საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ბაკურ ბაკურაძე

სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე

13.00.02 - აღზრდის თეორია და მეთოდიკა

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

1. პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი გიგლა ონიანი
2. განათლების აკადემიური დოქტორი, სრული პროფესორი გიორგი ბერძულიშვილი

ქუთაისი

2010

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

თემის აქტუალობა. საზოგადოების განვითარების თანამედროვე ეტაპზე სამეცნიერო და ტექნიკურმა პროგრესმა დღის წესრიგში დააყენა სამეცნიერო პროგნოსტიკის აუცილებლობა-როგორი იქნება ახლო მომავალში სამეცნიერო და ტექნიკური განვითარების ძირითადი ორიენტირები. ამავე დროს სამეცნიერო პროგნოსტიკა უნდა ემყარებოდეს ადრე მიღებული და შეთვისებული ცოდნის პრაქტიკული რეალიზების გამოცდილებას. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დღეისათვის, საქართველოში განათლების სისტემის რეფორმის წარმატებით განხორციელებისათვის, ვინაიდან საქართველოს განათლების სისტემა ათწლეულების განმავლობაში საბჭოთა განათლების სისტემის შემადგენელი ნაწილი იყო, რაც გარკვეულად ზღუდავდა სწავლებაში ახალი ინოვაციური მეთოდების დანერგვას და მსოფლიოს წამყვან ქვეყნებში აპრობირებული სწავლების ფორმებისა და მიდგომების სასწავლო პროცესში გამოყენებას.

ჯერ კიდევ მეცხრამეტე საუკუნის 50-იანი წლებიდან მსოფლიოს წამყვანი სამეცნიერო და პედაგოგიური საზოგადოება მნიშვნელოვან ყურადღებას უთმობს მოსწავლეთათვის სიმრავლური და ალბათური აზროვნების ჩამოყალიბებას. მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყნის მეცნიერები სამეცნიერო შეკრებებზე გამოდიოდნენ მოსაზრებებით, რომ საშუალო სკოლის პროგრამაში შეეტანათ სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტები და დაემუშავებინათ მათი სწავლების მეთოდიკა.

მეცხრამეტე საუკუნეში შეიქმნა არა მარტო რეალური ბაზა ბუნებისმეტყველების კარდინალური განვითარებისათვის, არამედ ლოგიკურად, კარგად დასაბუთებული პრაქტიკული სისტემა სასკოლო განათლების მოდერნიზაციისათვის. მეთვრამეტე საუკუნის დიდმა მიღწევებმა განაპირობა ტექნიკის პროგრესი მეცხრამეტე საუკუნეში. ამან კი წარმოშვა მზარდი მოთხოვნილება კვალიფიციურ ტექნიკურ მუშახელზე, ხოლო ამ უკანასკნელმა მათემატიკური განათლების საჭიროება წამოწია წინა პლანზე. ყოველივე ამან მოითხოვა ღრმა რეფორმების გატარება მათემატიკურ განათლებაში. საჭიროდ თვლიდნენ შექმნილიყო მათემატიკის ერთი მთლიანი კურსი ახალი შინაარსით, რომელიც ძირითადად აგებული უნდა ყოფილიყო

ფუნქციათა და გეომეტრიული გარდაქმნების ცნებებზე. ფართოდ უნდა ყოფილიყო ინტერპრეტირებული მათემატიკის გამოყენება ფიზიკასა და ტექნიკაში. ასეთნაირად აგებული სასწავლო კურსი ბუნებრივია მოითხოვდა სწავლების მეთოდების შეცვლასაც, მაგრამ რუსეთის იმპერიაში ამ კუთხით რაიმე კარდინალური ცვლილებები არ განხორციელებულა.

