აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მალხაზ ბარდაველიძე

კვანტური სისტემების სპექტრალური თვისებების შესწავლა სუპერსიმეტრიული მეთოდებით

დისერტაცია ფიზიკის დოქტორის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
სრული პროფესორი დავით ნიშნიანიძე

ქუთაისი
2013

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

წინა საუკუნის 70-იანი წლების დასაწყისში აღმოჩენილ იქნა სრულიად ახალი სახის სიმეტრია - სუპერსიმეტრია, რომლის გარდაქმნებს ერთმანეთში გადაჰყავს ბოზონური და ფერმიონული ველები. წარმოიშვა ველის ისეთი თეორიები, რომლებშიც ბოზონები და ფერმიონები გახდნენ თანასწორები. ველის თეორიის სუპერსიმეტრიულ მოდელებს აღმოაჩნდათ უსასრულობების გაქრობის შესანიშნავი თვისება, რომელიც პირველად გამოჩნდა ვეს-ზუმინოს მოდელში. სუპერსიმეტრიულ თეორიებში უსასრულობების გაქრობამ მალევე გამოაცოცხლა გრავიტაციის კვანტური თეორიის აგების მცდელობები. ნაპოვნი იქნა ველის ლოკალური კვანტური თეორიის მოდელები, რომლებიც საერთოდ თავისუფალია ულტრაიისფერი განშლადობებისაგან [1].

თუ შესაძლებელია სუპერსიმეტრიის რეალიზაცია ელემენტარული ნაწილაკებისათვის, ის აუცილობლად უნდა იყოს სპონტანურად დარღვეული, რადგან ზუსტი სუპერსიმეტრიის შემთხვევაში ბოზონები და ფერმიონები უნდა იყვნენ მასის მიხედვით გადაგვარებული, რაც არ შეესაბამება სინამდვილეს. იერარქიის პრობლემის გადასაჭრელად წამოიჭრა სხვადასხვა იდეა, მათ შორის იდეა სუპერსიმეტრიის (სუსი) სპონტანური დარღვევისა. ამ კონტექსტში პირველად ვიტენმა [2], კუპერმა და ფრიდმანმა [3] გამოიკვლიეს სუსი-ს დარღვევა სასრულგანზომილებიანი კვანტური სისტემებისათვის, ანუ სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკისათვის (სსკმ). სუსი-ს სპონტანური დარღვევის მთავარი განსხვავება შინაგანი სიმეტრიის სპონტანური დარღვევისაგან არის სპონტანური დარღვევის შესაძლებლობა თავისუფლების ხარისხის სასრული განზომილების მქონე სისტემებისათვის. ასე რომ, თავდაპირველად სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა წარმოიქმნა ველის თეორიაში სუსი-ს სპონტანური დარღვევის პრობლემის გასარკვევად.

მას შემდეგ, რაც დაიწყეს სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკის (სსკმ) სხვადასხვა ასპექტების შესწავლა, ცხადი გახდა, რომ ის თავისთავადაა საინტერესო და არა მარტო როგორც ველის თეორიის მეთოდების შემოწმების მოდელი. სწორედ სსკმ-მ მოგვცა საშუალება განსაზღვრულად ვამტკიცოთ, რომ სუპერსიმეტრია განხორციელებადია ბუნებაში [4].

მე-20 საუკუნის 80-იან წლებში გაგებული იქნა ფაქტორიზაციის მეთოდის სუპერსიმეტრიული წარმომავლობა [5], [6], რომელიც საშუალებას იძლევა დავამყაროთ ანალიტიკური შესაბამისობა სხვადასხვა კვანტური ჰამილტონიანების სპექტრებსა და

ტალღურ ფუნქციებს შორის. ფაქტორიზაციის მეთოდი წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდთაგანს ზუსტად ამოხსნადი ამოცანების აგებისათვის ერთგანზომილებიან კვანტურ მექანიკაში. ის გამოიყენება კვანტურ-მექანიკური ამოცანების ამოხსნისათვის, მოყოლებული შრედინგერის შრომებიდან [7]. ინფელდმა და ჰალმა [8] განაზოგადეს ეს მეთოდი და ფაქტორიზაციის ექვსი განსხვავებული ფორმის გამოყენებით მიიღეს ზუსტად ამოხსნადი პოტენციალების ფართო კლასი. სუპერსიმეტრიის იდეამ შესაძლებლობა მოგვცა უფრო ღრმად გაგვეგო, რატომ არის ზოგი პოტენციალი ზუსტად ამოხსნადი [9], რამაც თავის მხრივ მიგვიყვანა არაზუსტად ამოხსნადი ამოცანების კვლევის ახალი მძლავრი მეთოდების წარმოშობამდე. სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკაში განიხილება სუპერალგებრის რეალიზაცია, რომელიც შეიცავს ბოზონურ და ფერმიონულ ოპერატორებს (სუპერმუხტებს). სსკმ საშუალებას იძლევა გავაერთიანოთ ორი იზოსპექტრალური ჰამილტონიანი ერთ სუპერსიმეტრიულ მატრიცულ ჰამილტონიანში დამატებითი ფერმიონული თავისუფლების ხარისხის შემოტანით. სუპერალგებრის რეალიზაციის უმარტივეს შემთხვევაში, სისტემის სუპერჰამილტონიანის ორი სუპერსიმეტრიული პარტნიორი $H^{(1)}, H^{(2)}$ უკავშირდება ერთმანეთს სუპერმუხტით - პირველი რიგის წარმოებულის $q^{\pm}$ ოპერატორით

$$H^{(1)}q^{+} = q^{+}H^{(2)}, \quad q^{-}H^{(1)} = H^{(2)}q^{-},$$

რაც სხვა არაფერია, თუ არა დარბუს გარდაქმნა. დარბუს გარდაქმნა [10]- ეს არის გადასვლა ერთი პოტენციალის ტალღური ფუნქციებიდან ახალი პოტენციალის ტალღურ ფუნქციებზე ენერგიის იგივე მნიშვნელობებით. ეს გარდაქმნა საშუალებას იძლევა ნათლად გამოისახოს შრედინგერის განტოლების ყველა ახალი პოტენციალის მქონე ამონახსნი შესაბამისი (იგივე ენერგიის მქონე) საწყისი პოტენციალის მქონე ამონახსნებით და ამის საფუძველზე ვიპოვოთ შესაბამისი ჰამილტონიანების როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი სპექტრების კავშირი.

დარბუს გარდაქმნის იტერაციებისთვის კომპაქტური ფორმა მოძებნა კრამმა [11]. ეს ფორმულები გამოიყენებოდა კვანტურ მექანიკაში გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის კვლევისას [12]. დარბუს გარდაქმნის განზოგადებამ მატრიცული კოეფიციენტების მქონე ნებისმიერი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევისათვის და შესაბამისი ევოლუციური განტოლებებისათვის, საშუალება მოგვცა გამოვიყენოთ ასეთი გარდაქმნები არაწრფივი განტოლებების ამოხსნების ასაგებად დამხმარე წრფივი ამოცანის ფორმალიზმის ფარგლებში (L,A-წყვილი) [13]. ფაქტორიზაციის მეთოდისა და დარბუს

გარდაქმნის მრავალგანზომილებიანი განზოგადება, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ კავშირები კვანტური ჰამილტონიანების სპექტრებსა და საკუთარ ფუნქციებს შორის, მოცემულია ნაშრომებში [14].

დარბუს გარდაქმნის გამოყენება ნაყოფიერი აღმოჩნდა ფაქტორიზაციის მრავალგანზომილებიანი მეთოდის კავშირის გამოსაკვლევად სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკასთან. მრავალგანზომილებიანი სუპერსიმეტრიული სისტემების აგებისას ფრიად სასარგებლოა სუპერველის მეთოდი [15]. ეს მეთოდი იძლევა სსკმ მოდელების აგების კონსტრუქტიულ რეცეპტს, როგორიცაა მაგალითად, სსკ სისტემების მატრიცული რეალიზაცია სხვადასხვა ურთიერთქმედებების მქონე (0+1)-განზომილებიანი სუპერველებით. არსებობს იზოსპექტრალური ჰამილტონიანების ოჯახების აგების სხვა მეთოდებიც.

პირველად წრფივი სუპერსიმეტრიის განზოგადება პოლინომურ სუპერსიმეტრიაზე მოხდა ანდრიანოვის და სხვ. მიერ [16], სადაც სუპერმუხტად აღებული იქნა მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორი ზოგადი სახით. ნაჩვენები იყო, რომ არსებობს ორი კლასის მეორე რიგის სუპერსიმეტრიული გარდაქმნა: დაყვანადი, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს ორი პირველი რიგის თანმიმდევრული გარდაქმნით, და დაუყვანადი, რომელიც არ დაიყვანება უფრო მარტივ გარდაქმნებზე. ორივე შემთხვევაში სისტემის ჰამილტონიანი გამოისახება ერთი თავისუფალი ფუნქციით და სუპერსიმეტრიის ალგებრა (სუპერმუხტების ანტიკომუტატორი) სისტემის ჰამილტონიანის მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი პოლინომია.

წრფივი სუპერსიმეტრიის განზოგადება პოლინომურ (არაწრფივ) სუპერსიმეტრიაზე, რომელიც ხორციელდება მესამე და უფრო მაღალი რიგის დიფერენციალური ოპერატორებით, მოცემული იქნა ნაშრომებში [17]-[21]. ერთგანზომილებიანი სისტემებისათვის შესაბამისი ალგებრა შეიცავს მესამე და უფრო მაღალი რიგის ჰამილტონიანის პოლინომებს. ორი სუპერპარტნიორის დამაკავშირებელი შეჯვარების თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ ჰამილტონიანი ინვარიანტულს ტოვებს სუპერმუხტის 0-მოდათა სივრცეს. ერთგანზომილებიანი სისტემებისათვის ამ სივრცის განზომილება სასრულია, რაც თავისთავად მიუთითებს იმაზე, რომ ნებისმიერი ერთგანზომილებიანი სუპერსიმეტრიული ალგებრის რეალიზაცია შესაძლებელია მხოლოდ კვაზი-ამოხსნადი ან საერთოდ ზუსტად ამოხსნადი ჰამილტონიანების მეშვეობით [22]-[26].

წინამდებარე ნაშრომის მიზანია: შეშფოთების თეორიის გარეშე სხვადასხვა კვანტური სისტემების სპექტრალური თვისებების დადგენა, ან კიდევ წინასწარ ცნობილი

სპექტრალური თვისებების მქონე კვანტური სისტემების აგება. ამ პრობლემის ფარგლებში კონკრეტული ამოცანა შეიცავს არარელატივისტურ კვანტურ სისტემებს შორის ახალი დინამიკური კავშირების დამყარებას, რაც გამოწვეულია მათი იზოსპექტრალური თვისებებით, ახალი კლასის ნაწილობრივ (კვაზი) ინტეგრებადი ჰამილტონიანების მოძებნა, რომელთა სპექტრი კონტროლირდება დინამიკური ალგებრებით. ამ კუთხით, კერძოდ, იგეგმება ერთგანზომილებიანი მეორე რიგის ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების აგება, ორი განზომილების შემთხვევაში ლორენცის მეტრიკის სუპერმუხტისათვის ყველა სუპერპარტნიორის და შესაბამისად, ინტეგრებადი სისტემების წყვილის მოძებნა, რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება აღმოჩნდეს ზუსტად ამოხსნადი. სამი განზომილების შემთხვევაში კი სუპერსიმეტრიული გარდაქმნის რეალიზაცია პირველი რიგის სუპერმუხტით და არაერმიტული, მაგრამ ნამდვილი სპექტრის მქონე ჰამილტონიანის აგება.

ნაშრომის სტრუქტურა ასეთია: შედგება შესავლისა და სამი თავისაგან, რომლებშიც თანმიმდევრულად არის გადმოცემული სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკის ზოგიერთი რეალიზაცია ერთი, ორი და სამი სივრცული განზომილების არარელატივისტური კვანტური სისტემებისათვის. თითოეულ თავში მიღებულია გარკვეული ორიგინალური შედეგები. ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია ლიტერატურის ნუსხა.

პირველი თავის ძირითადი ნაწილი მიმოხილვითი ხასიათისაა. §1.1 და §1.2-ში მოცემულია ერთგანზომილებიანი სტანდარტული (წრფივი) და არასტანდარტული (პოლინომიალური) სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკის ცნობილი შედეგები. §1.3-ში განხილულია ადიტიური ფორმა ინვარიანტობა და სტანდარტული სუპერსიმეტრიისათვის ამ ფორმა ინვარიანტობის ზოგადი განტოლება და ამ განტოლების ყველა ამონახსნი [9]-[29]. განმარტების თანახმად, ორი სუპერპარტნიორი ჰამილტონიანი $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ფორმა ინვარიანტულია, თუ სრულდება პირობა:

$$H^{(2)}(x, a_0) = H^{(1)}(x, a_1) + R(a_1),$$

სადაც $a_1 = f(a_0)$; a_0, a_1 პარამეტრებია, რომლებიც შედიან სუპერპარტნიორი პოტენციალების გამოსახულებებში; $R(a_1)$ არაა დამოკიდებული x-ზე.

აღმოჩნდა, რომ ყველა ცნობილი, ზუსტად ამოხსნადი პოტენციალები მიეკუთვნებიან სწორედ აღნიშნული ტიპის ფორმა ინვარიანტულ პოტენციალებს [30]. §1.4-ში შესწავლილია ადიტიური ფორმა ინვარიანტობა არასტანდარტული სუპერსიმეტრიული, მეორე რიგის სუპერმუხტით გარდაქმნის დროს. მიღებულია ამ ფორმა ინვარიანტობის

პირობის ზოგადი ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. ნაჩვენებია, რომ ეს განტოლებები ზოგად შემთხვევაში არ შეიძლება ამოიხსნას ელემენტარულ ფუნქციებში. მიუხედავად ამისა, მოცემულია პოტენციალების ასიმპტოტური ქცევა უსასრულობასა და შესაძლო სინგულარობის წერტილებში. ამოცანაში შემავალი გარკვეული კერძო მნიშვნელობებისათვის მოცემულია ზემოთ აღნიშნული ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ანალიზური სახით და შესაბამისად, პოტენციალის გამოსახულება ცხადი სახით. ამ პარაგრაფის შედეგები ორიგინალურია და გამოქვეყნებულია ნაშრომში [31].

მეორე თავი ეძღვნება ორგანზომილებიან სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკას. §2.1-ში მოცემულია ინტეგრებადი სისტემების აგების ზოგადი სუპერსიმეტრიული მეთოდი [32]-[36], რაც თავის თავში გულისხმობს ორგანზომილებიანი ჰამილტონიანების იზოსპექტრალური წყვილის აგებას ე. წ. შეჯვარების თანაფარდობის საშუალებით. ნაჩვენებია, რომ როცა $q^{\pm}$ სუპერმუხტები პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერტორებია, სუპერპარტნიორი ჰამილტონიანები შეიცავენ პოტენციალებს განცალებადი ცვლადებით დეკარტეს ან პოლარულ კოორდინატებში, და ამიტომაც არ წარმოადგენენ ჩვენი განხილვის ინტერესს. მიუხედავად ამისა, უკვე აქ მჟღავნდება ძირეული განსხვავება ერთგანზომილებიან და მრავალგანზომილებიან შემთხვევებს შორის. ერთგანზომილებიანისაგან განსხვავებით, სუპერსიმეტრიის ალგებრა (ანტიკომუტატორი) აღარ იძლევა ჰამილტონიანის პოლინომს, არამედ მას მივყავართ სისტემის დინამიკური სიმეტრიის არსებობასთან. ანუ, სხვანაირად რომ ვთქვათ, იზოსპექტრალური ჰამილტონიანების წყვილის აგება ცალსახადაა დაკავშირებული ორივე ჰამილტონიანის ინტეგრებასთან.

ორგანზომილებიანი ეკვივალენტური ჰამილტონიანების აგების შემდეგ ნაბიჯს წარმოადგენს წარმოებულით მეორე რიგის ოპერატორის-სუპერმუხტის გამოყენება სუპერსიმეტრიული გარდაქმნის ოპერატორად. როგორც აღმოჩნდა, შეჯვარების თანაფარდობა მთლიანად განსაზღვრავს მეტრიკის ფორმას სუპერმუხტში და გამომდინარე აქედან, გარდაქმნა იყოფა ოთხ დამოუკიდებელ კლასად, რომელთაგან პირველი ორი, ესაა გარდაქმნა ერთეულოვანი და ნებისმიერი სხვა მუდმივი მეტრიკით, შესაბამისად. მოყვანილია შეჯვარების თანაფარდობიდან მიღებული განტოლებათა სისტემა, რომელიც შედგება ექვსი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებისაგან სუპერმუხტის სამ საკოეფიციენტო ფუნქციისა და ორი პოტენციალისათვის. ზოგადი სახით ამ სისტემის ამოხსნა არ არსებობს. [34], [35] ნაშრომებზე დაყრდნობით აღწერილია კერძო შემთხვევები, როდესაც შესაძლებელია სისტემის ამოხსნა და პოტენციალების ჩაწერა ცხადი სახით.

§2.2 წარმოადგენს დისერტაციის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს. მასში მოცემულია ლორენცის მეტრიკის სუპერმუხტისათვის შეჯვარების თანაფარდობის ზოგადი ამოხსნა. ადრეულ ნაშრომებში [36],[37] ნაჩვენები იქნა, რომ ზემოთ ნახსენები ექვს განტოლებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა დაიყვანება ერთ ფუნქციონალურ დიფერენციალურ განტოლებაზე, რომლის მხოლოდ რამოდენიმე კერძო ამონახსნი იქნა მოცემული [39], [32]-[36], ხოლო სუპერპარტნიორი პოტენციალები და სუპერმუხტის თავისუფალი საკოეფიციენტო ფუნქცია ცხადი სახით ჩაიწერებიან ამ განტოლებაში შემავალი ფუნქციებით. საბედნიეროდ, აღმოჩნდა, რომ გარკვეული მათემატიკური გარდაქმნების შემდეგ ეს განტოლება დაიყვანება აქამდე ცნობილ დიფერენციალურ განტოლებაზე [40]. საბოლოოდ, ამოცანა დაიყვანება ერთიდან მეორე განტოლებაზე გადასვლის განტოლებების ამოხსნაზე, რომლებიც წარმოადგენენ ერთი ცვლადის პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს. ეს განტოლებები იხსნება ბოლომდე და ამონახსნები ძირითადში გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების სახით, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში ვეიერშტრასის სპეციალური ფუნქციების საშუალებით.

§2.3-ში მოყვანილია სუპერპარტნიორ პოტენციალთა სრული სია. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული მათ შესაბამის ჰამილტონიანებს გააჩნიათ მეოთხე რიგის სიმეტრიის ოპერატორები და ამ თვალსაზრისით წარმოადგენენ ინტეგრებად სისტემებს. ზოგიერთი ამ სისტემებიდან ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებია, ხოლო ზოგირთი წყვილისათვის ერთ-ერთ სუპერპარტნიორში შესაძლებელია ცვლადთა განცალება, მაშინ როცა მეორე პარტნიორში იგივეს ადგილი არაა აქვს.

ისეთი შესაძლებლობების რეალიზაციას, რომლებიც საშუალებას იძლევა არატრივიალური ორგანზომილებიანი კვანტური სისტემების ნაწილობრივ ან მთლიანად ამოხსნას, დიდი მნიშვნელობა აქვს კვანტურ მექანიკაში, რადგანაც ცნობილია ორგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლების ანალიზური ამოხსნის მხოლოდ ერთადერთი რეგულარული მეთოდი: ცვლადთა განცალებით ამოცანის დაყვანა ერთგანზომილებიან ამოცანათა წყვილზე [41].

§2.4-ის ძირითადი ნაწილი ეთმობა ზოგადი ფორმით იმის დემონსტრირებას, თუ როგორ შეიძლება სუპერსიმეტრიის საშუალებით კვანტური სისტემების ნაწილობრივი ან მთელი სპექტრის პოვნა, მიუხედავად იმისა, რომ ამ სისტემების აღმწერ ჰამილტონიანებში ადგილი არა აქვს ცვლადთა განცალებას ჩვეულებრივი გაგებით. ამის საშუალებას იძლევა ე. წ. ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალება [36] და მას ადგილი აქვს მაშინ, როცა სუპერპარტნიორ ჰამილტონიანებში $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ცვლადები არ იყოფა, მაგრამ იყოფა

სუპერმუხტში. ნაჩვენებია, რომ ლორენცის მეტრიკის სუპერმუხტისათვის ცვლადთა განცალებას ადგილი აქვს შეჯვარების თანაფარდობის ნებისმიერი ამონახსნისათვის, რაც მიიღწევა სუპერმუხტის ოპერატორის მსგავსების (არაუნიტარული) გარდაქმნით. აქედან გამომდინაროებს, რომ სუპერმუხტის ნულ მოდათა სივრცის პოვნა დაიყვანება ორი ერთგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლების ამოხსნაზე. იმის და მიხედვით თუ რომელი სისტემისთვის იხსნება განტოლებები, შეიძლება ვილაპარაკოთ ამოცანის ნაწილობრივ ამოხსნაზე, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევებში ზუსტად ამოხსნადობაზეც კი. შეჯვარების თანაფარდობიდან კი გამომდინარეობს $H^{(2)}$ ჰამილტონიანის მთავარი თვისება: ნულ მოდების სივრცე ჩაკეტილია $H^{(2)}$ ჰამილტონიანის მოქმედების მიმართ, რაც პირობაა იმისა, რომ $H^{(2)}$ ჰამილტონიანი იყოს კვაზი ზუსტად ამოხსნადი [42]-[47], ხოლო ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში ზუსტად ამოხსნადიც კი. ცხადია, რომ ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალების ზემოთ აღწერილი ზოგადი სქემა შეიძლება გამოყენებული იქნას წინა პარაგრაფში მიღებული ყველა პოტენციალისათვის. პარაგარფის ბოლოს კონკრეტულ მაგალითზე ნაჩვენებია როგორ მუშაობს ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალება.

მესამე თავი ეძღვნება სამგანზომილებიანი, ოსცილატორის მსგავსი ფორმა ინვარიანტული კვანტური სისტემების აგებას პირველი რიგის სუპერმუხტით. §3.1-ში მიღებული და ზოგადი სახით ამოხსნილია შესაბამისი შეჯვარების თანაფარდობა. დამტკიცებულია, რომ ნამდვილი პოტენციალების შემთხვევაში ჰამილტონიანი დაიყვანება ერთი და ორი ცვლადის ჰამილტონიანების ჯამზე, ანუ ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას და ასეთ შემთხვევებს არ განვიხილავთ. შესაბამისად, ნაჩვენებია, რომ ცვლადთა განცალებას შეიძლება ადგილი არ ჰქონდეს მხოლოდ კომპლექსური პოტენციალებისათვის, მაგრამ მათი შესაბამისი არა ერმიტული ჰამილტონიანების სპექტრი ნამდვილია და ეკვიდისტანციური.

§3.2-ში დაწვრილებითაა შესწავლილი სპეციალური შემთხვევა ასეთი პოტენციალებისათვის კვადრატული ურთიერთქმედებით. აღმოჩნდა, რომ ეს ჰამილტონიანი მასში შემავალი პარამეტრებისა და ცვლადების მარტივი გარდაქმნით ზუსტად ემთხვევა [48]-ში მიღებულ ჰამილტონიანს, სადაც სუპერსიმეტრიული გარდაქმნა ხორციელდება სამგანზომილებიანი სისტემებისათვის, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ გარდაქმნის ოპერატორი მეორე რიგისაა. ამას შედეგად მივყავართ იმასთან, რომ ერთიდაიმავე ჰამილტონიანს გააჩნია ორი დაბადებისა და ორი გაქრობის ოპეარტორი- პირველი და მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორები. აგებულია ჰამილტონიანის ძირითადი მდგომარეობის შესაბამისი საკუთარი ფუნქცია, ხოლო შეშფოთებული მდგომარეობების

შესაბამისი ფუნქციები ნაპოვნია სტანდარტული გზით - დაბადების ოპერატორების ძირითად მდგომარეობაზე მოქმედებით. ნაჩვენებია, რომ ადგილი აქვს სისტემის მდგომარეობების გადაგვარებას.

ენერგეტიკული დონეების გადაგვარება მიუთითებს იმაზე, რომ არსებობს ჰამილტონიანის გარკვეული სიმეტრიები. §3.3-ში გაქრობისა და დაბადების ოპერატორების კომბინაციებით აგებულია სიმეტრიის ოპერატორები, რომელთაგან ორი მეორე რიგის, ერთი მესამე და ერთიც მეოთხე რიგის დიფერენციალური ოპერატორია. ჩვეულებრივი, ერმიტული კვანტური მექანიკის კონტექსტში, ასეთ სიტუაციებს ეწოდება მაქსიმალურად სუპერინტეგერებადი [49] და ასეთ სისტემებში აუცილებლად ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას. ჩვენ მოცემულ შემთხვევაში სამგანზომილებიანი სისტემისათვის გვაქვს ერთმანეთთან კომუტირებადი სიმეტრიის ოპერატორები R_0, R_1 (სრული ინტეგრებადობა) და, დამატებით კიდევ სიმეტრიის ორი ოპერატორი R_2, R_3, რომლებიც არ კომუტირებენ მათთან. ბოლო ოპერატორის კომუტატორი R_0, R_1 ოპერატორების პოლინომთან არაა ფუნქციონალურად R_0-გან დამოუკიდებელი და არ იძლევა დამატებით სიმეტრიებს. მოცემულია მათ შორის კომუტაციური თანაფარდობები და გამოთვლილია სიმეტრიის ოპერატორების მოქმედება შეშფოთებული მდგომარეობების შესაბამის ტალღურ ფუნქციებზე და თვალსაჩინოდაა ნაჩვენები, რომ სიმეტრიის ოპერატორს ერთი ფუნცია გადაჰყავს იმავე ენეგრგეტიკული დონის სხვა ფუნქციაში, რაც თავის მხრივ მიუთითებს გადაგვარების არსებობაზე.

§3.4 ეთმობა მიღებული ტალღური ფუნქციების ნორმის პოვნასა და ერთმანეთს შორის ორთოგონალურობის პირობის დადგენას. ვინაიდან სისტემა ფსევდო-ერმიტულია

$$\eta H \eta^{-1} = H^{\dagger},$$

სადაც η არის ლუწობის ოპერატორი კოორდინატთა მეორე ღერძის მიმართ, ანუ $\eta = P_2 : x_2 \to -x_2$, შემოდის ახალი სკალარული ნამრავლი (η - ნამრავლი)

$$< \Psi|\eta|\Phi > = \ll \Psi\Phi \gg = \int \Psi\Phi.$$

ნაჩვენებია, რომ ამ სკალარული ნამრავლის მიმართ ძირითადი მდგომარეობის ნორმა და იმ შეშფოთებული მდგომარეობების ნორმები, რომლებიც მიიღებიან ძირითადი მდგომარეობიდან მხოლოდ მეორე რიგის დაბადების ოპერატორის მოქმედებით, განსხვავებულია ნულისაგან. ყველა დანარჩენი მდგომარეობის ნორმები ნულის ტოლია, ანუ ისინი თვითორთოგონალური ტალღური ფუნქციებია. ტალღური ფუნქციების

თვითორთოგონალურობა არის ნიშანი იმისა, რომ საქმე გვაქვს არადიაგონალიზებად ჰამილტონიანებთან [50]-[52], რაც თავის მხრივ გულისხმობს, რომ ნებისმიერი ნულოვანი ნორმის ტალღურ ფუნქციასთან ერთად განსაზღვრული უნდა იქნეს ასოცირებული ფუნქციების გარკვეული სიმრავლე, რომლებიც მონაწილეობენ ერთეულოვანი ოპერატორის გაშლაში.

§3.4-ში მოცემულია ასოცირებული ფუნქციების განმარტება და მათი ორთოგონალურობის პირობა. ნაპოვნია ყველა თვითორთოგონალური საკუთარი ფუნქციის შესაბამისი ასოცირებული ფუნქციების სიმრავლე.

დასაცავად გატანილი ძირითადი შედეგებია:

აგებულია მეორე რიგის ადიტიური ფორმა ინვარიანტული პოტენციალები.

მიღებულია ორგანზომილებიანი კვანტური სისტემების სუპერპარტნიორი პოტენციალების სრული სია, რომელთა შესაბამისი ჰამილტონიანები დაკავშირებული არიან ლორენცის მეტრიკის სუპერმუხტით.

ნაპოვნია სამგანზომილებიანი ჰამილტონიანები ოსცილატორის მსგავსი ფორმა ინვარიანტობით. ნაჩვენებია, რომ ცვლადთა განცალებას ადგილი შეიძლება არ ქონდეს მხოლოდ კომპლექსური პოტენციალებისათვის, მაგრამ მათი სპექტრი ნამდვილია და ეკვიდისტანციური. სპეციალური შემთხვევა ასეთი პოტენციალებისათვის კვადრატული ურთიერთქმედებით ამოხსნილია ბოლომდე. შესწავლილია ამ სისტემის სიმეტრიის თვისებები და ენერგეტიკული დონეების გადაგვარება. ნაჩვენებია, რომ სისტემის ჰამილტონიანი არადიაგონალიზებადია და ანალიზურადაა აგებული მისი ტალღური და შესაბამისი ასოცირებული ფუნქციები.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგი ნაშრომების სახით:

1. JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS 54 (2013) 012107 - Three-dimensional shape invariant non separable model with equidistant spectrum - M. S. Bardavelidze, F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze [http://dx.doi.org/10.1063/1.4774292]
2. PHYSICS LETTERS A 377 (2013) 195-199 - General solution of 2-dim intertwining relations for supercharges with hyperbolic (Lorentz) metrics - M. S. Bardavelidze, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze [http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2012.11.019]
3. VESTNIK ST. PETERSBURG UNIVERSITY. Ser. 4. 2013. Issue. 1. P. 208 215. - Shape invariance of second order in one-dimensional quantum mechanics - M. S. Bardavelidze, D. N. Nishnianidze

თავი I. ერთგანზომილებიანი სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა

§1.1 ერთგანზომილებიანი სტანდარტული სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა

ერთგანზომილებიან სტანდარტულ სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკაში განიხილება რეალიზაცია სუპერალგებრისა, რომელიც შეიცავს კომუტაციურ და ანტიკომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$(Q^{\pm})^2 = 0, \quad \{Q^+, Q^-\} = H - \epsilon, \quad [Q^{\pm}, H] = 0, \tag{1}$$

სადაც $\epsilon-$ ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

(1) სუპერალგებრის რეალიზაცია ხდება 2×2 - მატრიცული სუპერმუხტით:

$$Q^- = (Q^+)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^- & 0 \end{pmatrix}; \quad q^{\pm} = \mp\hbar\partial + W(x), \quad \partial \equiv \frac{d}{dx} \tag{2}$$

და სუპერჰამილტონიანით H, რომელიც შედგება სუპერპარტნიორი წყვილისაგან - შრედინგერის ორი ოპერატორისაგან $h^{(1)}, h^{(2)}$:

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}; \quad h^{(i)} = -\hbar^2\partial^2 + V^{(i)}(x). \tag{3}$$

(1) სუპერალგებრაში შემავალი კომუტატორის კომპონენტებში ჩაწერა გვაძლევს ოპერატორულ განტოლებას, რომელსაც შეჯვარების თანაფარდობა (intertwining relations) ეწოდება:

$$H^{(1)}q^+ = q^+H^{(2)}, \quad q^-H^{(1)} = H^{(2)}q^-, \tag{4}$$

ხოლო ანტიკომუტაციური თანაფარდობიდან გამომდინარეობს $h^{(1)}$ და $h^{(2)}$ ჰამილტონიანების ფაქტორიზაცია, ანუ ისინი წარმოადგენენ ორი ერმიტულად ურთიერთშეუღლებული პირველი რიგის ოპერატორების ნამრავლს (ერთიდაიმავე დამატებითი კონსტანტის სიზუსტით):

$$H^{(1)} = q^+q^- + \epsilon = -\hbar^2\partial^2 + W^2(x) - \hbar W'(x) + \epsilon, \tag{5}$$

$$H^{(2)} = q^-q^+ + \epsilon = -\hbar^2\partial^2 + W^2(x) + \hbar W'(x) + \epsilon. \tag{6}$$

$W(x)$ ფუნქციას ეწოდება სუპერპოტენციალი. იგი შეიძლება განსაზღვრული იქნას შრედინგერის განტოლების $H^{(1)}\psi^{(1)}(x,\epsilon) = \epsilon\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ ნებისმიერი $\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ ამონახსნით:

$$W(x) = -\frac{d\ln\psi^{(1)}(x,\epsilon)}{dx}. \tag{7}$$

ზოგადად, $\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ ამონახსნი არანორმირებული ფუნქციაა. მიუხედავად ამისა, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ $V^{(1)}(x)$ პოტენციალს გააჩნია ფიზიკური მდგომარეობების დისკრეტული სპექტრი $\psi_n^{(1)}(x) \equiv \psi^{(1)}(x, E_n^{(1)})_{n=0,1,...}$ ნორმირებული ტალღური ფუნქციებით. ϵ პარამეტრის სიდიდეზე დამოკიდებულების მიხედვით ვღებულობთ სინგულარულ და არასინგულარულ პოტენციალებს, შესაბამისად როცა $\epsilon > E_0^{(1)}$ და $\epsilon < E_0^{(1)}$.

