_{cr\_vert} \approx 1000$ .

### 3.4. შედეგების ვერიფიკაცია

მიღებული შედეგების ვერიფიკაცია ხდება ორ ეტაპად:

1. რიცხვითი გაანგარიშებების სისწორის შემოწმებისათვის:

- ა) გამოიყენება ბიჯის დანაწევრების სტანდარტული მეთოდი;
  - ბ) ხორციელდება რიცხვითი მეთოდით ამოხსნილი განტოლებების შეუსაბამობების ნულთან სიახლოვის შემოწმება მოცემული სიზუსტით.
2. ამას გარდა, აუცილებელია ვაწარმოთ თვით მათემატიკური მოდელის ვერიფიკაცია რიცხვითი გაანგარიშების შედეგების შედარებით:
- ა) სხვა ავტორების მათემატიკური მოდელირების შედეგებთან;
  - ბ) ექსპერიმენტალურ მონაცემებთან.

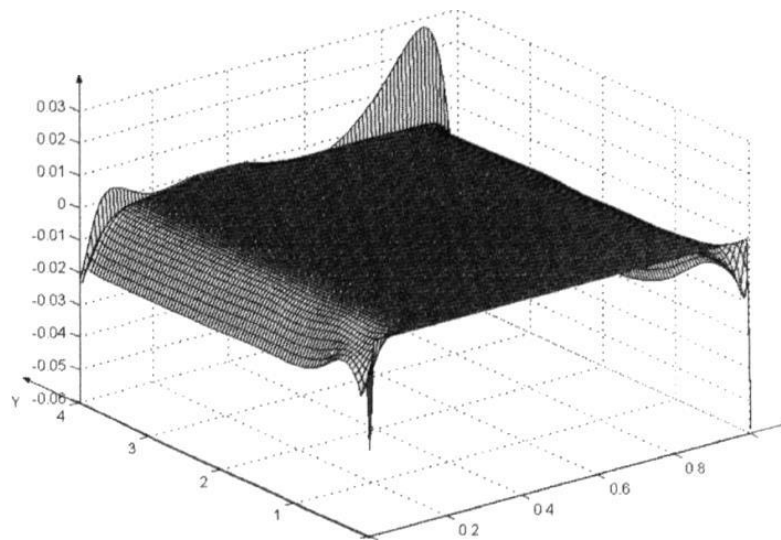
### 3.4.1. ბიჯის დანაწევრების მეთოდი

როგორც 3.1 პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, გამოყენებულ დისკრეტულ მოდელში საანგარიშო არე  $x$  კორდინატით (ინტერვალი  $[0;1]$ ) თავიდანვე დაყოფილია  $h_x = 1/M$  სიგრძის  $M$  ტოლ ინტერვალად,  $y$  კორდინატით (ინტერვალი  $[0;L]$ ) -  $h_y = 1/N$  სიგრძის  $N$  ტოლ ინტერვალად. მოცემულ საანგარიშო ბადეზე (ვუწოდოთ მას  $\omega_1$ ) მიღებულია რიცხვითი ექსპერიმენტების ნაკრები, რომელთაგან ზოგიერთი აღწერილია წინა პუნქტში. ინტერვალების რიცხვი თითოეული კორდინატის მიხედვით გავზარდოთ ორჯერ. ამ დროს ბიჯი თითოეული კორდინატის მიხედვით შემცირდება ორჯერ. მიღებულ ბადეს დავარქვათ  $\omega_2$ . ვაწარმოთ  $\omega_2$  -ზე რიცხვითი გაანგარიშება იმავე საწყისი მონაცემებით და იმავე დროთი  $t^*$  რაც პირველ გაანგარიშებაში. ეხლა შევადაროთ შედეგები: ისინი რაც უფრო ახლოსაა, მით უფრო საიმედოა გამოყენებული სქემა.

ჩატარებული იქნა რიგი გაანგარიშებები ბადეებზე  $\omega_1$  და  $\omega_2$  შემავალი პარამეტრების ერთნაირი ნაკრებით და შესრულდა შედეგების ურთიერთ შედარება. მაგალითის სახით მოყვანილია პოტენციოსტატიკური მოდელის 3.3 პარაგრაფის დასაწყისში ნაჩვენები შემავალი პარამეტრების (არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0,1 \text{ მმ/წმ}$  და პოტენციალის ნახტომი  $d_\phi^{(d)} = -0,4 \text{ ვ}$ ) მიხედვით წარმოებული ორი გაანგარიშების შედეგების ურთიერთ შედარება. პირველ შემთხვევაში გამოიყენებოდა საანგარიშო სქემა  $101 \times 101$ , მეორეში -

201×201. ორივე შემთხვევაში გაანგარიშებას ვაწარმოებდით დროისათვის  $t^{*(d)} = 20,6$  წმ, რომელიც შეესაბამებოდა უგანზომილოდ დროს  $t^* = 0,412$ .

შესასწავლი პროცესის განმსაზღვრელი ფაქტორი არის კონცენტრაციული ველი  $C$ , ამიტომ ვერიფიკაცია წარმოებული იქნა სწორედ მისი მიხედვით. როგორც ნახ. 3.18-დან გამომდინარეობს, ორი გამოყენებული სქემის შედეგების სხვაობა, სასაზღვრო ეფექტების გათვალისწინებით არ აღემატება 5%. დანარჩენი ველების ანალოგიური შედარება უფლებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა, რომ გამოყენებული საანგარიშო სქემები საკმაოდ საიმედოა, და გაანგარიშების შედეგებს უნდა ვენდოთ.



ნახ.3.18 კონცენტრაციის სხვაობის ველი  $dC = C(h_t) - C(h/2)$

### 3.4.2. შედარება სხვა ავტორების მოდელირების შედეგებთან

თუ აგებული მოდელებიდან გამოვრიცხავთ გრავიტაციულ მდგენელს (თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას გ ავიღებთ ნულის ტოლს), შედეგები შეიძლება შევადაროთ ცნობილი კონვექციურ-დიფუზიური მოდელით [19,34,35,53] (იხილეთ პარაგრაფი 1.3) მიღებულს. მაშასადამე პოტენციოსტატიკური მოდელით წარმოებული იქნა გაანგარიშება NaCl 0,1 მოლური ხსნარისათვის,  $H^{(d)} = 7$ მ სიგანის

და  $L^{(d)}=20\text{მმ}$  სიგრძის გამტკნარების არხში, ხსნარის  $V_0^{(d)}=3\text{მმ/წმ}$  სიჩქარით გადატუმბვისას, რომელსაც შესასვლელში და გამოსასვლელში აქვს პარაბოლური პროფილი (1.40) და მემბრანებს შორის სივრცეში პოტენციალის ვარდნა  $d_\varphi^{(d)}=-0.4\text{ვ}$ . რადგანაც კონექციურ-დიფუზიურ მოდელში მოცემულია პოტენციალის ვარდნა მთელ შეწყვილებულ საკანზე, ამიტომ ამ სიდიდის მნიშვნელობა შერჩეულ იქნა ისეთნაირად, რომ გამტკნარების არხში დენის საშუალო მნიშვნელობა ყოფილიყო იდენტური. ბიჯების მნიშვნელობა არხის სიგანეზე და სიგრძეზე აღებული იქნა ერთნაირი.

ნახაზზე 3.19 გამოსახულია უგანზომილებო კონცენტრაციული პროფილები, მიღებული ორივე მოდელით არხის გამოსასვლელში. ნახაზზე 3.19 ა ეს მოდელები ერთმანეთისგან გაურჩეველია, ხოლო ნახაზზე 3.19 ბ ჩანს, რამდენად ახლოა ისინი. ცხრილში 3.1 წარმოდგენილია ამ პროფილების რიცხვითი მნიშვნელობები. მათი შედარება საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ორი მოდელით მიღებული შედეგების მაქსიმალურ შეცილებას, ადგილი აქვს საზღვარზე მემბრანა/ხსნარი და შეადგენს 0,01-ზე ნაკლებს:  $\max|c(x_i) - C(x_i)| < 0,01, i = 0..M$ . დიფუზიური ფენების სისქეებიც ემთხვევიან დიდი სიზუსტით (ცხრილი 3.2).

სიჩქარეთა გაანგარიშებული ველების ანალიზი ელექტრული ველის არ არსებობის შემთხვევაში ( $i_{av} = 0$  და  $d_\varphi = 0$ ) აჩვენებს, რომ არხის შუაში სიჩქარის პროფილს აქვს პარაბოლის სახე, აღწერილით პუაზიელის განტოლებით (1.40). ეს მოწმობს ჰიდროდინამიკურიველების გაანგარიშებების საიმედოებას. ამას გარდა მოცემული მოდელების ჰიდროდინამიკური მდგენელების ვერიფიკაციისათვის შესრულებული იქნა ნაპრალისებურ ნახვრეტთან არხებში სითხის დინების მოდელირება [65] (ნახ. 3.20), ნავთობმომპოვებელი პერფორირებული მილების ერთი ბოლო იყო მირჩილული (ნახ. 3.21), წინააღმდეგობებიან არხებში (ნახ. 3.22). ამ დროს მიღებულმა ყველა შედეგმა მიიღო თეორიული და ექსპერიმენტალური დასაბუთება.

ცხრილი 3.1 - უგანზომილებო კონცენტრაციის განაწილება არხის სიგანეზე

x	0.00	0.0	0.0	0.1	0.16		0.8	0.8	0.92	0.96	1.00
		4	8	2			4	8			
c	0.407	0.810	0.980	0.999	1.000	..	1.000	0.999	0.969	0.704	0.0781
	3	3	5	6	0	.	0	4	7	9	
C	0.401	0.806	0.980	0.999	1.000		1.000	0.999	0.969	0.701	0.0873
	8	4	0	6	0		0	4	3	6	

c- კონცენტრაცია გაანგარიშებული კონვექციურ-დიფუზიური მოდელით;

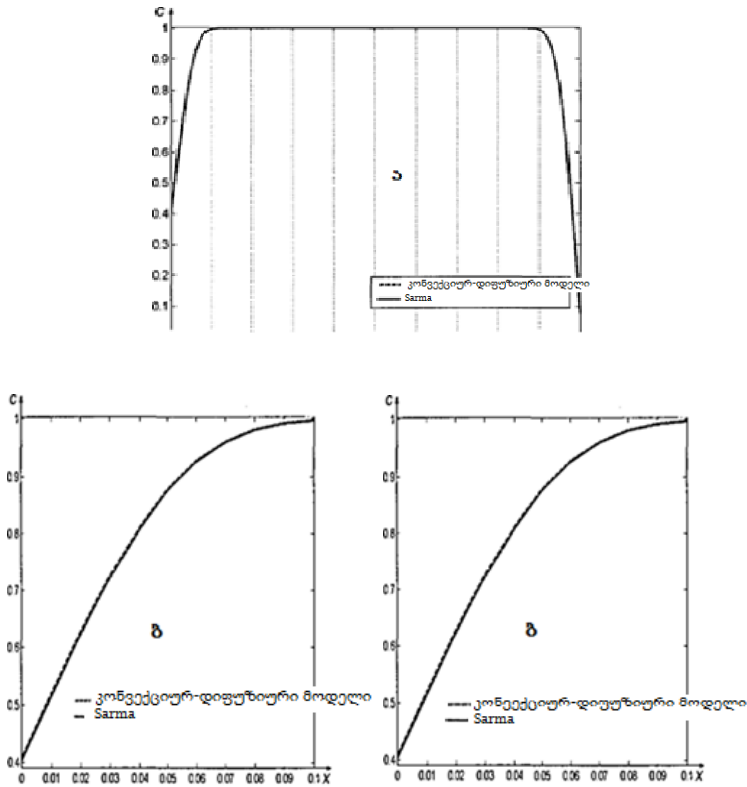
C- კონცენტრაცია, გაანგარიშებული პოტენციოსტატიკური მოდელით.