მათემატიკოსთა მესამე მსოფლიო კონგრესის (ქ. კარლსრუე, გფრ, 1967 წ. 16-21 აგვისტო) ძირითადი მიზანი იყო მათემატიკური განათლების სფეროში ბოლო ოცი წლის განმავლობაში მსოფლიოს წამყვან ქვეყნებში ჩატარებული მუშაობის ანალიზი და მისი შემდგომი განვითარების ტენდენციების შემუშავება. სამოციან წლებში ძირითადი ყურადღება გამახვილდა მათემატიკური განათლების შინაარსობრივი მხარის განხილვაზე, ხოლო სამოცდაათიან წლებში დიდი ყურადღება დაეთმო თვით სწავლების პროცესების შესწავლას, სწავლების ფორმებისა და მეთოდების შემუშავებას. კონგრესზე განხილული იყო არსებული განათლების სისტემის პრინციპები, რომლებიც ეხებოდა სასკოლო განათლების ყველა საფეხურს. კერძოდ, კონგრესის მასალებიდან ჩვენთვის საინტერესო ასკის მოსწავლეთათვის სასწავლო პროგრამის შესახებ ნათქვამია: „დაწყებითი სკოლის უფროსი კლასები და საშუალო სკოლის უმცროსი კლასები (10-16 წ.). რიგი ქვეყნების მათემატიკის სწავლების პროგრამებში შეიძლება გამოვყოთ საერთო ტენდენცია: რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები და მოქმედებები მათზე. ალგებრის ელემენტები, წრფივი და ზოგიერთი სხვა ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები, ვექტორები, კოორდინატთა მეთოდი, გეომეტრია სიბრტყეზე და სხვა. სასკოლო პროგრამებში და სახელმძღვანელოებში სხვადასხვა ქვეყნების ექსპერიმენტულ პროგრამებში შეტანილი იყო მთელი რიგი ახალი საკითხები: მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები, სიმრავლეთა ალგებრის, ბულის ალგებრის, ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები და სხვ.“

რადგან ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების საფუძველს წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, ამიტომ განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გამახვილდეს ალბათობის თეორიის ელემენტების შესწავლის მოსამზადებლი ბაზის შექმნისათვის. ამ თვალსაზრისით მეტად მნიშვნელოვანია,

დამუშავებულ იქნეს ალბათობის თეორიის სასკოლო სწავლების კურსისათვის ზოგადი ტენდენციები, რაც გამოიხატება შესაბამისი ცნებების სწავლების მეთოდოლოგიური პრინციპების დამუშავებაში. ეს საკითხები კი უშუალოდ დაკავშირებულია შემდეგი ძირითადი ცნებების სწავლებასთან: რიცხვები, ფუნქციები, კოორდინატები, სიმრავლის წერტილოვანი გარდაქმნები და სხვა.

მეოცე საუკუნის სამოციანი წლებიდან ბევრი დაიწერა სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შეტანაზე საშუალო სკოლაში. ავტორები ეყრდნობოდნენ საზღვარგარეთულ გამოცდილებას და სურდათ მისი გაზიარება მომხდარიყო საბჭოთა სკოლაში. ამ კუთხით საბჭოთა სკოლაში ძალიან ცოტა რამ გაკეთდა.

მეოცე საუკუნის ბოლოდან ქართველი მათემატიკოსები და მეთოდისტები დიდ ყურადღებას უთმობენ სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლებას საშუალო სკოლაში. ქვეყნდება სამეცნიერო შრომები, მუშავდება ალბათობის თეორიის სწავლების მეთოდიკის საკითხები, რომლებშიც ძირითადად გაშუქებულია ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლება საშუალო სკოლის მაღალ კლასებში და საუნივერსიტეტო კურსებში. საქართველოში მიმდინარე განათლების სისტემის რეფორმის შედეგად ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში მოხდა მონაცემთა დამუშავებისა და ალბათობის თეორიის ელემენტების საკითხების შეტანა. ამ საკითხების სწავლება მეორე კლასიდან იწყება. ისტორიულად ასეთი პრაქტიკა საქართველოს სკოლებში არასოდეს არ ყოფილა. მეოცე საუკუნის 60-იანი წლების ბოლოს და 70-იან წლების დასაწყისში ალბათობის თეორიის ელემენტები ისწავლებოდა ჯერ ფაკულტატიური კურსის სახით, ხოლო შემდეგ მაღალ კლასებში, მაგრამ ეს დროის თვალსაზრისით მცირე პერიოდი იყო და მაღალ კლასებშიც კი ამ საკითხების სწავლების მეთოდიკური მიდგომები ნაკლებ დამუშავებულია, ხოლო სიმრავლეთა თეორიასთან მიმართებაში სრულიად დაუმუშავებელია.