შეჯვარების თანაფარდობა (4) საშუალებას იძლევა დავამყაროთ კავშირი $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ჰამილტონიანების საკუთარ მნიშვნელობებს შორის ერთიდაიმავე ენერგეტიკულ დონეზე. მართლაც, E_n ენერგიის შესაბამისი მდგომარეობის ნორმირებული $\psi_n^{(1)}(x)$ და $\psi_n^{(2)}(x)$ ტალღური ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$\psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n - \epsilon}} q^- \psi_n^{(1)}(x), \quad \psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n - \epsilon}} q^+ \psi_n^{(2)}(x). \tag{8}$$

$H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ჰამილტონიანების სპექტრთა ურთიერთგანლაგება დამოკიდებულია $\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ ფუნქციის არჩევაზე. შეიძლება განვასხვავოთ სამი შემთხვევა: 1) $\epsilon = E_0^{(1)}$, $\psi^{(1)}(x,\epsilon) = \psi^{(1)}(x, E_0^{(1)})$; 2)$\epsilon < E_0^{(1)}$, $(\psi^{(1)}(x,\epsilon))^{-1}$ აქვს უსასრულო ნორმა; 3) $\epsilon < E_0^{(1)}$, $(\psi^{(1)}(x,\epsilon))^{-1}$ აქვს სასრული ნორმა. პირველ შემთხვევაში $H^{(2)}$-ის სპექტრი მიიღება $H^{(1)}$-ის სპექტრიდან ძირითადი მდგომარეობის შესაბამისი ენერგიის $E_0^{(1)}$-ის ამოშლით, ვინაიდან $q^-\psi^{(1)}(x, E_0^{(1)}) = 0$. მეორე შემთხვევაში ორივე ჰამილტონიანის სპექტრები ზუსტად ემთხვევიან ერთმანეთს. მესამე შემთხვევაში $H^{(2)}$ ჰამილტონიანს გააჩნია ერთი დამატებითი მდგომარეობა ϵ ენერგიითა და $\psi^{(2)}(x,\epsilon) = (\psi^{(1)}(x,\epsilon))^{-1}$ საკუთარი ფუნქციით.

მაშასადამე, თუ ვიცით $H^{(1)}$ ჰამილტონიანის ენერგია და ტალღური ფუნქცია, შეგვიძლია ვიპოვოთ შესაბამისი სიდიდეები $V^{(2)}(x) = V^{(1)}(x) - 2\hbar^2\partial^2\ln\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ პოტენციალისათვის.

ახალი ჰამილტონიანების აგების პროცედურა შეიძლება გაგრძელდეს, თუ კი შემდეგ ნაბიჯზე ამოსავალი იქნება $H^{(2)}$ ჰამილტონიანი $\psi^{(2)}(x) = q^-\psi^{(1)}(x,\epsilon)$ საკუთარი ფუნქციით. ასეთი პროცედურის თანმიმდევრობით გამოყენება გვაძლევს პოტენციალთა $V^{(n)}$ სერიას, რომელთა სპექტრი და ტალღური ფუნქციები ცხადად აიგება საწყისი სიდიდეებიდან. ცხადია, რომ თუკი თავდაპირველ $H^{(1)}$ ჰამილტონიანს აქვს $p > 1$ ბმული მდგომარეობები $E_n^{(1)}$ ენერგიითა და $\psi_n^{(1)}(0 < n < p-1)$ ტალღური ფუნქციით და ავიღებთ $\epsilon = E_0^{(1)}$, მაშინ m ნაბიჯის შემდეგ მიღებულ $H^{(m)}(m = 2,3,...,p)$ ჰამილტონიანს ექნება იგივე სპექტრი, რაც

$H^{(1)}$, მხოლოდ პირველი $m-1$ დონის გამოკლებით. კერძოდ, გვექნება:

$$H^{(m)} = q_m^- q_m^+ + E_{m-1}^{(1)} = -\hbar^2\partial^2 + V^{(m)}(x), \tag{9}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
&q_m^\pm = \mp\hbar\partial + W_m(x), \quad W_m(x) = -\frac{d\ln\psi_0^{(m)}}{dx};\\
&E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = ... = E_{n+m-1}^{(1)};\\
&\psi_n^{(m)} = (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-1/2}...(E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} q_{m-1}^- ... q_1^- \psi_{n+m-1}^{(1)};\\
&V^{(m)}(x) = V^{(1)}(x) - 2\hbar^2\partial^2\ln(\psi_n^{(1)}...\psi_0^{(m-1)}).
\end{aligned} \tag{10}$$

(1) სუპერალგებრიდან გამომდინარეობს, რომ H ჰამილტონიანის სპექტრი $E \geq \epsilon$, ამასთან $E > \epsilon$ ენერგიის დონეები ორჯერადადაა გადაგვარებული. $E = \epsilon$ ენერგიის მქონე ბმული მდგომარეობების არსებობა დამოკიდებულია მხოლოდ $W(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევაზე უსასრულობაში და არაა დამოკიდებული მის კონკრეტულ მნიშვნელობაზე [2]. (სიმარტივისათვის შემდგომში დავუშვათ, რომ $\epsilon = 0$.) $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ჰამილტონიანების ფაქტორიზაციის გამო ნულოვანი ენერგიის მქონე მდგომარეობის მოძებნა დაიყვანება პირველი რიგის $q^+\psi^{(2)} = 0$ და $q^-\psi^{(1)} = 0$ დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნაზე. ამ განტოლებებიდან ადვილად ვადგენთ, რომ

$$\psi^{(1,2)} \sim \exp(\pm\hbar^{-1}\int^x W(y)dy). \tag{11}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციები $\psi^{(1)}$ და $\psi^{(2)}$ კვადრატულად ინტეგრებადნი არიან, თუ შესაბამისად სრულდება პირობები:

$$\int^x W(y)dy \to -\infty \tag{12}$$

და

$$\int^x W(y)dy \to \infty \tag{13}$$

როცა $x \to \pm\infty$. ნათელია, რომ ეს პირობები არ შეიძლება შესრულდეს ერთდროულად, ამიტომაც მხოლოდ ერთი ფუნქცია $\psi^{(1)}$ ან $\psi^{(2)}$ შეიძლება იყოს ნორმირებული. მაშასადამე, ნულოვანი ენერგიის მქონე მდგომარეობა, თუ ის არსებობს, არაა გადაგვარებული. მაგრამ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ არცერთი ფუნქცია არ იყოს ნორმირებული. ძირითადი მდგომარეობის არსებობა-არარსებობა დაკავშირებულია სუპერსიმეტრიის სპონტანურ დარღვევასთან.

გავიხსენოთ, რომ სიმეტრიის სპონტანურად დარღვევა ეწოდება შემდეგს: H ჰამილტონიანი ინვარიანტულია რაღაც გარდაქმნების მიმართ $[H, R] = 0$, სადაც R-გარდაქნის გენერატორია, მაგრამ ძირითადი მდგომარეობა არ რჩება ინვარიანტული ამ გარდაქმნის მიმართ $R\Psi_0 \neq 0$.

თავის მხრივ, სუპერსიმეტრიის გენერატორებს წარმოადგენენ $Q^{\pm}$ სუპერმუხტები. ამიტომ, თუ სუპერსიმეტრია ზუსტია, $Q^{\pm}\Psi_0 = 0$, და მაშასადამე, $H\Psi_0 = \{Q^{+}.Q^{-}\}\Psi_0 = 0$, ე. ი. არსებობს ნულოვანი ენერგიის მქონე მდგომარეობა. და პირიქით, შეიძლება ადვილად დამტკიცდეს, რომ თუ არსებობს მდგომარეობა ნულოვანი ენერგიით, სუპერსიმეტრია ზუსტია, ანუ ადგილი არ აქვს სპონტანურ დარღვევას.

§1.2 ერთგანზომილებიანი პოლინომური სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა

სტანდარტული სუპერსიმეტრიული კვანტრური მექანიკის განზოგადებას წარმოადგენს (1) სუპერალგებრის რეალიზაცია სუპერმუხტებით, რომლებიც წარმოადგენენ მეორე რიგის დიფერენციალურ ოპერატორებს [16]:

$$q^{+} = (q^{-})^{\dagger} = \hbar^2\partial^2 - 2\hbar f(x)\partial + b(x), \tag{14}$$

ამ ოპერატორებისა და (3) შრედინგერის ოპერატორების (4) შეჯვარების თანაფარდობაში ჩასმის შემდეგ ვღებულობთ სამ დიფერენციალურ განტოლებას $V^{(1)}(x), V^{(2)}(x), f(x), b(x)$ ფუნქციებისათვის:

$$V^{(2)}(x) - V^{(1)}(x) = 4\hbar f'(x), \tag{15}$$

$$\hbar^2 f''(x) - \hbar b'(x) - (V^{(1)}(x) - V^{(2)}(x))f(x) = \hbar(V^{(2)}(x))', \tag{16}$$

$$\hbar b''(x) + 4b(x)f'(x) + \hbar(V^{(2)}(x))'' - 2f(x)(V^{(2)}(x))' = 0. \tag{17}$$

განტოლებათა ამ სისტემის ზოგადი ამოხსნა მიღებულია ნაშრომში [16], მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ $\hbar = 1$. ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის აუცილებელია $\hbar$-ის შენარჩუნება. ამის გათვალისწინებით (15)-(17) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$V^{(1),(2)}(x) = \mp 2\hbar f'(x) + f^2(x) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{f'^2(x)}{2f^2(x)}\right) - \frac{d}{f^2(x)} + \alpha. \tag{18}$$

$$b(x) = -\hbar f'(x) + f^2(x) - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{f'^2(x)}{2f^2(x)}\right) + \frac{d}{f^2(x)}. \tag{19}$$

სადაც d, α - ნებისმიერი მუდმივებია.

განზოგადებული (1) სუპერსიმეტრიული ალგებრისათვის მიიღება პოლინომური სუპერალგებრა:

$$(Q^{\pm})^2 = 0, \quad [Q^{\pm}, H] = 0, \quad \{Q^+, Q^-\} = (H - \alpha)^2 + 4d. \tag{20}$$

(20)-ის ბოლო განტოლებიდან ჩანს, რომ $Q^{\pm}$ ოპერატორებისა და H ჰამილტონიანის 0-მოდები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ამიტომაც სიმეტრიის სპონტანური დარღვევა პოლინომიალური სუპერსიმეტრიის შემთხვევაში განსხვავებულია სტანდარტული სუპერსიმეტრიისაგან. კერძო შემთხვევაშიც კი, როცა $\{Q^+, Q^-\} = H^2$, შეიძლება წარმოიშვას ისეთი სიტუაცია, რომელსაც ადგილი არ შეიძლება ჰქონდეს ჩვეულებრივ სუპერსიმეტრიაში [16].

მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორი (14) ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ორი პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორების ნამრავლი:

$$q^+ = q_1^+ q_2^+ = (-\hbar\partial + W_1(x))(-\hbar\partial + W_2(x)), \tag{21}$$

სადაც

$$W_{1,2}(x) = \pm W(x) + f(x), \quad W^2(x) - \hbar W'(x) = f^2(x) - \hbar f'(x) - b(x), \tag{22}$$

ხოლო ამ განტოლების $W(x)$ ფუნქციის რაღაც კონკრეტული ამონახსნებისათვის შეიძლება მოვახდინოთ $h^{(1)}$ და $h^{(2)}$ ჰამილტონიანების ფაქტორიზაცია შემდეგი სახით:

$$h^{(1)} = q_1^+ q_1^- + c/2, \quad h^{(2)} = q_2^- q_2^+ - c/2. \tag{23}$$

ფაქტორიზაციას ადგილი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ სრულდება პირობები:

$$W_2^2(x) - \hbar W_2'(x) = W_1^2(x) + \hbar W_1'(x) + c, \quad \alpha = 0. \tag{24}$$

ამ განტოლებიდან (19) და (22) განტოლებების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$c^2 = -16d. \tag{25}$$

ჩავწეროთ (24) განტოლება $q_i^{\pm}$ დიფერენციალური ოპერატორების გამოყენებით. გვექნება:

$$q_2^+ q_2^- - c/2 = q_1^- q_1^+ + c/2. \tag{26}$$

ამ განტოლების გამოყენებით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ მეორე რიგის სუპერსიმეტრიული გარდაქმნა შეიძლება განხორციელდეს შუალედური $h = q_1^- q_1^+ + c/2$

ჰამილტონიანით, რომელიც სუპერპარტნიორია როგორც $h^{(1)}$-ის ($q_1^{\pm}$ სუპერმუხტებით), ასევე $h^{(2)}$-ის ($q_2^{\pm}$ სუპერმუხტებით):

$$h^{(1)} \to h \to h^{(2)}. \tag{27}$$

(25) განტოლების თანახმად, ასეთი შესაძლებლობა არსებობს მხოლოდ მაშინ, როცა $d < 0$. ხოლო როცა $d > 0$, ეს განტოლება არ სრულდება და ამიტომაც სუპერსიმეტრიული გარდაქმნის შესაბამის კლასს ეწოდება დაუყვანადი გარდაქმნა. დაუყვანადი გარდაქმნის შემთხვევაში c მუდმივა ხდება წარმოსახვითი და შუალედური ერმიტული ჰამილტონიანი h არ არსებობს. ნაშრომში [32] ნაჩვენები იქნა, რომ დაუყვანადი გარდაქმნა შეიძლება მიყვანილი იქნას დაყვანად გარდაქმნადე თუკი უარს ვიტყვით შუალედურ ერმიტულ ჰამილტონიანზე და c მუდმივას შევცვლით ic კომპლექსური მუდმივით.

ზოგადად რომ ვთქვათ, d-ს ნებისმიერი ნიშნისათვის არსებობს სუპერპარტნიორების ფართო სიმრავლე, რომლებიც დაკავშირებული არიან მეორე რიგის სუპერსიმეტრიული გარდაქმნებით და რომელთა შესაბამისი პოტენციალები გამოისახება ერთი ნებისმიერი ფუნქციით. უფრო მაღალი რიგის პოლინომიალური სუპერსიმეტრია შეიძლება აგებული იქნას სტანდარტული და მეორე რიგის დაუყვანადი სუპერსიმეტრიული გარდაქმნებით [16]:

$$\{Q^+, Q^-\} = \prod_{i+2j=n} (H + c_i)((H - \alpha_j)^2 + d_j), \quad d_j > 0. \tag{28}$$

§1.3 ფორმა ინვარიანტობა სტანდარტულ სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკაში

ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების ცნება პირველად შემოტანილი იქნა გენდენშტეინის მიერ ნაშრომში [9]. განმარტების თანახმად ორი სუპერპარტნიორი ჰამილტონიანი $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ფორმა ინვარიანტულია, თუ სრულდება პირობა:

$$H^{(2)}(x, a_0) = H^{(1)}(x, a_1) + R(a_1), \tag{29}$$

სადაც $a_1 = f(a_0)$; a_0, a_1 პარამეტრებია, რომლებიც შედიან სუპერპარტნიორი პოტენციალების გამოსახულებებში; $R(a_1)$ არაა დამოკიდებული x-ზე.

მტკიცდება, რომ თუკი ადგილი არა აქვს სუპერსიმეტრიის სპონტანურ დარღვევას, ანუ რომელიმე სუპერპარტნიორს გააჩნია ნულოვანი ენერგეტიკული დონე, მაშინ ამ

კვანტური სისტემების სპექტრი და ტალღური ფუნქციები განისაზღვრება ზუსტად. ყველა ცნობილი ზუსტად ამოხსნადი ერთი ცლადის პოტენციალები, როგორებიცაა მაგალითად: ჰარმონიული ოსცილატორი, კულონის, მორსის, პიოშლ-ტელერის, ეკარტის და ა. შ., ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებია [30]. ყოველ ამ პოტენციალს და შესაბამის ამოცანას, როგორც მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება, აქვს თავისი ამოხსნის ისტორია. მაგრამ გასული საუკუნის შუა წლებში ისინი გაერთიანებული იქნენ ფაქტორიზაციის მეთოდის ალგებრული პროცედურის ჩარჩოებში [8]. ერთგანზომილებიანი წრფივი სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა გარკვეული აზრით ფაქტორიზაციის მეთოდის ალტერნატიული ფორმულირებაა.

მოვიყვანოთ მახასიათებელი მაგალითი იმისა, თუ როგორ განისაზღვრება სპექტრი და ტალღური ფუნქციები ფორმა ინვარიანტობის გამოყენებით. (5) და (6) სუპესიმეტრიული პარტნიორებისათვის ავიღოთ შემდეგი სახის სუპერპოტენციალი $W(x) = a_0 \tanh x$ და დავუშვათ $\epsilon = 0$. მივიღებთ, რომ:

$$H^{(1,2)}(x, a_0) = -\hbar^2\partial^2 - \frac{a_0(a_0 \pm \hbar)}{\cosh^2 x} + a_0^2. \tag{30}$$

თუ დავუშვებთ $a_1 = a_0 - \hbar$ და $R(a_1) = a_0^2 - a_1^2$, მაშინ ნათლად ჩანს, რომ (30) ჰამილტონიანები აკმაყოფილებენ (29) ფორმა ინვარიანტობის პირობას.

როცა $a > 0$, $H^{(1)}(x, a)$ ჰამილტონიანის ძირითადი მდგომარეობის შესამაბისი ენერგია 0-ის ტოლია. ამიტომ, თუ $a_1 > 0$, მაშინ (29) პირობის თანახმად გვექნება, რომ $H^{(2)}(x, a_0)$-ის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაა $E_0^{(2)} = R(a_1) = a_0^2 - a_1^2$. მაგრამ $H^{(1)}(x, a)$ და $H^{(2)}(x, a)$ ჰამილტონიანების ენერგეტიკული დონეები, $h^{(1)}(x, a)$-ს ძირითადი დონის გარდა, ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ $E_0^{(2)}$ არის ნულოვანი დონის შემდგომი დონე $H^{(1)}(x, a_0)$ ჰამილტონიანისათვის და $E_1^{(1)} = E_0^{(2)}$. მაშასადამე, ჩვენ უკვე გვაქვს $H^{(1)}(x, a_0)$ ჰამილტონიანის პირველი ორი დონე.

აღწერილი პროცედურა შეიძლება გავიმეოროთ და ყოველ ნაბიჯზე მოვახდინოთ ცვლილება $a_n = a_{n-1} - \hbar = a_0 - n\hbar$ მანამ, სანამ $a_n \geq 0$. შედეგად ჩვენ მივიღებთ $H^{(1)}(x, a_0)$ ჰამილტონიანის სრულ დისკრეტულ სპექტრს: მე-n დონის ენერგია მოიცემა ფორმულით:

$$E_n^{(1)}(a_0) = (a_0^2 - a_1^2) + (a_1^2 - a_2^2) + ... + (a_{n-1}^2 - a_n^2) = a_0^2 - a_n^2. \tag{31}$$

შესაბამისი ტალღური ფუნქციებისათვის შეიძლება დავწეროთ:

$$\psi_n^{(1)}(x, a_0) = Nq^-(x, a_0)q^-(x, a_1)...q^-(x, a_{n-1})\psi_0^{(1)}(x, a_n), \tag{32}$$

სადაც N მუდმივაა, ხოლო $\psi_0^{(1)}(x,a_n)$ არის $H^{(1)}(x,a_0)$ ჰამილტონიანის ძირითადი მდგომარეობის საკუთარი ფუნქცია.

უნდა აღინიშნოს, რომ ყველა ცნობილი, ზუსტად ამოხსნადი პოტენციალები მიეკუთვნებიან ე. წ. ადიტიურ ანუ ტრანსლაციურ ფორმა ინვარიანტულ პოტენციალებს. ასეთებად იწოდებიან პოტენციალები, რომლებისთვისაც ფორმა ინვარიანტული პარამეტრები განსხვავდებიან ადიტიური კონსტანტით: $a_{n+1} = a_n + \hbar$. ნაშრომებში [27]-[29] მოცემული და გამოკვლეული იქნა ადიტიური ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების მიღების სრულიად ახალი მეთოდი. ნაჩვენებია, რომ ზოგადად არ არსებობს სხვა სახის პოტენციალები უკვე ცნობილების გარდა. რადგანაც შემდეგი პარაგრაფი მთლიანად ეყრდნობა ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების მიღების ამ გზას, მოკლედ მოვიყვანოთ იგი. ფორმა ინავარიანტულობის (29) პირობა გადავწეროთ (5) და (6) გამოსახულებების გამოყენებით სიმეტრიული ფორმით:

$$W^2(x,a_0)+\hbar W'(x,a_0)+g(a_0)=W^2(x,a_1)-\hbar W'(x,a_1)+g(a_1), \tag{33}$$

სადაც $g(a_0), g(a_1)$ არაა დამოკიდებული x-ზე და $a_1 = a_0+\hbar$.

განტოლება (33) უნდა სრულდებოდეს $\hbar$-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $W(x)$ ფუნქცია არაა დამოკიდებული ცხადად $\hbar$-ზე და ამ დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მხოლოდ a_1 პარამეტრის გამო. (33) განტოლების $\hbar$-ის ხარისხებად გაშლის შემდეგ მის ნებისმიერ ხარისხთან მდგომი კოეფიციენტი ტოლი უნდა იყოს ნულის. აქედან მივიღებთ $(a_0 \equiv a)$:

$$W\frac{\partial W}{\partial a}-\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{dg(a)}{da}=0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(W\frac{\partial W}{\partial a}-\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{dg(a)}{da}\right)=0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}\partial x}W(x,a)=0, \qquad n\geq 3. \tag{36}$$

(36) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$W(x,a)=aX_1(x)+X_2(x)+u(a). \tag{37}$$

ამ გამოსახულების (34)-ში ჩასმით მივიღებთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას:

$$X_1(x)X_2(x)-X_2'(x)+a(X_1^2(x)-X_1'(x))+u'(a)X_2(x)+(u(a)+au'(a))X_1(x)=-u(a)u'(a)-\frac{1}{2}g'(a). \tag{38}$$

ეს განტოლება იხსნება ზოგადად და ამ ამონახსნების (37)-ში ჩასმით მივიღებთ სუპერპოტენციალებს, რომელთა შესაბამისი პოტენციალები არიან უკვე ცნობილი ზუსტად ამოხსნადი პოტენციალები.

§1.4 მეორე რიგის ფორმა ინვარიანტობა

მეორე რიგის ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების მისაღებად სუპერპარტნიორების (18) გამოსახულებაში ფუნქცია $f(x)$ შევცვალოთ $f(x,a)$-თი, სადაც a არის ფორმა ინვარიანტული პარამეტრი. ამასთან დავუშვათ, რომ პოტენციალებში შემავალი d, α პარამეტრებიც დამოკიდებულია a-ზე. შემდგომისათვის მოსახერხებელია პოტენციალები ასე გადავწეროთ:

$$V^{(1),(2)}(x,a) \equiv v_{1,2}(x,a) + \alpha(a), \tag{39}$$

სადაც:

$$v_{1,2}(x,a) \equiv \mp 2\hbar f'(x,a) + f^2(x,a) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{f''(x,a)}{f(x,a)} - \frac{f'^2(x,a)}{2f^2(x,a)}\right) - \frac{d(a)}{f^2(x,a)}. \tag{40}$$

მაშინ ფორმა ინვარიანტობის პირობა ასე ჩაიწერება:

$$v_1(a+\hbar,x) - v_2(x,a) = -(\alpha(a+\hbar) - \alpha(a)). \tag{41}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x,a)}{f(x,a)} - \frac{f'^2(x,a)}{2f^2(x,a)}\right) \equiv \varphi(x,a), \quad \frac{d(a)}{f^2(x,a)} \equiv \rho(x,a). \tag{42}$$

ასე რომ (41) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}&-2\hbar\left(\frac{\partial f(x,a+\hbar)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,a)}{\partial x}\right) + f^2(x,a+\hbar) - f^2(x,a) - \\ &-\hbar^2\Big(\varphi(x,a+\hbar) - \varphi(x,a)\Big) - \Big(\rho(x,a+\hbar) - \rho(x,a)\Big) = -(\alpha(a+\hbar) - \alpha(a)).\end{aligned} \tag{43}$$

ამ გამოსახულების $\hbar$-ით ტეილორის მწკრივად გაშლის შემდეგ გვექნება:

$$\begin{aligned}&-2\hbar\left(\frac{2\partial f(a,x)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hbar^k}{k!}\frac{\partial^{k+1}f(a,x)}{\partial x\partial a^k}\right) + 2\hbar\frac{f(a,x)\partial f(a,x)}{\partial a} + \\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\hbar^n\left(\frac{2f(a,x)}{n!}\frac{\partial^n f(a,x)}{\partial a^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\partial^k f(a,x)}{\partial a^k}\frac{\partial^{n-k}f(a,x)}{\partial a^{n-k}}\right) + \\ &+\hbar^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hbar^n}{n!}\frac{\partial^n\varphi(a,x)}{\partial a^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hbar^n}{n!}\frac{\partial^n\rho(a,x)}{\partial a^n} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hbar^k\alpha^{(k)}(a)}{k!}.\end{aligned} \tag{44}$$

$\hbar$-ის ნებისმიერ ხარისხისთან მდგომი კოეფიციენტი ტოლი უნდა იყოს ნულის. პირველი ხარისხისათვის ($\hbar^1$) ეს ნიშნავს, რომ:

$$2\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} - f(x,a)\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho(x,a)}{\partial a} = \frac{\alpha'(a)}{2}, \tag{45}$$

და (42) აღნიშვნების გათვალისწინებით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} &4f^3(x,a)\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} - 2f^4(x,a)\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} + f(x,a)d'(a) - \\ &-2d(a)\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} - f^3(x,a)\alpha'(a) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

შემდეგი, $\hbar^2$-თან მდგომი კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა გვაძლევს:

$$2\frac{\partial^2 f(x,a)}{\partial a \partial x} - f(x,a)\frac{\partial^2 f(x,a)}{\partial a^2} - \left(\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho(x,a)}{\partial a^2} = \frac{\alpha''(a)}{2}. \tag{47}$$

ნათლად ჩანს, რომ ეს განტოლება არაა დამოუკიდებელი, იგი მიიღება (45) განტოლების ორივე მხარის a ცვლადით გაწარმოებით. $\hbar$-ის სხვა ხარისხებისათვის გვექნება ($k \geq 2$):

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{k!}\frac{\partial^{k+1} f(a,x)}{\partial x \partial a^k} + \frac{2}{(k+1)!}\frac{f(a,x)\partial^{k+1} f(a,x)}{\partial a^{k+1}} - \frac{1}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1}\rho(a,x)}{\partial a^{k+1}} + \\ &+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!(k+1-i)!}\frac{\partial^i f(a,x)}{\partial a^i}\frac{\partial^{k+1-i} f(a,x)}{\partial a^{k+1-i}} + \frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}\varphi(a,x)}{\partial a^{k-1}} = -\frac{\alpha^{k+1}(a)}{(k+1)!}. \end{aligned} \tag{48}$$

ამ განტოლების გასამარტივებლად გავაწარმოოთ (45) a-თი k-ჯერ:

$$\begin{aligned} &f(a,x)\frac{\partial^{k+1} f(a,x)}{\partial a^{k+1}} = 2\frac{\partial^{k+1} f(a,x)}{\partial x \partial a^k} - k!\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\frac{\partial^i f(a,x)}{\partial a^i}\frac{\partial^{k+1-i} f(a,x)}{\partial a^{k+1-i}} - \\ &-\frac{\alpha^{k+1}(a)}{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{k+1}\rho(a,x)}{\partial a^{k+1}}. \end{aligned} \tag{49}$$

ჩავსვათ ეს (48)-ში. თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას:

$$\frac{1}{i!(k-i+1)!} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{i!(k-i)!} + \frac{1}{(i-1)!(k-i+1)!}\right) \tag{50}$$

(48) მიიღებს სახეს:

$$\frac{2(k-1)}{k(k+1)}\frac{\partial^{k+1} f(x,a)}{\partial x \partial a^k} - \frac{\partial^{k-1}\varphi(x,a)}{\partial a^{k-1}} = 0, \tag{51}$$

რომელიც ექვივალეტურია განტოლებათა სისტემის:

$$\frac{\partial \varphi(x,a)}{\partial a} = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 f(x,a)}{\partial x \partial a^3}, \quad \frac{\partial^5 f(x,a)}{\partial x \partial a^4} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(x,a)}{\partial a^3} = 0, \tag{52}$$

რომლის ამონახსნებია

$$f(a,x) = U(a) + a^3 f_3(x) + a^2 f_2(x) + a f_1(x) + f_0(x),$$
$$\varphi(a,x) = a^2 f_3'(x) + \frac{2}{3} a f_2'(x) + \varphi_0(x), \tag{53}$$

სადაც $f_i(x), \varphi_i(x)$ ჯერ-ჯერობით ნებისმიერი ფუნქციებია და უნდა განისაზღვრონ (42) და (46) განტოლებებიდან. ცხადია, რომ თუ (53) ფორმულიდან რომელიმე f_i მუდმივია, იგი შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ.

(53) გამოსახულებების (42) აღნიშვნაში ჩასმის შემდეგ ეს უკანასკნელი ღებულობს ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების სახეს. ამ განტოლების დაწვრილებითი ანალიზიდან გამომდინარეობს, რომ მას აქვს ხუთი შესაძლო ამონახსნი:

$$U(a) = 2ca^2, \quad f(x,a) = 2abx + \frac{b}{c}x^2, \tag{54}$$

$$U(a) = \frac{c}{a}, \quad f(x,a) = a(\frac{b}{4c}x^2 + e) + bx, \tag{55}$$

$$U(a) = \frac{c}{a}, \quad f(x,a) = abx + e, \tag{56}$$

$$U(a) = 0, \quad f(x,a) = af_1(x), \tag{57}$$

$$U(a) = 0, \quad f(x,a) = f_0(x). \tag{58}$$

შეიძლება მარტივად შემოწმდეს, რომ (46) განტოლების ამონახსნი არ შეიძლება იყოს $f(x,a) \sim x^n$ ფუნქცია. ამიტომაც (54)-(56) ამონახსნები ავტომატურად გამოირიცხება. მაშასადამე, დარჩა ორი შემთხვევა: $i) f(x,a) = af_1(x)$ და $ii) f(x,a) = f_0(x)$. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე.