ცხრილი 3.2 - დიფუზიური ფენების უგანზომილო სისქეები

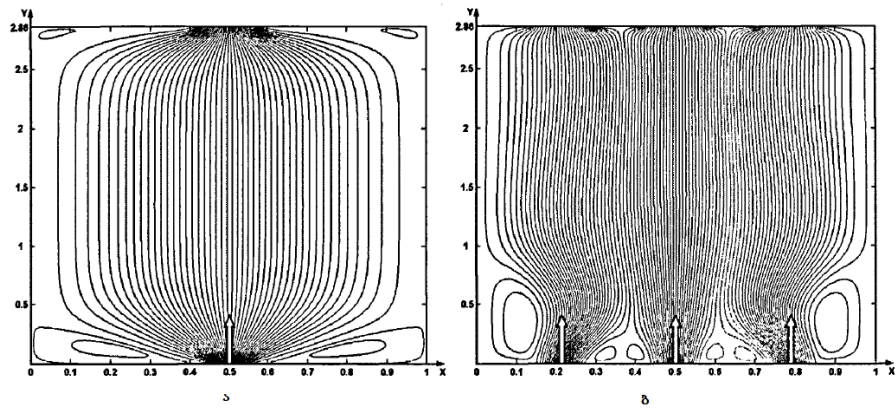
	$\delta_A$	$\delta_K$	$\tilde{\delta}_A$	$\tilde{\delta}_K$
კონვექციურ-დიფუზიური მოდელი	0.052	0.052	0.088	0.094
	7	7	7	3
პოტენციოსტატიკური მოდელი	0.053	0.053	0.089	0.094
	1	6	0	4

$\delta_A$  და  $\delta_K$  - დიფუზიური ფენის სისქე, განსაზღვრული ხსნარის სიღრმეში და შესაბამისად ანიონცვლადი და კათიონცვლადი მემბრანის ზედაპირთან კონცენტრაციული პროფილის მხებების გადაკვეთით;

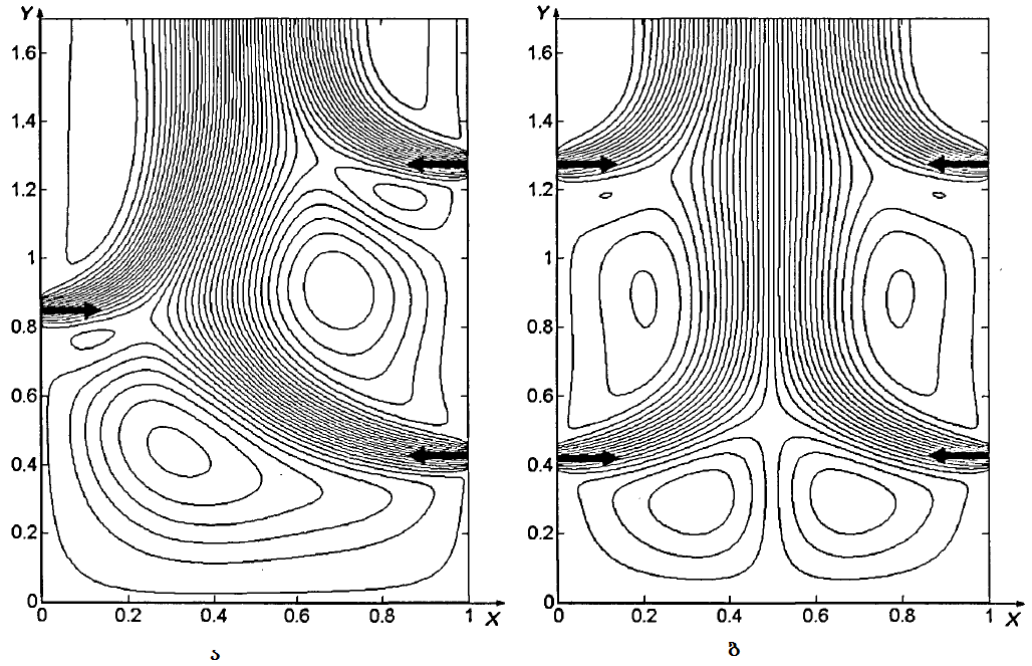
$\tilde{\delta}_A$  და  $\tilde{\delta}_K$  - დიფუზიური ფენის სისქე, განსაზღვრული შესაბამისად ანიონცვლად და კათიონცვლად მემბრანასთან ხსნარის კონცენტრაციის 1%-ით და მეტით შემცირებისას, ხსნარის სიღრმეში კონცენტრაციასთან შედარებით.



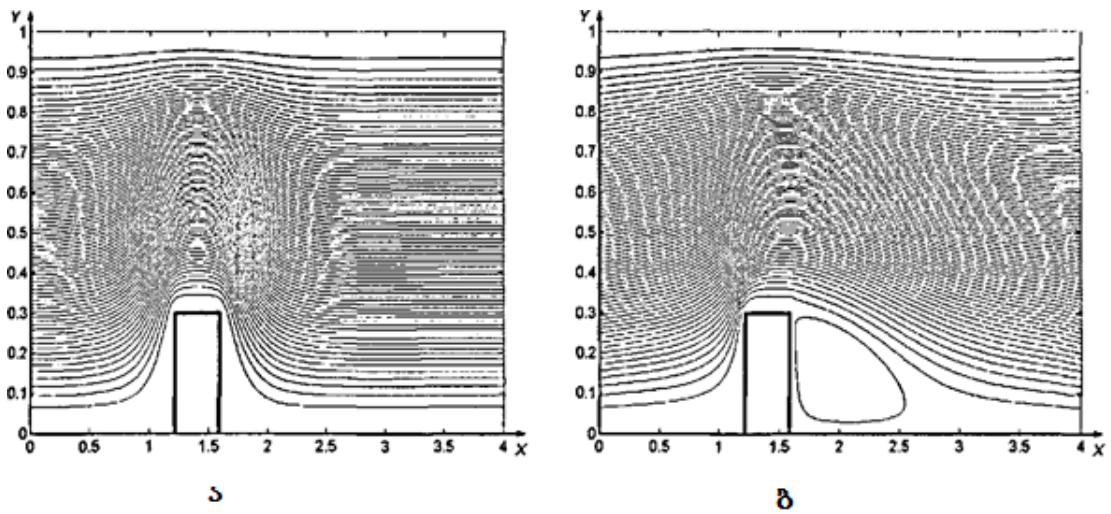
ნახ. 3.19 კონცენტრაციული პროფილები, მიღებული კონვექციურ-დიფუზიური (წყვეტილი ხაზი) და პოტენციოსტატიკური (უწყვეტი ხაზი) მოდელებით  $H^{(d)} = 7\text{მ}$  სიგანის და  $L^{(d)} = 20\text{მ}$  სიგრძის გამტკნარების არხის გამოსასვლელში, ხსნარის  $V_0^{(d)} = 3\text{მმ/წმ}$  სიჩქარით გადატუმბვისას, როცა მემბრანებს შორის სივრცეში პოტენციალის ვარდნა  $d_\phi^{(d)} = -0.4\text{ვ}$ ; საერთო ხედი (ა) და დიფუზიური ფენები ანიონცვლადი (ბ) და კათიონცვლადი (გ) მემბრანების მახლობლობაში.



ნახ. 3.20- სითხის დინება „ცარიელ“ არხში შესასვლელში და გამოსასვლელში: (ა) ერთი ნაპრალის,  $Re=3,5$ ; (ბ) სამი ნაპრალის,  $Re=140$ , არსებობისას



ნახ. 3.21- ერთი მხრიდან დახშულ პერფორირებულ მილებში სითხის დინების წირები, როცა  $Re=120$ : ა)ერთი შემავალი ნახვრეტით ცალ გვერდზე და ორი ნახვრეტით მეორეზე; ბ) ორი შემავალი ნახვრეტით ორივე გვერდზე



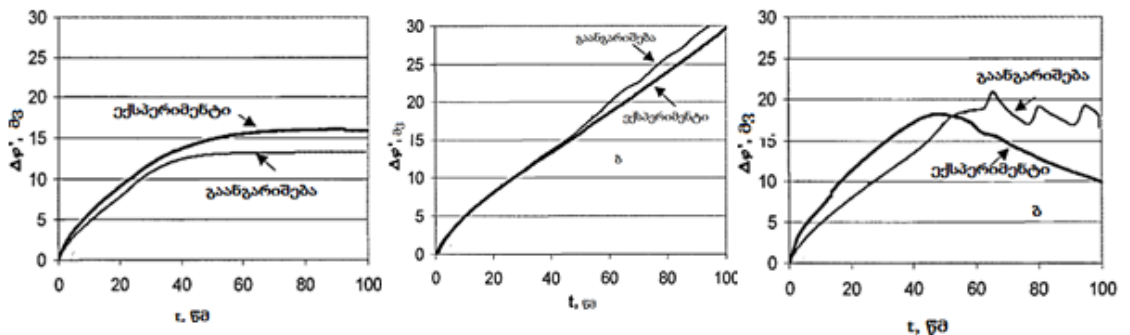
ნახ. 3.22 - სითხის დინების წირები არხში სწორკუთხა დაბრკოლებით, როცა  $Re=1$  (ა) და  $Re=100$  (ბ)

ტემპერატურული და ელექტრულიველები აღიწერებიან განტოლებათა იგივე ტიპებით, როგორითაც ზემოდ ვერიფიცირებული კონცენტრაციული და ჰიდროდინამიკური ველები, ამიტომ გვაქვს საფუძველი ვიგულისხმოთ, რომ მათი რიცხვითი ამოხსნებიც ადეკვატურია.

## თავი 4. ექსპერიმენტალური კვლევა

### 4.1 რიცხვითი ამოხსნების შედარება ექსპერიმენტალურთან

ნახაზზე 3.23 წარმოდგენილია მათემატიკური გალვანოსტატიკური მოდელით (პუნქტი 2.5.1) შესრულებული გაანგარიშებების და აგრეთვე ყუბანის უნივერსიტეტის ფიზიკური ქიმიის კათედრის თანამშრომლების მიერ ქრონოპოტენციომეტრის მეთოდით შესრულებული ექსპერიმენტების შედეგები, გამტკნარების არხის გრავიტაციული ველის მიმართ სხვადასხვა განლაგების დროს. ექსპერიმენტები ორგანიზებულია ისეთნაირად, რომ გამოვრიცხოთ გამტკნარების გამოსაკვლევ არხში ხსნარის სიჩქარის შემთხვევითი ფლუქტუაციები. ამ დროს ელექტროქიმიურ უჯრედში შესაყვანი და გამოსაყვანი მოწყობილობების გეომეტრიული პარამეტრები გაანგარიშებულია სადისერტაციო ნაშრომის შესრულების დროს დამუშავებული ნაპრალის მაგვარი ნახვრეტებიან არხში სითხის მოძრაობის მათემატიკური მოდელის [64] დახმარებით (ნახ. 3.20).