ცხადი ხდება გამოსაკვლევი პრობლემის აქტუალობა-ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე (VII-IX კლასები) ერთიან კონტექსტში მოხდეს სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება მოსწავლეთათვის განმავითარებელი ეფექტის გაძლიერების მიზნით. საკვლევი პრობლემის

მეცნიერულმა აქტუალობამ, მისმა პრაქტიკულმა მნიშვნელობამ და შეუსწავლელობამ განსაზღვრა სადისერტაციო გამოკვლევის თემა: „სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე“.

დისერტაციის თემიდან გამომდინარე, დღის წესრიგში დადგა საკითხი, როგორ განხორციელდეს ერთიან კონტექსტში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე.

ამ პრობლემის გადაწყვეტა შეუძლებელია დავიწყოთ მხოლოდ მეშვიდე კლასიდან, რადგან პირველ-მეექვსე კლასში შესწავლილი მასალა სათანადო მიმართებაში უნდა იყოს განსახილავ პრობლემასთან. ამიტომ სიმრავლური მიდგომები სწავლებაში გამოყენებული უნდა იქნეს პირველივე კლასიდან. ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებები მათემატიკის შესწავლის საფუძველთა საფუძველია, ამიტომ დაწყებით კლასებში მოსწავლეთა აზროვნების ჩამოყალიბებაში თეორიულ-სიმრავლური მიდგომის გამოყენება მტკიცე ბაზას შექმნის მათემატიკის შესწავლისათვის სწავლების შემდგომ საფეხურებზეც. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე მათემატიკის კურსში შესასწავლი მასალა მთლიანად დაფუძნებულია სიმრავლურ მიდგომებზე, მათ შორის ალბათობის თეორიის ელემენტებიც, ამიტომ დაწყებით კლასებში განსახილავი საკითხების სწავლებაში თეორიულ-სიმრავლური მიდგომების გამოყენება ლოგიკური გაგრძელებას ჰპოვებს სწავლების შემდგომ საფეხურებზე და უმაღლეს სკოლაში, ვფიქრობთ, რომ წარმოდგენილი მიდგომა დაეხმარება მოსწავლეებს და მათემატიკის მასწავლებლებს, ერთიან სისტემაში მოიყვანს მათემატიკის სწავლებას დაწყებით, ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლებში.

დასახული პრობლემის გადაწყვეტამ ბუნებრივად მიგვიყვანა იმამდე, რომ დაწყებით კლასებში არითმეტიკული მოქმედების შემოღება განხორციელდეს თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. საკითხის შესწავლის შემდეგ აღმოჩნდა, რომ ეს საკითხები სათანადოდ დამუშავებული არ არის და საჭიროა მისი მეთოდოლოგიური დამუშავება. რაც მოცემული გვაქვს დისერტაციის პირველ თავში. მასში ფუნდამენტურად გამოვიკვლიეთ არითმეტიკული მოქმედებების თეორიული

საფუძვლები. დავამუშავეთ ნატურალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მეთოდოლოგიური საფუძვლები თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით.

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლება შეუძლებელია სწავლებაში საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების გამოყენების გარეშე, ამიტომ მიზანშეწონილად მივიჩნიეთ დეტალურად განგვეხილა საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების თეორიული საფუძვლები მათემატიკის სასკოლო კურსში, რადგან ვთვლით. რომ საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების ცოდნა აუცილებელია მათემატიკის ყველა მასწავლებლისათვის განურჩევლად იმისა, სწავლების რომელ საფეხურზე უწევს მას მუშაობა.

სწავლებაში საგანთშორისი კავშირების რეალიზება მჭიდროდ უკავშირდება პიროვნების აღზრდისადმი კომპლექსურ მიდგომას და მისი გადაჭრა სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის სრულყოფის ფართო შესაძლებლობებს იძლევა.