$i) \quad f(x,a) = af_1(x)$

$f(x,a)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობის (46) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ახალ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას:

$$2d(a) - ad'(a) + a^3\alpha'(a)f_1^2(x) + 2a^4(f_1^4(x) - 2f_1'(x)f_1^2(x)) = 0. \tag{59}$$

საბედნიეროდ, ამ განტოლების ამოხსნა ცნობილია [53]:

$$2d(a) - ad'(a) = -2A_1a^4, \quad a^3\alpha'(a) = 2a^4A_2, \quad f_1^4(x) - 2f_1'(x)f_1^2(x) = A_1 - A_2f_1^2(x) \tag{60}$$

და ამიტომ გვექნება:

$$d(a) = A_1a^4 + B_1a^2, \quad \alpha(a) = A_2a^2 + B_2,$$
$$2f_1'(x) = f_1^2(x) - \frac{A_1}{f_1^2(x)} + A_2, \tag{61}$$

სადაც A_1, A_2 ფორმა ინვარიანტული პარამეტრისაგან დამოუკიდებელი მუდმივებია.

ფორმა ინვარიანტული პოტენციალების (39) შესაბამისი გამოსახულება იქნება:

$$V^{(1),(2)}(x,a) = \mp 2\hbar a f_1'(x) + a^2 f_1^2(x) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} - \frac{f_1'^2(x)}{2f_1^2(x)}\right) - \frac{A_1 a^2 + B_1}{f_1^2(x)} + A_2 a^2 + B_2, \quad (62)$$

სადაც $f_1(x)$ არის (61) განტოლების ამონახსნი. მისი პოვნა აუცილებელია პოტენციალის გამოსახულების ცხადი სახით ჩასაწერად. ეს განტოლება ადვილად იხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში, როცა $A_1 = 0$:

$$f_1 = \sqrt{-A_2}\frac{\sigma \exp(-\sqrt{-A_2}x/2) - \delta \exp(\sqrt{-A_2}x/2)}{\sigma \exp(-\sqrt{-A_2}x/2) + \delta \exp(\sqrt{-A_2}x/2)}. \quad (63)$$

$f_1(x)$ ფუნქციის ეს მნიშვნელობა შეესაბამება $V^{(1),(2)}$ პოტენციალებს, რომლებიც უკვე ცნობილია ადიტიური ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებიდან: სკარფის და პიოშლ-ტელერის პოტენციალები. როცა ორივე პარამეტრი $A_1 = A_2 = 0$, მიიღება სინგულარული ოსცილატორი.

პარამეტრების სხვა დანარჩენი მნიშვნელობებისათვის მოსახერხებელია შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია $y(x) \equiv 1/f_1(x)$, რის შემდეგაც (61) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$2y'(x) = A_1 y^4 - A_2 y^2 - 1. \quad (64)$$

ეს განტოლება მარტივად იხსნება, მაგრამ როგორც შებრუნებული ფუნქცია $x = x(y)$:

$$\int \frac{dy}{A_1 y^4 - A_2 y^2 - 1} = \frac{x}{2} \quad (65)$$

(65)-დან რომ ვიპოვოთ $y = y(x)$ დამოკიდებულება, რომელიც შემდეგ უნდა ჩავსვათ $V^{(1),(2)}$ გამოსახულებაში, საჭიროა განვიხილოთ A_1, A_2 მუდმივების ცვლილების სამი სხვადასხვა არე:

$$1)\ A_2^2 > -4A_1; \quad 2)\ A_2^2 < -4A_1; \quad 3)\ A_2^2 = -4A_1. \quad (66)$$

შანსი იმისა, რომ y ცხადად ჩაიწეროს როგორც x-ის ფუნქცია არსებობს მხოლოდ როცა $A_1 < 0$ და (65) ტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფ კვადრატული სამწევრის ფესვებს აქვთ ერთიდაიგივე ნიშანი. თუ კიდევ დამატებით ამისა $A_2 > 0$, (65) ინტეგრალი გამოისახება ელემენტარული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით და ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ. როცა $A_2 < 0$, მოსახერხებელია A_1, A_2 მუდმივების ნაცვლად შემოვიტანოთ ახალი მუდმივები

$$A_1 = -b_1^2 b_2^2, \quad A_2 = -(b_1^2 + b_2^2), \quad b_2 > 0, \quad b_1 > b_2. \quad (67)$$

მაშინ (65)-დან მივიღებთ:

$$\mid \frac{y-1/b_1}{y+1/b_1} \mid^{b_1/2} \mid \frac{y+1/b_2}{y-1/b_2} \mid^{b_2/2} = const \cdot \exp\left(\frac{(b_1^2-b_2^2)x}{2}\right). \tag{68}$$

მარჯვენა მხარეზე მდგომი მუდმივა შეიძლება ჩავთვალოთ ერთის ტოლად, რაც მიიღწევა x-ის შესაბამისი ტრანსლიაციით და (68) განტოლება ჩაწერილი f_1 ფუნქციით, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(\frac{f_1-b_1}{f_1+b_1}\right)^{b_1/b_2}\left(\frac{f_1+b_2}{f_1-b_2}\right) = \pm\exp\left(\frac{(b_1^2-b_2^2)x}{b_2}\right). \tag{69}$$

f_1 ფუნქციისათვის x-ზე დამოკიდებულების ცხადი (ანალიზური) გამოსახულება (69)-დან მიიღება მხოლოდ ორ შემთხვევაში: $b_1/b_2 = 2$ და $b_1/b_2 = 3$. მიუხედავად ამისა, ზუსტი ამოხსნის გარეშეც შეიძლება განვსაზღვროთ $f_1(x)$ ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა ნულში და უსასრულობებში:

$$f_1(x_0) = 0 \tag{70}$$

ან

$$f_1(x_0) = \pm\infty \tag{71}$$

მხოლოდ მაშინ, როცა $x_0 = 0$ და

$$f_1(\pm\infty) \to \mp b_1 \tag{72}$$

ან

$$f_1(\pm\infty) \to \pm b_2. \tag{73}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ პოტენციალები ორივე უსასრულობაში $x \to \pm\infty$ სასრულია, კერძოდ:

$$V^{(1),(2)}(\pm\infty) \to B_2 - \frac{B_1}{b_1^2} \tag{74}$$

ან

$$V^{(1),(2)}(\pm\infty) \to B_2 - \frac{B_1}{b_2^2}. \tag{75}$$

(70), (71) თვისებიდან ჩანს, რომ პოტენციალები სინგულარულები შეიძლება იყვნენ მხოლოდ $x = 0$ წერტილში. $f_1(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილში შეიძლება ვიპოვოთ პირდაპირ (61) განტოლებიდან:

$$f_1(x)_{x\to 0} \sim \sqrt[3]{\frac{3b_1^2b_2^2}{2}}x^{1/3}, \tag{76}$$

$$f_1(x)_{x\to 0} \sim -\frac{2}{x}. \tag{77}$$

შესაბამისად, პოტენციალებს აქვთ შემდეგი სინგულარობები:

$$V_{1,2}(x)_{x\to 0} \sim -\frac{\hbar^2}{4x^2}, \tag{78}$$

$$V_{1,2}(x)_{x\to 0} \sim \frac{16a(a \mp \hbar) + 3\hbar^2}{4x^2}. \tag{79}$$

უფრო დეტალურად განვიხილოთ შემთხვევა $b_1 = 2b_2 \equiv 8\beta$. ამ შემთხვევაში (69) არის კუბური განტოლება $f_1(x)$ ფუნქციის მიმართ. მარჯვენა მხარეში მინუს ნიშნისათვის ამ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ამონახსნი:

$$f_1(x) = \frac{8\beta\cosh^2(3\beta x)\tanh^{1/3}(3\beta x)}{\cosh(6\beta x)}\left(1 + \tanh^{4/3}(3\beta x)\right) - 4\beta\tanh(6\beta x). \tag{80}$$

(69) განტოლების მარჯვენა მხარეში პლიუს ნიშნისათვის მას აქვს სამი ნამდვილი ამონახსნი, რომლებიც შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$f_1(x) = A + \bar{A} - 4\beta\coth(6\beta x), \quad f_1(x) = -\frac{A+\bar{A}}{2} \pm i\frac{A-\bar{A}}{2}\sqrt{3} - 4\beta\coth(6\beta x), \tag{81}$$

სადაც

$$A = 4\beta\sqrt[3]{\frac{\coth(6\beta x)}{\sinh^2(6\beta x)}\left(\sinh(6\beta x) - i\right)^2}. \tag{82}$$

ეს ამონახსნები შეიძლება ჩაწერილი იქნან ტრიგონომეტრიული ფორმითაც:

$$f_1(x) = 4\beta\coth(6\beta x)\left(2\cos\frac{\phi}{3} - 1\right), \tag{83}$$

$$f_1(x) = -4\beta\coth(6\beta x)\left(2\cos\frac{\phi+\pi}{3} + 1\right), \tag{84}$$

$$f_1(x) = -4\beta\coth(6\beta x)\left(2\cos\frac{\phi-\pi}{3} + 1\right), \tag{85}$$

სადაც

$$\cos\frac{\phi}{2} \equiv \tanh(6\beta x), \quad \sin\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\cosh(6\beta x)}. \tag{86}$$

$x = 0$ წერტილში (83), (84) ამონახსნები არანულოვანი მუდმივებია:

$$f_1(x)_{x\to 0} \sim \pm\frac{8\beta}{\sqrt{3}}. \tag{87}$$

სწორედ ამიტომ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ამ ამონახსნებს შეესაბამება არასინგულარული პოტენციალები.

როდესაც $b_1 = 3b_2 \equiv 3\gamma$, განტოლება (69) მეოთხე ხარისხის ალგებრული განტოლება:

$$f_1^4 - 8\gamma\frac{1+\epsilon(x)}{1-\epsilon(x)}f_1^3 + 18\gamma^2 f_1^2 - 27\gamma^4 = 0, \quad \epsilon(x) \equiv \pm\exp(4\gamma x). \tag{88}$$

ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას ფერარის მეთოდით [54], რადგანაც ამ განტოლების შესაბამისი რეზოლვენტის ერთი ამონახსნი ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ. მაგალითად, $\epsilon(x) = -\exp(4\gamma x)$-თვის ეს ამონახსნია:

$$y = 6\gamma^2 + \frac{12\gamma^2}{\cosh^{2/3}(2\gamma x)}, \tag{89}$$

და (88) განტოლება დაიყვანება კუბურ განტოლებაზე.

ii) $f(x,a) = f_0(x)$.

(46) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$4f_0^2(x)f_0(x) + d'(a) - f_0^2(x)\alpha'(a) = 0. \tag{90}$$

აქედან ცხადია, რომ

$$d(a) = ca + e, \qquad \alpha(a) = \sigma a + \delta, \tag{91}$$

სადაც c, e, σ, δ a-ზე დამოუკიდებელი მუდმივებია და $f_0(x)$ აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$4f_0'(x) + \frac{c}{f_0^2(x)} = \sigma. \tag{92}$$

ამ განტოლებიდან $f_0(x)$ ჩაიწერება ელემენტარულ ფუნქციებში როცა $\sigma = 0$. განვიხილოთ სწორედ ეს შემთხვევა. რადგანაც $c \neq 0$, ფორმა ინვარიანტულობის პარამეტრი a შეიძლება წავანაცვლოთ $a \to a - e/c$, რაც ტოლფასია $e = 0$ ტოლობის. ამასთან, მოვახდინოთ ცვლილება $c \to -4c^3/3$. მაშინ $f_0(x) = cx^{1/3}$ და ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებისათვის გვექნება

$$V^{(1),(2)}(x,a) = \frac{2c(2a \mp \hbar)}{3x^{2/3}} - \frac{5\hbar^2}{36x^2} + c^2x^{2/3}. \tag{93}$$

როგორც პოტენციალების ამ გამოსახულებებიდან ჩანს, ფორმა ინვარიანტულობის პირობა (29) ოდნავ შეცვლილია, კერძოდ $R(a_1) = 0$ და

$$V^{(1)}(x, a+\hbar) = V^{(2)}(x,a). \tag{94}$$

ამიტომ ცხადია, რომ ენერგეტიკული სპექტრის პოვნის ალგებრული მეთოდი, რომელიც გამოიყენება სტანდარტული სუპერსიმეტრიული ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებისათვის, აქ არ გამოდგება. მაგრამ შეიძლება ვთქვათ, რომ საქმე აქ უფრო მარტივადაცაა. მართლაც: თუ ვიცით $h^{(1)}(a)$ ჰამილტონიანის რაიმე საკუთარი მნიშვნელობა, მაგალითად $E^{(1)}(a)$, და შესაბამისი საკუთარი ფუნქცია $\Psi^{(1)}(x,a)$, მაშინ

$h^{(1)}(a)$ ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციები და შესაბამისი საკუთარი მნიშვნელობები აგრეთვე იქნება:

$$\Psi_n^{(1)}(x,a) = q^+(a)q^+(a+\hbar)...q^+(a+(n-1)\hbar)\Psi^{(1)}(x,a+n\hbar), \quad E_n^{(1)}(a) = E^{(1)}(a+n\hbar), \tag{95}$$

(4) შეჯვარების თანაფარდობის, (20) სუპერსიმეტრიული ალგებრისა და (94) ფორმა ინვარიანტობის გამოყენებით ადვილად შეიძლება დავამყაროთ კავშირი $\Psi^{(1)}(x,a+n\hbar)$ და $\Psi_n^{(1)}(x,a)$ ფუნქციების ნორმებს შორის. ეს ნათლად ჩანს $n=1$-ის მაგალითზეც:

$$\begin{aligned}
&|\Psi_1^{(1)}(x,a)|^2 = \Big(q^+(a)\Psi^{(1)}(x,a+\hbar), q^+(a)\Psi^{(1)}(x,a+n\hbar)\Big) = \\
&= \Big(\Psi^{(1)}(x,a+\hbar), q^-(a)q^+(a)\Psi^{(1)}(x,a+\hbar)\Big) = \\
&= \Big(\Psi^{(1)}(x,a+\hbar), [{h^{(2)}}^2(a) + 4d(a)]\Psi^{(1)}(x,a+\hbar)\Big) = \\
&= \Big(\Psi^{(1)}(x,a+\hbar), [{h^{(1)}}^2(a+\hbar) + 4d(a)]\Psi^{(1)}(x,a+\hbar)\Big) = \\
&= \Big({E^{(1)}}^2(a+\hbar) + 4d(a)\Big)|\Psi^{(1)}(x,a+\hbar)|^2.
\end{aligned} \tag{96}$$

მაშასადამე, ნორმირებულ $\Psi^{(1)}(x,a+\hbar)$ ფუნქციას შეესაბამება ნორმირებული $\Psi_1^{(1)}(x,a)$, თუ ${E^{(1)}}^2(a+\hbar) + 4d(a) > 0$.

თავი II. ორგანზომილებიანი სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკა

§2.1 ინტეგრებადი კვანტური სისტემების აგების სუპერსიმეტრიული მეთოდი

ისეთი კლასიკური ან კვანტური სისტემების მოძებნა, რომლებსაც გააჩნიათ დამატებითი მოძრაობის ინტეგრალები ან სიმეტრიის ოპერატორები, წარმოადგენს მათემატიკური და თეორიული ფიზიკის ტრადიციულ ამოცანას [55]. ასეთი სისტემების მოძებნაში განსაკუთრებული როლი უჭირავს ალგებრულ ალგორითმებს, რომლებიც ეყრდნობიან სისტემების ფარულ დინამიკურ სიმეტრიებს. ამ თვალსაზრისით მრავალგანზომილებიანი სუპერსიმეტრიული კვანტური მექანიკის ფარგლებში ორგანზომილებიანი იტეგრებადი სისტემების აგების სქემა მოცემული იქნა ნაშრომებში [32]-[36]. აღმოჩნდა რომ სუპერსიმეტრიის იდეა, ანუ იზოსპექტრალური წყვილის აგება ორ და მეტ განზომილებაში, ცალსახადაა დაკავშირებული ორივე სუპერპარტნიორი ჰამილტონიანის ინტეგრებადობასთან, ანუ სიმეტრიის დიფერენციალური ოპერატორის არსებობასთან, რომელიც წარმოადგენს პოლინომს წარმოებულების მიმართ და რომელსაც გადაჰყავს მრავალგანზომილებიანი შრედინგერის ამონახსნი სხვა ამონახსნში იმავე ენერგიით. დეფორმირებული სუპერსიმეტრიული ალგებრის კვაზიკლასიკური რედუქციით შესაძლებელი გახდა კლასიკური მოძრაობის ინტეგრალების ფაქტორიზაცია, რის შედეგადაც უფრო გასაგები გახდა მოძრაობის ინტეგრალების ანალიზური სტრუქტურა და ნაპოვნი იქნა ინტეგრებადი პოტენციალების ახალი კლასი [32].

აქ და შემდგომში დავუშვებთ რომ $\hbar \equiv 1$ და შეჯვარების თანაფარდობას განვიხილავთ შრედინგერის ოპერატორებისათვის

$$H^{(1)}q^{+} = q^{+}H^{(2)}, \quad q^{-}H^{(1)} = H^{(2)}q^{-}, \quad (q^{+})^{\dagger} = q^{-}; \tag{97}$$

$$H^{(i)} = -\triangle + V^{(i)}(\vec{x}), \quad \triangle \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \tag{98}$$

სადაც q^{+}, q^{-} ერთმანეთის მიმართ ერმიტულად შეუღლებული ორი ცვლადის დიფერენციალური ოპერატორია, $V^{(1),(2)}(\vec{x})$ კი ასევე ორი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციაა, ანუ ჯერჯერობით განვიხილავთ მხოლოდ ერმიტულ სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკას.

ადვილია ვაჩვენოთ, რომ $H^{(1)}, H^{(2)}$ ჰამილტონიანებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (97) შეჯვარების თანაფარდობას, გააჩნიათ $R^{(1)}, R^{(2)}$ სიმეტრიის ოპერატორები:

$$[R^{(i)}, H^{(i)}] = 0, \quad R^{(1)} = q^+q^-, \quad R^{(2)} = q^-q^+, \quad i = 1, 2. \tag{99}$$

ერთი განზომილების შემთხვევაში, როგორც პირველ თავში იყო ნათქვამი, $R^{(i)}$ წარმოადგენს სისტემის $H^{(i)}$ ჰამილტონიანის მუდმივკოეფიციენტებიან პოლინომს. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევის განმასხვავებელი თავისებურება ისაა, რომ ზოგადად $R^{(i)}$ არის დინამიკური სიმეტრიის არატრივიალური ოპერატორი, რომელიც არ დაიყვანება $H^{(i)}$-ს ფუნქციაზე.

შეჯვარების თანაფარდობის განხილვა დავიწყოთ პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორით $q^+ = C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})$, სადაც საკოეფიციენტო ფუნქციები $C_i(\vec{x}), B(\vec{x})$ ნამდვილი ფუნქციებია:

$$(-\partial_k^2 + V^{(1)}(\vec{x}))(C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x})) = (C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x}))(-\partial_k^2 + V^{(2)}(\vec{x})). \tag{100}$$

მეორე რიგის წარმოებულთან მდგომი კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ, რომ

$$C_1(\vec{x}) = ex_2 + e_2, \quad C_2(\vec{x}) = -ex_1 + e_1, \tag{101}$$

სადაც e, e_1, e_2 - ნამდვილი მუდმივებია. დანარჩენი განტოლებები მიიღება (100) განტოლების ორივე მხარეს მდგომი პირველი რიგის წარმოებულისა და თავისუფალი კოეფიციენტების გატოლებით. ამ განტოლებების შეკრება გამოკლებით ისინი ასე გადაიწერება:

$$2\partial_i B = V_- C_i; \tag{102}$$

$$C_i\partial_i V_+ = 2BV_-, \quad V_\pm \equiv V^{(1)} \pm V^{(2)}. \tag{103}$$

e მუდმივაზე დამოკიდებულების მიხედვით საჭიროა განვიხილოთ ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე:

$a) \quad e \neq 0$

x_1 და x_2 ცვლადების ტრანსლაციით შეიძლება (101) გამოსახულებებში მოვაშოროთ e_1, e_2 კონსტანტა, ანუ ისინი შეიძლება ზოგადად ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. ამის შემდეგ (102), (103) განტოლებებში ρ, φ პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლით ადვილად ვპოულობთ, რომ:

$$V_- = \frac{f'(\varphi)}{\rho^2}, \quad V_+ = \frac{f^2(\varphi) - pf'(\varphi)}{2\rho^2} + U(\rho), \quad B = -\frac{2(f(\varphi) + p)}{2}, \tag{104}$$

სადაც $f(\varphi), U(\rho)$- ნებისმიერი ნამდვილი ფუნქციებია, ხოლო p- ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

$b) \quad e = 0$

შემოვიტანოთ ახალი ორთოგონალური კოორდინატები:

$$y_1 = \frac{e_1 x_1 - e_2 x_2}{e_1^2 + e_2^2}, \quad y_2 = \frac{e_2 x_1 + e_1 x_2}{e_1^2 + e_2^2}. \tag{105}$$

ამ კოორდინატებზე გადასვლის შემდეგ (102) და (103) მარტივად იხსნება და გვექნება:

$$V_- = \frac{2B'(y_2)}{e_1^2 + e_2^2}, \quad V_+ = \frac{2B'(y_2)}{e_1^2 + e_2^2} + F(y_1). \tag{106}$$

პოტენციალების მიღებული გამოსახულებებიდან (104) და (106) ნათლად ჩანს, რომ ორივე შემთხვევაში ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას და ამოცანა ფაქტობრივად დაიყვანება ერთ განზომილებაზე და ამ თვალსაზრისით ეს პოტენციალები ინტერესს არ წარმოადგენენ. ცვლადთა განცალება მარტივად აიხსნება იქედან, რომ მოცემული $q^{\pm}$-თვის სიმეტრიის ოპერატორები (99) წარმოადგენენ მეორე რიგის დიფერენციალურ ოპერატორებს და როგორც ცნობილია, სწორედ ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას [41].

[32]-[36] ნაშრომებში აგებული იქნა პოლინომიალური სუპესრსიმეტრიის განზოგადება ორი განზომილების შემთხვევაში, როდესაც სუპერმუხტის ზოგადი გამოსახულებაა:

$$q^+ = (q^-)^\dagger = g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + C_i(\vec{x})\partial_i + B(\vec{x}). \tag{107}$$

შჯვარების თანაფარდობა მთლიანად განსაზღვრავს შესაძლო ფორმას სიმეტრიული $g_{ik}(\vec{x})$ მეტრიკისა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\partial_l g_{ik}(\vec{x}) + \partial_i g_{lk}(\vec{x}) + \partial_k g_{il}(\vec{x}) = 0. \tag{108}$$

განტოლებათა ეს სისტემა ადვილად იხსნება და გვექნება:

$$g_{11}(\vec{x}) = \sigma x_2 + \alpha_1 x_2 + \gamma_1; \tag{109}$$

$$g_{22}(\vec{x}) = \sigma x_1 + \alpha_2 x_1 + \gamma_2; \tag{110}$$

$$g_{12}(\vec{x}) = -\frac{1}{2}(2\sigma x_1 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \gamma_3, \tag{111}$$

სადაც $\sigma, \alpha_{1,2}, \gamma_{1,2,3}$ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ნამდვილი მუდმივებია.

მაშასადამე, მაღალი რიგის წარმოებულების მიხედვით შესაძლო სუპერმუხტები მიეკუთვნებიან $E(2)$ უნივერსალურ ალგებრას და სუპერმუხტები იყოფა ოთხ განსხვავებულ კლასად:

$$q^{(1)+} = \triangle + C_i \partial_i + B; \tag{112}$$

$$q^{(2)+} = P_1^2 + \gamma P_2^2 + C_i \partial_i + B, \quad \gamma \neq 1; \tag{113}$$

$$q^{(3)+} = \{J, P_1\} + \gamma \triangle + C_i \partial_i + B; \tag{114}$$

$$q^{(4)+} = J^2 + \beta P_1^2 + \gamma \triangle + C_i \partial_i + B, \tag{115}$$

სადაც $J, P_{1,2}$- მობრუნებისა და ტრანსლაციის გენერატორებია. სუპერმუხტების ამ კლასების მისაღებად უნდა გათვალისწინოთ, რომ ჯერ ერთი, შეჯვარების თანაფარდობიდან გამომდინარე თითოეული სუპერმუხტი განმარტებულია მუდმივი ნამრავლის სიზუსტით, და მეორე, რომ არსებობს კოორდინატების ტრანსლაციისა და მობრუნების თავისუფლება.

სუპერმუხტის დანარჩენი საკოეფიციენტო ფუნქციები აკმაყოფილებენ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივ სისტემას ($\vec{x}$ ვექტორზე დამოკიდებულებას ცხადად აღარ ჩავწერთ):

$$\partial_i C_k + \partial_k C_i + \triangle g_{ik} - (V^{(1)} - V^{(2)}) g_{ik} = 0; \tag{116}$$

$$\triangle C_i + 2\partial_i B + 2 g_{ik} \partial_k V^{(2)} - (V^{(1)} - V^{(2)}) C_i = 0; \tag{117}$$

$$\triangle B + g_{ik} \partial_k \partial_i V^{(2)} + C_i \partial_i V^{(2)} - (V^{(1)} - V^{(2)}) B = 0. \tag{118}$$

განტოლებათა ამ სისტემის ზოგადად ამოხსნა წარმოუდგენელია. საჭიროა გარკვეული ანზაცები ანუ წინასწარი დაშვებები, რომლებმაც შეიძლება გაამარტივონ ამოხსნა. ნათელია, რომ პირველი დაშვება რაც შეიძლება იყოს ესაა მუდმივი მეტრიკის შემთხვევა, რასაც შეესაბამება სუპერმუხტთა პირველი და მეორე კლასი (112), (113). ასეთი სისტემები განხილული იქნა ნაშრომთა მთელ სერიაში [32]-[39], [56].

აღმოჩნდა, რომ პირველი კლასის სუპერმუხტის შემთხვევაში, რომელსაც შეესაბამება ერთეულოვანი დიაგონალური მეტრიკა $g_{ik} = \delta_{ik}$, განტოლებათა სისტემა (116)-(118) იხსნება ზოგადად. მაგალითად, კომბინაცია $C_1 + iC_2 \equiv C$ დამოკიდებულია მხოლოდ $z = x_1 + ix_2$ ცვლადზე და აქვს კვადრატული სამწევრის სახე:

$$C(z) = az^2 + bz + c, \tag{119}$$

სადაც a ნამდვილი, ხოლო b და c კომპლექსური მუდმივებია. ყველა დანარჩენი ფუნქციაც ჩაიწერება ცხადი, ანალიზური სახით. მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ყველა

მიღებულ პოტენციალში შესაძლებელია ცვლადთა R-განცალება [41] ელიფსურ (როცა $a \neq 0, b = 0$), პარაბოლურ (როცა $b \neq 0, a = 0$) ან პოლარულ (როცა $b = c = 0, a \neq 0$) კოორდინატებში. სიტუაცია, როცა $a \neq 0, b \neq 0$, დაიყვანება პირველზე z ცვლადის მუდმივი სიდიდით წანაცვლებით $z \to z - b/2a$. ნაჩვენები იქნა აგრეთვე, რომ შესაბამისი სიმეტრიის ოპერატორები $R^{(1)}$ და $R^{(2)}$ წარმოადგენენ ჰამილტონიანის და r^i მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორის წრფივ კომბინაციას [33]:

$$R^{(i)} = (H^{(i)})^2 + \eta H^{(i)} + r^{(i)}, \quad [H^{(i)}, r^i] = 0, \quad i = 1, 2. \tag{120}$$

სადაც $\eta = const.$

(113) მეორე კლასის სუპერმუხტების კერძო შემთხვევისათვის, როცა $\gamma = 0$, განტოლებათა სისტემა (116)-(118) აგრეთვე იხსნება ზოგადად [34]. ამ შემთხვევაში ადგილი არაა აქვს ცვლადთა განცალებას, და როგორც ნაჩვენებია, წარმოებულით მეოთხე რიგის სიმეტრიის ოპერატორები არ დაიყვანება უფრო დაბალი რიგის ოპერატორებზე.

განსაკუთრებით საინტერესო და მდიდარი აღმოჩნდა შემთხვევა, როდესაც მეორე კლასის სუპერმუხტებში $\gamma = -1$, ანუ სუპერმუხტისათვის ჰიპერბოლური (ლორენცის) მეტრიკით $g_{ik} = diag(1, -1)$. ამ შემთხვევაში რამდენიმე კერძო ამონახსნი მოცემულია ნაშრომებში [37], [64]. ამ სუპერმუხტებისათვის ერთი სპეციფიკური კლასი ამონახსნებისა მიღებული იქნა ე. წ. მობრუნების მიმართ დაყვანილი სუპერმუხტებისათვის, რომლებიც წარმოადგენენ ორი პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორის გარკვეულ კომბინაციას:

$$q^- = (q^+)^\dagger = q_l^+ (\sigma_3)_{lk} \tilde{q}_k^- = (-\partial_l + W_l(\vec{x}))(\sigma_3)_{lk}(-\partial_k + \widetilde{W}_k(\vec{x})), \tag{121}$$

სადაც $W(\vec{x}), \widetilde{W}(\vec{x})$ ნებისმიერი ორი ფუნქციაა (სუპერპოტენციალები), ხოლო σ_3 კი - პაულის მატრიცა. სუპერმუხტის ეს ფორმა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უმარტივესი ელიპტიკური მეტრიკის მქონე დაყვანადი სუპერმუხტების განზოგადება. ამ შემთხვევისაგან განსხვავებით (121) ფორმას მივყავართ არატრივიალურ სისტემებამდე, რომლებშიც ადგილი არა აქვს ცვლადთა სტანდარტულ განცალებას. სუპერსიმეტრიის რეალიზაცია (121) სუპერმუხტებით შეიძლება განხორციელებული იქნას ორი პირველი რიგის სუპერსიმეტრიული გარდაქმნით და შესაბამისი მატრიცული სუპერჰამილტონიანების კომპონენტების ე. წ. შეწებებით: ეს კომპონენტები ერთმანეთის ტოლია σ_3 მატრიცით უნიტარული გარდაქმნის სიზუსტით.

მოცემული თავის დარჩენილ ნაწილში განხილული იქნება (116)-(118) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამოხსნა ლორენცის მეტრიკისათვის და მისგან გამომდინარე შედეგები.

§2.2 ორგანზომილებიანი შეჯვარების თანაფარდობის ზოგადი ამოხსნა ლორენცის მეტრიკის სუპერმუხტისათვის

ნაშრომებში [35]-[36] ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული განტოლებათა სისტემა

$$q^+ = \partial_1^2 - \partial_2^2 + C_i\partial_i + B \tag{122}$$

სუპერმუხტისათვის მარტივდება $x_\pm = x_1 \pm x_2$ ცვლადებზე გადასვლით. კერძოდ, (116) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ კომბინაცია $C_1 \mp C_2 \equiv C_\pm$ დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ არგუმენტზე:

$$C_+ = C_+(x_+), \quad C_- = C_-(x_-) \tag{123}$$

და პოტენციალთა სხვაობა ტოლია:

$$V^{(1)} - V^{(2)} = C'_-(x_-) + C'_+(x_+). \tag{124}$$

ამ ორი განტოლების გამოყენებით დარჩენილი განტოლებები (117)-(118) ადვილად დაიყვანება ერთ განტოლებაზე:

$$\partial_-(C_-F(x_-, x_+)) = -\partial_+(C_+F(x_-, x_+)), \tag{125}$$

სადაც

$$F(x_-, x_+) \equiv F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-), \quad \partial_-^2 F = \partial_+^2 F, \tag{126}$$

ხოლო პოტენციალები $V^{(1),(2)}(\vec{x})$ და ფუნქცია $B(\vec{x})$ გამოისახება $C_\pm(x_\pm)$ და $F_1(2x_1), F_2(2x_2)$ ფუნქციების საშუალებით:

$$V^{(1),(2)} = \pm\frac{1}{2}(C'_- + C'_+) + \frac{1}{8}(C_+^2 + C_-^2) + \frac{1}{4}(F_2(x_+ - x_-) - F_1(x_+ + x_-)); \tag{127}$$

$$B = \frac{1}{4}(C_+C_- + F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-)). \tag{128}$$

თავისი კომპაქტური ფორმის მიუხედავად (125) განტოლება წარმოადგენს საკმაოდ არატრივიალურ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას: მასში შემავალი ფუნქციები დამოკიდებულია ცვლადთა სხვადასხვა კომბინაციაზე. მათი ამოხსნის რაიმე ზოგადი მეთოდი არ არსებობს და როგორც წესი, ასეთი განტოლებები იხსნება $C_\pm$ ან $F(\vec{x})$ ფუნქციებიდან რომელიმეს წინასწარი მოცემით. უნდა აღინიშნოს, რომ გამონაკლისის სახით, შესაძლებელი აღმოჩნდა ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა.