ნახ. 3.23 - ქრონოპოტენციოგრამები, მიღებული მემბრანული სისტემისათვის

AMX/NaCl გალვანოსტატიკური მოდელით რიცხვითი გაანგარიშებით და ექსპერიმენტით, როცა  $H^{(d)} = 7\text{მმ}$ ,  $C^{(d)} = 0.1\text{მოლი}$ ,  $V_0^{(d)} = 0.5\text{მმ/წმ}$ ,  $i_{av}^{(d)} = 50 \frac{\text{ჯ}}{\text{წმ}} \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 1 \right)$ :

(ა) გამტკნარების არხის ვერტიკალური განლაგებისას, ხსნარი გადაიტუმბება ქვემოდან ზემოდ; (ბ) ჰორიზონტალურ მდებარეობაში, გადარიბებული დიფუზიური ფენა მოთავსებულია მემბრანის ქვემოთ; (გ) მემბრანის ზემოდ.

კონცენტრაციის გამოკვლეულ დიაპაზონში ეს მოწყობილობები კონცენტრაციული პოლარიზაციის შეწყვილებული ეფექტების არ არსებობის დროს



უზრუნველყოფენ გადატუმბული ხსნარის ლამინარულ ჭავლურ დინებას, რაც უფლებას გვაძლევს ვაწარმოოთ თეორიისა და ექსპერიმენტის არა მარტო ხარისხობრივი არამედ რაოდენობრივი შედარებაც. შევნიშნოთ, რომ ექსპერიმენტში პოტენციალთა ნახტომი იზომება ორ Ag/AgCl ელექტროდზე. ამ ელექტროდებს აქვთ ღია 0.25 მმ კვეთის ფართი და იმყოფებიან 0,8 მმ მანძილზე გამოსაკვლევი მემბრანიდან. საანგარიშო მახასიათებლები მიღებულია ექსპერიმენტის შესაბამისი პირობიდან, რომლებთანაც ხდება მათი შედარება გამტკნარების არხში მოთავსებული ქლორვერცხლის ელექტროდის კვეთის გეომეტრიული ცენტრის შესაბამის წერტილში.

წარმოდგენილი მონაცემების ანალიზიდან გამომდინარეობს, რომ ვერტიკალურ მდგომარეობაში (ნახ. 3.23 ა) ელექტრულ სისტემაში დენის გავლა იწვევს მემბრანასთანშეხებული ხსნარის გამტკნარებას, რაც გამოიხატება პოტენციალის ნახტომის ზრდაში მისი ჩართვიდან პირველ 40 წამში. შემდეგ ეს ზრდა ნელდება არხის სიღრმიდან უფრო კონცენტრირებული ხსნარის მიწოდებით, გრიგალისებური ჭავლებით წარმოქმნილი კონცენტრაციის გრადიენტის შედეგად. 40-50 წმ-ს შემდეგ გრიგალის წარმოქმნას აქვს კვაზისტაციონალური ხასიათი: უფრო კონცენტრირებული ხსნარის მიწოდების საშუალო სიჩქარე, ანუ NaCl კონცენტრაცია ზედაპირთან ხდება მუდმივი, რაც გამოისახება პოტენციალის ნახტომის გაანგარიშებული და ექსპერიმენტალური მნიშვნელობების უცვლელობაში დროის გასვლისას. ჰორიზონტალურ მდებარეობაში, როცა გადარიბებული დიფუზიური ფენა იმყოფება მემბრანის ზემოთ (ნახ. 3.23 ა), ადგილი აქვს ანალოგიურ სურათს. ამ დროს სისტემაში დენის გავლიდან 40 წამის შემდეგ პიველი გრიგალის წარმოქმნას შეესაბამება გაანგარიშებული მრუდის გარდატეხვა და ექსპერიმენტით მიღებულ პოტენციოგრამაზე პოტენციალის ნახტომის მაქსიმალური მნიშვნელობა. გრავიტაციული კონვექციის აღძვრის შემდეგ, გამტკნარების არხის სიღრმიდან უფრო კონცენტრირებული ხსნარის ულუფის მიწოდება იწვევს ზედაპირთან NaCl კონცენტრაციის თანდათან ზრდას, რაც თავის მხრივ, გამოიხატება პოტენციალის ნახტომის თანდათან ვარდნაში. ანალოგიური სურათი შეიმჩნევა გაანგარიშებით მიღებულ მრუდზე. თანაც, ფართობის დიდი ლოკალიზაციის ძალით, მრუდზე ფიქსირდება რიცხვით ექსპერიმენტში პოტენციალის ნახტომი მიკრო

ელექტროდებით გაზომილ პოტენციოგრამებთან შედარებით. გაანგარიშება უფლებას გვაძლევს უფრო დეტალურად ვადევნოთ თვალყური გრიგალების წარმოქმნის და დისიპაციის გავლენას მემბრანის ზედაპირის მახლობლობაში  $\text{NaCl}$ -ის ლოკალურ კონცენტრაციაზე და მის შესაბამის პოტენციალთა ნახტომზე. იმ შემთხვევაში, როცა გადარიბებული დიფუზიური ფენა იმყოფება მემბრანის ქვემოთ (ნახ. 2.3ბ) და გრავიტაციული კონვექცია არ აღიძვრება, გაანგარიშებულ და ექსპერიმენტალურ მრუდებზე პოტენციალის ზრდა შეიმჩნევა კვლევის მთელ ინტერვალში.

დროის ფიქსირებულ ინტერვალში პოტენციალის ვარდნის სიდიდეების  $\Delta\phi$  შედარება გვიჩვენებს, რომ მისი უდიდესი მნიშვნელობები შეესაბამებიან მდებარეობას „გადარიბებული დიფუზიური ფენა მემბრანის ქვემოდაა“, რომლისთვისაც, როგორც გვიჩვენებენ მოდელების მიხედვით გაანგარიშებები, ხსნარის კონცენტრაცია გამოსაკვლევია მემბრანის მახლობლობაში მცირდება მინიმალურ მნიშვნელობამდე დანარჩენ ორ მდებარეობასთან შედარებით, როცა აღიძვრება გრავიტაციული კონვექცია. შევნიშნოთ, რომ პირველი 50 წამის შემდეგ საანგარიშო მრუდზე, რომელიც შეესაბამება მდებარეობას „გადარიბებული დიფუზიური ფენა მემბრანის ქვემოთა“ (ნახ. 3.23ბ) შეიმჩნევა პოტენციალის მცირე ამპლიტუდიანი დაბალი სხშირის ოსცილაცია. როგორც ხსნარის ჰიდროდინამიკის გაანგარიშების შედეგების ანალიზი გვიჩვენებს, ეს ოსცილაცია გამოწვეული არის „გაზომვის“ წერტილის მახლობლობაში სითხის უმნიშვნელო ფლუკტუაციით. ამ ფლუკტუაციის მიზეზი არის გრავიტაციული კონვექცია, აღძრული განხილული გამტკნარების არხის კათიონცვლადი მემბრანის საპირისპიროდ. ამ კონვექციის აღძვრას ხელს უწყობს გადარიბებული დიფუზიური ფენის მდებარეობა (მემბრანის ზემოდ) და საპირისპირო იონის გადატანის რიცხვის უფრო დაბალი მნიშვნელობა -  $\text{Na}^+$  იონის  $\text{Cl}^-$  იონთან შედარებით, რომელიც არის საპირისპირო იონი განხილული ანიონცვლადი მემბრანის. ასევე, როგორც შემთხვევისათვის „გადარიბებული დიფუზიური ფენა მემბრანის ზემოდ“, მზომი ელექტროდის კვეთის ფართზე სიგნალის გასაშუალოება საშუალებას არ გვაძლევს დავაფიქსიროთ თეორიით ნაწინასწარმეტყველები, პოტენციალის ოსცილაცია.

ნახ. 3.23 წარმოდგენილი მრუდების შედარება გვიჩვენებს, რომ გაანგარიშების შედეგები იმყოფებიან არა მარტო ხარისხობრივ, არამედ საკმაოდ კარგ რაოდენობრივ

თანხვედრაში ექსპერიმენტულ მონაცემებთან. ეს ნიშნავს, რომ სამუშაოში აგებული მათემატიკური მოდელები საკმაოდ ადეკვატურად აღწერენ არასტაციონალურ არაიზოთერმულ პროცესებს, მიმდინარეს ელექტრომემბრანული სისტემების საკნებში.

## საერთო დასკვნები

დისერტაციაზე მუშაობის დროს მიღებულია შემდეგი შედეგები:

1. თეორიული კვლევის საფუძველზე მოხდა მემბრანებს შორის არხში პულსირებული წნევის მოქმედებისას სიჩქარის განაწილების სურათის დადგენა და აურევადი სასაზღვრო ფენის სისქის გაანგარიშება.
2. ვაწარმოეთ ნერსტ-პლანკის განტოლებათა საწყისი სისტემის დეკომპოზიცია ელექტრონეიტრალობის პირობების შესრულებისას. შედეგად მიღებულია გახლეჩილი განტოლებები კონცენტრაციისათვის.
3. გამოყვანილია ახალი განტოლება ელექტროდენის სიმკვრივისათვის, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას დენის სიმკვრივესა და ელექტროლიტის კონცენტრაციას შორის.
4. ზემოდ მიღებული დეკომპოზიციური განტოლებების საფუძველზე აგებულია ორი საკმაოდ ზოგადი მათემატიკური მოდელი, ელექტრომემბრანულ სისტემებში ბინარული ელექტროლიტების განზავებულ ხსნარებში, არასტაციონალური არაიზოთერმული გადატანისათვის, ელექტრონეიტრალობის პირობის შესრულებისას, გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედების გათვალისწინებით. ეს მოდელები ზემოდ ნაჩვენები სისტემისათვის წარმოადგენენ არაწრფივ კერძოწარმოებულნიან განტოლებებს. პიველი მათგანი არის პოტენციოსტატიკური, ხოლო მეორე - გალვანოსტატიკური.
5. დამუშავებულია ალგორითმები შემოთავაზებული სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის, როგორც პოტენციო- ისე გალვანოსტატიკურ რეჟიმებში.
6. შექმნილია პროგრამების კომპლექსი წყლის გაწმენდის სისტემების გამტკნარების არხებში მიმდინარე არასტაციონალური ჰიდროდინამიკური, ელექტროქიმიური და ტემპერატურული პროცესების იმიტაციური მოდელირებისთვის და ყოველმხრივი ანალიზისთვის, განზავებული

ბინარული ელექტროლიტების დემინერალიზაციის დროს გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედების პირობებში.