საგანთაშორისი კავშირები წარმოადგენენ დიდაქტიკური პრობლემის გადაჭრის მნიშვნელოვან საშუალებას. დღევანდელ პირობებში, მეცნიერებათა ინტეგრაციისა და დიფერენციაციის პროცესში დიდ როლს თამაშობს საგანთაშორისი კავშირების განხორციელების პრობლემა. საგანთაშორისი კავშირების მეშვეობით შესაძლებელია გარე სამყაროს მოვლენებსა და პროცესებს შორის არსებული მრავალნაირი მიმართებებისა და კავშირების შეცნობა, მათ შორის ურთიერთქმედების არსში ჩაწვდომა.

გამოკვლევის ობიექტია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების (როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული ამოცანების) სწავლება ზოგად-საგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე მათემატიკის შესწავლის პროცესში, ხოლო ***საგანი***-სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების დადგენა და მათი პრაქტიკული გამოყენება VII-IX კლასების მათემატიკის სასწავლო პროცესში.

გამოკვლევას საფუძვლად უდევს ***ჰიპოთეზა:*** თუ სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლება აგებულია თანამედროვე ზოგადპედაგოგიური და მეთოდიკური მოთხოვნების

გათვალისწინებით, VII-IX კლასების მოსწავლეთა ასაკობრივი და ფსიქო-ფიზიოლოგიური თავისებურებებითა და სპეციფიკით, მაშინ ის მოსწავლეთათვის მათემატიკის შესწავლის და მათემატიკური კულტურის ფორმირების ეფექტური საშუალება უნდა გახდეს.

გამოკვლევის მიზანს წარმოადგენს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე მოსწავლეთათვის სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლების შესაძლებლობების მეცნიერული დასაბუთება და სწავლების ეფექტურობის ამაღლების შემოწმება ექსპერიმენტული შემოწმებით.

დასახული მიზნის მისაღწევად აუცილებელია გადავწყვიტოთ შემდეგი *ამოცანები:*

1. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოების შედგენის მეცნიერული ანალიზი, მათში განხილული კონკრეტული თემების სწავლების მიზნის, შინაარსის, ფორმების და მეთოდების აღწერა. იმ კონკრეტული თემების გამოყოფა, რომელთა გავლის დროს შესაძლებელია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლება;

2. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ჩართვის მეთოდიკური მიზანშეწონილობისა და პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობის დასაბუთება.

3. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე მათემატიკის კურსში სასწავლო ამოცანის ცნების განზოგადება, მისთვის სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე სასწავლო ამოცანების დამატება.

4. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ისეთი სახით ფორმულირება, რომლებიც ითვალისწინებს საშუალო საფეხურის მოსწავლეთა ასაკობრივ და ფსიქო-ფიზიოლოგიურ თავისებურებებს.

5. მოსალოდნელი შედეგის თეორიული დასაბუთება, რასაც მივიღებთ თეორიული მასალის VII-IX კლასებში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლებით და სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების შემოტანით.

6. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანათა კრებულის შედგენა და შესაბამისი მეთოდიკური რეკომენდაციების დამუშავება VII-IX კლასების მათემატიკის მასწავლებელთათვის, რომლებიც აღნიშნული ტიპის ამოცანების ამოხსნის ხერხების აღწერას მოიცავს.

7. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების თეორიული მასალის ერთიან კონტექსტში სწავლების და სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანათა ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ დამუშავებული მეთოდიკის პრაქტიკული რეალიზება. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარება და მისი სტატისტიკური მეთოდებით შეფასება.

დისერტაციის მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენს ფილოსოფიური, ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური თეორიები, რომლებიც აღნიშნულ პრობლემასთან არიან დაკავშირებული, სახელდობრ:

-ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურის (VII-IX კლასების) მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებათა თეორია;

-მათემატიკის სწავლების ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიური და მეთოდიკური საფუძვლები;

-მათემატიკის სწავლებაში საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების მეცნიერული საფუძვლები;

-სასწავლო ამოცანების თეორია.