დავუშვათ, რომ $C_\pm$ ფუნქციებიდან ერთ ერთი ნულის ტოლია, ვთქვათ $C_-=0$ (შემთხვევა $C_+=0$ ანალოგიურია). მაშინ (125) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $F=\phi(x_-)/C_+(x_+)$. ეს ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს (126) განტოლებას, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{\phi''(x_-)}{\phi(x_-)}=\frac{C''_+(x_+)}{C_+(x_+)}=const. \tag{129}$$

აქედან ვპოულობთ $C_+(x_+)$ ფუნქციას, ხოლო შემდეგ $F_1(2x_1), F_2(2x_2)$ ფუნქციებს:

$$C_+(x_+)=\frac{1}{\delta_1\exp(\sqrt{\lambda}x_+)+\delta_2\exp(-\sqrt{\lambda}x_+)}; \tag{130}$$

$$F_{1,2}(2x)=\delta_1\sigma_{1,2}\exp(2\sqrt{\lambda}x)+\delta_2\sigma_{2,1}\exp(2\sqrt{-2\lambda}x). \tag{131}$$

შესაბამისად, $V^{(1),(2)}$ პოტენციალებისა და $B(\vec{x})$ საკოეფიციენტო ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$V^{(1),(2)}= \tag{132}$$

$$B= \tag{133}$$

ქვემოთ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $C_-C_+\neq 0$. ამ დროს (125) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$F=L(\int\frac{dx_+}{C_+}-\int\frac{dx_-}{C_-})/C_-C_+, \tag{134}$$

სადაც L ფუნქცია უნდა ვიპოვოთ (126) განტოლებიდან. ამისათვის უფრო მოსახერხებელია ახალი უცნობი ფუნქციის შემოტანა $A'_\pm(x_\pm)\equiv 1/C_\pm(x_\pm)$ და (134)-ის (126)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას L და $A_\pm$ ფუნქციების მიმართ:

$$(\frac{{A_+}'''}{{A_+}'}-\frac{{A_-}'''}{{A_-}'})L(A_+-A_-)+3({A_+}''+{A_-}'')L'(A_+-A_-)+({A_+}'^2-{A_-}'^2)L''(A_+-A_-)=0. \tag{135}$$

ფუნქცია $A_\pm$ ვეძებოთ, როგორც შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$${A_+}'^2(x_+)=M_+(A_+),\quad {A_-}'^2(x_-)=M_-(A_-), \tag{136}$$

სადაც $M_\pm$ ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციებია. ამის შემდეგ (135) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}&L(A_+-A_-)[{M_-}''(A_-)-{M_+}''(A_+)]+2L''(A_+-A_-)[M_-(A_-)-M_+(A_+)]-\\&-3L'(A_+-A_-)[{M_-}'(A_-)+{M_+}'(A_+)]=0.\end{aligned} \tag{137}$$

თუ ამ განტოლებაში მოვახდენთ გარდაქმნას:

$$x_1 \to A_-; \quad x_2 \to A_+; \quad V_1 \to M_-;$$
$$V_2 \to M_+; \quad V_{12} \to L(A_- - A_+),$$

მაშინ ის ზუსტად დაემთხვევა ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც შესწავლილი იქნა ნაშრომში [] და მიღებული იყო მისი ზოგადი ამოხსნა. (ეს ამოხსნა მოცემულია დამატება A-ში).

მაშასადამე, (137) განტოლების ზოგადი ამოხსნა იძლევა $L(A_- - A_+)$ ფუნქციის მნიშვნელობას ცხადი სახით და $A_\pm(x_\pm)$ ფუნქციებისათვის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს. ეს შედეგი შეიძლება გავყოთ შვიდ დამოუკიდებელ ვარიანტად:

$$I. \qquad L(A_+ - A_-) = const, \quad A'^2_\pm(x_\pm) = aA^2_\pm + bA_\pm + c; \tag{138}$$

$$II. \qquad A'^2_- = a_2 \exp(2\lambda A_-) + b_2 \exp(\lambda A_-) + c, A'^2_+ = a_1 \exp(-2\lambda A_+) + b_1 \exp(-\lambda A_+) + c,$$
$$L(A_+ - A_-) = a \exp(\lambda(A_+ - A_-)); \tag{139}$$

$$III. \qquad {A'_-}^2 = a_1\delta^2 \exp(-4\lambda A_-) - b_1\sigma^2 \exp(4\lambda A_-) + a_2\delta \exp(-2\lambda A_-) - b_2\sigma \exp(2\lambda A_-) + k,$$
$${A'_+}^2 = a_1\sigma^2 \exp(-4\lambda A_+) - b_1\delta^2 \exp(4\lambda A_+) + a_2\sigma \exp(-2\lambda A_+) - b_2\delta \exp(2\lambda A_+) + k,$$
$$L(A_- - A_+) = \frac{a}{(\sigma \exp(\lambda(A_- - A_+)) - \delta \exp(-\lambda(A_- - A_+)))^2}; \tag{140}$$

$$IV. \qquad {A'_\pm}^2 = \sum_{k=0}^{4} a_k A^k_\pm, \quad L(A_- - A_+) = \frac{n}{(A_- - A_+)^2}; \tag{141}$$

$$V. \qquad {A_-}'^2 = a\sigma \exp(-2\lambda A_-) - b\delta \exp(2\lambda A_-) + c,$$
$${A_+}'^2 = a\delta \exp(-2\lambda A_+) - b\sigma \exp(2\lambda A_+) + c,$$
$$L(A_- - A_+) = \frac{\delta \exp(\lambda(A_- - A_+)) + \sigma \exp(-\lambda(A_- - A_+)) + \gamma}{(\delta \exp(\lambda(A_- - A_+)) - \sigma \exp(-\lambda(A_- - A_+)))^2}; \tag{142}$$

$$VI. \qquad {A_-}'^2 = aA_-, \quad {A'_+}^2(x_+) = -aA_+, \quad L(A_- - A_+) = b(A_- - A_+) + c; \tag{143}$$

$$VII. \qquad A'^2_\pm = aA^2_\pm + bA_\pm + c, \quad L(A_- - A_+) = n + \frac{m}{(A_- - A_+)^2}. \tag{144}$$

ამ ფორმულებში ყველა ასო L და A-ს გარდა აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივას.

ამ ვარიანტებიდან ზოგიერთი უკვე შესწავლილია. კერძოდ, თუ კი $F(\vec{x})$ ფუნქცია ფაქტორიზებადია $F(\vec{x}) = F_+(x_+)F_-(x_-)$, მაშინ (125) განტოლება მარტივად იხსნება პირდაპირი გზით, ყოველგვარი დამატებითი განტოლებების შემოტანის გარეშე. ეს ამონახსნები მოყვანილია ნაშრომებში [33], [35], [39]. (134) განტოლების თანახმად, $F(\vec{x})$ ფუნქცია ფაქტორიზებადია, თუ ფაქტორიზებადია ფუნქცია L და ამ ვარიანტს ჩამოთვლილ

ვარიანტებიდან არ განვიხილავთ. ესაა I და II ვარიანტი, აგრეთვე III ვარიანტი, როცა $\delta\sigma=0$. ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია, რომ VI და VII ვარიანტები მათში შემავალი მუდმივების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის განხილულია ნაშრომებში [35], [39].

ვარიანტი $III \quad \delta\sigma\neq 0$.

$A_\pm$ ფუნქციები განმარტებულია დამატებითი მუდმივის სიზუსტით, ამიტომ ამ ფუნქციების გარკვეული მუდმივი სიდიდეებით ტრანსლაციით შეიძლება მივაღწიოთ ტოლობას $\delta=\sigma=1$. ამის შემდეგ, ახალი ფუნქციის შემოტანით $U_\pm=\exp(-2\lambda A_\pm)$ შეიძლება ჩავწეროთ, რომ:

$$C_\pm=m\frac{U_\pm}{U'_\pm},\quad F=\frac{U'_-U'_+}{(U_+-U_-)^2},\quad {U'_\pm}^2=\sum_{n=0}^{4}\tilde{d}_nU_\pm^n\equiv P_4(U_\pm). \tag{145}$$

(ხუთი მუდმივა a_1,b_1,a_2,b_2,k (140) ფორმულაში შეცვლილია მუდმივებით $\tilde{d}_n, n=0,...,4$.)

ვარიანტი IV.

$$C_\pm=\frac{1}{A'_\pm},\quad F(\vec{x})=\frac{A'_-A'_+}{(A_--A_+)^2},\quad {A'_\pm}^2=\sum_{k=0}^{4}a_kA_\pm^k, \tag{146}$$

(145) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლილება $U_\pm\to n+mU_\pm$, მივიღებთ:

$$C_\pm=\frac{n+mU_\pm}{U'_\pm},\quad F=\frac{U'_-U'_+}{(U_+-U_-)^2},\quad {U'_\pm}^2=\sum_{n=0}^{4}d_nU_\pm^n\equiv P_4(U_\pm). \tag{147}$$

ცხადია, რომ ვარიანტი IV (146) წარმოადგენს ვარიანტი III-ის (147) კერძო შემთხვევას.

ვარიანტი V.

აქ საჭიროა განვიხილოთ ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე i) $\delta\sigma\neq 0$ და ii) $\delta\sigma=0$. ისევე როგორც წინა ვარიანტში, $A_\pm$ ფუნქციების შესაფერისი მუდმივი სიდიდით წანაცვლებით i) შემთხვევაში შეიძლება შემოვიფარგლოთ δ,σ მუდმივების შემდეგი მნიშვნელობებით $\delta=\sigma=1$ ან $\delta=-\sigma=1$, რაც დამოკიდებულია $\delta\sigma$ ნამრავლის საწყის ნიშანზე. $\delta=\sigma=1$ დროს მოსახერხებელია შემოვიტანოთ ახალი ფუნქცია $U_\pm=\exp(-2\lambda A_\pm)$, ხოლო როცა $\delta=-\sigma=1$ ფუნქცია $U_\pm=\pm\exp(-2\lambda A_\pm)$. მაშინ δ,σ მუდმივების ორივე შესაძლო მნიშვნელობებისათვის $C_\pm$ და $F(\vec{x})$ ფუნქციების გამოსახულებები, ჩაწერილი $U_\pm$ ფუნქციების საშუალებით და დიფერენციალური განტოლება თვითონ $U_\pm$ ფუნქციებისათვის ერთიდაიგივეა, ანუ ეს ორი შემთხვევა იძლევა ერთდაიმავე შედეგს. კერძოდ:

i)

$$\begin{aligned}&C_\pm=k\frac{U_\pm}{U'_\pm},\quad F=k_1\frac{U'_+U'_-}{(U_+-U_-)^2}+k_2\frac{U'_+U'_-(U_++U_-)}{\sqrt{U_+U_-}(U_+-U_-)^2},\\&U'^2_\pm=aU_\pm^3+bU_\pm^2+cU_\pm\equiv P_3(U_\pm),\end{aligned} \tag{148}$$

სადაც a, b, c, k, k_1, k_2 ნებისმიერი მუდმივებია, ამასთან a, b, c მუდმივები განსხვავდებიან (142)-ში შემავალი შესაბამისი მუდმივებისაგან. უნდა აღინიშნოს ის ფაქტი, რომ $C_\pm$ და F ფუნქციების განმსაზღვრელი (148) გამოსახულებები არ იცვლება $U_\pm \leftrightarrow 1/U_\pm$ გარდაქმნისას. ეს გარდაქმნა კი ეკვივალენტურია (148) დიფერენციალურ განტოლებაში $a \leftrightarrow c$ გარდაქმნის. მაშასადამე, ამოცანა სიმეტრიულია $a \leftrightarrow c$ გარდაქმნის მიმართ.

სიტუაცია a, b, c მუდმივების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის უკვე იყო განხილული. მაგალითად, შემთხვევა როცა $abc \neq 0$ და $P_3(U_\pm)$ პოლინომს გააჩნია გადაგვარებული ფესვები, შესწავლილი იქნა [35]-ში. შემთხვევა $a = 0, bc \neq 0$ ეკვივალენტურია $ab \neq 0, c = 0$ შემთხვევის და იგი განხილულია [37], [56], [57]-ში. შემთხვევები $a = b = 0$ და $a = c = 0$ აგრეთვე ეკვივალენტურებია და იძლევიან პოტენციალებს განცალებადი ცვლადებით. სიტუაცია, როდესაც $b = 0, ac \neq 0$, შეესაბამება პოლინომს $P_3(U_\pm)$ გადაუგვარებელი ფესვებით. ეს ამოცანა შესწავლილი იქნა [37], [64]-ში, სადაც მეორე რიგის სუპერსიმეტრიული გარდაქმნა ხორციელდება მობრუნების მიმართ დაყვანადი სუპერმუხტით. კერძოდ, [64]-ში ნაჩვენებია, რომ ასეთი გარდაქმნისას $C_\pm(x_\pm)$ უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას:

$$C'^{\,2}_\pm = \alpha C_\pm^4 + \beta C_\pm^2 + \gamma, \tag{149}$$

სადაც α, β, γ ნებისმიერი მუდმივებია. (148)-დან $C_\pm(x_\pm)$ გამოსახულების პირდაპირი ჩასმით (149)-ში ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს განტოლება სრულდება და α, β, γ მუდმივები გამოისახებიან a, b, c, k მუდმივებით. მაშასადამე, (148) შეესაბამება დაყვანად სუპერსიმეტრიულ გარდაქმნას და მას აქ აღარ განვიხილავთ.

ii) $\delta = 0, \sigma \neq 0 (\delta \neq 0, \sigma = 0$ ანალოგიურია.) უფრო მოსახერხებელია შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\exp(\mp 2\lambda A_+) \equiv U_\pm$. გვექნება:

$$\begin{aligned} &C_\pm = \pm p \frac{U_\pm}{U'_\pm}, \quad F = n_1 \frac{U'_- U'_+}{\sqrt{U_- U_+}} + n_2 U'_- U'_+, \\ &{U_-}'^2 = dU_-^2 + a_- U_-, \quad {U_+}'^2 = dU_+^2 + a_+ U_+. \end{aligned} \tag{150}$$

ამ განტოლებებიდან $U_\pm$ ჩაიწერება ელემენტარულ ფუნქციებში ცხადი, ანალიტიკური ფორმით და დავინახავთ, რომ ეს ვარიანტი ემთხვევა [35], [39]-ში განხილულ პოტენციალებს.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ახალი სუპერპარტნიორი პოტენციალები შეიძლება მიღებული იქნან მხოლოდ (147) ფორმულებიდან. მიუხედავად ამისა, მოვიყვანთ პოტენციალების გამოსახულებებს სხვა შემთხვევებშიც. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას,

რომ ამოხსნის პროცესში $C_\pm$ i F ფუნქციების გამოსახულებების გამარტივების მიზნით, ჩვენ მოვახდენთ მუდმივების გარკვეული კომბინაციების შეცვლას ერთი მუდმივათი და ამას ცალკე არ ავღნიშნავთ. ამასთან, სხვადასხვა, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ შემთხვევებში, $C_\pm, F$ ფუნქციების საბოლოო გამოსახულებებში მუდმივები შეიძლება განმეორდეს, მაგრამ მათ არ აქვთ ერთმანეთთან არავითარი კავშირი, სუპერპარტნიორ პოტენციალებში კი ერთიდაიმავე ადიტიურ მუდმივებს გადავაგდებთ.

§2.3 სუპერპარტნიორი პოტენციალები

თავდაპირველად განვიხილოთ პოტენციალები, რომლებიც მიიღებიან (147) ფორმულებიდან. მოსახერხებელია ამოცანის დაყოფა რამდენიმე დამოუკიდებელ შემთხვევად.

1) პოლინომ $P_4(U_\pm)$ აქვს გადაგვარებული ფესვები, ანუ $U'^2_\pm = (U_\pm - u_0)^2(d_4 U^2_\pm + n_1 U_\pm + u_2)$. მოვახდინოთ ცვლილება $U_\pm \to u_0 + 1/Z_\pm$, რის შემდეგაც (147) ფორმულები ასე გადაიწერება:

$$C_\pm = -\frac{(n+mu_0)Z^2_\pm + mZ_\pm}{Z'_\pm}, \quad F = \frac{Z'_+ Z'_-}{(Z_+ - Z_-)^2}, \quad Z'^2_\pm = d_4 + n_1 Z_\pm + \lambda^2 Z^2_\pm. \tag{151}$$

1a) $\lambda \neq 0$. (151) ფორმულაში მოვახდინოთ წანაცვლება $Z_\pm : Z_\pm \to Z_\pm - n_1/2\lambda^2$. გვექნება:

$$C_\pm = \frac{aZ^2_\pm + bZ_\pm + c}{Z'_\pm}, \quad F = \frac{Z'_+ Z'_-}{(Z_+ - Z_-)^2}, \tag{152}$$

$$Z_\pm = \sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm), \quad \sigma_+ \delta_+ = \sigma_- \delta_-. \tag{153}$$

დავუშვათ, რომ $\delta_+ \neq 0$, მაშინ $\sigma_+ = \sigma_- \delta_- / \delta_+$ და $Z_\pm$ ფუნქციის F-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$F \sim \frac{\delta_-}{(\delta_- \exp(\lambda x_2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_2))^2} - \frac{\sigma_-}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1) - \delta_+ \exp(-\lambda x_1))^2}. \tag{154}$$

შესაბამის სუპერპარტნიორ პოტენციალებს ექნებათ სახე:

$$\begin{aligned} V^{(1),(2)} = {} & \frac{a}{8\lambda^2}(Z^2_- + Z^2_+) + \frac{a}{2}(k \pm 1)(Z_- + Z_+) + \lambda^2(a\sigma_-\delta_- + \frac{c}{4})(k \mp 1)\left(\frac{Z_-}{Z'^2_-} + \frac{Z_+}{Z'^2_+}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left(4a\sigma^2_-\delta^2_- + (4\lambda^4 k^2 + 2ac \mp 8\lambda^4 k)\sigma_-\delta_- + \frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{1}{Z'^2_-} + \frac{1}{Z'^2_+}\right) + \\ & + p\left(\frac{\delta_-}{(\delta_- \exp(\lambda x_2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_2))^2} + \frac{\sigma_-}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1) - \delta_+ \exp(-\lambda x_1))^2}\right). \end{aligned} \tag{155}$$

ავღნიშნოთ ამ პოტენციალების ზოგიერთი თვისებები. მაგალითად, a პარამეტრის კერძო მნიშვნელობისათვის $a = 0$ ეს სუპერპარტნიორები წარმოადგენენ ფორმა ინვარიანტულ პოტენციალებს:

$$V^{(1)}(b + 4\lambda^2) = V^{(2)}(b) \tag{156}$$

პარამეტრების სხვა მნიშვნელობებისათვის, მაგალითად, როცა $a = c = 0, b = 4\lambda^2 c = 0$ ან $b = 2\lambda^2, c = 4\lambda^2\sqrt{\sigma_-\delta_-}$ ერთ-ერთ სუპერპარტნიორ $V^{(1)}$ პოტენციალში ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას, ხოლო მეორე სუპერპარტნიორში კი არა.

1b) $\lambda = 0, \quad n_1 \neq 0.$

(147) ფორმულაში $Z_\pm \to Z_\pm - d_4/n_1$ წანაცვლება იძლევა $Z_\pm'^2 = n_1 Z_\pm$ განტოლებას, საიდანაც $Z_\pm = n_1 x_\pm^2/4$. ჩავსვათ ეს $C_\pm$ და F ფუნქციების გამოსახულებებში, გვექნება:

$$F_1(2x) = -F_2(2x) = \frac{q}{x^2}, \quad C_\pm = q_3 x_\pm^3 + q_2 x_\pm + \frac{q_1}{x_\pm}, \tag{157}$$

ხოლო შესაბამისი სუპერპარტნიორი პოტენციალებია

$$\begin{aligned} V^{(1),(2)} = &\frac{q_3^2}{8}(x_-^6 + x_+^6) + \frac{q_2 q_3}{4}(x_-^4 + x_+^4) + \frac{1}{8}(q_2^2 + 2q_1 q_3 \pm 12q_3)(x_-^2 + x_+^2) + \\ &+\frac{1}{8}(q_1^2 \mp 4q_1)\left(\frac{1}{x_-^2} + \frac{1}{x_+^2}\right) - \frac{q}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) \pm 4q_2. \end{aligned} \tag{158}$$

(149) განტოლებაში (152) და (157) ფორმულებიდან $C_\pm$ ფუნქციის ჩასმით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს უკანასკნელი არ სრულდება. ეს კი ნიშნავს, რომ ეს პოტენციალები არ მიიღება დაყვანადი სუპერგარდაქმნით [37].

1c) $n_1 = \lambda = 0.$

ამ შემთხვევაში $Z_\pm \sim x_\pm + const.$ აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$C_\pm = a x_\pm^2 + b x_\pm + c, \quad F_2(2x_2) = \frac{k}{x_2^2}, \quad F_1(2x_1) = 0 \tag{159}$$

და შესამაბისად პოტენციელებისათვის გვექნება:

$$V^{(1),(2)} = \frac{a^2}{8}(x_-^4 + x_+^4) + \frac{ab}{4}(x_-^3 + x_+^3) + \frac{1}{4}(b^2 + 2ac)(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(bc \pm 2a)x_1 + \frac{k}{4x_2^2} \pm b. \tag{160}$$

ასეთი პოტენციალები მიღებული იქნა ნაშრომებში [35], [39].

2) $P_4(U)$ პოლინომს არა აქვს ჯერადი ფესვები.

ისევ გვაქვს ორი შემთხვევა:

2a) $d_4 = 0.$

ზოგადობის დარღვევის გარეშე შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $d_3 = 4$. $U_\pm$ ფუნქციის წანაცვლებით მუდმივი სიდიდით: $U_\pm \to U_\pm - d_2/12$ დიფერენციალური განტოლება ღებულობს სახეს $U_\pm'^2 = 4U_\pm^3 - g_2U_\pm - g_3$. ამ განტოლების ამონახსნი კი არის ვეიერშტრასის ფუნქცია $\wp(x_\pm)$ [59], ამიტომაც განტოლების ამონახსნი იქნება $U_\pm(x_\pm) = \wp(x_\pm) - d_2/12$. შესაბამისად, საკოეფიციენტო $C_\pm$ და F ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$C_\pm = \frac{a + b\wp}{\wp'}, \quad F = \frac{\wp'(x_+)\wp'(x_-)}{(\wp(x_+) - \wp(x_-))^2} = \wp(2x_1) - \wp(2x_2). \tag{161}$$

2b) $d_4 \neq 0$.

არაწრფივი გარდაქმნით $U_\pm = (\alpha Z_\pm + \beta)/(\gamma Z_\pm + \rho)$ დიფერენციალური განტოლება $U_\pm'^2 = P_4(U_\pm)$ შეიძლება დავიყვანოთ განტოლებაზე $Z_\pm'^2 = 4Z_\pm^3 - g_2Z_\pm - g_3$. ანუ $Z_\pm = \wp(x_\pm)$- ისევ ვეიერშტრასის ფუნქციაა და $C_\pm, F$ ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$C_\pm = \frac{a\wp^2(x_\pm) + b\wp(x_\pm) + c}{\wp'(x_\pm)}, \quad F = \frac{U_+'U_-'}{(U_+ - U_-)^2} \sim \frac{Z_+'Z_-'}{(Z_+ - Z_-)^2} = \wp(2x_1) - \wp(2x_2). \tag{162}$$

ცხადია, რომ 2a) არის 2b)-ს კერძო შემთხვევა.

შესაბამისი სუპერპარტნიორი პოტენციალებია:

$$V^{(1),(2)} = \frac{a(a \pm 8)}{32}(\wp(x_-) + \wp(x_+)) + \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{3} A_i(A_i \mp 8)(\wp(x_+ + \omega_i) + \wp(x_- + \omega_i)) +$$
$$+n(\wp(2x_1) + \wp(2x_2)). \tag{163}$$

სადაც $\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega + \omega', \omega_3 = \omega'$ და ω, ω'-ვეიერშტრასის ფუნქციის ნახევარპერიოდებია, ხოლო

$$A_i(a, b, c) = \frac{c + be_i + ae_i^2}{H_i^2}, \tag{164}$$

$$H_l^2 = (e_l - e_m)(e_l - e_n) = 2e_l^2 + \frac{g_3}{4e_l} = 3e_l^2 - \frac{g_2}{4}, \tag{165}$$

$$(l, m, n = 1, 2, 3, l \neq m, l \neq n, m \neq n). \tag{166}$$

(e_i არის $4e^3 - g_2e - g_3 = 0$ კუბური განტოლების ფესვები.) პოტენციალის (163) გამოსახულების მისაღებად გამოყენებული იქნა ვეიერშტრასის ფუნქციისა და მისი ფესვების ზოგირთი თვისებები, მათ შორის როგორიცაა, მაგალითად:

$$\wp(x + \omega_\alpha) = e_\alpha + \frac{H_\alpha^2}{\wp(x) - e_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{e_i}{H_i^2} = 0. \tag{167}$$

ქვემოთ მოვიყვანოთ პოტენციალები სხვა შემთხვევებშიც. უნდა აღინიშნოს, რომ ისინი ადრე მიღებული იქნა სხვადასხვა ნაშრომებში სრულიად სხვა გზით [35], [57], [58].

ვარიანტი **V.**

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული გვაქვს ორი ქვევარიანტი i) და ii), რომლებიც თავის მხრივ მოსახერხებელია კიდევ დავყოთ სხვადასხვა დამოუკიდებელ შემთხვევებად.

i)

1. $P_3(U_\pm)$ პოლინომს აქვს ჯერადი ფესვები.

1a) $a \neq 0,\ b = c = 0.$ (148) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ $U_\pm \sim x_\pm^{-2}$ და $C_\pm \sim x_\pm$. ეს ფუნქციები შეესაბამება განცალებადცვლადიან პოტენციალებს, ამიტომ მათ არ განვიხილავთ.

1b) $a \neq 0,\ bc \neq 0.$ მაშინ (148)-ში შემავალ დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახე: $U_\pm'^2 = aU_\pm(U_\pm - u_0)^2$, სადაც u_0 არანულოვანი მუდმივაა. ამ განტოლების ამონახსნია

$$U_\pm = q\biggl(\frac{\sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm)}{\sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) - \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm)}\biggr)^2 \equiv Z_\pm^2 \tag{168}$$

და (148)-დან ვპოულობთ, რომ:

$$\begin{aligned} &C_\pm = k(\sigma_\pm^2 \exp(2\lambda x_\pm) - \delta_\pm^2 \exp(-2\lambda x_\pm)),\\ &F = 4k_1\frac{Z_+'Z_-'Z_+Z_-}{(Z_+^2 - Z_-^2)^2} + 4k_2\frac{Z_+'Z_-'(Z_+^2 + Z_-^2)}{(Z_+^2 - Z_-^2)^2} = \tilde{k}_1\frac{Z_+'Z_-'}{(Z_+ - Z_-)^2} + \tilde{k}_2\frac{Z_+'Z_-'}{(Z_+ + Z_-)^2} =\\ &= \frac{4q_1}{(\sigma_+\sigma_- \exp(2\lambda x_1) + \delta_+\delta_- \exp(-2\lambda x_1))^2} + \frac{4q_2}{(\sigma_+\delta_- \exp(2\lambda x_1) - \delta_+\sigma_- \exp(-2\lambda x_1))^2}, \end{aligned} \tag{169}$$

ხოლო შესაბამისი სუპერპარტნიორი პოტენციალებია:

$$\begin{aligned} &V^{(1),(2)} = \pm k\lambda[\sigma_+^2 \exp(2\lambda x_+) + \delta_+^2 \exp(-2\lambda x_+) + \sigma_-^2 \exp(2\lambda x_-) + \delta_-^2 \exp(-2\lambda x_-)] +\\ &+\frac{k^2}{8}\biggl([\sigma_+^2 \exp(2\lambda x_+) - \delta_+^2 \exp(-2\lambda x_+)]^2 + [\sigma_-^2 \exp(2\lambda x_-) - \delta_+^2 \exp(-2\lambda x_-)]^2\biggr) +\\ &+\frac{q_2}{[\sigma_+\delta_- \exp(2\lambda x_2) - \delta_+\sigma_- \exp(-2\lambda x_2)]^2} - \frac{q_1}{[\sigma_+\sigma_- \exp(2\lambda x_1) + \delta_+\delta_- \exp(-2\lambda x_1)]^2}. \end{aligned} \tag{170}$$

1c) $a = 0,\ b \equiv \lambda^2,\ c \neq 0.$

$U_\pm$ ფუნქციის მიმართ გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$U_\pm'^2 = \lambda^2 U_\pm^2 + 2cU_\pm, \tag{171}$$

რომლის ამონახსნს ვეძებთ, როგორც სრულ კვადრატს $U_\pm \equiv Z_\pm^2$. (171)-ში ჩასმის შემდეგ ადვილად ვიპოვით, რომ

$$Z_\pm = \sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm), \quad \sigma_+\delta_+ = \sigma_-\delta_-, \quad c = 2\lambda^2\sigma_\pm\delta_\pm \tag{172}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\delta_+ \neq 0$ და განვსაზღვრავთ $\sigma_+ = \sigma_-\delta_-/\delta_+$, მაშინ $F_1(2x_1), F_2(2x_2)$ ფუნქციებისათვის მივიღებთ:

$$F_1 = \frac{4\sigma_- k_1}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1/2) + \delta_+ \exp(-\lambda x_1/2))^2} + \frac{4\sigma_- k_2}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1/2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_1/2))^2}, \quad (173)$$

$$F_2 = \frac{4\delta_- k_1}{(\delta_- \exp(\lambda x_2/2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_2/2))^2} + \frac{4\delta_- k_2}{(\delta_- \exp(\lambda x_2/2) + \delta_+ \exp(-\lambda x_2/2))^2}. \quad (174)$$

თუ პოტენციალების ფორმულაში ჩავსვამთ (173), (174) და $C_\pm = k\lambda^2 Z_\pm/Z'_\pm$, სადაც $Z_\pm$ განისაზღვრება (172)-დან, გვექნება:

$$\begin{aligned} V^{(1),(2)} = -2k(k \mp 1)\sigma_-\delta_-\lambda^2 \Bigg[& \frac{\delta_+^2}{(\sigma_-\delta_- \exp(\lambda x_+/2) + \delta_+^2 \exp(-\lambda x_+/2))^2} + \\ & + \frac{1}{(\sigma_- \exp(\lambda x_-/2) + \delta_- \exp(-\lambda x_-/2))^2} \Bigg] + \\ & + \frac{\delta_- k_1}{(\delta_- \exp(\lambda x_2/2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_2/2))^2} + \frac{\delta_- k_2}{(\delta_- \exp(\lambda x_2/2) + \delta_+ \exp(-\lambda x_2/2))^2} - \\ & - \frac{\sigma_- k_1}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1/2) + \delta_+ \exp(-\lambda x_1/2))^2} - \frac{\sigma_- k_2}{(\sigma_- \exp(\lambda x_1/2) - \delta_+ \exp(-\lambda x_1/2))^2}. \end{aligned} \quad (175)$$

პოტენციალების ამ გამოსახულებებიდან ნათლად ჩანს, რომ ისინი წარმოადგენენ ფორმა ინვარიანტულ პოტენციალებს: $V^{(1)}(k+1) = V^{(2)}(k)$.