7. ჩატარებულია რიცხვითი ანალიზი და დადგენილია ელექტრომემბრანული სისტემების გამტკნარების არხებში სითბო- მასაგადატანის კანონზომიერების გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედების პირობებში.
8. შესწავლილია არასტაციონალური გარდამავალი პროცესები. ჩატარებულია კვლევა გრიგალური სტრუქტურის წარმოქმნის და დინამიკისათვის.
9. ნაჩვენებია, რომ მოცემულ ამოცანაში, ისე როგორც სითბოგადატანის კლასიკურ პროცესებში, კრიტერიალურ რიცხვს, რომელიც განსაზღვრავს გრავიტაციული კონვექციის განვითარების ხარისხს იძულებითი კონვექციის პირობებში, წარმოადგენს რიჩარდსონის რიცხვი  $Ri = Gr/Re^2$  და შეფასებულია მისი კრიტიკული მნიშვნელობები გრავიტაციული ველის მიმართ გამტკნარების არხის განლაგების მიხედვით. არხის ჰორიზონტალური მდებარეობისთვის  $Ri_{cr\_hor} \approx 300$ , ხოლო ვერტიკალურისთვის -  $Ri_{cr\_vert} \approx 1000$ .
10. რიცხვითი ანალიზის საფუძველზე დამუშავებულია გამარტივებული ორთოგალვანური მატემატიკური მოდელი გამტკნარების არხებში გადატანის პროცესებისათვის, რომელშიაც ელექტრო დენის სიმკვრივე ითვლება მემბრანის ზედაპირის პერპენდიკულარულად მიმართული. ნაჩვენებია, რომ ამ მოდელის გამოყენება მნიშვნელოვნად ამარტივებს რიცხვითი გამოთვლის პროცესს და ის შეიძლება წარმატებით გამოვიყენოთ შემთხვევებში, როცა არ მოითხოვება გამოთვლის მაღალი სიზუსტე, მაგალითად ინჟინრული გაანგარიშებების დროს.
11. გაანგარიშებებისა და ექსპერიმენტული მონაცემების რაოდენობრივი შედარებით დადგენილია შემოთავაზებული მოდელების ადეკვატურობა რეალურ ფიზიკურ პროცესებთან. შემოთავაზებულია მემბრანული სისტემების ვოლტამპერომეტრიის და ქრონოპოტენციომეტრიის მონაცემების ინტერპრეტაციის ახალი მიდგომა. ნაჩვენებია შესაძლებლობა მასაგადატანის მექანიზმის თეორიული პროგნოზირების,

ელექტროდიალიზის პროცესის წარმართვის პირობებისაგან დამოკიდებულებით. განსაზღვრულია მასაგადატანის ინტენსიფიკაციის პირობები გრავიტაციული კონვექციის ხარჯზე.

შექმნილი მოდელები, შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და მიღებული ფუნდამენტური შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნას შემდეგი პრაქტიკული მიზნებისათვის:

- 1) საწარმოო პროცესებში სითბო- და მასაგადაცემის ამოცანების ამოხსნისას, რომლებშიც გაითვალისწინება ელექტრული ველის, გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის მოქმედება;
- 2) ელექტრომემბრანული მოდულების გეომეტრიული მახასიათებლების სრულყოფისათვის, ნაწილობრივ, ელექტროდიალიზის აპარატების კონსტრუქციის;
- 3) წყლის გაწმენდის ელექტრომემბრანული სისტემების ექსპლოატაციის პირობების ოპტიმიზაციისათვის;
- 4) მემბრანულ ნანოტექნოლოგიებში გამოყენებული ახალი მასალების უფრო მეტად მისაღები ზედაპირის პარამეტრების გამოსავლენად. პოტენციური გამოყენებლების წრეში შეიძლება მოვიაზროთ ორგანიზაციები, რომლებიც დაკავებულია გარემოს დაცვით და წყლის რესურსების რეგენერაციით ელექტრომემბრანული ტექნოლოგიების გამოყენებით.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. თვალჭრელიძე ა.კ., რუხაძე შ.შ., ლომაია რ.ტ., "მემბრანაზე ნალექის არ არსებობის შემთხვევაში მემბრანული გაყოფის პროცესის მათემატიკური კვლევა" // საქართველოს საინჟინრო სიახლეები №2(6), თბილისი. -1998 , გვ.53-56
2. რუხაძე შ.შ., ლომაია რ.ტ. "დინების პულსაციის გავლენა ადამიანის სისხლის პლაზმის ცილა ალბუმინის მემბრანულ კონცენტრირებაზე" // ქუთაისის ნ.ი.მუსხელიშვილის სახელობის სახელმწიფო ტექნიკური უნივერსიტეტის "სამეცნიერო შრომები", N9, 2001, გვ. 201-202.
3. რუხაძე შ.შ., ლომაია რ.ტ., ჩიქოვანიძე ი. „ელექტრომემბრანული მეთოდების გამოყენება სისხლის პლაზმის ცილა ალბუმინის კონცენტრირებისას“ // ქუთაისის ნ.ი.მუსხელიშვილის სახელობის სახელმწიფო ტექნიკური უნივერსიტეტის "სამეცნიერო შრომები", №1, ქუთაისი. -2003. გვ. 34-35
4. Александров Р.С. Численное исследование неустойчивости Рэлея-Бенара для раствора бинарного электролита в ячейке с плоскопараллельными электродами с учетом объемного заряда / Р.С. Александров, А.П. Григин, А.Д. Давыдов // Электрохимия. - 2003. - Т.29, № 4. - С.408-413.
5. Аристов И.В. Влияние гидростатического давления на селективность электромембранных систем в предельных условиях концентрационной поляризации / И.В. Аристов, О.В. Бобрешова, Э.М. Баловадзе // Электрохимия. - 1996. -Т.32, №9.-С. 112-115.
6. Бабешко В.А. Взаимодействие гидродинамических и электрохимических полей в мембранных процессах / В.А. Бабешко, В.И. Заболоцкий, М.Х. Уртенов, Р.Р. Сеидов // Проблемы физико-математического моделирования. - 1998.-№1.-С.3.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Наука, 2001. 632 с.
8. Белобаба А.Г. Разработка электродиализной аппаратуры для деионизации водопроводной воды / А.Г. Белобаба, М.В. Певницкая // Химия и технология воды. - 1992. - Т. 14, № 12. - С.911-913.

9. Бобринская Г.А. Ионный обмен и электроднализ в замкнутых циклах водоподобеспечения / Г.А. Бобринская, А.А. Мазо // Химия и технология воды. - 1981. - Т.3, №2. - С.163-165.
10. Будников Е.Ю. Вейвлет-анализ в приложении к исследованию природы за-предельного тока в электрохимической системе с катионообменной мембраной / Е.Ю. Будников, А.В. Максимычев, А.В. Колюбин, В.Г. Меркин, С.Ф. Тимашев // Журнал физ. химии. - 1999. - Т.73. - С. 198-213.
11. Весслер Г.П. Оптическое и электрохимическое изучение диссипативных структур в растворах электролитов / Г.П. Весслер, В.С. Крылов, П. Шварц, Х. Линде // Электрохимия. - 1986. - Т.22, № 5. - С.623-628.
12. Волгин В.М. Численное решение проблемы предельного тока для электроосаждения меди из растворов сульфата меди и серной кислоты в условиях естественной конвекции / В.М. Волгин, А.П. Григин, А.Д. Давыдов // Электрохимия. 2003. - Т.39, №4. - С.335-349.
13. Волгин В.М. Естественно-конвективная неустойчивость электрохимических систем / В.М. Волгин, А.Д. Давыдов // Электрохимия. - 2006. - Т.42, №6. - С.635-678.
14. Гебхарт Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массоперенос: в 2 т. / Б. Гебхарт, И. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. - М.: Мир, 1991. - 336 с.
15. Гельферих Ф. Иониты. - М.: Иностр. лит., 1962. - 490 с.
16. Географический энциклопедический словарь. Понятия и термины / гл. ред. а. Ф. Трешников. - М.: Сов. энциклопедия, 1988. - 432 с.
17. Гнусин Н.П. Электрохимия гранулированных ионитов / Н.П. Гнусин, В.Д. Гребенюк. - Киев: Наукова думка, 1972. - 178 с.
18. Гнусин, Н.П. Электрохимия ионитов / Н.П. Гнусин, В.Д. Гребенюк, М.В. Певницкая. - Новосибирск: Наука, 1972. - 200 с.
19. Гнусин Н.П. Конвективно-диффузионная модель процесса электродиализного обессоливания. Предельный ток и диффузионный слой / Н.П. Гнусин, В. И. Заболоцкий, В.В. Никоненко, М.Х. Ургенов // Электрохимия. - 1986. Т.22, № 3. - С.298-302.



20. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. - М.: Наука, 1977.- 440 с.
21. Голицын В.Ю. Электромассоперенос через ионселективные мембраны в условиях естественной конвекции в постоянном магнитном поле / В.Ю. Голицын, О.В. Бобрешова, С.Ф. Тимашев // Теор. основы хим. технол. - 1989. Т.23, №3. - С.399-403.
22. Гребенюк В.Д. Электродиализ. - Киев: Техника, 1976. - 160 с.
23. Гребенюк В.Д. Обессоливание воды ионитами / В.Д. Гребенюк, А.А. Мазо. -М.: Химия, 1980.-256 с.
24. Григин А.П. Естественная конвекция в электрохимических системах / А.П. Григин А.Д. Давыдов // Электрохимия. - 1998. - Т.34, № 11. - С.1237-1263.
25. Григорчук О.В. Температурное поле в электромембранной системе при естественной конвекции/ О.В. Григорчук, Е.Н. Коржов, В.А. Шапошник // Электрохимия. - 1991. - Т.27, №12. - С.1676-1679.
26. Давыдов А.Д. Методы интенсификации некоторых электрохимических процессов / А.Д. Давыдов, Г.Р. Энгельгард //Электрохимия. -1988. -Т.24,№ 1.-С.3-17.
27. Дамаскин Б.Б. Электрохимия / Б.Б. Дамаскин, О.А. Петрий, Г.А. Цирлина. - М.: Химия, 2001.-624 с.
28. Деминерализация воды электродиализом с межмембранной засыпкой ионитами / В. А. Шапошник, А. К. Решетникова, Р. И. Золотарева и др. // Журн. прикл. химии. - 1973. - Т.46, №12. - С.2659-2663.
29. Демкин В.И. Мембранная технология переработки солевых жидких радиоактивных растворов / В.И. Демкин, Д.В. Адамович, В.С. Амелин, В.И. Пантелеев // Критические технологии. Мембраны: информ. аналит. журн. - 2002. -№ 15. -С.10-13
30. Дубяга В.П. Мембранные технологии для охраны окружающей среды и водоподготовки / В.П. Дубяга, А.А. Поваров // Критические технологии. Мембраны: информ. аналит. журн. - 2002. - № 13. - С.3-17.
31. Духин С.С. Электроосмос второго рода и неограниченный рост тока в смешанном монослое ионита / С.С. Духин, Н.А. Мищук, П.В. Тахистов // Коллоидн. журн. - 1989. - Т.51, № 3. - С.616-618.

32. Дытнерский Ю.И. Мембранные процессы разделения жидких смесей. - М.: Химия, 1975.-232 с.
33. Заболоцкий В.И. Развитие электродиализа в России / В.И. Заболоцкий, Н.П. Березина, В.В. Никоненко, В.А. Шапошник, А.А. Цхай // Критические технологии. Мембраны: информ. аналит. журн. - 1999. - №4. - С.4-27.
34. Заболоцкий В.И. Конвективно-диффузионная модель процесса электродиализного обессоливания. Распределение концентраций и плотности тока / В.И. Заболоцкий, Н.П. Гнусин, В.В. Никоненко, М.Х. Уртенов // Электрохимия. - 1985. -Т.21, №3. С.296-302.
35. Заболоцкий В.И. Перенос ионов в мембранах / В.И. Заболоцкий, В.В. Никоненко. - М.: Наука, 1996. - 390 с.
36. Заболоцкий В.И. Об аномальных вольтамперных характеристиках щелевых мембранных каналов / В.И. Заболоцкий, Н.Д. Письменская, В.В. Никоненко // Электрохимия. - 1986. - Т.22, № 11. - С. 1513 -1518.
37. Инженерная защита окружающей среды. Очистка вод. Утилизация отходов, /под ред. Ю.А. Бирмана и Н.Г. Вурдовой. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2002. - 295 с.
38. Исаченко В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. - М.: Энергоиздат, 1981. - 416 с.
39. Калыгин В.Г. Промышленная экология. М.: Издательский центр «Академия», 2004. - 432 с.
40. Карлин Ю.В. Эффекты нестационарности в начальный период электродиализа / Ю.В. Карлин, В.Н. Кропотов // Электрохимия. - 1989. - Т.25, № 12. -1654-1658.
41. Коржов Е.И. Гидродинамические модели электромембранных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Воронежский государственный университет. - Воронеж, 1991, - 152 с.
42. Коржов Е.Н. Модель электродиализа // Химия и технология воды. - 1986. - Т.8, № 5. - С.20-23.