კვლევის მეთოდები. დასახული ამოცანების გადასაწყვეტად და ამოსავალ დებულებათა შესამოწმებლად თითოეული ეტაპის სპეციფიკის გათვალისწინებით გამოვიყენეთ კვლევის კომპლექსური მეთოდები:

-პრობლემის ირგვლივ არსებული ფსიქოლოგიური, პედაგოგიური და მეთოდიკური ლიტერატურის ანალიზი;

-ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების დაწყებითი, საბაზო და მაღალი კლასების მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის თეორიული საკითხებისა და სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანათა ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის არსებული გამოცდილების შესწავლა და განზოგადება;

-ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანათა ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებების გამოკვლევა;

-მიღებული მეცნიერული შედეგების ანალიზი;

-კონსულტაციები კოლეგებთან, პრაქტიკოს მასწავლებლებთან, მოსწავლეთა ზეპირი და წერითი გამოკითხვა, დაკვირვება, მასწავლებელთა და მოსწავლეთა ანკეტირება, მოსწავლეთა ტესტირება, ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მოსწავლეთა საკონტროლო წერების ანალიზი;

-პედაგოგიური ექსპერიმენტის ორგანიზება და ჩატარება;

-პედაგოგიური ექსპერიმენტის შედეგების სტატისტიკური დამუშავება.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე და თეორიული ღირებულება მდგომარეობს იმაში, რომ მასში

-დამუშავებულია ნატურალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მეთოდოლოგიური საფუძვლები თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით.

-დამუშავებულია მათემატიკის საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების მეცნიერული საფუძვლები ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში;

-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ისტორიაში, საქართველოში პირველად ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურის მათემატიკის კურსისათვის მეცნიერული კვლევის საფუძველზე დამუშავებულია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლება;

-დამუშავებულია სიმრავლეთა წერტილოვანი გეომეტრიული გარდაქმნების და ალბათობის თეორიის ზოგიერთი საკითხის ერთდროული სწავლების მეთოდიკა, ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასებში;

-დამუშავებულია VII-IX კლასებში შესასწავლი ალბათობის თეორიის საკითხები და მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით

-დამუშავებულია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის ეტაპები მათემატიკის სასკოლო კურსში და მათი სწავლების მეთოდიკა;

-შედგენილია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანების სიტემა, რომელის ჩართვა მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სისტემატიურ კურსში;

-დამუშავებულია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;

-გადმოცემულია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურის მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგადი, კერძო და სპეციალური მეთოდიკის საკვანძო საკითხები VII-IX კლასის მოსწავლეთა ასაკობრივი და ფსიქო-ფიზიოლოგიური სპეციფიკის გათვალისწინებით;

-ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასის მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლებამ და სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანათა სისტემების პრაქტიკაში გამოყენების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდიკა ექსპერიმენტულ შემოწმებას გადიოდა 3 წლის (2007-2010 წლებში) განმავლობაში რამოდენიმე საშუალო სკოლაში. ექსპერიმენტში მონაწილეობა მიიღო 373 მოსწავლემ. ექსპერიმენტული კვლევის შედეგები შემოწმდა χ^2 სტატისტიკური კრიტერიუმით. მიღებული შედეგები სანდოა, რაც ადასტურებს ჩატარებული კვლევის ეფექტურობას.

ნაშრომის პრაქტიკული ღირებულება იმაში მდგომარეობს, რომ დამუშავებულია VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლება და სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, VII-IX კლასების მათემატიკის კურსისათვის მოსწავლეთა ასაკობრივი და ფსიქო-ფიზიოლოგიური თავისებურებების გათვალისწინებით დამუშავებულია სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის შემცველი ამოცანათა სისტემები. მასში წარმოდგენილი დიდაქტიკური მასალა გამოყენებას ჰპოვებს როგორც უმაღლესი სკოლის მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტთა, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული გადამზადების პროგრამების განხორციელებაში, ისე მათემატიკის მასწავლებელთა პედაგოგიურ საქმიანობაში.