2. $P_3(U_\pm)$ პოლინომს არა აქვს ჯერადი ფესვები.

განტოლებაში $U_\pm'^2 = aU_\pm^3 + bU_\pm^2 + cU_\pm$, სადაც $a \neq 0$ მუდმივა a შეიძლება ყოველთვის ჩავთვალოთ 4-ის ტოლად, ხოლო b შევცვალოთ $12b$-თი. მივიღებთ:

$$U_\pm'^2 = 4U_\pm^3 + 12bU_\pm^2 + cU_\pm. \quad (176)$$

მოვახდინოთ წანაცვლება $U_\pm \to U_\pm - b$, მაშინ:

$$U_\pm'^2 = 4U_\pm^3 + (c - 12b^2)U_\pm + 8b^3 - cb. \quad (177)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $c - 12b^2 \equiv -g_2, 8b^3 - cb \equiv -g_3$, ე. ი. b მუდმივა და ფუნქცია $U_\pm$ აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$4b^3 - g_2 b - g_3 = 0, \quad U_\pm'^2 = 4U_\pm^3 - g_2U_\pm - g_3. \quad (178)$$

მაშასადამე, (176) განტოლების ამონახსნია:

$$U_\pm(x_\pm) = \wp(x_\pm) - e_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (179)$$

სადაც e_i (178) განტოლებებიდან პირველი განტოლების ფესვებია.

$C_\pm(x_\pm)$ და $F(\vec{x})$ ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$C_\pm = \frac{\wp(x_\pm) - e_i}{\wp'(x_\pm)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{180}$$

$$F = k_1 \frac{\wp'(x_+)\wp'(x_-)}{(\wp(x_+) - \wp(x_-))^2} + k_2 \frac{\wp'(x_+)\wp'(x_-)(\wp(x_+) + \wp(x_-) - 2e_i)}{\sqrt{(\wp(x_+) - e_i)(\wp(x_-) - e_i)}(\wp(x_+) - \wp(x_-))^2} \equiv$$
$$\equiv k_1 K_1(\vec{x}) + k_2 K_2(\vec{x}). \tag{181}$$

$K_1(\vec{x})$ ფუნქციისათვის მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$K_1(\vec{x}) \sim \wp(2x_1) - \wp(2x_2). \tag{182}$$

მეორე შესაკრების $K_2(\vec{x})$ ფუნქციის მნიშვნელობა დამოკიდებულია i-ზე. ვეიერშტრასის ფუნქციის თვისებების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$K_2(\vec{x}) \sim \wp(x_1) + \wp(x_1 + \omega_1) - \wp(x_1 + \omega_2) - \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2, \quad i = 1, \tag{183}$$

$$K_2(\vec{x}) \sim \wp(x_1) - \wp(x_1 + \omega_1) + \wp(x_1 + \omega_2) - \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2, \quad i = 2, \tag{184}$$

$$K_2(\vec{x}) \sim \wp(x_1) - \wp(x_1 + \omega_1) - \wp(x_1 + \omega_2) + \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2, \quad i = 3. \tag{185}$$

შესაბამისი პოტენციალები იქნება:

$$V^{(1),(2)} = \frac{a(a \mp 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_2) + \wp(x_- + \omega_2)] + \frac{a(a \pm 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_3) + \wp(x_- + \omega_3)] +$$
$$+k[\wp(2x_1) + \wp(2x_2)] + p[\wp(x_1) + \wp(x_1 + \omega_1) - \wp(x_1 + \omega_2) - \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2], \tag{186}$$

$$V_{1,2} = \frac{a(a \mp 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_1) + \wp(x_- + \omega_1)] + \frac{a(a \pm 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_3) + \wp(x_- + \omega_3)] +$$
$$+k[\wp(2x_1) + \wp(2x_2)] + p[\wp(x_1) - \wp(x_1 + \omega_1) + \wp(x_1 + \omega_2) - \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2], \tag{187}$$

$$V_{1,2} = \frac{a(a \mp 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_1) + \wp(x_- + \omega_1)] + \frac{a(a \pm 1)}{2}[\wp(x_+ + \omega_2) + \wp(x_- + \omega_2)] +$$
$$+k[\wp(2x_1) + \wp(2x_2)] + p[\wp(x_1) - \wp(x_1 + \omega_1) - \wp(x_1 + \omega_2) + \wp(x_1 + \omega_3) + x_1 \to x_2]. \tag{188}$$

ii)

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $U_\pm = Z_\pm^2$. მაშინ (150)-ში $C_\pm$ და F ფუნქციები ასე გადაიწერება:

$$C_\pm = \mp k\lambda^2 \frac{Z_\pm}{Z'_\pm}, \quad F = n_1 Z'_- Z'_+ + n_2 U'_- U'_+, \tag{189}$$

სადაც $Z_\pm$ აკმაყოფილებენ განტოლებას: $Z'^2_\pm = \lambda^2/4Z_\pm^2 + b_\pm$, რომლის ამონახსნიცაა $Z_\pm = \sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm/2) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm/2)$ და (189)-ის თანახმად გვექნება:

$$C_\pm = \mp 2k\lambda \frac{\sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm/2) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm/2)}{\sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm/2) - \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm/2)}, \tag{190}$$

$$F = 4k_1[\sigma_+\sigma_- \exp(\lambda x_1) + \delta_+\delta_- \exp(-\lambda x_1) - \sigma_+\delta_- \exp(\lambda x_2) - \sigma_-\delta_+ \exp(-\lambda x_2)] +$$
$$+4k_2[\sigma_+^2\sigma_-^2 \exp(2\lambda x_1) + \delta_+^2\delta_-^2 \exp(-2\lambda x_1) - \sigma_+^2\delta_-^2 \exp(2\lambda x_2) - \sigma_-^2\delta_+^2 \exp(-2\lambda x_2)], \tag{191}$$

ხოლო პოტენციალები

$$V^{(1),(2)} = \frac{2k(k\pm 1)\lambda^2\delta_+\sigma_+}{[\sigma_+\exp(\lambda x_+/2)-\delta_+\exp(-\lambda x_+/2)]^2} + \frac{2k(k\mp 1)\lambda^2\delta_-\sigma_-}{[\sigma_-\exp(\lambda x_-/2)-\delta_-\exp(-\lambda x_-/2)]^2}$$
$$k_2[\sigma_+^2\sigma_-^2\exp(2\lambda x_1)+\delta_+^2\delta_-^2\exp(-2\lambda x_1)-\sigma_+^2\delta_-^2\exp(2\lambda x_2)-\sigma_-^2\delta_+^2\exp(-2\lambda x_2)]-$$
$$-k_1[\sigma_+\sigma_-\exp(\lambda x_1)+\delta_+\delta_-\exp(-\lambda x_1)-\sigma_+\delta_-\exp(\lambda x_2)-\sigma_-\delta_+\exp(-\lambda x_2)]. \quad (192)$$

პოტენციალების ამ გამოსახულებებიდან ჩანს, რომ ფორმა ინვარიანტობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $\delta_+\sigma_+ = 0$ ან $\delta_-\sigma_- = 0$.

ვარიანტი **VI.**

(143) განტოლებიდან $A_\pm \sim \pm x_\pm^2$ და $C_\pm, F$ ფუნქციებისათვის მივიღებთ

$$C_\pm = \pm 4\frac{k}{x_\pm}, \quad F = 4p(x_2^4 - x_1^4) + 4q(x_2^2 - x_1^2). \quad (193)$$

შესაბამისი პოტენციალები კი იქნება

$$V^{(1),(2)} = 2k(k\mp 1)\frac{1}{x_+^2} + 2k(k\pm 1)\frac{1}{x_-^2} + p(x_1^4 + x_2^4) + q(x_1^2 + x_2^2). \quad (194)$$

ვარიანტი **VII.**

(144) დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ შეცვლილი მუდმივებით:

$$A_\pm'^2 = \lambda^2 A_\pm^2 + bA_\pm + c. \quad (195)$$

a) $\lambda \neq 0$.

(195) განტოლების ამონახსნია $A_\pm = \sigma_\pm\exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm\exp(-\lambda x_\pm) - b/2\lambda^2$, სადაც $\delta_-\sigma_- = \delta_+\sigma_+$. დავუშვათ, რომ $\delta_+ \neq 0$. მაშინ $C_\pm$ და F ფუნქციები ტოლი იქნება:

$$C_+ = \frac{2\gamma\delta_+}{\sigma_-\delta_-\exp(\lambda x_+) - \delta_+^2\exp(-\lambda x_+)}, \quad C_- = \frac{2\gamma}{\sigma_-\exp(\lambda x_-) - \delta_-\exp(-\lambda x_-)}, \quad (196)$$

$$F = 4\alpha\delta_-(\sigma_-\exp(\lambda x_1) - \delta_+\exp(-\lambda x_1))^2 - \frac{4\beta\sigma_-}{(\sigma_-\exp(\lambda x_1) - \delta_+\exp(-\lambda x_1))^2} -$$
$$-4\alpha\sigma_-(\delta_-\exp(\lambda x_2) - \delta_+\exp(-\lambda x_2))^2 + \frac{4\beta\delta_-}{(\delta_-\exp(\lambda x_2) - \delta_+\exp(-\lambda x_2))^2} \quad (197)$$

და პოტენციალები:

$$V^{(1),(2)} = \frac{\gamma^2\delta_+^2 \mp 2\lambda\gamma\delta_+(\sigma_-\delta_-\exp(\lambda x_+) + \delta_+^2\exp(-\lambda x_+))}{(\sigma_-\delta_-\exp(\lambda x_+) - \delta_+^2\exp(-\lambda x_+))^2} +$$
$$+\frac{\gamma^2 \mp 2\lambda\gamma(\sigma_-\exp(\lambda x_-) + \delta_-\exp(-\lambda x_-))}{(\sigma_-\exp(\lambda x_-) - \delta_-\exp(-\lambda x_-))^2} -$$
$$-\alpha\sigma_-(\delta_-\exp(\lambda x_2) - \delta_+\exp(-\lambda x_2))^2 + \frac{\beta\delta_-}{(\delta_-\exp(\lambda x_2) - \delta_+\exp(-\lambda x_2))^2} -$$
$$-\alpha\delta_-(\sigma_-\exp(\lambda x_1) - \delta_+\exp(-\lambda x_1))^2 + \frac{\beta\sigma_-}{(\sigma_-\exp(\lambda x_1) - \delta_+\exp(-\lambda x_1))^2}. \quad (198)$$

b) $\lambda = 0,\ b \neq 0.$

ამ შემთხვევაში $A_\pm \sim x_\pm^2$ და $C_\pm$ i F :

$$C_\pm = \frac{4k}{x_\pm}, \quad F = 4k_1(x_2^{-2} - x_1^{-2}) + 4k_2(x_2^2 - x_1^2), \tag{199}$$

ხოლო

$$V^{(1),(2)} = 2k(k \mp 1)\left(\frac{1}{x_-^2} + \frac{1}{x_+^2}\right) + k_1(x_1^{-2} + x_2^{-2}) + k_2(x_1^2 + x_2^2). \tag{200}$$

ფაქტორიზაცია.

დარჩა შემთხვევა, როცა F ფუნქცია უშვებს ფაქტორიზაციას: $F(\vec{x}) = F_-(x_-)F_+(x_+)$. ამ შემთხვევაში (125)-(126) განტოლებები მარტივად იხსნება და გვაქვს:

$$F_\pm = \sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm), \quad C_\pm = \frac{4\nu_\pm \mp 2kF'_\pm}{F_\pm}. \tag{201}$$

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$\begin{aligned} F_1(2x_1) &= 4p(\sigma_-\sigma_+ \exp(2\lambda x_1) + \delta_-\delta_+ \exp(-2\lambda x_1)), \\ F_2(2x_2) &= 4p(\sigma_+\delta_- \exp(2\lambda x_2) + \sigma_-\delta_+ \exp(-2\lambda x_2)) \end{aligned} \tag{202}$$

და პოტენციალებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} V_{1,2} = &-2\nu_+(k \pm 1)\frac{F'_+}{F_+^2} + 2\nu_-(k \mp 1)\frac{F'_-}{F_-^2} + \frac{2\nu_+^2 - 2\lambda^2\sigma_+\delta_+ k(k \pm 2)}{F_+^2} + \\ &+ \frac{2\nu_-^2 - 2\lambda^2\sigma_-\delta_- k(k \mp 2)}{F_-^2} + p[\sigma_+\delta_- \exp(2\lambda x_2) + \sigma_-\delta_+ \exp(-2\lambda x_2) - \\ &-\sigma_-\sigma_+ \exp(2\lambda x_1) - \delta_-\delta_+ \exp(-2\lambda x_1)]. \end{aligned} \tag{203}$$

§2.4 ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალება

როგორც პირველ თავში ვნახეთ, ერთგანზომილებიან სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკაში ფორმა ინვარიანტობის იდეა ძალიან პროდუქტიულია. კერძოდ, თუ სუპერსიმეტრია არაა სპონტანურად დარღვეული, მაშინ ფორმა ინვარიანტული სისტემები ზუსტად ამოხსნადი სისტემებია. ამ პარაგრაფში განვიხილავთ

ორგანზომილებიანი სისტემებისათვის ფორმა ინვარიანტობას და მისგან გამომდინარე შედეგებს. ერთგანზომილებიან შემთხვევასთან შედარებით ორგანზომილებიანი სისტემებისათვის არსებობს არსებითი სხვაობა: საზოგადოდ, $H^{(1)}(a)$ ჰამილტონიანის ძირითადი მდგომარეობა არ ემთხვევა მეორე რიგის სუპერმუხტის $q^{+}(a)$ ნულ მოდას, ამასთან $E_0(a) \neq 0$ და კიდევ, შეიძლება არსებობდეს $q^{+}(a)$ სუპერმუხტის ძალიან ბევრი ნულ მოდები. ამ ძირითადი განსხვავებების გარდა ყოველგვარი მოქმედებები ორივე შემთხვევაში ერთნაირია. მაგალითად, ნაშრომებში [56] ფორმა ინვარიანტობის პირდაპირი განზოგადება ორგანზომილებიან შემთხვევაზე იძლევა მხოლოდ ნაწილობრივ (კვაზი-ზუსტი) ამოხსნად მოდელს; ხოლო ზოგიერთი სისტემებისათვის [38], [48], [57] შეიძლება საუბარი ზუსტად ამოხსნადობაზე.

კვაზი-ზუსტად ამოხსნადი მოდელები წარმოადგენენ შუალედურ კლასს ზუსტად ამოხსნად და ანალიტიკურად ამოუხსნად მოდელებს შორის. ასეთი სისტემების განხილვის იდეა პირველად შემოთავაზებული იქნა 1980-იან წლებში [42]-[47]. კერძოდ, ტურბინერის, უშვერიძის და შიფმანის რიგ ნაშრომებში განხილული იქნა ერთგანზომილებიანი კვაზი-ზუსტად ამოხსნადი (ზოგჯერ კი ზუსტად ამოხსნადი) კვანტური მოდელების აგების ელეგანტური ალგებრული მეთოდი. ზოგადად, ეს მეთოდი, რა თქმა უნდა, მუშაობს სუპესრსიმეტრიის გარეშეც, მაგრამ ორივე ეს მეთოდი შეიძლება გავაერთიანოთ ერთი განზომილების შემთხვევაში [47]. ეს მიდგომა შეიძლება გამოყენებული იქნას ორგანზომილებიანი კვანტური მოდელებისთვისაც, მაგრამ მხოლოდ გამრუდებულ სივრცეებში არატრივიალური მეტრიკით [61]. ისეთი შესაძლებლობების რეალიზაციას, რომლებიც საშუალებას იძლევა არატრივიალური ორგანზომილებიანი კვანტური სისტეემების ნაწილობრივ ან მთლიანად ამოხსნას, დიდი მნიშვნელობა აქვს კვანტურ მექანიკაში, რადგანაც ცნობილია ორგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლების ანალიზური ამოხსნის მხოლოდ ერთადერთი რეგულარული მეთოდი: ცვლადთა განცალებით ამოცანის დაყვანა ერთგანზომილებიან ამოცანათა წყვილზე [41]. ეს მეთოდი გამოიყენება ძალიან შეზღუდული რაოდენობა კვანტური სისტემებისათვის; ისეთი სისტემების სრული კლასიფიკაცია, რომლებშიც შესაძლებელია ცვლადთა განცალება მოცემული იქნა ეიზენჰარტის მიერ [62]: არსებობს ოთხი შესაძლებლობა-დეკარტეს, პოლარული, ელიფსური და პარაბოლური კოორდინატები, რომლებშიც შესაძლებელია ცვლადთა განცალება. ცნობილია აგრეთვე ზოგადი ფორმა ორგანზომილებიანი პოტენციალებისა, რომლებიც უშვებენ ცვლადთა განცალებას და ისინი ცხადი სახით ჩაიწერებიან ერთ ცვლადზე დამოკიდებული ნებისმიერი ფუნქციების საშუალებით.

ანალიზური ამოხსნა მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, თუკი ეს ფუნქციები მიეკუთვნებიან ერთგანზომილებიან ზუსტად ამოხსნად პოტენციალებს. ყველა ამ სისტემის შესაბამისი ჰამილტონიანი ინტეგრებადია: არსებობს მეორე რიგის სიმეტრიის ოპერატორი $[H, R] = 0$. განცალებადცვლადებიანი მოდელების გარდა არსებობს კარგად ცნობილი ე. წ. კალოჯეროს მსგავსი სისტემების კლასი [60]. ისინი აღწერენ წრფეზე მოთავსებულ N ნაწილაკს სპეციფიკური ურთიერთქმედებით. შესაბამისი შრედინგერის განტოლება იხსნება ცვლადების სპეციალური გრადაქმნით, რომელსაც მივყავართ ცვლადთა განცალებამდე. ცოტა ხნის წინ აგებული იყო ახალი კლასი ორგანზომილებიანი ამოხსნადი სისტემებისა [49], მაგრამ ყველა ისინი სუპერინტეგრებადია და უშვებენ ცვლადთა განცალებას.

ამ პარაგრაფის დარჩენილი ნაწილი ეთმობა ზოგადი ფორმით იმის დემონსტრირებას, თუ როგორ შეიძლება სუპერსიმეტრიის საშუალებით კვანტური სისტემების ნაწილობრივი ან მთელი სპექტრის პოვნა, მიუხედავად იმისა, რომ ამ სისტემების აღმწერ ჰამილტონიანებში ადგილი არა აქვს ცვლადთა განცალებას ჩვეულებრივი გაგებით. ამის საშუალებას იძლევა ე. წ. ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალება [36] და მას ადგილი აქვს მაშინ, როცა სუპერპარტნიორ ჰამილტონიანებში $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ცვლადები არ იყოფა, მაგრამ იყოფა სუპერმუხტში. ზოგადი სქემა ასეთია. დავუშვათ, რომ ვიცით q^+ ოპერატორის ნულ მოდები,

$$q^+\Omega_n(\vec{x}) = 0; \quad n = 0, 1, ..., N; \quad q^+\overrightarrow{\Omega}(\vec{x}) = 0. \tag{204}$$

შეჯვარების თანაფარდობიდან (97) გამომდინარეობს $H^{(2)}$ ჰამილტონიანის მთავარი თვისება: Ω_n ნულ მოდების სივრცე ჩაკეტილია $H^{(2)}$ ჰამილტონიანის მოქმედების მიმართ,

$$H^{(2)}\overrightarrow{\Omega}(\vec{x}) = \hat{C}\overrightarrow{\Omega}(\vec{x}), \tag{205}$$

სადაც $\hat{C}$ მუდმივკოეფიციენტებიანი მატრიცაა. თუ ეს მატრიცა ცნობილია, და ამასთან, შეიძლება მისი დიაგონალიზაცია

$$\hat{B}\hat{C} = \hat{\Lambda}\hat{B}; \quad \hat{\Lambda} = diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_N), \tag{206}$$

მაშინ $H^{(2)}$ ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობები შეიძლება ვიპოვოთ ალგებრულად

$$H^{(2)}(\hat{B}\overrightarrow{\Omega}(\vec{x})) = \hat{\Lambda}(\hat{B}\overrightarrow{\Omega}(\vec{x})). \tag{207}$$

მაშასადამე, ჰამილტონიანის რამოდენიმე ენერგეტიკული დონე და შესაბამისი ტალღური ფუნქციები რომ ვიპოვოთ, უნდა შეგვეძლოს ორი ნაბიჯის რეალიზაცია:

(1) $\Omega_n(\vec{x})$ ნულ მოდების პოვნა;

(2) ისეთი მუდმივი $\hat{B}$ მატრიცის პოვნა, რომ $\hat{B}\hat{C} = \hat{\Lambda}\hat{B}$.

რაც შეეხება პირველ ნაბიჯს, ნულ მოდები შეიძლება ვიპოვოთ სპეციალური მსგავსების გარდაქმნის (არა უნიტარული) გამოყენებით, რომელიც საშუალებას იძლევა q^+-დან გავაქროთ პირველი რიგის წარმოებულები

$$\tilde{q}^+ = e^{-\chi(\vec{x})}q^+e^{\chi(\vec{x})} = \partial_1^2 - \partial_2^2 + \frac{1}{4}(F_1(2x_1) + F_2(2x_2)); \tag{208}$$

$$\chi(\vec{x}) = -\frac{1}{4}\bigg(\int C_+(x_+)dx_+ + \int C_-(x_-)dx_-\bigg). \tag{209}$$

როგორც ვხედავთ, $\tilde{q}^+$-ში ცვლადები გაყოფილია შეჯვარების თანაფარდობის ნებისმიერი ამონახსნისათვის. (208)-დან ნათლად ჩანს, რომ q^+ ოპერატორის ნულ მოდა უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\Omega_n(\vec{x}) = e^{\chi(\vec{x})}\eta_n(x_1)\rho_n(x_2), \tag{210}$$

სადაც $\eta_n(x_1)$ და $\rho_n(x_2)$ არიან ერთგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნები:

$$(-\partial_1^2 - \frac{1}{4}F_1(2x_1))\eta_n(x_1) = \epsilon_n\eta_n(x_1); \tag{211}$$

$$(-\partial_2^2 + \frac{1}{4}F_2(2x_2))\rho_n(x_2) = \epsilon_n\rho_n(x_2). \tag{212}$$

აქ მიზანშეწონილია გავაკეთოთ სამი შენიშვნა:

1. მსგავს გარდაქმნას, რომელიც მოვახდინეთ სუპერმუხტში ცვლადების გაყოფისათვის, არ მივყავართ ცვლადთა განცალებამდე თვითონ ჰამილტონიანში.

2. ცალკე უნდა იქნას შესწავლილი $\Omega_n(\vec{x})$ ნულ მოდების ნორმირება, ვინაიდან არაუნიტარული მსგავსი გარდაქნა ცვლის ნორმას.

3. არ გვაქვს არავითარი მიზეზი ველოდოთ ზუსტ ამოხსნადობას, მაგრამ შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ კვაზი-ზუსტად ამოხსნადობა.

ცხადია, რომ ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალების ზემოთ აღწერილი ზოგადი სქემა შეიძლება გამოყენებული იქნას წინა პარაგრაფში მიღებული ყველა პოტენციალისათვის. იმის და მიხედვით თუ რომელი სისტემისთვის იხსნება (211) და (212) განტოლებები შეიძლება ვილაპარაკოთ ამოცანის ნაწილობრივ ამოხსნაზე, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევებში ზუსტად ამოხსნადობაზეც კი. რაც შეეხება $\hat{B}$ მატრიცას, მისი პოვნა შესაძლებელია გარკვეული სპეციფიკური პროცედურებით, რაც ნაჩვენები იქნა ნაშრომებში [36], [56].

ქვემოთ მოკლედ ავღწერთ ე. წ. განზოგადებულ ორგანზომილებიან მორსის პოტენციალს

$$C_+ = 4a\alpha; \quad C_- = 4a\alpha \cdot \coth\frac{\alpha x_-}{2};$$

$$f_i(x_i) \equiv \frac{1}{4}F_i(2x_i) = -A\bigg(e^{-2\alpha x_i} - 2e^{-\alpha x_i}\bigg); \quad i = 1,2 \tag{213}$$

$$V^{(1),(2)} = \alpha^2 a(2a \mp 1)\sinh^{-2}\bigg(\frac{\alpha x_-}{2}\bigg) + 4a^2\alpha^2 + A\bigg[e^{-2\alpha x_1} - 2e^{-\alpha x_1} + e^{-2\alpha x_2} - 2e^{-\alpha x_2}\bigg];$$

სადაც $A > 0, \alpha > 0, a-$ ნამდვილია.

გასაგები რომ გახდეს პოტენციალის დასახელება, იგი ასე წარმოვადგინოთ:

$$V(\vec{x}) = V_{Morse}(x_1) + V_{Morse}(x_2) + v(x_1, x_2),$$

სადაც პირველი ორი წევრი არის სწორედ ერთგანზომილებიანი მორსის პოტენციალები, ხოლო ბოლო წევრი აკავშირებს x_1, x_2 ცვლადებს.

ერთგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლება მორსის $V_{Morse}(x)$ პოტენციალით კარგადაა ცნობილი [63], ამიტომაც ნულ მოდები ასე ჩაიწერება [36],

$$\Omega_n(\vec{x}) = \bigg(\frac{\alpha}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\xi_1\xi_2}{|\xi_2 - \xi_1|}\bigg)^{2a} \exp(-\frac{\xi_1 + \xi_2}{2})(\xi_1\xi_2)^{s_n} \cdot F(-n, 2s_n + 1; \xi_1)F(-n, 2s_n + 1; \xi_2); \tag{214}$$

$$\xi_i \equiv \frac{2\sqrt{A}}{\alpha}\exp(-\alpha x_i); \quad s_n = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - n - \frac{1}{2} > 0. \tag{215}$$

ნორმირების პირობა და ცენტრზე დაცემის არარსებობა გვაძლევს,

$$a \in (-\infty, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}); \quad s_n = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - n - \frac{1}{2} > -2a > 0$$

$\hat{C}$ მატრიცის ცხადად მისაღებად უნდა ვიმოქმედოთ $H^{(2)}$-ით Ω_n-ზე. როგორც [36] ნაშრომშია ნაჩვენები:

$$H^{(2)}\Omega_n = -2(2a\alpha^2 s_n - \epsilon_n)\Omega_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}\Omega_k = \hat{C}\Omega_n, \tag{216}$$

სადაც $a_{nk} = 0, k < n$, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ $\hat{C}$ მატრიცა აღმოჩნდა სამკუთხა, და ამიტომ, ენერგიის მნიშვნელობები ემთხვევიან $\hat{C}$ მატრიცის დიაგონალზე განლაგებულ ელემენტებს []:

$$E_k = c_{kk} = -2(2a\alpha^2 s_k - \epsilon_k).$$

ტალღური ფუნქციების განსაზღვრა გაცილებით რთულია. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ $\hat{C}$ და $\hat{B}$ მატრიცების ყველა ელემენტი. ეს პროცედურა დაწვრილებითაა აღწერილი ნაშრომებში [36], [56]. ნულ მოდებიდან აგებულ ტალღურ ფუნქციებზე და შესაბამის

საკუთარი მნიშვნელობებზე დაყრდნობით და იმის გათვალისწინებით, რომ $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ფორმა ინვარიანტული პოტენციალებია:

$$H^{(1)}(a) = H^{(2)}(a - \frac{1}{2}) + 4\alpha^2(a - \frac{1}{4}), \tag{217}$$

შეიძლება ავაგოთ დამატებითი ტალღური ფუნქციები და ენერგიები ისევე, როგორც ერთი განზომილების შემთხვევაში:

$$\begin{aligned} & H^{(1)}(a)\Big[q^-(a)q^-(a-\frac{1}{2})...q^-(a-\frac{M-1}{2})\Psi(a-\frac{M}{2})\Big] = \\ & = \Big(E_0(a-\frac{M}{2}) + \mathscr{R}(a-\frac{M-1}{2}) + ... + \mathscr{R}(a)\Big) \\ & \times\Big[q^-(a)q^-(a-\frac{1}{2})...q^-(a-\frac{M-1}{2})\Psi(a-\frac{M}{2})\Big] \end{aligned}$$

მთელი M-თვის. ანალოგიური მიდგომა მუშაობს ორგანზომილებიანი განზოგადებული პიოშლ-ტელერისა და სკარფი II [57], [56], აგრეთვე ორგანზომილებიანი პერიოდული [64] პოტენციალების შემთხვევაშიც.

იგივე პოტენციალების მაგალითზე განვიხილოთ ცვლადთა სუპერსიმეტრიული განცალების მეორე შემთხვევა, როცა პარამეტრის რაღაც კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ერთ-ერთ სუპერპარტნიორში ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას, მეორეში კი არა. პოტენციალების (213) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ როცა პარამეტრი a ღებულობს მნიშვნელობას $a_0 = -1/2$, მაშინ $H^{(2)}$ ჰამილტონიანი წარმოადგენს ორი ზუსტად ამოხსნადი ერთგანზომილებიანი მორსის პოტენციალების ჯამს.

ამ ერთგანზომილებიანი მოდელების დისკრეტული სპექტრი ტოლია:

$$\epsilon_n = -\alpha^2 s_n^2; \quad s_n \equiv \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - n - \frac{1}{2} > 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ხოლო ტალღური ფუნქციები ჩაიწერება გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის სასუალებით

$$\eta_n(x_i) = \exp(-\frac{\xi_i}{2})(\xi_i)^{s_n}F(-n, 2s_n+1; \xi_i); \quad \xi_i \equiv \frac{2\sqrt{A}}{\alpha}\exp(-\alpha x_i).$$

ცვლადების გაყოფის გამო $H^{(2)}(\vec{x})$ ჰამილტონიანისათვის სპექტრალური ამოცანა ზუსტად გადაწყდება. მისი ენერგია იქნება

$$E_{n,m} = E_{m,n} = \epsilon_n + \epsilon_m,$$

რომელიც ორჯერადადაა გადაგვარებული, როცა $n \neq m$. შესაბამისი ტალღური ფუნქციები შეიძლება ავიღოთ სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული,

$$\Psi^{(2)\,S,A}_{E_{n,m}}(\vec{x}) = \eta_n(x_1)\eta_m(x_2) \pm \eta_m(x_1)\eta_n(x_2).$$

ჩვენი თავდაპირველი მიზანია მთლიანად ამოვხსნათ სპექტრალური პრობლემა $H^{(1)}(\vec{x})$-თვის, როდესაც $a_0 = -1/2$. მთავარი იარაღი ისევ არის შეჯვარების თანაფარდობა, ანუ $H^{(1)}$ და $H^{(2)}$ ჰამილტონიანების იზოსპექტრალურობა, მაგრამ მხოლოდ ნულ მოდებისა და $q^{\pm}$ ოპერტორის სინგულარობის სიზუსტით. ზოგადად, ჩვენ შეიძლება გვქონდეს $H^{(1)}(\vec{x})$ ჰამილტონიანში სამი ტიპის მდგომარეობა:

(i). მდგომარეობა E_{nm} ენერგიით. ამ შემთხვევაში მათი შესაბამისი ტალღური ფუნქციები მიიღება $\Psi^{(2)}$-ზე q^{+} ოპერატორის მოქმედებით.

(ii). მდგომარეობა, რომელიც არაა $H^{(2)}(\vec{x})$-ში, მაგრამ არის $H^{(1)}(\vec{x})$-ში რადგანაც ერთდროულად არის q^{-} ოპერატორის ნულ მოდა.

(iii). მდგომარეობა, რომელიც q^{-} ოპერატორის მოქმედების შემდეგ ხდება არანორმირებული.