43. Кузьминых В.А. Математическая модель электродиализа в ламинарном гидродинамическом режиме / В.А. Кузьминых, В.А. Шапошник, О.В. Григорчук // Химия и технология воды. - 1992. - Т.14, №5. - С.323-331.
44. Кульский Л.А. Основы химии и технологии воды.-Киев: Наукова думка,1991.-508 с.
45. Ландау Л.Д. Гидродинамика. Т.VI / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит, 2001.-731 с.
46. Лебедев К.А. Экологически чистые электродиализные технологии. Математическое моделирование переноса ионов в многослойных мембранных системах: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук: 03.00.16 / Лебедев Константин Андреевич. - Краснодар, 2002. - 40 с.
47. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: Физматгиз, 1959. - 538 с.
48. Лукомский Ю.Я., Гамбург Ю.Д. Физико-химические основы электрохимии //Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. -424с.
49. Лыков А.В. Тепломассообмен: справочник. - М.: Энергия, 1978. - 480 с.
50. Мазо А.А. Парадокс очистки // Химия и жизнь. - 1981. - №5. - С.33-35.
51. Мазо А.А. Экологическая оценка методов умягчения и обессоливания воды // Химия и технология воды. - 1982. - Т.4, №4. - С.364-367.
52. Мулдер М. Введение в мембранную технологию /под ред. Ю.П. Ямпольского и В.П.Дубяги. - М.: Мир, 1999. - 495 с.
53. Никоненко В.В. Конвективно-диффузионная модель процесса электродиализного обессоливания. Вольтамперная характеристика / В.В. Никоненко, Н.П. Гнусин, В.И. Заболоцкий, М.Х. Уртенев // Электрохимия. 1985. - Т.21, № 3. -С.377-380.
54. Никоненко В.В. Электромассоперенос через неоднородные мембраны. Стационарная диффузия простого электролита / В.В. Никоненко, В.И. Заболоцкий, К.А. Лебедев // Электрохимия. - 1991. - Т.27, № 9. - С. 1103-1113.
55. Никоненко В.В. Влияние переноса коионов на предельную плотность тока / В. В. Никоненко, В.И. Заболоцкий, К.А. Лебедев, Н.П. Гнусин // Электрохимия. - 1985. - Т.21, № 6. - С.784-790.

56. Никоненко В.В. Зависимость скорости генерации  $H^+$ ,  $OH^-$  ионов на границе ионообменная мембрана/раствор от плотности тока / В.В. Никоненко, Н.Д. Письменская, Е.И. Володина // Электрохимия. - 2005. - Т.41, №11. -1351-1357.
57. Никоненко В.В. Массоперенос в плоском щелевом канале с сепаратором / В.В. Никоненко, Н.Д. Письменская, В.И. Заболоцкий // Электрохимия. - 1992. - Т.28, № 11. - С. 1682-1692.
58. Никоненко В.В. Негидродинамическая интенсификация электродиализа разбавленных растворов электролита / В.В. Никоненко, Н.Д. Письменская, В.И. Заболоцкий // Электрохимия. - 1991. - Т.27, № 10. - С.1236-1244.
59. Никоненко В.В. Дисбаланс потоков ионов соли и ионов продуктов диссоциации воды через ионообменные мембраны при электродиализе/В.В. Никоненко,Н.Д. Письменская,К.А. Юраш,В.И. Заболоцкий //Электрохимия.-1999.-Т.35,№ 1.-С.56-62.
60. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. - М.: Мир, 1977. - 463 с.
61. Парыкин В.С. Повышение эффективности использования мембран в электродиализных аппаратах / В.С. Парыкин, В.В. Петериков, С.А. Власова // Энергия и электрификация. - 1986. - №2. - С. 18-21.
62. Певницкая М.В. Интенсификация массопереноса при электродиализе разбавленных растворов // Электрохимия. - 1992. - Т.28, №11. - С. 1708-1715.
63. Письменская Н.Д. Массообменные и энергетические характеристики мембранных каналов с тонкими сетчатыми сепараторами / Н.Д. Письменская, В.И. Заболоцкий, В.Ф. Письменский, Н.П. Гнусин // Химия и технология воды. - 1989. - Т. 11, № 4. - С.370-375.
64. Письменский А.В. Моделирование некоторых электромембранных процессов очистки воды в камере обессоливания // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. Приложение. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Материалы II школы-семинара. - Краснодар, 2004. - С.141-143.
65. Полежаев В.И. Математическое моделирование конвективного тепло - массообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Буне, Н.А. Везуб и др. - М.:Наука, 1987. - 268 с.

66. Родионов А.И. Техника защиты окружающей среды / А.И. Родионов, В.Н. Клушин, Н.С. Торочешников. - М.: Химия, 1989. -512 с.
67. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. - 616 с.
68. Рубинштейн И. Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования «запредельного» тока в системе с катионообменной электродиализной мембраной / И. Рубинштейн, Б. Зальцман, И. Прец, К. Линдер // Электрохимия. - 2002. - Т.38, № 8. - С.956-967.
69. Рухадзе Ш.Ш., Старов В.М. "Интенсификация процесса разделения при наложении пульсации давления в межмембранном канале" // В кн.: Тезиси докладов II научно-технической конференций ИФХМ-86 М:1986, с.218-219.
70. Рухадзе Ш.Ш., Старов В.М., Апридонидзе М.Д. Интенсификация процесса мембранного разделения с наложением пульсации давления в межмембранном канале // Труды международной интернет конференции «Иновационные процессы и технологии», Кутаиси. -2011 С.103-108
71. Самарский А.А. Численные методы. / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Наука, 1989.-432 с.
72. Смагин В.Н. Обработка воды методом электродиализа. - М.: Стройиздат, 1986.-172 с.
73. Состояние Мира 1999. Доклад института Worldwatch о развитии по пути к устойчивому обществу / пер. с англ. - М.: Весь Мир, 2000. - 384 с.
74. Старов В.М., Рухадзе Ш.Ш. "Кинетика ультрафильтраций коллоидных растворов" // Пищевая промышленность, №3 М.1988, с.24-26.
75. Твалчрелидзе А.К., Рухадзе Ш.Ш., Апридонидзе М.Д. Математическая модель движения жидкости в каналах электромембранного аппарата // *შსაერთაშორისო კონფერენციის "მექანიკის არაკლასიკური ამოცანები" შრომები.* ქუთაისი, 2012
76. Тимашев С.Ф. Физико-химия мембранных процессов. - М.: Химия, 1988. - 240 с.
77. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1972. - 736 с.

78. Умнов В.В. Вольт-амперная характеристика области пространственного заряда биполярной мембраны / В.В. Умнов, Н.В. Шельдешов, В.И. Заболоцкий // Электрохимия. - 1999. - Т.35, № 8. - С.871-878.
79. Уртенев М.Х. Математические модели электромембранных систем очистки воды: Дис. ... докт. физ-мат. наук: 03.00.16 / Кубанский государственный университет. - Краснодар, 2001. - 349 с.
80. Уртенев М.Х. Моделирование гравитационной конвекции в электромембранных системах очистки воды / М.Х. Уртенев, А.В. Письменский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. - Краснодар: КубГУ, 2004. - №3. - С.64-69.
81. Феттер К. Электрохимическая кинетика /Пер. с нем.; под ред. Я.М. Колотыркина. - М.: Химия, 1967. - 848 с.
82. Харкац Ю.И. О механизме возникновения запредельных токов на границе ионообменная мембрана/электролит // Электрохимия. - 1985. - Т.21, № 7. - С.974-977.
83. Хванг Т. Мембранные процессы разделения / Т. Хванг, С. Каммермейер; под ред. Ю.И. Дытнерского. - М.: Химия, 1981. - 464 с.
84. Чхеидзе Н.В. Массообменные процессы в ламинарном потоке в ячейках электродиализного опреснительного аппарата //საქართველოს საინჟინრო სიახლენი, №1, 2000. გვ. 55-58
85. Чхеидзе Н.В. Гидродинамические исследования турбулизаторов электродиализных аппаратов //პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“ №1(7), თბილისი. - 2000. გვ. 83-87
86. Чхеидзе Н.В.Создание типо-ряда обессоливающих и опреснительных электродяльных установок //პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“ №1(7), თბილისი. -2000. გვ.88-92
87. Чхеидзе Н.В., Бурджанадзе Д.Г., Енукидзе Н.Е., Курцхалия Ц.С. Применение кавитационных процессов в электродиализе жестких вод //საქართველოს საინჟინრო სიახლენი, №4, 2004. გვ. 112-117

88. Чхеидзе Н.В., Курцхалия Ц.С. К определению допустимой величины кальциевой жёсткости при электродиализе минерализованных вод с одновременным концентрированием //საქართველოს საინჟინრო სახლენი, №4, 2004. გვ. 118-122
89. Чхеидзе Н.В., Енукидзе Н.Е., Курцхалия Ц.С. К вопросу концентрирования морской воды методом электродиализа //საქართველოს საინჟინრო სახლენი, №2, 2006. გვ. 151-154
90. Чхеидзе Н.В., Соселия Г.А., Квициани Л.А., Джалагония Д.Н., Гигашвили З.Т. Разработка сорбционно-электроmemбранной технологии обессоливания воды для энергетических и технологических нужд руставского ао «АЗОТ» ///საქართველოს საინჟინრო სახლენი, №1, 2006. გვ. 265-270
91. Чхеидзе Н.В., Цхелашвили З.И. Об основах управления техногенной и экологической безопасностью и риском //საქართველოს საინჟინრო სახლენი, №4, 2008. გვ. 99-101
92. Шаповалов С.В. Математическая модель течения и массопереноса в электроmemбранной ячейке с макровихревым течением жидкости / С.В. Шаповалов, В.И. Тюрин // Электрохимия. - 1996. - Т.32, №2. - С.235-241.
93. Шапошник В.А. Кинетика электродиализа. - Воронеж: Изд-во Воронеж, гос. ун-та, 1989. - 175 с.
94. Шапошник В.А. Термоконвективная неустойчивость при электродиализе / В.А. Шапошник, В.И. Васильева, Р.Б. Угрюмов, М.С. Кожевников // Электрохимия. - 2006. - Т.42, №5. - С. 595-601.
95. Шапошник В.А. Явления переноса в ионообменных мембранах / В.А. Шапошник, В.И. Васильева, О.В. Григорчук. - М.: Изд-во МФТИ, 2001. - 200 с.
96. Afonso J.-L. Coupling between transfer phenomena in continuous-flow electrophoresis: effect on the steadiness of the carrier flow / J.-L. Afonso, M.J. Clifton // Chem. Eng. Sci. - 2001. - V.56. - P.3056-3064.
97. Agel E. Characterisation and use of anionic membranes for alkaline fuel cell / E. Agel, J. Bouet, J.F. Fanvarque // J. Power Sources. - 2001. - V. 101. - P.267-274.