მეცნიერული კვლევის შედეგების სანდოობა-მიღებული თეორიული დასაკვნებისა და პრაქტიკული რეკომენდაციების სანდოობა დადასტურებულია პედაგოგიური ექსპერიმეტით და განმტკიცებულია ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

1. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების ერთიან კონტექსტში სწავლების დასაბუთება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში;

2. სიმრავლეთა წერტილოვანი გეომეტრიული გარდაქმნების და ალბათობის თეორიის საკითხების ერთდროული სწავლების შესაძლებლობის დადასტურება, ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში;

3. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში შესასწავლი ალბათობის თეორიის თეორიული საკითხების სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების გამოკვლევა;

4. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემის ჩართვის აუცილებლობა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების

მათემატიკის სისტემატიურ კურსში და მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების გამოკვლევა;

5. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურის მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგადი, კერძო და სპეციალური მეთოდიკის საკვანძო საკითხების გამოკვლევა VII-IX კლასის მოსწავლეთა ასაკობრივი და ფსიქო-ფიზიოლოგიური სპეციფიკის გათვალისწინებით;

6. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანების სისტემის შედგენის მეთოდიკური საფუძვლები;

7. შემუშავებული მეთოდიკის ექსპერიმენტული გამოკვლევა.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე, აკაკი წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ახალგაზრდა მეცნიერთა და ასპირანტთა სამეცნიერო კონფერენციებსა და ამავე უნივერსიტეტის პროფესორ-მასწავლებელთა სამეცნიერო კონფერენციებზე, საქართველოს მათემატიკოსთა ყრილობებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატიურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოთვლითი მეთოდებისა და მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის კათედრასთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს, პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს.

დისერტაციის შედეგები მოხსენდა ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო სემინარს.

დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. კომბინატორული და ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები მათემატიკის კურსში. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 145-147.

2კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 141-144.

3. კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“,თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 172-175.

4. სიმრავლეებთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.161-163.

5. ალბათობის გამოთვლის გეომეტრიული მეთოდის სწავლების ზოგიერთი ასპექტი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.164-166.

6. *Probality Theori; 1. probality experiment, sample spaces*. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.171-173.

7. სიმრავლის ცნების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №2 (34), 2009 წელი, გვ.218-219.

8. დაწყებით კლასებში ნატურალურ რიცხვების შეკრების თეორიული საფუძველი. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის მეორე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. 2008 წელი, ქუთაისი-თბილისი, გვ. 102-105.

9. დაწყებით კლასებში ნატურალურ რიცხვების გამოკლების თეორიული საფუძველი. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის მეორე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. 2008 წელი, ქუთაისი-თბილისი, გვ. 106-109.

10. ინვერსიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება. თბილისის ეკონომიკურ ურთიერთობათა სახელმწიფო უნივერსიტეტის პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „საზრისი“, თბილისი, 2008 წ. გვ. 25-27.

11. ამოცანის ამოხსნის პროცესი და ამოხსნის ძიების პროცესი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1 (24), 2006 წელი, გვ.238-239

§1. მოკლე ისტორიული ცნობები ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების შესახებ

მეცხრამეტე საუკუნის 50-იანი წლებიდან სამეცნიერო და პედაგოგიური საზოგადოება მნიშვნელოვან ყურადღებას უთმობს მოსწავლეთა ალბათური აზროვნების ჩამოყალიბებას. მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყნის მეცნიერები სამეცნიერო შეკრებებზე გამოდიოდნენ მოსაზრებებით, რომ საშუალო სკოლის პროგრამაში შეეტანათ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები და დაემუშავებინათ მათი სწავლების მეთოდიკა.