ჩვენ თანმიმდევრობით უნდა გავაანალიზოთ შესაძლო ბმული მდგომარეობების ეს სამი კლასი.

(i). შეჯვარების თანაფარდობის თანახმად $H^{(1)}$ ტალღური ფუნქციები E_{nm} ენერგიით ორჯერადადაა გადაგვარებული $\Psi^{(1)}_{E_{nm}} = q^{+}\Psi^{(2)}_{E_{nm}}$. მაგრამ q^{+} ოპერატორი შეიცავს სინგულარობას $x_1 = x_2$ წრფეზე, ამიტომაც $\Psi^{(1)}_{E_{n,m}}$ ფუნქციის ნორმირება ძლიერაა დამოკიდებული $\Psi^{(2)}_{E_{n,m}}$ ფუნქციის ყოფაქცევაზე $\xi_1 = \xi_2$ წრფეზე. მტკიცდება, რომ მხოლოდ ანტისიმეტრიული $\Psi^{(2)}$ ტალღური ფუნქციებისათვის მიიღება ნორმირებული $\Psi^{(1)}$ ფუნქციები, რომლებიც იქნებიან სიმეტრიულები. ეს ფაქტი ნაჩვენებია [38]-ში როგორც პირდაპირი, ასევე არაპირდაპრი-სიმეტრიის $R^{(1)}$ ოპერატორების გამოყენების გზით.

არაპირდაპირი გზით სარგებლობისას გამოიყენება ის ფაქტი, რომ სიმეტრიის ოპერატორი $R^{(1)} = q^{-}q^{+}$, როცა $a_0 = -1/2$, შეიძლება ჩაწერილი იქნას, როგორც $H^{(1)} = h_1(x_1) + h_2(x_2)$ ჰამილტონიანის შემადგენელი ორი $h_1(x_1)$, $h_2(x_2)$ ერთგანზომილებიანი მორსის ჰამილტონიანების საშუალებით

$$R^{(1)} = \Big(h_1(x_1) - h_2(x_2)\Big)^2 + 2\alpha^2\Big(h_1(x_1) + h_2(x_2)\Big) + \alpha^4.$$

ამიტომ

$$R^{(1)}\Psi^{(1)A}_{E_{n,m}}(\vec{x}) = r_{n,m}\Psi^{A}_{E_{n,m}}(\vec{x});\; r_{n,m} = \alpha^4[(n-m)^2 - 1][(s_n + s_m)^2 - 1],$$

და

$$\|\Psi^{(2)S}_{E_{n,m}}\|^2 = \langle \Psi^{(1)A}_{E_{n,m}} \mid q^- q^+ \mid \Psi^{(1)A}_{E_{n,m}} \rangle = r_{n,m} \|\Psi^{(1)A}_{E_{n,m}}\|^2.$$

თუ $n = m$, $\Psi^{(1)S}_{E_{n,n}}$ ფუნქცია ტრივიალური მოსაზრებებიდან გამომდინარე იგივურად ნულის ტოლია. ნათელია აგრეთვე, რომ $\Psi^{(1)S}_{E_{n,n\pm 1}}$ ასევე ნულია. ყველა დანარჩენი n, m,-თვის $\Psi^{(1)S}_{E_{n,m}}$ ფუნქციის ნორმა დადებითი და სასრულია, ამასთან, ეს მდგომარეობები არაა გადაგვარებული.

(ii). $H^{(1)}$ ჰამილტონიანის ასეთი შესაძლო ბმული მდგომარეობები წარმოადგენენ q^- ოპერატორის ნორმირებულ ნულ მოდებს, რომლებიც ამ ოპერატორში ცვლადების განცალების გამო ზუსტადაა ცნობილი. [38]-ის თანახმად ისინი არსებობენ მხოლოდ a-ს დადებითი მნიშვნელობისათვის

$$a \in (\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,, +\infty),$$

რომელიც არ შეიცავს $a_0 = -1/2$. ანუ ამ კლასის ბმული მდგომარეობები $H^{(1)}$ ჰამილტონიანს არ გააჩნია.

(iii). ცალკე უნდა იქნას შესწავლილი q^- ოპერატორის მოქმედება ზოგადად $H^{(1)}$ ჰამილტონიანის საკუთარ ფუნქციებზე სინგულარობის წრფეზე $x_1 = x_2$. ნაშრომში [38] ეს მოქმედება შესწავლილი იქნა მოსახერხებელ კოორდინატებზე გადასვლით, და ნაჩვენებია, რომ q^- ოპერატორის მოქმედება $H^{(1)}$ ჰამილტონიანის შესაძლო ნორმირებულ ფუნქციაზე არ ცვლის ნორმირებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ არც მესამე კლასის ტალღური ფუნქციები არ არსებობს.

ყველაფრის შეჯამების შემდეგ ვასკვნით, რომ $H^{(1)}$ ჰამილტონიანი, როცა $a_0 = -1/2$, შეიცავს მხოლოდ $E_{nm} |n-m| > 1$ ენერგიის მქონე ბმულ მდგომარეობებს. ეს სპექტრი შემოსაზღვრულია $s_n > 0, s_m > 0$ პირობით, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $n, m < \sqrt{A}/\alpha - 1/2$.

ფორმა ინვარიანტობის თვისების გამოყენებით ზემოთ მოყვანილი შედეგები შეიძლება გავაფართოვოთ მორსის პოტენციალების მთელ იერარქიაზე, რომლებისთვისაც $a_k = -(k + 1)/2$ სადაც $k = 0, 1, ...$ ამ იერარქიის ელემენტები ავღნიშნოთ $H^{(1)}(\vec{x}; a_k)$, $H^{(2)}(\vec{x}; a_k)$. ყველა ეს ჰამილტონიანი ფორმა ინვარიანტულობის გამო ზუსტად ამოხსნადია,

$$H^{(1)}(\vec{x}; a_{k-1}) = H^{(2)}(\vec{x}; a_k);\ k = 1, 2, \ldots. \tag{218}$$

ეს ნიშნავს, რომ შეიძლება ავაგოთ ჰამილტონიანთა შემდეგი ჯაჭვი (იერარქია),

$$H^{(2)}(\vec{x};a_0) \div H^{(1)}(\vec{x};a_0) = H^{(2)}(\vec{x};a_1) \div H^{(1)}(\vec{x};a_1) = \ldots \div H^{(2)}(\vec{x};a_{k-1}) = H^{(1)}(\vec{x};a_k) \div H^{(1)}(\vec{x};a_k), \tag{219}$$

სადაც ნიშანი sign $\div$ აღნიშნავს შეჯვარებას $q^{\pm}(a_i)$ ოპერატორით.

ზოგადად, ფუნქცია

$$\Psi^{(1)}_{E_{n,m}}(\vec{x};a_k) = q^{+}(a_k)\Psi^{(2)}_{E_{n,m}}(\vec{x};a_k) = q^{+}(a_k)q^{+}(a_{k-1})\ldots q^{+}(a_0)\Psi^{(2)A}_{E_{n,m}}(\vec{x};a_0), \tag{220}$$

თუ ის ნორმირებულია, არის $H^{(1)}(\vec{x};a_k)$-ის საკუთარი ფუნქცია $E_{n,m} = -\alpha^2(s_n^2 + s_m^2)$ ენერგიით.

აუცილებელია ვაკონტროლოთ Ψ ფუნქციისა q^{+} ოპერატორის ნულ მოდების ნორმირება. ეს კონტროლი შეიძლება მოვახდინოთ ალგებრულად იმ იგივეობის გამოყენებით, რომელიც გამომდინარეობს (218) ტოლობიდან და რომლის თანახმადაც

$$R^{(2)}(a_k) - R^{(1)}(a_{k-1})$$

უნდა იყოს $H^{(1)}(\vec{x};a_k)$-ს პროპორციული. პირდაპირი გამოთვლები გვაჩვენებს, რომ

$$q^{-}(a_k)q^{+}(a_k) = q^{+}(a_{k-1})q^{-}(a_{k-1}) + \alpha^2(2k+1)\Big[2H^{(1)}(\vec{x};a_{k-1}) + \alpha^2(2k^2+2k+1)\Big]. \tag{221}$$

ეს განტოლება იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ ტალღური ფუნქციის ნორმა. შედეგები ასეთია: $H^{(1)}(\vec{x};a_k)$ ჰამილტონიანის სპექტრი არაა გადაგვარებული, ისინი შეიცავენ ბმულ მდგომარეობებს $E_{n,m}, |n-m| > k+2$.

დამატება

[40] მოყვანილი მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ განტოლება (137):

$$L(A_- - A_+)(A_- - A_+)[M''_+(A_+) - M''_-(A_-)] + 2L''(A_- - A_+)(A_- - A_+)[M_+(A_+) - M_-(A_-)] -$$
$$-3L'(A_- - A_+)[M'_+(A_+) + M'_-(A_-)] = 0. \tag{222}$$

პირველ ყოვლისა განვმარტოთ ახალი ცვლადები $\tau = (A_- - A_+)/2, \rho = -(A_- + A_+)/2$ და ახალი ფუნქციები $M_{\pm}(A_{\pm}), \eta(\tau)$:

$$M_-(A_-) = \frac{\partial}{\partial\tau}N(\tau-\rho), \quad M_+(A_+) = \frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau+\rho), \quad L(A_- - A_+) = [\frac{\partial\eta(\tau)}{\partial\tau}]^{-2}. \tag{223}$$

მაშინ, (222) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$(K-N)''' + (3\eta'^{-2}\eta''^{2} - \eta'^{-1}\eta''')(K-N)' - 3\eta'^{-1}\eta''(K-N)'' = 0 \tag{224}$$

(აქ და ქვემოთ, წარმოებული ნიშნავს მხოლოდ τ ცვლადით). კიდევ ერთი ახალი ფუნქცია M, განსაზღვრული როგორც $(K-N)' \equiv M\eta'$, საშუალებას იძლევა გადავწეროთ (224) შემდეგი სახით: $M''\eta' - M\eta'' = 0$, ანუ

$$(M'/\eta')' = 0.$$

მაშასადამე, მიიღება ფუნქციონალური განტოლება

$$K(\tau+\rho) - N(\tau-\rho) = c_1(\rho)\eta^2(\tau) + c_2(\rho)\eta(\tau) + c_3(\rho), \tag{225}$$

$c_k(\rho)$ ნებისმიერი ფუნქციით. ამ განტოლების ორივე მხარე გავშალოთ ρ-ს ხარისხებად, შედეგად მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{gathered} K(\tau) - N(\tau) = c_1(0)\eta^2(\tau) + c_2(0)\eta(\tau) + c_3(0), \\ (d/d\tau)^k[K(\tau) - (-1)^k N(\tau)] = c_1^{(k)}(0)\eta^2(\eta) + c_2^{(k)}\eta(\tau) + c_3^{(k)}(0). \end{gathered} \tag{226}$$

ის შეიცავს სამ განტოლებას:

$$K(\tau) - N(\tau) = c_1(0)\eta^2(\tau) + c_2(0)\eta(\tau) + c_3(0), \tag{227}$$

$$(K(\tau) - N(\tau))'' = c_1''(0)\eta^2(\tau) + c_2''(0)\eta(\tau) + c_3''(0), \tag{228}$$

$$(K(\tau) - N(\tau))^{(IV)} = c_1^{(IV)}(0)\eta^2(\tau) + c_2^{(IV)}(0)\eta(\tau) + c_3^{(IV)}(0). \tag{229}$$

(227)-(228) და (228)-(229) მივიღებთ განტოლებებს $\eta'^2(\tau)$ და $\eta''(\tau)$ მიმართ:

$$c_1(0)(\eta^2(\tau))'' + c_2(0)\eta''(\tau) = c_1''(0)\eta^2(\tau) + c_2''(0)\eta(\tau) + c_3''(0), \tag{230}$$

$$c_1''(0)(\eta^2(\tau))'' + c_2''(0)\eta''(\tau) = c_1^{(IV)}(0)\eta^2(\tau) + c_2^{(IV)}(0)\eta(\tau) + c_3^{(IV)}(0). \tag{231}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(\eta^2(\tau))'' = 2(\eta'^2(\tau) + \eta(\tau)\eta''(\tau))$ და $d \equiv c_2(0)c_1''(0) - c_2''(0)c_1(0) \neq 0$, გვექნება:

$$d\eta''(\tau) = e\eta^2(\tau) + a_1\eta(\tau) + b_1, \tag{232}$$

$$-d\eta'^2(\tau) = e\eta^3(\tau) + a_2\eta^2(\tau) + b_2\eta(\tau) + b_3, \tag{233}$$

სადაც და $e, a_1, b_1, a_2, b_2, b_3$ მუდმივები აგრეთვე გამოისახებიან (230)-(231) განტოლებებში შემავალი მუდმივებით.

(233)-დან $\eta''(\tau)$ ფუნქციის (232) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ ვადგენთ, რომ $e = 0$, ე.ი. (226) სისტემა სრულდება მაშინ, როცა η ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\eta'^2 = a\eta^2 + 2b\eta + c, \tag{234}$$

სადაც a, b, c - ნებიმიერი მუდმივებია, რომლებიც შეიძლება ჩავწეროთ ძველი მუდმივებით.

როდესაც $c_2(0)c_1''(0) - c_2''(0)c_1(0) = 0$, ამ ტოლობიდან $c_2''(0)$-ის მნიშვნელობა ჩავსვათ (230) განტოლებაში:

$$c_1(0)(c_1(0)\eta^2 + c_2(0)\eta)'' = c_1''(0)(c_1(0)\eta^2 + c_2(0)\eta) + c_1(0)c_3''(0). \tag{235}$$

ვინაიდან η განმარტებულია დამატებითი მუდმივის სიზუსტით, (235) გვაძლევს:

$$\eta^{2''} = 4d_2\eta^2 + 2d_0, \tag{236}$$

ან მის ექვივალეტური

$$\eta'^2 = d_2\eta^2 + d_0 + d_1\eta^{-2}. \tag{237}$$

მაშასადამე, (225) ფუნქციონალური განტოლების შესასრულებლად უნდა სრულდებოდეს (234) ან (237). (225) განტოლების მარჯვენა მხარის ორჯერ წარმოებული τ და ρ ცვლადებით ტოლი უნდა იყოს ერთმანეთის, რასაც მივყავართ $c_k(\rho)$ ფუნქციების განმსაზღვრელ განტოლებებამდე. როდესაც η აკმაყოფილებს (234) განტოლებას, ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას:

$$c_1''(\rho) = 4ac_1(\rho), \quad c_2''(\rho) - ac_2(\rho) = 6bc_1(\rho), \quad c_3''(\rho) = 2cc_1(\rho) + bc_2(\rho). \tag{238}$$

როცა η აკმაყოფილებს (237), მაშინ გვაქვს:

$$c_2(\rho) = 0, \quad c_1''(\rho) = 4d_2c_1(\rho), \quad c_3''(\rho) = 2d_0c_1(\rho). \tag{239}$$

ამ განტოლებების ამონახსნები უნდა ჩავსვათ (225)-ში და განვსაზღვროთ K და N ფუნქციების მნიშვნელობები. და ბოლოს, ვპოულობთ $L(A_- - A_+), M_\pm$ და (136) განტოლების თანახმად, ვღებულობთ (138)-(144) განტოლებებს $A_\pm$ ფუნქციებისათვის.

თავი III. სამგანზომილებიანი ფორმა ინვარიანტული არაგანცალებადცვლადიანი სისტემა ეკვიდისტანციური სპექტრით

როგორც წინა თავში იყო აღნიშნული, მრავალგანზომილებიან ერმიტულ სუპერსიმეტრიულ კვანტურ მექანიკას პირველი რიგის სუპერმუხტებით მივყავართ განცალებადცვლადიან კვანტურ სისტემებთან. სიტუაცია ნაკლებად შეზღუდული და გაცილებით უფრო საინტერესოა კომპლექსური პოტენციალებისათვის - პირველი რიგის სუპერმუხტმა შეიძლება დააკავშიროს არატრივიალური ჰამილტონიანები, რომლებიც არ უშვებენ ცვლადთა განცალებას. სწორედ ასეთი შესაძლებლობა იქნა რეალიზებული ორი განზომილების შემთხვევაში ნაშრომებში [50].

ამ თავში განვიხილავთ სამგანზომილებიან სუპერპარტნიორ ჰამილტონიანებს ოსცილატორის მსგავსი ფორმა ინვარიანტობით. ნაჩვენებია, რომ ცვლადთა განცალებას ადგილი შეიძლება არ ქონდეს მხოლოდ კომპლექსური პოტენციალებისათვის, მაგრამ მათი სპექტრი ნამდვილია და ეკვიდისტანციური. სპეციალური შემთხვევა ასეთი პოტენციალებისათვის კვადრატული ურთიერთქმედებით ამოხსნილია ბოლომდე. აღმოჩნდა, რომ ეს ჰამილტონიანი მასში შემავალი პარამეტრებისა და ცვლადების მარტივი გარდაქმნით ზუსტად ემთხვევა [48]-ში მიღებულ ჰამილტონიანს, სადაც სუპერსიმეტრიული გარდაქმნა ხორციელდება სამგანზომილებიანი სისტემებისათვის, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ გარდაქმნის ოპერატორი მეორე რიგისაა. შესწავლილია ამ სისტემის სიმეტრიის თვისებები და ენერგეტიკული დონეების გადაგვარება. ნაჩვენებია, რომ სისტემის ჰამილტონიანი არადიაგონალიზებადია და ანალიზურდაა აგებული მისი ტალღური და შესაბამისი ასოცირებული ფუნქციები.

ამ თავის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომში [65].

§3.1 შეჯვარების თანაფარდობა ზოგად შემთხვევაში

შეჯვარების თანაფარდობა ოსცილატორის მსგავსი ფორმა ინვარიანტობის მქონე ჰამილტონიანისათვის პირველი რიგის სუპერმუხტით

$$HA^{+} = A^{+}(H + 2\lambda), \tag{240}$$

$$A^+ = a_i(\vec{x})\partial_i + a(\vec{x}), \;\; H = -\partial_i^2 + V(\vec{x}), \;\; i = 1, 2, 3.$$

ეკვივალენტურია საკოეფიციენტო ფუნქციებისა $a_i(\vec{x}), a(\vec{x})$ და $V(\vec{x})$ პოტენციალისათვის დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემის:

$$\partial_k a_i(\vec{x}) + \partial_i a_k(\vec{x}) = 0; \tag{241}$$

$$\triangle^{(3)} a_i(\vec{x}) + 2\partial_i a(\vec{x}) = -2\lambda a_i(\vec{x}); \tag{242}$$

$$\triangle^{(3)} a(\vec{x}) + a_i(\vec{x})\partial_i V(\vec{x}) = -2\lambda a(\vec{x}), \tag{243}$$

სადაც $\triangle^{(3)}$ არის სამგანზომილებიანი ლაპლასიანი. (241)-დან ადვილად შეიძლება დავადგინოთ, რომ:

$$\partial_1^2 a_k(\vec{x}) = \partial_2^2 a_k(\vec{x}) = \partial_3^2 a_k(\vec{x}) = 0, \;\; k = 1, 2, 3 \tag{244}$$

და ამიტომ (242)-დან გამომდინარეობს, რომ:

$$\partial_i a(\vec{x}) = -\lambda a_i(\vec{x}). \tag{245}$$

ეს განტოლებები ურთიერთ შეთანხმებულია, თუ სრულდება პირობა:

$$\partial_i a_k(\vec{x}) = \partial_k a_i(\vec{x}), \;\; i \neq k. \tag{246}$$

მაშინ (241)-ის თანახმად გვექნება, რომ $a_i = const$, რის შემდეგაც (245)-დან ადვილად ვიპოვით, რომ:

$$a(\vec{x}) = -\lambda a_i x_i, \tag{247}$$

სადაც i მუნჯი ინდექსია და ინტეგრების შესაძლო მუდმივა ტოლობის მარჯვენა მხარეში უგულებელყოფილია, რაც მიიღწევა კოორდინატის საჭირო ტრანსლაციით. დარჩენილი (243) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$a_i \partial_i V(\vec{x}) = 2\lambda^2 a_i x_i. \tag{248}$$

ვეძებოთ $V(\vec{x})$ შემდეგი სახით: $V(\vec{x}) = \lambda^2 x_k^2 + v(\vec{x})$. მაშინ (248)-დან გვექნება:

$$a_i \partial_i v(\vec{x}) = 0, \tag{249}$$

ცხადია, რომ a_i სამი მუდმივიდან ორი მაინც უნდა განსხვავდებოდეს ნულისაგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში ცვლადები ჰამილტონიანში გაიყოფოდნენ. სიცხადისათვის დავუშვათ, რომ $a_1 a_2 \neq 0$ რასაც მივყავართ (249) განტოლების ზოგად ამოხსნამდე:

$$v(\vec{x}) = u(a_2 x_1 - a_1 x_2, a_3 x_1 - a_1 x_3) \tag{250}$$

და ჰამიტონიანისათვის მივიღებთ:

$$H = -\partial_i^2 + \lambda^2 \vec{x}^2 + u(a_2x_1 - a_1x_2, a_3x_1 - a_1x_3). \tag{251}$$

ჰამილტონიანის (251) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ცვლადთა განცალებისათვის ბუნებრივია შემოვიტანოთ შემდეგი ახალი ცვლადები:

$$y_1 = a_2x_1 - a_1x_2,\ y_2 = a_3x_1 - a_1x_3,\ y_3 = b_ix_i, \tag{252}$$

სადაც b_i მუდმივებია. ცვლადთა ასეთი გარდაქმნა შესაძლებელია, თუ შესაბამისი იაკობიანი არ უდრის ნულს:

$$D = b_1a_1^2 + b_2a_1a_2 + b_3a_1a_3 \neq 0 \tag{253}$$

გადავწეროთ ჰამილტონიანი (251) ახალ ცვლადებში $\vec{y}$:

$$H(\vec{y}) = -(a_1^2 + a_2^2)\partial_{y_1}^2 - (a_1^2 + a_3^2)\partial_{y_2}^2 - b_i^2\partial_{y_3}^2 - 2a_2a_3\partial_{y_1}\partial_{y_2} - 2(a_2b_1 - a_1b_2)\partial_{y_1}\partial_{y_3} -$$
$$-2(a_3b_1 - a_1b_3)\partial_{y_2}\partial_{y_3} + \lambda^2x_k^2(\vec{y}) + u(y_1, y_2). \tag{254}$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ჰამილტონიანი შეიძლება დავიყვანოთ დაბალი განზომილების ორი ჰამილტონიანის ჯამზე:

$$H(\vec{y}) = H_3(y_3) + H_{12}(y_1, y_2) \tag{255}$$

თუ კი b_i მუდმივებს ავიღებთ შემდეგი პირობით:

$$b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1},\ \ b_3 = \frac{a_3b_1}{a_1}. \tag{256}$$

ამ მნიშვნელობების (253)-ში ჩასმით გვექნება $D = b_1a_i^2$. მაშასადამე, როდესაც a_i ნამდვილი მუდმივებია, D არ უდრის ნულს და ადგილი აქვს ცვლადთა განცალებას. ჩვენთვის საინტერესო შემთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ როცა $a_i^2 = 0$, ანუ a_i მუდმივების კომპლექსური მნიშვნელობებისათვის.

შეიძლება შემოწმდეს, რომ (240) შეჯვარების თანაფარდობასთან ერთად სრულდება მისი პარტნიორი თანაფარდობაც და ეს ორივე შეიძლება გაერთიანებული სახით ასე ჩაიწეროს

$$[H, A^{\pm}] = \pm 2\lambda A^{\pm}. \tag{257}$$

სადაც

$$A^{\pm} = a_i\partial_i \mp \lambda a_ix_i \tag{258}$$

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ოპერატორები $A^{\pm}$ არ არიან ერმიტულად შეუღლებულები. (257)-დან ცხადია, რომ $A^{\pm}$ წარმოადგენენ შესაბამისად დაბადების და გაქრობის ოპერატორებს 2λ ენერგიით. თუკი არსებობს განსახილველი მოდელის ძირითადი მდგომარეობა (ნულოვანი ენერგიით), ის უნდა აკმაყოფილებდეს ორ განტოლებას:

$$A^{-}\Psi_0 = (a_i\partial_i + \lambda a_i x_i)\Psi_0 = 0, \tag{259}$$

$$H\Psi_0 = E_0\Psi_0; \quad E_0 = 0. \tag{260}$$

მოსახერხებელია (259) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\Psi_0 \equiv \exp(-\lambda\vec{x}^2/2)\psi_0(\vec{x}). \tag{261}$$

(259) განტოლებაში ჩასმის შემდეგ ახალი ფუნქცია ψ_0 აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$a_i\partial_i\psi_0(\vec{x}) = 0,$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$\psi_0(\vec{x}) = \psi_0(a_2x_1 - a_1x_2, a_3x_1 - a_1x_3).$$

მაშასადამე, $\Psi_0 = \exp(-\lambda\vec{x}^2/2)\psi_0(a_2x_1 - a_1x_2, a_3x_1 - a_1x_3)$. ეს ფუნქცია უნდა ჩავსვათ (260)-ში და მივიღებთ განტოლებას:

$$-\triangle^{(3)}\psi_0 + 2\lambda x_i\partial_i\psi_0 + u\psi_0 = -3\lambda\psi_0, \tag{262}$$

საიდანაც უნდა ვიპოვოთ ψ_0 ფუნქცია, რაც არ წარმოადგენს მარტივ ამოცანას. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ვიმოქმედოთ პირიქით, გამოვსახოთ u ფუნქცია ψ_0-ით. ამ მიზნისათვის ჩავწეროთ ψ_0 ექსპონენციალური ფორმით

$$\psi_0 \equiv \exp W(y_1, y_2)$$

და (262)-დან ვპოულობთ, რომ:

$$u = (\partial_i W(\vec{x}))^2 + \triangle^{(3)}W(\vec{x}) - 2\lambda x_i\partial_i W - 3\lambda. \tag{263}$$

მაშასადამე, ჰამილტონიანს

$$H = -\triangle^{(3)} + \lambda^2\vec{x}^2 + (\partial_i W(\vec{x}))^2 + \triangle^{(3)}W(\vec{x}) - 2\lambda x_i\partial_i W - 3\lambda \tag{264}$$

ნებისმიერი W ფუნქციით გააჩნია ნულოვანი ენერგიის მქონე ძირითადი მდგომარეობის საკუთარი ფუნქცია:

$$\Psi_0 = \exp(-\lambda \vec{x}^2/2 + W(a_2x_1 - a_1x_2, a_3x_1 - a_1x_3)), \tag{265}$$

ხოლო $E_n = 2\lambda n$ ენერგიის მქონე შეშფოთებული მდგომარეობების საკუთარი ფუნქციები აიგება დაბადების ოპერატორით და განსახილველი $a_i^2 = 0$ შემთხვევისათვის გვექნება:

$$\Psi_n = (A^+)^n \Psi_0 = (-2\lambda)^n (a_i x_i)^n \Psi_0. \tag{266}$$

$A^\pm$ ოპერატორების (258) განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$[A^+, A^-] = 2\lambda a_i^2 = 0 \tag{267}$$

და ამიტომ არა მარტო ძირითადი მდგომარეობა, არამედ ყველა შეშფოთებული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციები ქრება A^- ოპერატორის მოქმედებით:

$$A^- \Psi_n = 0. \tag{268}$$

(264) ზოგადი მოდელის სრული ანალიზი ძალიან რთულია. კერძოდ, არ არსებობს არავითარი გარანტია, რომ შეშფოთებული მდგომარეობები ამოიწურება (266) ფორმულით. ამ მიზეზის გამო მომდევნო პარაგრაფში უფრო დეტალურად განვიხილავთ აღნიშნული მოდელის კერძო შემთხვევას.

§3.2 კერძო შემთხვევა - ჰამილტონიანი კვადრატული ურთიერთქმედებით

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა სისტემის პარამეტრებია $a_3 = 0, a_1 = 1, a_2 = -i$, ხოლო W აქვს უმარტივესი ფორმა, რომელსაც მივყავართ კვადრატულ ურთიერთქმედებამდე

$$W(a_2x_1 - a_1x_2, x_3) = g(x_1 - ix_2)x_3 = g\bar{z}x_3,$$

სადაც g ურთიერთქმედების მუდმივაა, $z = x_1 + ix_2, \bar{z} = x_1 - ix_2$. ამ შემთხვევაში (258), (264) და (265)-დან გვექნება:

$$H = -\partial_i^2 + \lambda^2 x_i^2 + g^2\bar{z}^2 - 4\lambda g\bar{z}x_3 - 3\lambda, \tag{269}$$

$$A^\pm = 2\partial_z \mp \lambda\bar{z}, \tag{270}$$

$$\Psi_0 = \exp(-\lambda\vec{x}^2/2 + g\bar{z}x_3), \tag{271}$$

სადაც z და $\bar{z}$ ცვლადების ურთიერთდამოუკიდებლობა იძლევა (267) ტოლობის შესრულების გარანტიას, ხოლო როცა $\lambda > |g|$, ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში ექსპონენციალურად მიისწრაფის ნულისაკენ.

ჰამილტონიანი (269) ზუსტად ემთხვევა სამგანზომილებიან ჰამილტონიანს სტატიიდან [48], თუკი ამ სტატიის (35) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $b = 2\lambda, b_3 = 2g$ i $x_2 \to -x_2$. ამ სტატიის აღნიშვნებში მოვახდინოთ კიდევ ერთი ცვლილება $Q^{\pm} \leftrightarrow Q^{\mp}$. მაშინ (269) ჰამილტონიანი აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$[H, Q^{\pm}] = \pm 4\lambda Q^{\pm}, \tag{272}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
&Q^{-} = \partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 + C_i\partial_i + B, \\
&Q^{+} = \partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - C_i\partial_i + B - \partial_i C_i, \\
&C_1 = bx_1 - b_3x_3 = 2(\lambda x_1 - gx_3), \\
&C_2 = bx_2 + ib_3x_3 = 2(\lambda x_2 + igx_3), \\
&C_3 = -bx_3 + b_3\bar{z} = 2(-\lambda x_3 + g\bar{z}), \\
&B = \frac{b^2}{4}(z\bar{z} - x_3^2) - \frac{b_3^2}{4}\bar{z}^2 + \frac{b}{2} = \lambda^2(z\bar{z} - x_3^2) - g^2\bar{z}^2 + \lambda, \\
&C_i\partial_i = 2\lambda(z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}} - x_3\partial_3) - 4gx_3\partial_z + 2g\bar{z}\partial_3.
\end{aligned} \tag{273}$$

H ჰამილტონიანისათვის (272) შეჯვარების თანაფარდობას ისევ აქვს ოსცილატორის მსგავსი ფორმა ინვარიანტობის სახე მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ Q^{+} ოპერატორი ენერგეტიკულ დონეებს ცვლის ორჯერ მეტი სიდიდით, ვიდრე პირველი რიგის ოპერატორი. უმცირესი ენერგიის მქონე მდგომარეობა შეესაბამება Q^{-} ოპერატორის ნულ მოდას, რომლის ნახვაც ადვილია. მართლაც, პირდაპირ გამოთვლებს მივყავართ შემდეგ გამოსახულებებამდე:

$$Q^{-} = \Psi_0(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2)\Psi_0^{-1}, \tag{274}$$

$$Q^{+} = Q^{-} - 2\lambda - 2C_i\partial_i, \tag{275}$$

ამიტომ (271) ფორმულით განსაზღვრული ძირითადი მდგომარეობა Ψ_0 ანიჰილირდება როგორც A^{-}, ასევე Q^{-} ოპერატორის მოქმედებითაც. შეიძლება შემოწმდეს, რომ Q^{-} ოპერატორის სხვა შესაძლო ნულ მოდები არ შეიძლება ამავდროულად იყოს H ჰამილტონიანის ტალღური ფუნქციაც.