98. Aguilera V.M. Current-voltage curves for ion-exchange membranes. Contribution to the total potential drop / V.M. Aguilera, S. Mafe, J.A. Manzanares, J. Pellicer // *J. Membr. Sci.* - 1991. - V.61. - P.177-190.
99. Ambrosone L. Double-diffusive instability in free diffusing layers: a general formulation // *Physica B: Condensed Matter.* - 2000. - V.292, N.1-2. - P.136-152.
100. Anufriev A.P. The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth's core / A.P. Anufriev, C.A. Jones, A.M. Soward // *Physics of The Earth and Planetary Interiors.* - 2005. - V.152, N.3. - P. 1-7.
101. Arifal A. Electro-electrodialysis of hydriodic acid using the cation exchange membrane cross-linked by accelerated electron radiation / A. Arifal, G.-J. Hwang, K. Onuki. // *J. Membr. Sci.* - 2002. - V.210. - P.39-44.
102. Bohiderl K.-E. Concentration polarization in electro dialysis: Buffer solution experimental method / K.-E. Bohiderl, K. Oulmi // *Desalination.* - 2000. - V.132. - P. 199-204.
103. Boussinesque J. Theorie de l'ecoulement tourbillant. Mem. pres. par. div. savants a l'Acad. Sci. - 1877. - V.23. - P.46.
104. Choi J.-H. Effects of electrolytes on the transport phenomena in a cation-exchange membrane / J.-H. Choi, H.-J. Lee, S.-H. Moon // *J. Colloid Interface Sci.* - 2001. - V.238. - N 1. - P. 188-195.
105. Chkeidze N.V. Investigation of the turbulization effect on mass exchange processes in electro dialysis apparatus cells //საქართველოს საინჟინრო სახელეწი, №3, 2000. გვ. 51-64
106. Eliseeva T.V. Demineralization and separation of amino acids by electro dialysis with ion-exchange membranes / T.V. Eliseeva, V.A. Shaposhnik, I.G. Luschik // *Desalination.* - 2002. - V.149. - P.405-409.
107. Kurtskhalia Ts., Chkeidze N., Enukidze N. Development of technological process for obtaining drinking water from mineralized waters by means of membrane technology //Water environment-membrane technology . June 7-10,2004 Seoul, Korea. P.1239-1244
108. Lebedev K. Modelling of the salt permeability in fixed charge membrane / K.Lebedev, P. Ramirez, S. Mafe, J. Pellicer // *Lengmuir.* - 2000. - V.16. - P.9941-9943.



109. Lee H.J. Designing of an electro dialysis desalination plant / H.J. Lee, F. Sarfert, H. Strathmann, S-H. Moon // *Desalination*. - 2002. - V.142. - P.267-286.
110. Lerman L. Absence of bulk electroconvective instability in concentration polarization / L Lerman, L Rubinstein, B. Zaltzman // *PHYSICAL REVIEW E* 71, 011506.-2005.
111. Nikonenko V.V. Analysis of electro dialysis water desalination costs by convection-diffusion model / V.V. Nikonenko, A.G. Istoshin, M.Kh. Urtenov, V.I.Zabolotsky, C Larchet, J. Benzaria // *Desalination*. - 1999. - V.126. - P.207-211.
112. Pismenskaya N. Chronopotentiometry applied to the study of ion transfer through anion exchange membranes / N. Pismenskaya, Ph. Sistat, P. Huguet, V. Nikonenko, G. Pourcelly // *J. Membr. Sci.* - 2004. - V.228, N. 1. - P.65-76.
113. Pearson C.E. A computational method for viscous flow problems // *J. Fluid Mech.* - 1965.-V.21, Part 4.-P.611-622.
114. Rubinstein I. Electroconvective instability in concentration polarization and nonequilibrium electro-osmotic slip / I. Rubinstein, B. Zaltzman, I. Lerman // *PHYSICAL REVIEW E* 72, 011505. - 2005. - P.1-19.
115. Rukhadze Sh.Sh., Apridonidze M.D., Tvalchrelidze A.K. "THE MATHEMATICAL MODEL OF SEPARATION PROCESS IN THE DUCTS OF ELECTROMEMBRANE APPARATUS" // *IV INTERNATIONAL CONFERENCE ON COLLOID CHEMISTRY AND PHYSICO-CHEMICAL MECHANICS. COLLECTION OF WORKS, Moscow.* - 2013 P. 512-514
116. Shaposhnik V.A. Analytical model of laminar flow electro dialysis with ion exchange membranes / V.A. Shaposhnik, V.A. Kuz'minykh, O.V. Grigor'chuk, V.I. Vasil'eva // *J. Membr. Sci.* - 1997. - V.133. - P.27-37.
117. Shaposhnik V.A. Concentration fields of solutions under electro dialysis with ion-exchange membranes / V.A. Shaposhnik, V.I. Vasil'eva, D.B. Praslov // *J. Membr. Sci.* - 1995. - V.101. -P.23-30.
118. Starov V.M. Electro dialysis of Electrolyte Mixtures on Modified Ion-Exchange Membranes (Ion-Selective Electro dialysis) / V.M. Starov, D.R. Lloyd, A.N. Filippov, V.D. Grebenjuk, R.D. Chebotareva // *Ion-Exchange Processes. Advances and*

- Applications/ Edit. A.Dyer et. al., U.K.: The Royal Society of Chemistry.-1993.-P.123-130.
119. Sugilal G. Convective behaviour of a uniformly Joule-heated liquid pool in a rectangular cavity / G. Sugilal, P.K. Wattal, K. Iyer // International J. Thermal Sciences. - 2005. - V.44, N.10. - P.915-925.
120. Thampy S.K. 25 Years of electro dialysis Experience at Central Salt and marine Chemicals Research Institute Bhavnagar, India / S.K. Thampy, R. Rangarajan, V.K. Indusekhar // Desalination and Water Reuse. - 1999. - V.9, №2. - P.45-49.
121. Turek M. Electro dialysis reversal of calcium sulphate and calcium carbonate supersaturated solution / M. Turek, P. Dydo // Desalination. - 2003. - V.158. - P.91-94.
122. Volgin V.M. Simulation of ion transfer under conditions of natural convection by the finite difference method / V.M. Volgin, O.V. Volgina, D.A. Bograchev, A.D. Davydov // J. Electroanal. Chem. - 2003. V.546. - P. 15-22.
123. Volodina E. Ion transfer across ion-exchange membranes with homogeneous and heterogeneous surface / E. Volodina, N. Pismenskaya, V. Nikonenko, C Larchet, G. Pourcelly // J. Colloid Interface Sci. -2005. V.285, N.1. - 247-258.
124. Wang H.Y. Three-dimensional modeling for prediction of wall fires with buoyancy-induced flow along a vertical rectangular channel / Wang H.Y., Joulain p. // Combustion and Flame. - 1996. - V.105, N.3. - P.391-406.
125. Youm K.H. Effects of natural convection instability on membrane performance in dead-end and cross-flow ultrafiltration / K.H. Youm, A.G. Fane, D.E. Wiley // J. Membr. Sci. - 1996. - V.I 16. - P.229-241.
126. Zabolotsky V.I. On the role of gravitational convection in the transfer enhancement of salt ions in the course of dilute solution electro dialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya // J. Membr. Sci. - 1996. - V.I 19. - P.171-181.
127. Zabolotsky V.I. Coupled transport phenomena in overlimiting current electro dialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, M.Kh. Urtenov, E.V. Laktionov, H. Strathmann, M. Wessling, G.H. Koops // Sep. Pur. Tech. - 1998. - V.14. - P.255-267.

დანართები

## (2.19) განტოლების რეალური ნაწილის გამოთვლა

$$U_2(t, y) = -\frac{a}{\rho\omega} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{ch[\theta y(1+i)]}{ch[\theta h(1+i)]} \right] \right\}$$

$$i e^{i\omega t} = i(\cos \omega t + i \sin \omega t) = i \cos \omega t - \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{e^{\theta y(1+i)} + e^{-\theta y(1+i)}}{e^{\theta h(1+i)} + e^{-\theta h(1+i)}} &= 1 - \frac{e^{\theta y} \cdot e^{i\theta y} + e^{-\theta y} \cdot e^{-i\theta y}}{e^{\theta h} \cdot e^{i\theta h} + e^{-\theta h} \cdot e^{-i\theta h}} = 1 - \frac{e^{\theta y}(\cos \theta y + i \sin \theta y) + e^{-\theta y}(\cos \theta y - i \sin \theta y)}{e^{\theta h}(\cos \theta h + i \sin \theta h) + e^{-\theta h}(\cos \theta h - i \sin \theta h)} = \\ &= 1 - \frac{(e^{\theta y} + e^{-\theta y}) \cos \theta y + (e^{\theta y} - e^{-\theta y}) i \sin \theta y}{(e^{\theta h} + e^{-\theta h}) \cos \theta h + (e^{\theta h} - e^{-\theta h}) i \sin \theta h} = \\ &= 1 - \frac{[(e^{\theta y} + e^{-\theta y}) \cos \theta y + (e^{\theta y} - e^{-\theta y}) i \sin \theta y] \cdot [(e^{\theta h} + e^{-\theta h}) \cos \theta h - (e^{\theta h} - e^{-\theta h}) i \sin \theta h]}{[(e^{\theta h} + e^{-\theta h}) \cos \theta h]^2 - [(e^{\theta h} - e^{-\theta h}) i \sin \theta h]^2} = \\ &= 1 - \frac{(e^{\theta y} + e^{-\theta y})(e^{\theta h} + e^{-\theta h}) \cos \theta y \cdot \cos \theta h + (e^{\theta y} - e^{-\theta y})(e^{\theta h} - e^{-\theta h}) \sin \theta h \cdot \sin \theta y}{4ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + 4sh^2(\theta h) \cdot \sin^2(\theta h)} + \\ &+ i \left[ \frac{(e^{\theta y} + e^{-\theta y})(e^{\theta h} - e^{-\theta h}) \sin \theta h \cos \theta y - (e^{\theta y} - e^{-\theta y})(e^{\theta h} + e^{-\theta h}) \sin \theta y \cdot \cos \theta h}{4ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + 4sh^2(\theta h) \cdot \sin^2(\theta h)} \right] \end{aligned}$$

გავამრავლოთ მიღებული მნიშვნელობა  $(i \cos \omega t + \sin \omega t)$ -ზე და გადავწეროთ მხოლოდ რეალური ნაწილი, მივიღებთ

$$\begin{aligned} -\sin \omega t + \frac{[4ch(\theta y)ch(\theta h) \cdot \cos \theta y \cdot \cos \theta h + 4sh(\theta y)sh(\theta h) \sin \theta h \cdot \sin \theta y] \cdot \sin \omega t}{4ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + 4sh^2(\theta h) \cdot \sin^2(\theta h)} - \\ - \frac{[4ch(\theta y)sh(\theta h) \cdot \sin \theta h \cdot \cos \theta y - 4sh(\theta y)ch(\theta h) \cdot \sin \theta y \cdot \cos \theta h] \cdot \cos \omega t}{4ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + 4sh^2(\theta h) \cdot \sin^2(\theta h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h) \cdot \sin^2(\theta h) &= ch^2(\theta h) \cdot \cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h) \cdot [1 - \cos^2(\theta h)] = \\ \cos^2(\theta h) [ch^2(\theta h) - sh^2(\theta h)] + sh^2 \theta h &= \cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h) \end{aligned}$$

$$\frac{ch(\theta y) \cdot ch(\theta h) \cdot \cos \theta y \cdot \cos \theta h + sh(\theta y)sh(\theta h) \cdot \sin \theta h \cdot \sin \theta y}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)} = A$$

$$\frac{-ch(\theta y) \cdot sh(\theta h) \cdot \sin(\theta h) \cdot \cos(\theta y) + sh(\theta y) \cdot ch(\theta h) \cdot \sin(\theta y) \cdot \cos(\theta h)}{\cos^2(\theta h) + sh^2(\theta h)} = B$$