მეცხრამეტე საუკუნეში შეიქმნა არა მარტო რეალური ბაზა ბუნებისმეტყველების კარდინალური განვითარებისათვის, არამედ ლოგიკურად, კარგად დასაბუთებული პრაქტიკული სისტემა სასკოლო განათლების მოდერნიზაციისათვის. მეთვრამეტე საუკუნის დიდმა მიღწევებმა დაკავშირებულმა გალილეო გალილეის, დეკარტის, ნიუტონის და ლაიბნიცის სახელებთან განაპირობა ტექნიკის პროგრესი მეცხრამეტე საუკუნეში [39], [40]. ამან კი წარმოშვა მზარდი მოთხოვნილება კვალიფიციურ ტექნიკურ მუშახელზე, ხოლო ამ უკანასკნელმა მათემატიკური განათლების საჭიროება წამოწია წინა პლანზე. ყოველივე ამან განაპირობა ღრმა რეფორმები მათემატიკურ განათლებაში. კანტორის წინადადებით დაიწყო მოძრაობა მათემატიკოსთა საერთაშორისო გაერთიანების ორგანიზებისათვის. ამ მოძრაობის შედეგად 1897 წელს ქ.ციურიხში (შვეიცარია) ჩატარდა მათემატიკოსთა პირველი მსოფლიო კონგრესი. მოხსენებით „მათემატიკური განათლების შესახებ“ გამოვიდა ფელიქს კლაინი. ის მოითხოვდა მათემატიკის ერთი მთლიანი კურსის შექმნას ახალი შინაარსით, რომელიც ძირითადად აგებული უნდა ყოფილიყო ფუნქციათა და გეომეტრიული გარდაქმნების ცნებებზე. ფართოდ უნდა ყოფილიყო ინტერპრეტირებული მათემატიკის გამოყენება ფიზიკასა და ტექნიკაში. ის მოითხოვდა აგრეთვე სწავლების მეთოდების შეცვლას. 1899 წელს ჟენევაში დაარსდა საერთაშორისო ჟურნალი „მათემატიკური განათლება“, რომლის ძირითადი ამოცანა იყო მათემატიკის სწავლების გარდაქმნის შესაძლებლობებზე მსჯელობა. 1906 წელს

რომში მეოთხე საერთაშორისო მათემატიკოსთა კონგრესზე შეიქმნა საერთაშორისო კომისია მათემატიკის სწავლების რეფორმირებისათვის. ამ კომისიის ძირითადი ამოცანა იყო მათემატიკის სწავლების ძირითად მიმართულებებში ცვლილებების შემუშავება. ამავე წელს რუსეთში შემოღებული იქნა ახალი პროგრამები, მასში შეტანილი იქნა ანალიზისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები, რომლებიც ბუნებრივია გავრცელდა საქართველოშიც.

პირველ მსოფლიო ომამდე 1911 და 1912 წლებში რუსეთში ჩატარდა მათემატიკის მასწავლებელთა ყრილობები, რომელიც ეხებოდა მათემატიკის სწავლების პრობლემებს. 1841 წელს მოსკოვის უნივერსიტეტის პროფესორმა ნ.დ. ბრაშმანმა მოხსენებაში „მათემატიკურ მეცნიერებათა გავლენა გონებრივ შესაძლებლობათა განვითარებაზე" გამოთქვა აზრი იმის შესახებ, რომ ყოველ ადამიანს უნდა ჰქონდეს წარმოდგენები ალბათობის თეორიაზე. დაახლოებით 100 წლის შემდეგ ნ.დ. ბრაშმანის მოსაზრებები განხილულ იქნა საერთაშორისო დონეზე. სასკოლო პროგრამაში ალბათობის თეორიის ჩართვის საკითხის განხილვის მიზნით მათემატიკის საერთაშორისო კონგრესებში (ედინბურგი, 1958 წ. სტოკჰოლმი 1962 წ., მოსკოვი 1966 წ.) მრავალი ცნობილი მათემატიკოსის მოხსენებაში იყო რეკომენდაციები ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მათემატიკის სასწავლო პროგრამის რეფორმის შესახებ. გამოთქმული იყო მოსაზრებები, რომ საშუალო სკოლაში მათემტიკის სასწავლო პროგრამაში ჩართულიყო სხვა საგნებთან ერთად ალბათობის თეორიის ელემენტებიც. [72].

საბჭოთა ხელისუფლების დამყარების შემდეგ რუსეთში 1919 წელს იყო პირველი ცდები ალბათობის თეორიის ელემენტების საშუალო სკოლაში ჩართვის შესახებ, რომელსაც რაიმე რეალური შედეგი არ მოყოლია.