ცხადია, რომ $(A^+)^2\Psi_0$ და $Q^+\Psi_0$ არიან H ჰამილტონიანის ტალღური ფუნქციები ერთიდაიმავე 4λ ენერგიით. გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ

$$Q^+\Psi_0 = -2(\lambda\Psi_0 + C_i\partial_i\Psi_0) = -2\lambda[1 + 2\lambda(x_3^2 - z\bar{z})]\Psi_0 - 8\lambda g^2\bar{z}^2\Psi_0, \tag{276}$$

ე. ი. 4λ ენერგიის მეორე შეშფოთებულ ენეგეტიკულ დონეზე არსებობს გადაგვარება ორი დამოუკიდებელი ტალღური ფუნქციით

$$\Psi_2 = (A^+)^2\Psi_0 \sim \bar{z}^2\Psi_0, \;\; \widetilde{\Psi}_2 = [1 + 2\lambda(x_3^2 - z\bar{z})]\Psi_0. \tag{277}$$

ანალოგიურად შეიძლება გამოვთვალოთ $Q^+\Psi_n(\vec{x})$ ფორმის უფრო მაღალი ენერგეტიკული დონის ტალღური ფუნქციები. (266) ფორმულის თანახმად, მოცემული კერძო შემთხვევისათვის გვექნება, რომ $\Psi_n \sim (z)^n\Psi_0$, და:

$$\begin{aligned} &Q^+\bar{z}^n\Psi_0 = (Q^+ - 2\lambda - 2C_i\partial_i)\bar{z}^n\Psi_0 = -2\lambda\bar{z}^n\Psi_0 - 2\bar{z}^nC_i\partial_i\Psi_0 - 2\Psi_0C_i\partial_i\bar{z}^n = \\ &= -2\lambda[2n + 1 + 2\lambda(x_3^2 - z\bar{z})]\bar{z}^n\Psi_0 - 4\lambda g^2\bar{z}^{2+n}\Psi_0. \end{aligned} \tag{278}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი n-თვის, ფუნქცია

$$\widetilde{\Psi}_n \equiv [2n + 1 + 2\lambda(x_3^2 - z\bar{z})]\bar{z}^n\Psi_0 \tag{279}$$

არის H ჰამილტონიანის ტალღური ფუნქცია $2\lambda n + 4\lambda$ ენერგიით და გადაგვარებულია Ψ_{n+2} ფუნქციასთან ერთად. ეს არის საერთო სიტუაცია: Q^+ ოპერატორის მოქმედებას მივყავართ ენერგეტიკული დონის გადაგვარებამდე. გადაგვარებული ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi_{kn} = (Q^+)^k(A^+)^n\Psi_0; \quad \Psi_{0n} \equiv \Psi_n; \quad E_{kn} = 2\lambda(n + 2k), \tag{280}$$

რომლის გადაგვარების ჯერადობაა $N = k + 1 + [n/2]$. აუცილებელია აღინიშნოს, რომ დაბადების ოპერატორების თანმიმდევრობას (280) ფორმულაში არავითარი მნიშვნელობა არაა აქვს საბოლოო შედეგზე, რაც გამომდინარეობს $Q^\pm$ და $A^\pm$ ოპერატორებს შორის კომუტაციური თანაფარდობიდან:

$$[A^+, Q^-] = 4\lambda A^-, \;\; [A^-, Q^+] = -4\lambda A^+; \tag{281}$$

$$[A^+, Q^+] = [A^-, Q^-] = 0. \tag{282}$$

შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ $Q^\pm$ და $A^\pm$ ოპერატორების კომბინაციით მიღებული წარმოებულით მესამე რიგის ოპერატორები მოგვცემენ დამატებით გადაგვარებას რომელიმე

დონეზე, ვინაიდან ისინიც აკმაყოფილებენ ოსცილატორის მსგავს ფორმა ინვარიანტულ შეჯვარების თანაფარდობას:

$$[H, A^+Q^-] = -2\lambda A^+Q^-, \;\; [H, Q^-A^+] = -2\lambda Q^-A^+; \tag{283}$$

$$[H, A^-Q^+] = 2\lambda A^-Q^+, \;\; [H, Q^+A^-] = 2\lambda Q^+A^-; \tag{284}$$

$$[H, A^+Q^+] = 6\lambda A^+Q^+, \;\; [H, A^-Q^-] = -6\lambda A^-Q^-. \tag{285}$$

მიუხედავად ამ თანაფარდობებისა, დამატებით გადაგვარებას ადგილი არა აქვს, რადგანაც

$$A^+Q^-\Psi_n = A^+\Psi_0(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2)\bar{z}^n = 0, \tag{286}$$

$$Q^-A^+\Psi_n = (A^+Q^- - 4\lambda A^-)\Psi_n = 0, \tag{287}$$

$$A^-Q^+\Psi_n = A^-(Q^- - 2\lambda - 2C_i\partial_i)\Psi_n =$$

$$= -2A^-C_i\partial_i\Psi_n = -2(C_i\partial_i A^- + 2\lambda A^+)\Psi_n = -4\lambda A^+\Psi_n, \tag{288}$$

$$Q^+A^-\Psi_n = 0, \tag{289}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მესამე რიგის ოპერატორის მოქმედება ახალს არაფერს არ იძლევა.

§3.3 სიმეტრიები

ენერგეტიკული დონეების გადაგვარება, რომელიც აღწერილი იყო წინა პარაგრაფში მიუთითებს იმაზე, რომ არსებობს ჰამილტონიანის გარკვეული სიმეტრიები. მართლაც, (257) და (272) კომუტაციურ თანაფარდობებს პირდაპირ მივყავართ სიმეტრიის ოპერატორებთან, რომლებიც კომუტირებენ ჰამილტონიანთან (აღნიშვნები ცხადი გახდება ქვემოთ):

$$R_0 = A^+A^- = A^-A^+; \quad \widetilde{R}_1 = \frac{1}{2}[Q^+, Q^-]; \quad \widetilde{R}_2 = Q^+Q^-. \tag{290}$$

თითოეული ეს ოპერატორი ერთდროულად შეიცავს დაბადებისა და გაქრობის ოპერატორებს, ამიტომაც ცხადია, რომ მათი მოქმედება არ შეცვლის ენერგეტიკულ დონეს. (290)-დან პირველი ოპერატორი წარმოადგენს წარმოებულით მეორე რიგის დიფერენციალურ ოპერატორს, ხოლო დანარჩენი ორი მეოთხე რიგის ოპერატორია. მაგრამ $\widetilde{R}_1$ ოპერატორის რიგი შეიძლება დავიყვანოთ ორამდე. მართლაც, გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ გვექნება:

$$\widetilde{R}_1 = [\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2, C_i]\partial_i - C_i\partial_i B = 2[b\partial_i^2 - 2ib_3\partial_2\partial_3 + 2b_3\partial_1\partial_3] - C_i\partial_i B. \tag{291}$$

(273) ფორმულებიდან ვღებულობთ, რომ

$$C_i\partial_i B = 4\lambda(\vec{x}^2 - g^2\bar{z}^2 - 2\lambda g\bar{z}x_3),$$

რომლის ჩასმითაც (291)-ში გვექნება

$$\widetilde{R}_1 = -4\lambda H + 16g\partial_z\partial_3 + 8g\lambda\bar{z}(g\bar{z} - \lambda x_3) - 12\lambda^2. \tag{292}$$

მაშასადამე, $\widetilde{R}_1$-ის ნაცვლად უფრო მოსახერხებელია სიმეტრიის ოპერატორად ავიღოთ მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორი

$$R_1 = 2\partial_z\partial_3 + \lambda\bar{z}(g\bar{z} - \lambda x_3). \tag{293}$$

ასევე შეიძლება შევცვალოთ მეოთხე რიგის სიმეტრიის ოპერატორი $\widetilde{R}_2$ მესამე რიგის ოპერატორით, რომელიც პროპორციულია კომუტატორის $R_2 \sim [R_0, \widetilde{R}_2]$. (275), (281) და (282) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} R_2 &\sim [A^+A^-, Q^+]Q^- + Q^+[A^+A^-, Q^-] = A^+[A^-, Q^+]Q^- + Q^+A^-[A^+, Q^-] = \\ &= 4\lambda Q^+(A^-)^2 - 4\lambda(A^+)^2Q^- = 4\lambda Q^+(A^-)^2 - 4\lambda((A^-)^2 - 8\lambda\bar{z}\partial_z)Q^- = \\ &= 4\lambda[Q^+ - Q^-](A^-)^2 + 32\lambda^2\bar{z}\partial_z \cdot Q^- = 32\lambda^2\bar{z}\partial_z \cdot Q^- - 8\lambda(\lambda + C_i\partial_i)(A^-)^2, \end{aligned} \tag{294}$$

ანუ სიმეტრიის ოპერატორი დაიყვანება მესამე რიგის შემდეგ დიფერენციალურ ოპერატორამდე:

$$R_2 = 4\lambda\bar{z}\partial_z \cdot Q^- - (\lambda + C_i\partial_i)(A^-)^2. \tag{295}$$

გამოვთვალოთ მიღებული სიმეტრიის ოპერატორების R_0, R_1 და R_2 ერთმანეთს შორის კომუტატორები. R_0 და R_1 ოპერატორების გამოსახულებებიდან პირდაპირ ჩანს, რომ ისინი ერთმანეთთან კომუტირებენ. $[R_2, R_0]$ კომუტატორის გამოსათვლელად, თავდაპირველად (281), (282) და

$$[A^-, C_i\partial_i] = 2\lambda A^+, \ \ [A^+, C_i\partial_i] = 2\lambda A^-$$

ფორმულების გამოყენებით მივიღოთ დამხმარე ტოლობები

$$\begin{aligned} [R_2, A^+] &= 4\lambda\Big(\bar{z}\partial_z[Q^-, A^+] + [\bar{z}\partial_z, A^+]Q^-\Big) - [C_i\partial_i, A^+](A^-)^2 = \\ &= 2\lambda(-8\bar{z}\partial_z + (A^-)^2)A^-. \end{aligned} \tag{296}$$

$$[R_2, A^-] = 4\lambda\Big(\bar{z}\partial_z[Q^-, A^-] + [\bar{z}\partial_z, A^-]Q^-\Big) - [C_i\partial_i, A^-](A^-)^2 = 2\lambda A^+(A^-)^2. \tag{297}$$

აქედან კი მარტივად ვადგენთ, რომ

$$[R_2, R_0] = [R_2, A^+]A^- + A^+[R_2, A^-] = 2\lambda\bigg([-8\lambda\bar{z}\partial_z + (A^-)^2](A^-)^2 + (A^+A^-)^2\bigg) = 4\lambda R_0^2. \quad (298)$$

ეხლა განვსაზღვროთ კომუტატორი $[R_2, R_1]$. შევნიშნოთ, რომ $[R_1, \bar{z}\partial_z] = [R_1, A^\pm] = 0$. მაშინ გვექნება:

$$[R_2, R_1] = 4\lambda\bar{z}\partial_z[Q^-, R_1] - [C_i\partial_i, R_1](A^-)^2. \quad (299)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$[C_i\partial_i, R_1] = 2g(4\partial_z^2 + \lambda^2\bar{z}^2), \quad (300)$$

$$[Q^\mp, R_1] = \pm 2g(A^\mp)^2. \quad (301)$$

ამ ფორმულების გათვალისწინებით (299)-დან მივიღებთ $[R_2, R_1] = -2gR_0^2$. ჩავწეროთ ყველა ეს კომუტატორი ერთად:

$$[R_0, R_1] = 0; \quad [R_2, R_0] = 4\lambda R_0^2; \quad [R_2, R_1] = -2gR_0^2. \quad (302)$$

უფრო რთული ანუ წარმოებულებით მაღალი რიგის სიმეტრიის ოპერატორები შეიცავენ $A^\pm$ და $Q^\pm$ ოპერატორების ისეთ ნამრავლს, რომ მდგომარეობის ენერგია არ შეიცვალოს:

$$R_3 = Q^+(A^-)^2; \quad R_4 = Q^-(A^+)^2. \quad (303)$$

$A^\pm, Q^\pm$ ოპერატორების გამოსახულებებისა და მათ შორის კომუტაციური თანაფარდობის გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R_3 - R_4 = 2R_2 + 8\lambda R_0, \quad (304)$$

ასე რომ მხოლოდ ერთი, მაგალითად, R_3 შეიძლება ავიღოთ როგორც დამოუკიდებელი. მისი არანულოვანი კომუტატორები R_0, R_1, R_2 სიმეტრიის ოპერატორებთან არ იძლევა უფრო დაბალი რიგის დამოუკიდებელ სიმეტრიის ოპერატორს. პირდაპირი გამოთვლებით მტკიცდება, რომ უფრო მაღალი რიგის სიმეტრიის ოპერატორები, როგორებიცაა მაგალითად, $(A^+)^{2n}(Q^-)^n, (A^-)^{2n}(Q^+)^n$, აგრეთვე მსგავსი ოპერატორები, რომლებიც აიგება A და Q ოპერატორების ნებისმიერი თანმიმდევრობით განლაგებით, დაიყვანება ზემოთ განხილული ოთხი ოპერატორის კომბინაციებზე.

ჩვეულებრივი ერმიტული კვანტური მექანიკის კონტექსტში, ასეთ სიტუაციებს ეწოდება მაქსიმალურად სუპერინტეგერებადი [49]. სინამდვილეში, სამგანზომილებიანი

სისტემისათვის გვაქვს ერთმანეთთან კომუტირებადი სიმეტრიის ოპერატორები R_0, R_1 (სრული ინტეგრებადობა), და დამატებით კიდევ სიმეტრიის ორი ოპერატორი R_2, R_3, რომლებიც არ კომუტირებენ მათთან. ბოლო ოპერატორის კომუტატორი R_0, R_1 ოპერატორების პოლინომთან არაა ფუნქციონალურად R_0-გან დამოუკიდებელი და არ იძლევა დამატებით სიმეტრიებს.

ძალიან მნიშვნელოვანია და შეიძლება ითქვას, სასწავლიცაა ენეგეტიკული დონეების გადაგვარებასა და სიმეტრიებს შორის კავშირის თვალსაჩინოდ დანახვა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სიმეტრიის ოპერატორების Ψ_{kn} ტალღურ ფუნქციაზე მოქმედება, დაგვჭირდება გარკვეული კომუტაციური თანაფარდობები. (281), (282), (301) ფორმულების გამოყენებით ადვილია ვაჩვენოთ, რომ

$$[R_0, (Q^+)^k] = -4\lambda k (A^+)^2 (Q^+)^{k-1}, \tag{305}$$

$$[R_1, (Q^+)^k] = 2gk (A^+)^2 (Q^+)^{k-1}. \tag{306}$$

თუ ამასთან ერთად გავითვალისწინებთ, რომ $[R_0, A^+] = [R_1, A^+] = 0$ და $R_0\Psi_0 = R_1\Psi_0 = 0$, გვექნება:

$$\begin{aligned} R_0\Psi_{kn} &= (A^+)^n R_0 (Q^+)^k \Psi_0 = (A^+)^n ([R_0, (Q^+)^k] + (Q^+)^k R_0)\Psi_0 = \\ &= (A^+)^n [R_0, (Q^+)^k]\Psi_0 = -4\lambda k (Q^+)^{k-1} (A^+)^{n+2}\Psi_0 = -4\lambda k \Psi_{(k-1)(n+2)}. \end{aligned} \tag{307}$$

$$\begin{aligned} R_1\Psi_{kn} &= (A^+)^n R_1 (Q^+)^k \Psi_0 = (A^+)^n ([R_1, (Q^+)^k] + (Q^+)^k R_1)\Psi_0 = \\ &= (A^+)^n [R_1, (Q^+)^k]\Psi_0 = 2gk (Q^+)^{k-1} (A^+)^{n+2}\Psi_0 = 2gk \Psi_{(k-1)(n+2)}. \end{aligned} \tag{308}$$

განმარტების თანახმად $R_2 = [R_0, Q^+Q^-]/8\lambda$. მაშინ:

$$R_2\Psi_{kn} = \frac{1}{8\lambda}\bigg(R_0 Q^+ Q^- (Q^+)^k (A^+)^n + 4\lambda k Q^+ Q^- (Q^+)^{k-1} (A^+)^{n+2} \bigg)\Psi_0 \tag{309}$$

ამ გამოსახულების საბოლოო სახის მისაღებად განვიხილოთ ოპერატორი $Q^+Q^-(Q^+)^m$:

$$\begin{aligned} & Q^+Q^-(Q^+)^m = Q^+(Q^-Q^+)(Q^+)^{m-1} = (Q^+)^2 Q^- (Q^+)^{m-1} + 8Q^+(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-1} = \\ & = (Q^+)^3 Q^- (Q^+)^{m-2} + 8(Q^+)^2(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-2} + 8Q^+(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-1} = \\ & = (Q^+)^4 Q^- (Q^+)^{m-3} + 8(Q^+)^3(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-3} + 8(Q^+)^2(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-2} + \\ & + 8Q^+(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^{m-1} = \ldots = (Q^+)^{m+1}Q^- + 8\sum_{p=0}^{m-1}(Q^+)^{m-p}(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^p, \end{aligned} \tag{310}$$

სადაც $\widetilde{H} \equiv H + 3\lambda$ და გარდაქმნის პროცესში Q^+ და Q^- ოპერატორების ადგილების შეცვლისას გამოიყენება ტოლობა

$$[Q^+, Q^-] = -8(\lambda\widetilde{H} - 2gR_1), \tag{311}$$

რომელიც გამომდინარეობს $\widetilde{R}_1$ და R_1 სიმეტრიის ოპერატორების განმარტებებიდან. გარდავქმნათ (310)-ში შემავალი ჯამი (306) ფორმულის გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ:

$$[\widetilde{H},(Q^+)^k] = 4k\lambda(Q^+)^k. \tag{312}$$

გვექნება:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{m-1}(Q^+)^{m-p}(\lambda\widetilde{H}-2gR_1)(Q^+)^p = \lambda\sum_{p=0}^{m-1}(Q^+)^{m-p}\Big((Q^+)^p\widetilde{H}+4p\lambda(Q^+)^p\Big) - \\
&-2g\sum_{p=0}^{m-1}(Q^+)^{m-p}\Big((Q^+)^pR_1+2gp(A^+)^2(Q^+)^{p-1}\Big) = \\
&= \lambda m(Q^+)^m\Big(\widetilde{H}+2\lambda(m-1)\Big) - 2gm\Big((Q^+)^mR_1+g(m-1)(A^+)^2(Q^+)^{m-1}\Big).
\end{aligned} \tag{313}$$

ამის შემდეგ, თუ გავიხსენებთ, რომ $Q^-\Psi_0=0$, მაშინ (309)-დან მივიღებთ:

$$R_2\Psi_{kn} = 8g^2k(k-1)\Psi_{(k-2)(n+4)} - 4\lambda^2k(4k-1)\Psi_{(k-1)(n+2)}. \tag{314}$$

ანალოგიურად მივიღებთ R_3 ოპერატორისთვისაც:

$$R_3\Psi_{kn} = 16\lambda^2k(k-1)\Psi_{(k-1)(n+2)}. \tag{315}$$

ცხადია, რომ ყველა ტალღური ფუნქცია (307), (308), (314) და (315) შეესაბამებიან $E_{kn} = 2\lambda(n+2k)$ ენერგიის მქონე ერთიდაიმავე ენერგეტიკულ დონეს.

§3.4 ნორმა, სკალარული ნამრავლი, და ჰამილტონიანის არადიაგონალიზებადობა

ჰამილტონიანი (280) არაერმიტული ოპერატორია, მაგრამ იგი აკმაყოფილებს ფსევდო-ერმიტულობის პირობას

$$\eta H\eta^{-1} = H^\dagger \tag{316}$$

სადაც η შექცევადი ერმიტული ოპერატორია. მოცემულ შემთხვევაში η შეიძლება ავირჩიოთ, როგორც ლუწობის ოპერატორი მეორე ღერძის მიმართ, ანუ $\eta = P_2 : x_2 \to -x_2$. ერთგანზომილებიანი ფსევდო-ერმიტული სისტემების კვანტური თეორია შეიქმნა ბოლო ათი წლის განმავლობაში [66]-[71], ორგანზომილებიანი ფსევდო-ერმიტული მოდელები კი

შესწავლილი იქნა ნაშრომებში [50], რომლებშიც შეიძლება ძირითადი ფორმულების ნახვა. კერძოდ, აგებულია კვანტური მექანიკა სისტემებისა დაურღვეველი $\eta T = P_2 T$ სიმეტრიით- $P_2 T \Psi_n(\vec{x}) = \Psi_n(\vec{x})$ და ახალი სკალარული ნამრავლით (η - ნამრავლით), რომელსაც მოცემულ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$< \Psi|\eta|\Phi > = \ll \Psi\Phi \gg = \int \Psi\Phi, \tag{317}$$

სტანდარტული სკალარული ნამრავლის $\int \Psi^* \Phi$ ნაცვლად.

(317) სკალარული ნამრავლის მიმართ ძირითადი მდგომარეობის ნორმა არის

$$\int \Psi_0^2 d^3x = \int \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3) d^3x = \frac{1}{2}\int \exp(-\lambda z\bar{z}) dz d\bar{z} \int \exp(-\lambda x_3^2 + 2g\bar{z}x_3) dx_3 =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \int \exp(-\lambda z\bar{z} + \frac{g^2\bar{z}^2}{\lambda}) dz d\bar{z} = \sqrt{(\pi/\lambda)^3}. \tag{318}$$

(266) ფორმულით განსაზღვრული შეშფოთებული მდგომარეობების ნორმაც ადვილად ითვლება:

$$\ll \Psi_n|\Psi_n \gg = \ll (A^+)^n \Psi_0|(A^+)^n \Psi_0 \gg = (-1)^n \ll \Psi_0|R_0^n \Psi_0 \gg = (-1)^n \ll \Psi_0|\Psi_0 \gg \delta_{n0}. \tag{319}$$

აღმოჩნდა, რომ შესაძლებელია ზოგადად ყველა ტალღური ფუნქციის (280) ნორმის გამოთვლა. გადავწეროთ ამისათვის ეს ფუნქციები ასე:

$$\Psi_{kn} = (Q^+)^k \Psi_n, \tag{320}$$

გავიხსენოთ, რომ $R_1 \Psi_n = Q^- \Psi_n = 0$. მაშინ (310)-დან მივიღებთ:

$$Q^+ Q^- (Q^+)^k \Psi_n = 8 \sum_{p=0}^{k-1} (Q^+)^{k-p} (\lambda \widetilde{H} - 2gR_1)(Q^+)^p \Psi_n, \tag{321}$$

ანუ

$$Q^+ Q^- \Psi_{kn} = 8 \sum_{p=0}^{k-1} (Q^+)^{k-p} (\lambda \widetilde{E}_{pn} (Q^+)^p \Psi_n - 4g^2 p (Q^+)^{p-1} \Psi_{n+2}) = \tag{322}$$

$$= 8 \sum_{p=0}^{k-1} (\lambda \widetilde{E}_{pn} (Q^+)^k \Psi_n - 4g^2 p (Q^+)^{k-1} \Psi_{n+2}) = \tag{323}$$

$$= 8\lambda \Psi_{kn} \sum_{p=0}^{k-1} \widetilde{E}_{pn} - 32g^2 \Psi_{(k-1)(n+2)} \sum_{p=0}^{k-1} p = A_{(k-1)n} \Psi_{kn} - 16g^2 k(k-1) \Psi_{(k-1)(n+2)}, \tag{324}$$

$$A_{(k-1)n} \equiv 8\lambda \sum_{p=0}^{k-1} \widetilde{E}_{pn} = 8\lambda^2 \sum_{p=0}^{k-1} (2n + 3 + 4p) = 8\lambda^2 k(2n + 5). \tag{325}$$

(324) და (311) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$Q^-Q^+\Psi_{kn} = A_{kn}\Psi_{kn} - 16g^2k(k+1)\Psi_{(k-1)(n+2)}. \tag{326}$$

აქედან, $Q^+\Psi_{kn} = (Q^+)^{k+1}\Psi_n = \Psi_{(k+1)n}$ ტოლობის გათვალისწინებით, შეიძლება დავწეროთ:

$$Q^-\Psi_{kn} = A_{(k-1)n}\Psi_{(k-1)n} - 16g^2k(k-1)\Psi_{(k-2)(n+2)}. \tag{327}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეზე მარცხნიდან Q^- ოპერატორით $k-1$-ჯერ მოქმედების შემდეგ მივიღებთ:

$$(Q^-)^k\Psi_{kn} = \prod_{i=0}^{k-1} A_{in}\Psi_n. \tag{328}$$

ე.ი. $\ll \Psi_{kn'}|\Psi_{kn} \gg$ სკალარული ნამრავლისათვის გვექნება:

$$\ll \Psi_{kn'}|\Psi_{kn} \gg = \ll (Q^+)^k\Psi_{n'}|\Psi_{kn} \gg = \ll \Psi_{n'}, (Q^-)^k\Psi_{kn} \gg = \ll \Psi_{n'}|\Psi_n \gg \prod_{i=0}^{k-1} A_{in} \sim \delta_{nn'}\delta_{n0}. \tag{329}$$

(328)-დან ჩანს, რომ $(Q^-)^{k'}\Psi_{kn} = 0$, თუკი $k' > k$. აქედან კი თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ $\ll \Psi_{k'n'}|\Psi_{kn} \gg = 0$ როცა $k' \neq k$. მაშასადამე, საბოლოოდ შეიძლება დავწეროთ ორთოგონალურობის პირობა გაერთიანებული ფორმით:

$$\ll \Psi_{k'n'}|\Psi_{kn} \gg \sim \delta_{kk'}\delta_{nn'}\delta_{n0}. \tag{330}$$

მაშასადამე, განხილული მოდელის ყველა ტალღურ ფუნქციას Ψ_{kn}, გარდა Ψ_{k0}-ისა აქვთ ნულოვანი ნორმა და ორთოგონალურები არიან ერთმანეთის. ტალღური ფუნქციების თვითორთოგონალურობა არის ნიშანი იმისა, რომ საქმე გვაქვს არადიაგონალიზებად ჰამილტონიანებთან. ეს სიტუაცია ცოტა ხნის წინ შესწავლილი იქნა ერთი [51], [52] და ორი [50] განზომილების კვანტური სისტემებისათვის, სადაც შესაძლებელია საჭირო ტექნიკური დეტალების ნახვა. არადიაგონალურობა ნიშნავს, რომ ყოველ ტალღურ ფუნქციას $\Psi_{kn}, n > 0$ ნულოვანი ნორმით თან უნდა ახლდეს ასოცირებული ფუნქციების გარკვეული სიმრავლე, რომლებიც მონაწილეობენ ერთეულოვანი ოპერატორის გაშლაში.

§3.5 ასოცირებული ფუნქციები

ნაშრომებში [50], [51], [52] დეტალურადაა აღწერილი არაერმიტული არადიაგონალიზებადი ჰამილტინიანების სტრუქტურა, ბიორთოგონალური ბაზისი,

ტალღური ფუნქციებისა და მათთან დაკავშირებული ასოცირებული ფუნქციების სკალარული ნამრავლი, და ერთეულოვანი ოპერატორის არატრივიალური გაშლა. მათზე დაყრდნობით მოვიყვანოთ ყველაზე მნიშვნელოვანი თანაფარდობები, რომლებიც აუცილებელია შესასრულებლად.

ასეთი სისტემებისათვის, ყოველ ნულოვანი ნორმის მქონე თვითორთოგონალურ ტალღურ ფუნქციას $\Psi_{kn}(\vec{x})$ (ქვემოთ მათ ავღნიშნავთ $\Psi_{kn,0}(\vec{x})$-ით) თან უნდა ახლდეს $p_{kn}-1$ რაოდენობა ასოცირებული ფუნქციებისა $\Psi_{kn,m}(\vec{x}), m=1,2,...,p_{kn}-1$, სადაც p_{kn}-ს ეწოდება ჟორდანის უჯრის განზომილება. ეს სიტუაცია უნდა განვასხვავოთ ენერგეტიკული დონეების ჩვეულებრივი გადაგვარებისაგან. ახალი აღნიშვნა ტალღურ ფუნქციაში დამატებითი ინდექსის შემოტანით $\Psi_{kn}(\vec{x})\equiv\Psi_{kn,0}(\vec{x})$ მოხერხებულია, რადგანაც განმარტების თანახმად ეს ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს:

$$(H-E_{kn})\Psi_{kn,m}=\Psi_{kn,m-1}, \quad m=1,2...,p_{kn}-1; \quad (H-E_{kn})\Psi_{kn,0}=0, \tag{331}$$

სადაც იგულისხმება, რომ ყველა ფუნქცია ნორმირებულია (317) სკალარული ნამრავლის მიმართ. მაშასადამე, ვგულისხმობთ, რომ ყოველ თვითორთოგონალურ $\Psi_{kn,0}$ საკუთარ ფუნქციასთან ერთად უნდა არსებობდეს ასოცირებული ფუნქციების გარკვეული სიმრავლე $\Psi_{kn,m}, m=1,2,...,p_{kn}-1$.

ამ აღნიშვნებში, ზოგადი ფორმალიზმის შესაბამისად [51], [52], სკალარული ნამრავლი უნდა იყოს:

$$\ll\Psi_{kn,m}|\Psi_{k'n',m'}\gg=\int\Psi_{kn,m}(\vec{x})\Psi_{k'n',m'}(\vec{x})d^3x=\delta_{kk'}\delta_{nn'}\delta_{m(p_{kn}-m'-1)}; \quad m'=0,1,2,...,p_{kn}-1. \tag{332}$$

ჰამილტონიანი H არადიაგონალურია, მაგრამ არის ბლოკ-დიაგონალური. ყოველ ბლოკის - ჟორდანის უჯრის განზომილებაა p_{kn}, რომელიც როგორც ქვემოთ ვნახავთ ტოლია

$$p_{kn}=n+1. \tag{333}$$

$\Psi_{kn,0}, n\neq 0$ ფუნქციების თვითორთოგონალურობა უკვე ნაჩვენებია (319) და (330) ფორმულებით. ჟორდანის უჯრის ასაგებად აუცილებელია ვიპოვოთ ასოცირებული ფუნქციები (331) და (332) თვისებებით.