მაშნ საბოლოოდ მივიღებთ

$$U_2(t, y) = \frac{a}{\rho\omega} [(1-A)\sin\omega t + B\cos\omega t]$$

დანართი 2

(2.28) ფორმულის გამოყვანა

$$\begin{aligned} \overline{U_2^2} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{a^2}{\rho^2\omega^2} \{(1-A)\sin^2\omega t + B\cos\omega t\}^2 dt = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{\rho^2\omega^2} \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} [(1-A)^2 \cdot \sin^2\omega t + B(1-A) \cdot \sin 2\omega t + B^2 \cos^2\omega t] dt = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{a^2}{\rho^2\omega^2} \cdot \left[ (1-A)^2 \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2} dt + B(1-A) \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \sin 2\omega t dt + \frac{1}{2} B^2 \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \cos^2\omega t dt \right] = \\ &= \frac{a^2}{2\pi\rho^2\omega} \left\{ \frac{(1-A)^2}{2} \left[ \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega} (\sin 2\omega t) \Big|_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \right] + B(1-A) \cdot \left( -\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t \right) \Big|_0^{\frac{\omega}{2\pi}} + \frac{1}{2} B^2 \left[ \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2} (\sin 2\omega t) \Big|_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \right] \right\} = \\ &= \frac{a^2}{2\pi\rho^2\omega} \left[ (1-A)^2 \frac{\pi}{\omega} + B^2 \frac{\pi}{\omega} \right] = \frac{a^2}{2\rho^2\omega^2} [(1-A)^2 + B^2] = \frac{a^2}{2\rho^2\omega^2} (1-2A+A^2+B^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \frac{ch^2(\chi z) \cdot ch^2\chi \cdot \cos^2(\chi z) \cdot \cos^2\chi + sh^2(\chi z) \cdot sh\chi \cdot \sin^2(\chi z) \cdot \sin^2\chi + ch^2(\chi z) sh^2\chi \sin^2\chi \cos^2(\chi z)}{(\cos^2\chi + sh^2\chi)^2} + \\ &+ \frac{sh^2(\chi z) ch^2\chi \sin^2(\chi z) \cos^2\chi}{(\cos^2\chi + sh^2\chi)^2} = \frac{ch^2(\chi z) \cos^2(\chi z) [ch^2\chi \cos^2\chi + sh^2\chi]}{(\cos^2\chi + sh^2\chi)^2} + \\ &+ \frac{sh^2(\chi z) \cdot \sin^2(\chi z) [ch^2\chi \cos^2\chi + sh^2\chi \sin^2\chi]}{(\cos^2\chi + sh^2\chi)^2} = \\ &= \frac{[ch^2\chi \cos^2\chi + sh^2\chi \sin^2\chi] \cdot [ch^2(\chi z) \cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z) \sin^2(\chi z)]}{(\cos^2\chi + sh^2\chi)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\{ch^2 \chi - sh^2 \chi\} \cdot \cos^2 \chi + sh^2 \chi \cdot \{ch^2(\chi z) - sh(\chi z)\} \cdot \cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z)}{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi)^2} =$$

$$= \frac{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi) [\cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z)]}{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi)^2} = \frac{\cos^2(\chi z) sh^2(\chi z)}{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi)^2}$$

$$U_2^2 = \frac{a^2}{2\rho^2 \omega^2} \left[ 1 + \frac{\cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z)}{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi)^2} - 2A \right],$$

$$\frac{U_2^2}{\frac{a^2}{2\rho^2 \omega^2}} = 1 + \frac{\cos^2(\chi z) + sh^2(\chi z)}{(\cos^2 \chi + sh^2 \chi)^2} - 2A = f(\chi; \chi z)$$

დანართი 3

(2.29) ფორმულის გამოყვანა

$$\tau_2^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \tau_2^2(t) dt =$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{a^2 v^2 \theta^2}{\omega^2} \cdot \frac{[sh \chi ch \chi (\sin \omega t - \cos \omega t) - \sin \chi \cos \chi (\sin \omega t + \cos \omega t)]^2}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} dt =$$

$$= \frac{a^2 v^2 \theta^2}{2\pi \omega} \left\{ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{sh^2 \chi ch^2 \chi (1 - \sin 2\omega t)}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{sh 2\chi \sin 2\chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} \cos 2\omega t \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\sin^2 \chi \cdot \cos^2 \chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} (1 + \sin 2\omega t) dt \right\} = \frac{a^2 v^2 \theta^2}{2\pi \omega} \left\{ \frac{sh^2 \chi \cdot ch^2 \chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} \cdot \left[ t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{2\omega} (\cos 2\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \cdot \frac{sh 2\chi \cdot \sin 2\chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} \cdot \frac{1}{2\omega} (\sin 2\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{\sin^2 \chi \cdot \cos^2 \chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} \cdot \left[ t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{1}{2\omega} (\cos 2\omega t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 v^2 \theta^2}{2\pi\omega} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{sh^2 \chi \cdot ch^2 \chi + \sin^2 \chi \cdot \cos^2 \chi}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} = \\
&= \frac{a^2 v}{2\omega} \cdot \frac{sh^2 \chi (sh^2 \chi + \sin^2 \chi) + \cos^2 \chi (sh^2 \chi + \sin^2 \chi)}{(sh^2 \chi + \cos^2 \chi)^2} = \\
&= \frac{a^2 v}{2\omega} \cdot \frac{sh^2 \chi + \sin^2 \chi}{sh^2 \chi + \cos^2 \chi}
\end{aligned}$$

საბოლოოთ

$$\frac{\tau_2^2}{\frac{a^2 v}{2\omega}} = \frac{sh^2 \chi + \sin^2 \chi}{sh^2 \chi + \cos^2 \chi} = f_1(\chi)$$

## დანართი 4

### რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი

ორთოგალვანური სასაზრვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის გამოყენებულია სასრულ სხვაობითი მეთოდი, აღწერილი 3.1 პარაგრაფში და აგრეთვე გალვანოსტატიკური მოდელისათვის ცხადი სხვაობითი სქემით ამოხსნის ალგორითმი. ალგორითმი შესდგება ორი ეტაპისაგან: „შიგა“ A1 და „გარე“ A2. მათგან პიველზე იმყოფება ამოცანის (2.115),(3.33),(2.119)-(2.123),(2.95) რიცხვითი ამოხსნა გამოსახულებების (3.5),(3.35),(3.9)-(3.13) გამოყენებით, ე.ი. გამოითვლება ველები  $C, E_x, E_y, T, \xi, \psi, V_x, V_y$ . მეორეზე იანგარიშება დენის სიმკვრივის  $I_x$  მნიშვნელობები კვეტების მეთოდის საფუძველზე და A1 ალგორითმის მუშაობის შედეგებით.

#### A1.

1. დროის საწყის მომენტში  $t$  ( $n=0$ )  $C, \varphi, I_x, T, \xi, \psi, V_x, V_y$  მასივები ინიციალიზდება რაღაც მნიშვნელობებთან, რომლებიც შეთანხმებულია ამოცანის ფიზიკურ

- დასმასთან და აგრეთვე ერთმანეთთან. სასაზღვრო მნიშვნელობები (მასივების კიდურა ელემენტების მნიშვნელობები) მოცემულია (3.14),(3.16) გამოსახულებების შესაბამისად.
2. მნიშვნელობებით, გაანგარიშებულით წინა დროით ფენაზე  $n$ , გამოითვლება კონცენტრაციის ველის მნიშვნელობა  $C$  ახალ ფენაზე  $n+1$  საანგარიშო ბადის შიგა კვანძებში სხვაობითი გამოსახულების (3.5) დახმარებით და კიდურა კვანძებში შესაბამისი ფორმულებით (3.14).
  3.  $C$  ნაპოვნი და წინა დროითი ფენიდან ცნობილი  $I_x$  მნიშვნელობებით გამოითვლებიან დაძაბულობის  $E_x$  და  $E_y$  კომპონენტები ფორმულებით (3.35) შიგა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე.
  4. ვიყენებთ რა ბიჯზე 3 მიღებულ  $E_x, E_y$  და  $A1$  ალგორითმის წინა იტერაციის დროს გაანგარიშებულ  $V_x, V_y$  სიჩქარეების,  $T$  ტემპერატურის, აგრეთვე წინა დროითი ფენიდან ცნობილი დენის სიმკვრივის  $I_x$  მნიშვნელობებს, გამოთვლიან  $T$  ველის ახალ მნიშვნელობებს ფორმულებით (3.9) შიგა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე.
  5. წინა დროით ფენაზე გაანგარიშებული და  $C$  და  $T$  „ახალი“ მნიშვნელობებით გამოთვლიან გრიგალის ფუნქციის მნიშვნელობას  $\xi$  ფორმულებით (3.10) (ჩასმით  $C^{n+1}, T^{n+1}$  ნაცვლად  $C^n, T^n$ ) შიგა კვანძებში და (3.16) საზღვრებზე.
  6. ხდება ცალკე იტერაციული პროცესის ორგანიზება ფორმულებით (3.11) სითხის დინების ველის გაანგარიშებისათვის შიგა კვანძებში გაჩერების პირობის  $S2$  შესრულებამდე. ამ დროს გამოიყენებიან  $\xi$  „ახალი“ მნიშვნელობები, მიღებული ბიჯზე 5 ( $\xi^{n+1}$  ნაცვლად  $\xi^n$ ). მნიშვნელობები სასაზღვრო კვანძებში რჩებიან უცვლელნი.
  7.  $\Psi$  ნაპოვნი მნიშვნელობებით გამოთვლებიან სიჩქარის ველები  $V_x, V_y$  ფორმულებით (3.12) შიგა კვანძებში და (3.14) საზღვრებზე.
  8. მოწმდება გაჩერების პირობა  $S1-S3$ . თუ არც ერთი არ შესრულდა, ხდება „ახალი“ მასივების  $C, T, \xi$  მნიშვნელობების მინიჭება „ძველ“ მასივებზე ( $C^n = C^{n+1}, T^n = T^{n+1}, \xi^n = \xi^{n+1}$ ) და ბიჯზე 2 გადასვლა. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება ელექტრული პოტენციალი  $\phi$  ფორმულით (3.13).



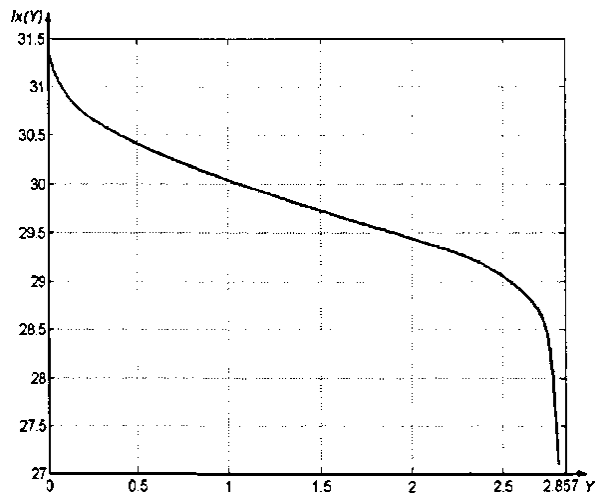
**A2.** სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი A1 საშუალებას გვაძლევს გავიანგარიშოთ  $C, E_x, E_y, T, \xi, \psi, V_x, V_y$  ველები მოცემული  $t^*$  დროისათვის. ალგორითმი დენის სიმკვრივის  $I_x$  საპოვნელად, დაფუძნებულია მკვეთების მეთოდზე და წარმოადგენს იტერაციულ პროცესს, რომელიც სრულდება შემდეგ ბიჯებზე:

1. ხდება დროის  $t^*$  მოცემა, რომლისთვისაც მოითხოვება ამოხსნა,  $i_x$  ფუნქციის საწყისი მიახლოება მაგალითად,  $I_x^{(0)}(y) = i_{av}$ , და სიზუსტე  $\varepsilon$ , რომლითაც მოითხოვება ამონახსნის პოვნა.
2. A1 ალგორითმის მიხედვით ხდება გაანგარიშება  $t^*$  დროისათვის და გაანგარიშებული პოტენციალის  $\varphi^{(0)}$  განაწილების მიხედვით გამოითვლება განსახილველ არეში მისი ვარდნის სიდიდე  $\bar{\Delta}\varphi^{(0)}$ .
3. მნიშვნელობა იცვლება რაღაც მცირე  $\delta$  მნიშვნელობით:  $I_x^{(1)}(y) = I_x^{(0)}(y) + \delta$ .
4. ხდება გაანგარიშება ალგორითმით A1,  $I_x^{(k)}$ -ს რიგითი მნიშვნელობით და პოულობენ პოტენციალის ვარდნას  $\bar{\Delta}\varphi^{(k)}$ .
5. თუ  $\|\bar{\Delta}\varphi^{(k)} - d_\varphi\| \leq \varepsilon$ , მაშინ ამოხსნა შესრულებულია მოცემული სიზუსტით, მასივების მნიშვნელობები ჩაიწერებიან გარე ფაილებში და გამოთვლის პროცესი წყდება.
6. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოითვლება  $\bar{K}_x^{(k)}(y) = \frac{I_x^{(k)}(y) - I_x^{(k-1)}(y)}{\bar{\Delta}\varphi^{(k)} - \bar{\Delta}\varphi^{(k-1)}}$ , ახალი მიახლოება  $I_x^{(k+1)}(y) = I_x^{(k)}(y) + \bar{K}_x^{(k)}(y)(\bar{\Delta}\varphi^{(k)}(y) - d_\varphi)$  და სრულდება გადასვლა ბიჯზე 4.

### გაანგარიშების შედეგები

შესრულებულია ზემოდ აღწერილი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის რეალიზაცია და ჩატარებულია გაანგარიშებები 3.3 პარაგრაფში ნაჩვენები შემავალი პარამეტრებით. რიცხვითი ანალიზის საფუძველზე დადგენილია, რომ შედეგები მიღებული ორთოგალვანური მოდელით, ახლოსაა საერთო მოდელებით (გალვანო-

და პოტენციოსტატიკური) მიღებულ შედეგებთან და ხარისხობრივად ემთხვევიან მათ, გარდა ელექტრო დენის სიმკვრივისა  $i$ .



ნახ. დან.1 - ელექტრო დენის სიმკვრივის განაწილება გამტკნარების არხის სიგრძეზე, გაანგარიშებული ორთოგალვანური მოდელით, დენის ჩართვიდან 60 წმ შემდეგ არხის ვერტიკალური განლაგების დროს, გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)} = 0.1$  მმ/წმ და

$$\text{პოტენციალის ნახტომი } d_\varphi^{(d)} = -0.43 \left( \frac{i_{av}}{i_{lim}} \approx 2.5 \right)$$

დენის სიმკვრივის შემცირება გამტკნარების არხის სიგრძის გასწვრივ (Oy ღერძი), რომელიც შეიმჩნევა ნახ. დან.1, დაკავშირებულია ხსნარის წინააღმდეგობის ზრდასთან, რაც განპირობებულია ელექტროლიტის კონცენტრაციის შემცირებით.

მაშასადამე, ნაჩვენებია უკანასკნელი მოდელის და შესაბამისი უფრო მარტივი და მდგრადი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის ადეკვატურობა. ამიტომ ორთოგალვანური მათემატიკური მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ელექტრომემბრანულ სისტემებში მიმდინარე სოთხო- მასაგადატანის ფიზიკო-ქიმიური პროცესების მოდელირებისთვის, შემთხვევებში როცა არ მოითხოვება გაანგარიშებების მაღალი სიზუსტე, მაგალითად ინჟინრული გაანგარიშებების დროს. ის შეიძლება შემდგომში გამოყენებულ იქნას ელექტრომემბრანული სისტემების გამტკნარების არხებში ელექტრო დენის სიმკვრივის განაწილების მოდელირებისათვის.

## პროგრამული კომპლექსის „Sarma“ აღწერა

3.2 პარაგრაფში რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი რეალიზებულია პროგრამული კომპლექსით, რომელიც შექმნილია პროგრამირების Delphi არეში და ეწოდება „Sarma“.

### მიზნები და დანიშნულება

პროგრამის „Sarma“ კომპლექსი დანიშნულია წყლის გაწმენდის სისტემების გამტკნარების არხებში მიმდინარე არასტაციონალური ჰიდროდინამიკური, ელექტროქიმიური და ტემპერატურული პროცესების იმიტაციური მოდელირებისთვის და ყოველმხრივი ანალიზისთვის, განზავებული ბინარული ელექტროლიტების დემინეპალიზაციის დროს გრავიტაციული და იძულებითი კონვექციის ერთდროული მოქმედების პირობებში.

### ძირითადი შესაძლებლობები

„Sarma“ საშუალებას გვაძლევს

- 1) ვაწარმოთ ზემოდ მოყვანილი პროცესების იმიტაციური მოდელირება;
- 2) ვაწარმოთ სასაზღვრო ამოცანების (2.104)-(2.113) и (2.115)-(2.123) რიცხვითი ანალიზი;
- 3) მივიღოთ თვალსაჩინო წარმოდგენა ელექტრომემბრანულ სისტემების გამტკნარების არხებში მიმდინარე ჰიდროდინამიკურ, ელექტროქიმიურ და ტემპერატურულ პროცესებზე.

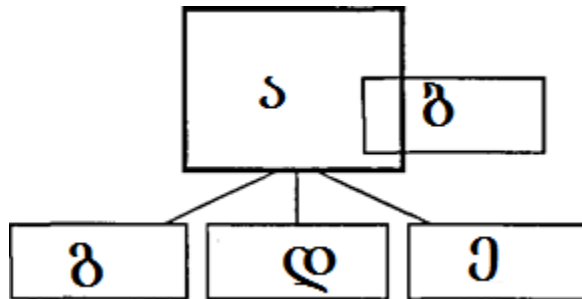
მომხმარებელს დროის ნებისმიერ მომენტში ეძლევა საშუალება შეცვალოს შემავალი პარამეტრები, გაუშვას/გააჩეროს გამოთვლის პროცესი, მიცეს „მუშა დირექტორია“, გაუშვას სერვისული პროგრამები (MATLAB, „მუშა დირექტორიის“ ფაილ-მენეჯერი), გამოიძახოს დახმარება და ცნობა პროგრამაზე.

## სტრუქტურა

პროგრამული კომპლექსი შესდგება შემდეგი მოდულებისაგან:

- ა. ძირითადი მოდული, 3.2 პარაგრაფში აღწერილი რიცხვითი ამოხსნების პროგრამულად რეალიზების ალგორითმი.
- ბ. დამხმარე მოდული, რომელიც უზრუნველყოფს გამოთვლის მრავალნაკადურობას.
- გ. დამხმარე მოდული, რომელიც ამარტივებს მომხმარებლის მიერ „მუშა დირექტორის“ შერჩევის პროცედურას.
- დ. მოდული, რომელიც შეიცავს საცნობარო ინფორმაციას მომხმარებლისთვის პროგრამაზე მუშაობაში დასახმარებლად.
- ე. პროგრამაზე ზოგადი ინფორმაციის შემცველი მოდული.

მოდულებს შორის ურთიერთკავშირი შეიძლება გამოვსახოთ სქემით:



ნახ. 3.25 - პროგრამული კომპლექსის „Sarma“ სტრუქტურის სქემატური გამოსახვა

## შემავალი და გამომავალი მონაცემები

„Sarma“ -ის შემავალ მონაცემებს წარმოადგენენ შემდეგი ფიზიკური მახასიათებლები:

- გამტკნარების არხის სიგანე  $H^{(d)}$ ;
- არხის სგრძე  $L^{(d)}$  და უგანზომილობო სიგრძე
- არხის დახრის კუთხე;
- ხსნარის გადატუმბვის სიჩქარე  $V_0^{(d)}$ ;

- ხსნარის საწყისი კონცენტრაცია  $C_0^{(d)}$ ;
- ხსნარის საწყისი ტემპერატურა  $T_0^{(d)}$ ;
- ხსნარის საწყისი სიმკვრივე  $\rho_0^{(d)}$ ;
- კინემატიკური სიბლანტის  $\nu^{(d)}$ , კათიონის  $D_1^{(d)}$  და ანიონის  $D_2^{(d)}$  დიფუზიის, ტემპერატურაგამტარებლობის  $\alpha^{(d)}$ .
- ელექტრო დენის სიმკვრივე  $i_{av}^{(d)}$  და უგანზომილო მნიშვნელობა  $i_{av}$  (გალვანოსტატიკური მოდელი);
- მემბრანებსშორის სივრცეში ელექტრული პოტენციალის ვარდნა  $d_\varphi^{(d)}$  ან უგანზომილო მნიშვნელობა  $d_\varphi$  (პოტენციოსტატიკური მოდელი).

პროგრამის გაშვება ხდება ფიზიკური პარამეტრების უფრო მეტად ტიპიური ნაკრებით.

გამოთვლის შედეგები, სახელდობრ ფიზიკური ველების  $C, \eta, E_x, E_y, I_x, I_y, \phi, T, V_x, V_y, \xi, \Psi$  გაანგარიშებული მნიშვნელობები ჩაიწერება, შესაბამისად, „მუშა დირექტორიის“ მიერ შექმნილ შემდეგ გარე ფაილებში:

C.dat	-კონცენტრაცია
Eta.dat	- „ელექტროდენის დენის ფუნქცია“ (მხოლოდ გალვანოსტატიკური მოდელი);
Ex.dat	-დაძაბულობის x კოორდინატი X ლერძზე;
Ey.dat	-დაძაბულობის y კოორდინატი Y ლერძზე;
Ix.dat	-დენის სიმკვრივის x-კოორდინატი X ლერძზე;
Iy.dat	-დენის სიმკვრივის y-კოორდინატი Y ლერძზე;
P.dat	-ელექტრული პოტენციალი;
T.dat	-ტემპერატურა;
Ux.dat	-სიჩქარის x კოორდინატი X ლერძზე;
Uy.dat	-სიჩქარის y კოორდინატი Y ლერძზე;
V.dat	-გრიგალის ფუნქცია;
W.dat	-სითხის დინების ფუნქცია.

ფაილებში ჩაწერა სრულდება მომხმარებლის მიერ მიცემული „დროის ინტერვალის“ მიღწევის დროს, აგრეთვე ღილაკზე „შემდეგი ბიჯი“ ან „სტოპ“ დაჭერისას.

მასსივ-ველების გაანგარიშებული მნიშვნელობები მომხმარებლის სურვილის მიხედვით ინახება ფაილებში უგანზომილო სახით MATLAB-ის ფორმატში. MATLAB-ის პროგრამა საშვალეხას გვადლევს მოვახდინოთ მონაცემების ვიზუალიზაცია ორ ან სამგანზომილებიან გრაფიკების სახით, აგრეთვე გვეძლევა ფართო შესაძლებლობები მიღებული შედეგების ანალიზისათვის.