ასოცირებული ფუნქციების $\Psi_{0n,m}$-ის პოვნა დავიწყოთ $\Psi_{0n,0}, n\neq 0$ საკუთარი ფუნქციებისათვის. (257) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$(A^-)^k(H-E_{0n})=(H-E_{0(n-k)})(A^-)^k, \quad k=1,2,... \tag{334}$$

ასოცირებული ფუნქციების განმსაზღვრელ განტოლებაზე (331)-ში $k=1$-თვის, ვიმოქმედოთ მარცხნიდან A^- ოპერატორით. აქედან, (334)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(H-E_{0(n-1)})(A^-\Psi_{0n,1})=0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ

$$A^-\Psi_{0n,1}\sim\Psi_{0(n-1),0}.$$

ამ პროცედურის გაგრძელებით შეიძლება ჩავწეროთ ზოგადად (პროპორციულობის კოეფიციენტის ცხადად შემოტანით):

$$(A^-)^m\Psi_{0n,m}=2^m a_{n,m}\Psi_{0(n-m),0}. \tag{335}$$

მიღებული განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$\Psi_{0n,m}=\exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2}+g\bar{z}x_3)\varphi_{n,m} \tag{336}$$

და შესაბამისად, $\varphi_{n,m}$ უცნობი ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\partial_z^m\varphi_{n,m}=a_{n,m}c_{n-m,0}\bar{z}^{n-m}, \tag{337}$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია

$$\varphi_{n,m}=\frac{a_{n,m}c_{n-m,0}}{m!}z^m\bar{z}^{n-m}+\sum_{i=0}^{m-1}g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)z^i, \tag{338}$$

სადაც $g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)$ ფუნქციები უნდა ვიპოვოთ განტოლებიდან:

$$(H-E_{0n})\Psi_{0n,m}=\Psi_{0n,m-1}, \tag{339}$$

ამ განტოლებაში (336) ჩასმისა და z^i ცვლადის წინ კოეფიციენტების ნულთან გატოლებით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას $g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)$ ფუნქციების მიმართ

$$\begin{aligned}&-\frac{4(n-m)a_{n,m}c_{n-m,0}}{(m-1)!}\bar{z}^{n-m-1}-\partial_3^2g_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)+2\lambda(m-1)g_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)+\\&+2\lambda\bar{z}\partial_{\bar{z}}g_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)-\frac{4ga_{n,m}c_{n-m,0}}{(m-1)!}\bar{z}^{n-m}x_3-2g\bar{z}\partial_3g_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)-2\lambda ng_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)=\\&=\frac{a_{n,m-1}c_{n-m+1,0}}{(m-1)!}\bar{z}^{n-m+1}.\end{aligned} \tag{340}$$

$$\begin{aligned}&4(i+1)\left(\partial_{\bar{z}}g_{n,m}^{(i+1)}(\bar{z},x_3)+gx_3g_{n,m}^{(i+1)}(\bar{z},x_3)\right)+\partial_3^2g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)-2i\lambda g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)-\\&-2\lambda\bar{z}\partial_{\bar{z}}g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)+2g\bar{z}\partial_3g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)+2\lambda ng_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)+g_{n,m-1}^{(i)}(\bar{z},x_3)=0,\\&i=0,1,2,...,m-2.\end{aligned} \tag{341}$$

(340) განტოლება შეიცავს მხოლოდ $g_{n,m}^{(m-1)}(\bar{z},x_3)$ ფუნქციას. მისი განსაზღვრის შემდეგ (341)-დან თანმიმდევრობით შეიძლება ვიპოვოთ ყველა $g_{n,m}^{(i)}(\bar{z},x_3)$. ეს პირდაპირი გზა ძალიან შრომატევადია. ჩვენ შევეცდებით კერძო შემთხვევების განზოგადებით გამოვიცნოთ ზოგადი ამონახსნი და შემდეგ დავამტკიცოთ, რომ ეს ამონახსნები აკმაყოფილებენ (331) განტოლებებს და (332) პირობებს.

ავაგოთ ასოცირებული ფუნქციები $n=1$ ენერგეტიკული დონისათვის. $n=m=1$-თვის (340) განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია

$$g_{1,1}^{(0)}=-\frac{2g}{\lambda}a_{1,1}c_{0,0}x_3+\tilde{\beta}\bar{z}. \tag{342}$$

შესაბამისად, (336)-ის თანახმად

$$\begin{aligned}\Psi_{01,1}&=\exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2}+g\bar{z}x_3)(a_{1,1}c_{0,0}z-\frac{2g}{\lambda}a_{1,1}c_{0,0}x_3+\tilde{\beta}\bar{z})\sim\\ &\sim\exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2}+g\bar{z}x_3)(z-\frac{2g}{\lambda}x_3+\beta\bar{z}).\end{aligned} \tag{343}$$

მარტივია იმის ჩვენება, რომ $\Psi_{01,1}$-ის და $\Psi_{01,0}$ სკალარული ნამრავლი განსხვავებულია ნულისგან ნებისმიერი β-თვის:

$$\ll\Psi_{01,1}|\Psi_{01,0}\gg=\ll\Psi_{01,1}|A^+\Psi_{00,0}\gg\sim\ll A^-\Psi_{01,1}|\Psi_{00,0}\gg\sim\ll\Psi_{00,0}|\Psi_{00,0}\gg\neq 0 \tag{344}$$

შემდეგ ნაბიჯზე უნდა გავარკვიოთ არსებობს თუ არა ისეთი β, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\ll\Psi_{01,1}|\Psi_{01,1}\gg=0. \tag{345}$$

გვაქვს:

$$\begin{aligned}&\ll\Psi_{01,1}|\Psi_{01,1}\gg\sim\int(z^2+\frac{4g^2}{\lambda^2}x_3^2+\beta^2\bar{z}^2-\frac{4g}{\lambda}x_3z+2\beta\bar{z}z-\frac{4\beta g}{\lambda}x_3\bar{z})\exp(-\lambda x_i^2+2g\bar{z}x_3)d^3x=\\ &=2\beta(\pi^3/\lambda^5)^{1/2}.\end{aligned} \tag{346}$$

ე. ი. $\beta=0$ და

$$\Psi_{01,1}\sim\exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2}+g\bar{z}x_3)(z-\frac{2g}{\lambda}x_3). \tag{347}$$

ვიპოვოთ ასოცირებული ფუნქციები $n=2$ ენერგეტიკული დონისათვის: $\Psi_{02,0},\Psi_{02,1},\ldots$ პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\ll\Psi_{02,0}|\Psi_{02,1}\gg\sim\ll A^+\Psi_{01,0}|\Psi_{02,1}\gg\sim\ll\Psi_{01,0}|A^-\Psi_{02,1}\gg\sim\ll\Psi_{01,0}|\Psi_{01,0}\gg=0. \tag{348}$$

ეს კი ნიშნავს, რომ საჭიროა შემოვიტანოთ რიგით შემდეგი ასოცირებული ფუნქცია $\Psi_{02,2}$. თუკი ეს სამი ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$(H - E_{02})\Psi_{02,1} = \Psi_{02,0}, \tag{349}$$

$$(H - E_{02})\Psi_{02,2} = \Psi_{02,1}, \tag{350}$$

და ორთოგონალურობის შემდეგ პირობებს

$$\ll \Psi_{02,0}|\Psi_{02,2} \gg\neq 0, \ \ll \Psi_{02,0}|\Psi_{02,1} \gg= 0, \ \ll \Psi_{02,2}|\Psi_{02,2} \gg= 0, \ \ll \Psi_{02,1}|\Psi_{02,1} \gg\neq 0, \tag{351}$$

მაშინ ეს ნიშნავს, რომ მოცემული ენერგეტიკული დონისათვის ნაპოვნია ყველა საჭირო ასოცირებული ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ (351)-დან პირველი სამი პირობის შესრულება გამომდინარეობს ზოგადი ფორმულებიდან, ფუნქციების ცხადი სახის გარეშეც. მართლაც:

$$\ll \Psi_{02,0}|\Psi_{02,2} \gg\sim\ll (A^+)^2\Psi_{00,0}|\Psi_{02,2} \gg=$$

$$=\ll \Psi_{00,0}|(A^-)^2\Psi_{02,2} \gg\sim\ll \Psi_{00,0}|\Psi_{00,0} \gg\neq 0, \tag{352}$$

$$\ll \Psi_{02,0}|\Psi_{02,1} \gg\sim\ll A^+\Psi_{01,0}|\Psi_{02,1} \gg\sim\ll \Psi_{01,0}|A^-\Psi_{02,1} \gg\sim\ll \Psi_{01,0}|\Psi_{01,0} \gg= 0. \tag{353}$$

რაც შეეხება მესამე პირობას: დავუშვათ, რომ იგი არ სრულდება, ანუ $\ll \Psi_{02,2}|\Psi_{02,2} \gg\neq 0$. მაგრამ $\Psi_{02,2}$ ფუნქციები განმარტებული არის $\Psi_{02,0}$ ფუნქციის ჯამის სიზუსტით. ანუ შეგვიძლია $\Psi_{02,2}$ ფუნქცია შევცვალოთ $\Psi_{02,2} + \alpha\Psi_{02,0}$ ფუნქციით, სადაც $\alpha = const$. ეს ფუნქცია კი შეიძლება გავხადოთ თვითორთოგონალური:

$$\ll \Psi_{02,2} + \alpha\Psi_{02,0}|\Psi_{02,2} + \alpha\Psi_{02,0} \gg=\ll \Psi_{02,2}|\Psi_{02,2} \gg +2\alpha \ll \Psi_{02,2}, \Psi_{02,0} \gg . \tag{354}$$

(352)-ის თანახმად მეორე შესაკრები განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ თუ ავიღებთ $\alpha = - \ll \Psi_{02,2}|\Psi_{02,2} \gg / \ll \Psi_{02,2}|\Psi_{02,0} \gg$, მივიღებთ სასურველ შედეგს. ახლა ვიპოვოთ ამ ფუნქციების ცხადი, ანალიზური მნიშვნელობები. ჩვენს მიერ უკვე ნაპოვნი $\Psi_{01,1}$ (347) აკმაყოფილებს განტოლებას $(H - E_{01})\Psi_{01,1} \sim \Psi_{01,0}$. თუ ამ განტოლებაზე ვიმოქმედებთ A^+ ოპერატორით, მივიღებთ $(H - E_{02})A^+\Psi_{01,1} \sim \Psi_{02,0}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Psi_{02,1} \sim A^+\Psi_{01,1}. \tag{355}$$

დაგვრჩა საპოვნი $\Psi_{02,2}$, რომელიც უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას $(H - E_{02})\Psi_{02,2} \sim A^+\Psi_{01,1}$. პირდაპირი ჩასმით შეიძლება შევამოწმოთ, რომ

$$\Psi_{02,2} \sim \exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2} + g\bar{z}x_3)(z - \frac{2g}{\lambda}x_3)^2. \tag{356}$$

ამ ორი კერძო შემთხვევის ანალიზი იძლევა იმის საფუძველს, რომ $\Psi_{0n,m}$ ფუნქცია ზოგადად ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\Psi_{0n,m} \sim (A^{+})^{n-m} \exp(-\frac{\lambda x_i^2}{2} + g\bar{z}x_3)(z - \frac{2g}{\lambda}x_3)^m \sim (A^{+})^{n-m}\partial_{\bar{z}}^m \Psi_{0,0}, m = 0, 1, ..., n. \quad (357)$$

ის რომ ეს ფუნქცია ნამდვილად აკმაყოფილებს (331) განტოლებებს, ადვილად მტკიცდება ინდუქციით. დაგვრჩა შევამოწმოთ, რომ (357) ფუნქციები აკმაყოფილებენ ორთოგონალობის პირობას:

$$\ll \Psi_{0n,m}|\Psi_{0n,m'} \gg \sim \delta_{m(n-m')}. \quad (358)$$

გვაქვს:

$$\ll \Psi_{0n,m}|\Psi_{0n,m'} \gg \sim \ll (A^{+})^{n-m}\partial_{\bar{z}}^m \Psi_{00,0}|(A^{+})^{n-m'}\partial_{\bar{z}}^{m'}\Psi_{00,0} \gg \sim$$
$$\sim \ll (A^{-})^{n-m'}\partial_{\bar{z}}^m \Psi_{00,0}|(A^{+})^{n-m}\partial_{\bar{z}}^{m'}\Psi_{00,0} \gg . \quad (359)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(A^{-})^k \cdot \Psi_{00,0} = 2^k \Psi_{00,0}\partial_z^k$, მივიღებთ:

$$(A^{-})^m \partial_{\bar{z}}^k \Psi_{00,0} \sim (A^{-})^m \Psi_{00,0}(z - \frac{2g}{\lambda}x_3)^k = 2^m \Psi_{00,0}\partial_z^m (z - \frac{2g}{\lambda}x_3)^k \sim$$
$$\sim \Psi_{00,0}(z - \frac{2g}{\lambda}x_3)^{k-m}, \ \ k \geq m, \quad (360)$$
$$(A^{-})^m \partial_{\bar{z}}^k \Psi_{00,0} = 0, \ \ k < m. \quad (361)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\ll \Psi_{0n,m}|\Psi_{0n,m'} \gg = 0, \ \ n > m + m', \quad (362)$$
$$\ll \Psi_{0n,m}|\Psi_{0n,m'} \gg \sim \int \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3)d^3x = \sqrt{(\pi/\lambda)^3}, \ \ n = m + m' \quad (363)$$

დარჩა განსახილველი შემთხვევა, როცა $n < m + m'$. ამ დროს შეიძლება დავწეროთ:

$$\ll \Psi_{0n,m}|\Psi_{0n,m'} \gg \sim \int (z - \frac{2g}{\lambda})^{2(m+m')-2n} \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3)d^3x. \quad (364)$$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად განვიხილოთ დამხმარე ინტეგრალი:

$$\int \exp(-px_3^2 - 2(\delta z - g\bar{z})x_3 - \sigma z\bar{z})d^3x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \int \exp\left(\frac{(\delta z - g\bar{z})^2}{p} - \sigma z\bar{z}\right)dzd\bar{z} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \int \exp\left(-(\sigma + \frac{2\delta g}{p})z\bar{z} - \frac{g^2}{p}\bar{z}^2 - \frac{\delta^2}{p}z^2\right)dzd\bar{z} = \sqrt{\frac{\pi^3}{p\sigma^2 + 4\delta g\sigma}}. \quad (365)$$

ამ ტოლობის ორივე მხარის p-თი n-ჯერ და δ-თი m-ჯერ დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\int x_3^{2n+m} z^m \exp(-px_3^2 - 2(\delta z - g\bar{z})x_3 - \sigma z\bar{z})d^3x =$$
$$= 2^{-n}(2(n+m) - 1)!\sigma^{2n+m}g^m \sqrt{(\sigma^2 p + 4\delta\sigma g)^{-2(n+m)-1}}. \quad (366)$$

ჩავსვათ აქ $\delta = 0, p = \sigma = \lambda, n \equiv l - m,$ გვექნება:

$$\int x_3^{2l-m} z^m \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3) d^3x = 2^{m-l}\lambda^{2l-m} g^m (2l-1)! \sqrt{\lambda^{-3(2l+1)}}, \tag{367}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int (\frac{2g}{\lambda} x_3)^{2l-m} (-z)^m \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3) d^3x = (-1)^m 2^l (2l-1)! g^{2l} \sqrt{\lambda^{-3(2l+1)}} \tag{368}$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\int (z - \frac{2g}{\lambda} x_3)^{2l} \exp(-\lambda x_i^2 + 2g\bar{z}x_3) d^3x = 0, \ l > 0. \tag{369}$$

მაშასადამე, (357) ფუნქციები ნამდვილად აკმაყოფილებენ (358) პირობას.

დაგვრჩა ავაგოთ $\Psi_{kn,0}, k \neq 0$ საკუთარი მდგომარეობების შესაბამისი ასოცირებული ფუნქციები $\Psi_{kn,m}$. ისინი უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობებს:

$$(H - E_{kn})\Psi_{kn,m} = \Psi_{kn,m-1}, \ E_{kn} = 2\lambda(n+2k). \tag{370}$$

$Q^{\pm}$ ოპერატორისა და H ჰამილტონიანის კომუტაციური თანაფარდობიდან გამომდინარებს, რომ

$$(Q^+)^k (H - E_{0n}) = (H - E_{kn})(Q^+)^k, \tag{371}$$

აქედან კი შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\Psi_{kn,m}$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (370) განტოლებას, შეიძლება იყოს ფუნქცია:

$$\Psi_{kn,m} = (Q^+)^k \Psi_{0n,m}. \tag{372}$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ფორმალური ასოცირებული ფუნქციებიდან შეიძლება ავაგოთ ნამდვილი ასოცირებული ფუნქციები, ანუ ისეთები, რომლებიც (370) განტოლებასთან ერთად აკმაყოფილებენ ორთოგონალურობის პირობას:

$$\ll \Psi_{kn,m} | \Psi_{kn,m'} \gg \sim \delta_{m(n-m')}. \tag{373}$$

(328) და (358)-ის თანახმად გვექნება:

$$\ll \Psi_{kn,m} | \Psi_{kn,0} \gg = \ll (Q^+)^k \Psi_{n,m} | \Psi_{kn,0} \gg = \ll \Psi_{n,m} | (Q^-)^k \Psi_{kn,0} \gg \sim \ll \Psi_{n,m} | \Psi_{n,0} \gg \sim \delta_{nm}. \tag{374}$$

ე. ი. $\Psi_{kn,0}$ ორთოგონალურია ყველა $\Psi_{kn,m\neq n}$ ფუნქციისა და ეს არ შეიცვლება, თუკი ყველა $\Psi_{kn,m\neq n}$-ს მივუმატებთ $\Psi_{kn,0}$-ს.

დავუშვათ, რომ სკალარული ნამრავლი $\ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,m\neq 0} \gg \neq 0$. ორივე ამ ფუნქციას მივუმატოთ $\Psi_{kn,0}$ ფუნქცია და ეს ჯამები განვიხილოთ, როგორც ახალი ასოცირებული ფუნქციები $\widetilde{\Psi}_{kn,m}$, რომელთა სკალარული ნამრავლი ტოლია:

$$\ll \widetilde{\Psi}_{kn,n}|\widetilde{\Psi}_{kn,m\neq 0} \gg = \ll \Psi_{kn,n}+a\Psi_{kn,0}|\Psi_{kn,m\neq 0}+b\Psi_{kn,0} \gg = \ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,m\neq 0} \gg +b \ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,0} \gg . \tag{375}$$

(374)-ის თანახმად $\ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,0} \gg \neq 0$. ამიტომ, თუ ავიღებთ $b = - \ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,m\neq 0} \gg / \ll \Psi_{kn,n}|\Psi_{kn,0} \gg$, მივიღებთ, რომ

$$\ll \widetilde{\Psi}_{kn,n}|\widetilde{\Psi}_{kn,m\neq 0} \gg = 0. \tag{376}$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ სკლარული ნამრავლი:

$$\ll \widetilde{\Psi}_{kn,m}|\widetilde{\Psi}_{kn,n-m'} \gg = \ll \widetilde{\Psi}_{kn,m}|(H-E_n)^{m'}\widetilde{\Psi}_{kn,n} \gg = \ll (H-E_n)^{m'}\widetilde{\Psi}_{kn,m}|\widetilde{\Psi}_{kn,n} \gg . \tag{377}$$

ნათელია, რომ (377) ტოლია ნულის, როცა $m' > m$. როდესაც $m' \leq m$, შეიძლება დავწეროთ:

$$\ll \widetilde{\Psi}_{kn,m}|\widetilde{\Psi}_{kn,n-m'} \gg = \ll \widetilde{\Psi}_{kn,m-m'}|\widetilde{\Psi}_{kn,n} \gg \tag{378}$$

და (376)-ის თანახმად იგი ნულის ტოლია თუ $m > m'$, ხოლო (374)-ის თანახმად განსხვავდება ნულისაგან, როდესაც $m = m'$. ამით (373) პირობის დამტკიცება დამთავრებულია. ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\ll \Psi_{kn,m}|\Psi_{k'n',m'} \gg = \delta_{nn'}\delta_{kk'}\delta_{m(n-m')}, \tag{379}$$

რომლითაც სრულდება იმის დამტკიცება, რომ ჰამილტონიანი ბლოკ-დიაგონალურია და მისი ჟორდანის უჯრების განზომილებაა $p_{kn} = n + 1$.

Bibliography

[1] Yu. A. Gol fand and E. P. Likhtman: JETP Lett.,13 (1971) 452; D. V. Volkov and V. P. Akulov: JETP Lett.,16 (1972) 621; J. Wess and B. Zumino: Nucl. Phys. B70 (1974) 39

[2] Witten E. – Dynamical breaking of supersymmetry – Nucl. Phys. B 188 (1981) 513; Witten E. – Constraints on supersymmetry breaking Nucl. Phys. B 202 (1982) 253

[3] Cooper F. and Freedman B. – Aspects of Supersymmetric quantum mechanics – Ann. Phys. 146 (1983) 262

[4] Cooper F., Khare A., Musto R. and Wipf A. – Supersymmetry and the Dirac equation – Ann. Phys. 187 (1988) 1;
Gendenshtein L. E. – Supersymmetry in the problem of an electron in a nonuniform magnetic field – JETPLett. 39(1984) 280

[5] Andrianov A. A., Borisov N. V., Eides M. I. and Ioffe M. V. – Supersymmetric mechanics: a new look at the equivalence of quantum systems – Theor. Math. Phys. 61 (1984) 965

[6] Andrianov A. A., Borisov N. V., Eides M. I. and Ioffe M. V. – Supersymmetric origin of equivalent quantum systems – Phys. Lett. A 109 (1985) 143

[7] Schr¨odinger E. – A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions – Proc. R. Irish Acad. A 46 (1940) 9

[8] Infeld L. and Hull T. E. – The factorization method – Rev. Mod. Phys. 23 (1951) 21

[9] Gendenshtein L. E. – Derivation of exact spectra of the Schr¨odinger equation by means of supersymmetry – JETP Lett. 38 (1983) 356

[10] Darboux G. – Sur une proposition relative aux ′equations lin′eaires – C. R. Acad. Sci., Paris 94 (1882) 1456;
Darboux G. – On a proposition relative to linear equations arXiv:physics/9908003 (in French)

[11] Crum M. M. – Associated Sturm Liouville systems Q. J. Math. Oxford 2 N6 (1955) 121;
Crum M. M. – Associated Sturm Liouville systems arXiv:physics/9908019

[12] Faddeev L. D. The inverse problem in the quantum theory of scattering J. Math. Phys. 4 (1963) 72; Faddeev L. D. – Usp. Mat. Nauk – 14 (1959) 57

[13] Matveev V. B. and Salle M. – Darboux Transformations and Solitons – 1991(Berlin: Springer)

[14] Andrianov A. A., Borisov N. V. and Ioffe M. V. – Quantum systems with identical energy spectra – JETP Lett. 39 (1984) 93;
Andrianov A. A., Borisov N. V. and Ioffe M. V. – The factorization method and quantum systems with equivalent energy spectra – Phys. Lett. A 105 (1984) 19;
Andrianov A. A., Borisov N. V. and Ioffe M. V. – Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians Theor. Math. Phys. 61 (1984) 107

[15] Andrianov A. A., Borisov N. V. and Ioffe M. V. – Nonstationary approach to scattering theory for supersymmetric Hamiltonians in quantum mechanics and supersymmetry of nuclear interactions – Phys. Lett. B 181 (1986) 141;
Andrianov A. A., Borisov N. V. and Ioffe M. V. – Scattering theory for supersymmetric Hamiltonian and supersymmetry of nuclear interactions – Theor. Math. Phys. 72 (1986) 748

[16] Andrianov A. A., Cannata F., Dedonder J-P and Ioffe M. V. – Second order derivative supersymmetry, Q deformations and scattering problem – Int. J. Mod. Phys. A 10 (1995) 2683

[17] Aoyama A., Sato M. and Tanaka T. – General forms of a N fold supersymmetric family – Phys. Lett. B 503 (2001) 423;
Aoyama A., Sato M. and Tanaka T. – N-fold supersymmetry in quantum mechanics: general formalism – Nucl. Phys. B 619 (2001) 105

[18] Tanaka T. N-fold supersymmetry in quantum mechanical matrix models – Mod. Phys. Lett. A 27 (2012) 1250051

[19] Tanaka T. – On a general form of N-fold supersymmetry – J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 465301

[20] Andrianov A. A. and Sokolov A. V. – Nonlinear supersymmetry in quantum mechanics: algebraic properties and differential representation – Nucl. Phys. B 660 (2003) 25

[21] Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – SUSY intertwining relations of third order in derivatives – Phys. Lett. A 327 (2004) 425

[22] Klishevich S. M. and Plyushchay M. S. – Nonlinear supersymmetry, quantum anomaly and quasiexactly solvable systems – Nucl. Phys. B 606 (2001) 583;
Klishevich S. M. and Plyushchay M. S. – Nonlinear holomorphic supersymmetry, Dolan Grady relations and Onsager algebra – Nucl. Phys. B 628 (2002) 217;
Klishevich S. M. and Plyushchay M. S. – Nonlinear holomorphic supersymmetry on Riemann surfaces – Nucl. Phys. B 640 (2002) 481

[23] Andrianov A. A., Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Systems with higher order shape invariance: spectral and algebraic properties – Phys. Lett. A 266 (2000) 341

[24] Andrianov A. A. and Sokolov A. V. – Factorization of nonlinear supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics: I. General classification of reducibility and analysis of the third-order algebra – J. Math. Sci. 143 (2007) 2707

[25] Sokolov A. V. – Factorization of nonlinear supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics: II. Proofs of theorems on reducibility – J. Math. Sci. 143 (2007) 2924

[26] Sokolov A. V. – Factorization of nonlinear supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics: III. Precise classification of irreducible intertwining operators – J. Math. Sci. 168 (2010) 881

[27] Gangopadhyaya A. and Mallow J. V. – Generating shape invariant potentials Int. J. Mod. Phys. A 23 (2008) 4959

[28] Bougie J., Gangopadhyaya A. and Mallow J. V. – Generation of a complete set of supersymmetric shape invariant potentials from an Euler equation – Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 210402

[29] J. Bougie, A. Gangopadhyaya, J. Mallow and C. Rasinariu – Supersymmetric Quantum Mechanics and Solvable Models – Symmetry 4 (2012) 452

[30] Dabrowska J. W., Khare A. and Sukhatme U. P. – Explicit wavefunctions for shape-invariant potentials by operator techniques – J. Phys. A: Math. Gen. 21 (1988) L195

[31] M. S. Bardavelidze and D. N. NiSnianidze – Shape invariance of second order in one-dimenshional quantum mechanics –

[32] Andrianov A. A., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Polynomial SUSY in quantum mechanics and second derivative Darboux transformation – Phys. Lett. A 201 (1995) 103

[33] Andrianov A. A., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Polynomial supersymmetry and dynamical symmetries in quantum mechanics – Theor. Math. Phys. 104 (1995) 1129

[34] Andrianov A. A., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Higher order SUSY in quantum mechanics and integrability of two-dimensional Hamiltonians arXiv:solv-int/9605007

[35] Andrianov A. A., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Classical integrable 2-dim models inspired by SUSY quantum mechanics – J. Phys. A: Math. Gen. 32 (1999) 4641

[36] Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – New methods for two-dimensional Schr¨odinger equation: SUSY-separation of variables and shape invariance – J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 1389

[37] Ioffe M. V. and Valinevich P. A. – New two-dimensional quantum models partially solvable by supersymmetrical approach – J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 2497

[38] Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – Exact solvability of two-dimensional real singular Morse potential – Phys. Rev. A 76 (2007) 052114

[39] Ioffe M. V. – Supersymmetric separation of variables in two-dimensional quantum mechanics – SIGMA 6 (2010) 075

[40] V.I. Inozemtsev – Integrable models of motion of two interacting particles in the external field – J. Phys. A 17 (1984) 815.

[41] Miller W. Jr. – Symmetry and Separation of Variables – 1977(London: Addison-Wesley)

[42] Turbiner A. V. - Quasi-exactly-solvable problems and sl(2) algebra - Commun. Math. Phys. 118 (1988) 467

[43] Ushveridze A. G. - Quasi-Exactly Solvable Problems in Quantum Mechanics -1994(Bristol: Institute of Physics Publishing)

[44] Shifman M. A. and Turbiner A. V. - Quantal problems with partial algebraization of the spectrum - Commun. Math. Phys. 126 (1989) 347

[45] Shifman M. A. - New findings in quantum mechanics (partial algebraization of the spectral problem) - Int. J. Mod. Phys. A 4 (1989) 2897

[46] Kamran N. and Olver P. J. - Lie algebras of differential operators and Lie-algebraic potentials - J. Math. Anal. Appl. 145 (1990) 342

[47] Shifman M. A. - Supersymmetric quantum mechanics and partial algebraization of the spectral problem - Int. J. Mod. Phys. A 4 (1989) 3305

[48] Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. - Three-dimensional solutions of supersymmetrical intertwining relations and pairs of isospectral Hamiltonians - J. Math. Phys. 50 (2009) 052105

[49] Marquette J. - Supersymmetry as a method of obtaining new superintegrable systems with higher order integrals of motion - J. Math. Phys. 50 (2009) 122102;
Marquette J. - An infinite family of superintegrable systems from higher order ladder operators and supersymmetry - J. Phys.: Conf. Ser. 284 (2011) 012047

[50] Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. - Exactly solvable non-separable and non-diagonalizable 2-dim model with quadratic complex interaction - J. Math. Phys. 51 (2010) 022108;
Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. - Equidistance of the complex 2-dim anharmonic oscillator spectrum: exact solution - J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 295303

[51] Mostafazadeh A. - Pseudosupersymmetric quantum mechanics and isospectral pseudo-Hermitian Hamiltonians - Nucl. Phys. B 640 (2002) 419;
Mostafazadeh A. - Pseudo-Hermiticity for a class of nondiagonalizable Hamiltonians - J. Math. Phys. 43 (2002) 6343

[52] Sokolov A. V., Andrianov A. A. and Cannata F. – Non-Hermitian quantum mechanics of non-diagonalizable Hamiltonians: puzzles with self-orthogonal states – J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 10207;
Andrianov A. A., Cannata F. and Sokolov A. V. – Non-linear supersymmetry for non-Hermitian, nondiagonalizable Hamiltonians: I. General properties – Nucl. Phys. B 773 (2007) 107;
Andrianov A. A., Cannata F. and Sokolov A. V. – Spectral singularities for non-Hermitian one-dimensional Hamiltonians: puzzles with resolution of identity – J. Math. Phys. 51 (2010) 052104

[53] Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev – Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations – 2003, by Chapman and Hall/CRC

[54] A. Korn, M. Korn – Mathematical Handbook – McGraw-Hill Company, 1968

[55] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov – Quantum integrable systems related to Lie algebras – Phys. Rep. 94 (1983) 313;
Perelomov A. M. – Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras –1990, Boston, MA: Birkh¨auser

[56] M.V. Ioffe, E.V. Krupitskaya, D.N. Nishnianidze –Analytical solution of two-dimensional Scarf II model by means of SUSY methods Ann – Annals of Phys. 327 (2012) 764;
M.V. Ioffe, E.V. Krupitskaya, D.N. Nishnianidze – Supersymmetrical separation of variables for Scarf II model: partial solvability – Europhys. Lett. 98 (2012) 10013.

[57] Ioffe M. V., Nishnianidze D. N. and Valinevich P. A. – New exactly solvable two-dimensional quantum model not amenable to separation of variables – J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 485303

[58] Cannata F., Ioffe M. V. and Nishnianidze D. N. – New two-dimensional quantum models with shape invariance – J. Math. Phys. 52 (2011) 022106

[59] H. Bateman, E. Erdelyi – Higher Transcendental Functions – vol. 3, McGraw Hill,New York, 1955.

[60] Calogero F. – Solution of the one-dimensional N body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials – J. Math. Phys. 12 (1971) 419

[61] Tremblay F., Turbiner A. V. and Winternitz P. - An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane - J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 242001;
Tremblay F., Turbiner A. V. and Winternitz P. - Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems - J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 015202

[62] Eisenhart L. P. - Enumeration of potentials for which one-particle Schr¨odinger equations are separable - Phys. Rev. 74 (1948) 87;
Eisenhart L. P. - Separable systems of St¨ackel - Ann. Math. 35 (1934) 284

[63] Landau L. D. and Lifshitz E. M. - Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)- 2nd edn (1965 London: Pergamon) section 23 (problem 3)

[64] Ioffe M. V., Mateos Guilarte J. and Valinevich P. A. - A class of partially solvable two-dimensional quantum models with periodic potentials - Nucl. Phys. B 790 (2008) 414

[65] M. S. Bardavelidze, F. Cannata, M. V. Ioffe, and D. N. Nishnianidze - Three-dimensional shape invariant non-separable model with equidistant spectrum - J. Math. Phys. 54 (2013) 012107

[66] Bender C. M., Boettcher S. and Meisinger P. N. - PT-symmetric quantum mechanics - J. Math. Phys. 40 (1999) 2201

[67] Bender C. M., Brody D. C. and Jones H. F. - Complex extension of quantum mechanics - Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 270401

[68] Dorey P., Dunning C. and Tateo R. - Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in PT-symmetric quantum mechanics - J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 5679

[69] Ahmed Z. - Pseudo-Hermiticity of Hamiltonians under gauge-like transformation: real spectrum of non- Hermitian Hamiltonians - Phys. Lett. A 294 (2002) 287

[70] Japaridze G. S. - Space of state vectors in PT-symmetric quantum mechanics - J. Phys. A:Math. Gen. 35 (2002) 1709

[71] Bender C. M. - Introduction to PT-symmetric quantum theory - Contemp. Phys. 46 (2005) 277; Rep. Prog. Phys. 70 (2007) 947