მეოცე საუკუნის სამოციანი წლებიდან ბევრი დაიწერა (პ.ალექსანდროვი, ა.კოლმოგოროვი, ი.იაგლომი, ი.ზელდოვიჩი, ა.მიშინი, ბ.გნედენკო, ვ.ფირსოვი, ტ.ვარგა, გ.მანია, ვ.შონია, ა.ფარჯანაძე, ა.დოგრაშვილი და სხვ.) კომბინატორიკისა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შეტანაზე საშუალო სკოლაში. ავტორები ეყრდნობოდნენ საზღვარგარეთულ გამოცდილებას და სურდათ მისი გაზიარება მომხდარიყო საბჭოთა სკოლაში.

მეოცე საუკუნის ბოლოდან ქართველი მათემატიკოსები და მეთოდისტები დიდ ყურადღებას უთმობენ ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საკითხების შეტანას საშუალო სკოლაში (გ.ნოზაძე, მ.ფაცაცია, ნ.ნახუცრიშვილი, მ.ოჩხიკიძე, გ.ბერძულიშვილი, ნ. ონიანი, ქ.მანჯგალაძე, შ.ებრალიძე, მ.ტყებუჩავა, ზ.ხარაძე და სხვ.). ქვეყნდება სამეცნიერო შრომები, მუშავდება ალბათობის თეორიის სწავლების მეთოდიკის საკითხები, რომლებშიც ძირითადად გაშუქებულია მაღალ კლასებში ალბათობის თეორიის საკითხების სწავლება. საქართველოში მიმდინარე განათლების სისტემის რეფორმის შედეგად ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში მოხდა მონაცემთა დამუშავებისა და ალბათობის თეორიის ელემენტების საკითხების შეტანა. ამ საკითხების სწავლება მეორე კლასიდან იწყება. ისტორიულად ასეთი პრაქტიკა საქართველოს სკოლებში არასოდეს არ ყოფილა. მეოცე საუკუნის 60-იანი წლების ბოლოს და 70-იან წლების დასაწყისში ალბათობის თეორიის ელემენტები ისწავლებოდა ჯერ ფაკულტატიური კურსის სახით [95], ხოლო შემდეგ მაღალ კლასებში, მაგრამ ეს დროის თვალსაზრისით მცირე პერიოდი იყო და მაღალ კლასებშიც კი ამ საკითხების სწავლების მეთოდიკური მიდგომები ნაკლებ დამუშავებულია, ხოლო სიმრავლეთა თეორიასთან მიმართებაში სრულიად დაუმუშავებელია.

განვიხილოთ მესამე საერთაშორისო კონგრესის დოკუმენტების მოკლე შინაარსი (ქ. კარლსრუე, გფრ, 1967 წ. 16-21 აგვისტო). კონგრესის ძირითადი მიზანი იყო მათემატიკური განათლების სფეროში უკანასკნელი ოცი წლის განმავლობაში მსოფლიოს წამყვან ქვეყნებში ჩატარებული მუშაობის ანალიზი და მისი შემდგომი განვითარების ტენდენციების შემუშავება. სამოციან წლებში ძირითადი ყურადღება გამახვილდა მათემატიკური განათლების შინაარსობრივი მხარის განხილვაზე, ხოლო სამოცდაათიან წლებში დიდი ყურადღება დაეთმო თვით სწავლების პროცესების შესწავლას, სწავლების ფორმებისა და მეთოდების შემუშავებას. კონგრესზე განხილული იყო არსებული განათლების სისტემის შემდეგი პრინციპები:

1. დაწყებითი სკოლა (ასაკი 6-12 წ.). ამ ეტაპზე მათემატიკის სწავლების პროგრამაში უნდა შედიოდეს შემდეგი საკითხები: თეორიულ-სიმრავლური ცნებების ელემენტები და მათემატიკური ლოგიკის უმარტივესი ცნებები; გეომეტრიის

უმარტივესი ცნებები. გათვალისწინებული იყო (პროგრამაში შედიოდა) უმარტივესი შემთხვევითი მოვლენების განხილვა, შეიძლება გამოიყოს სამი ძირითადი სახის მიდგომა ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საწყისი ცნებების სწავლების მეთოდიკაში:

ა. მოსწავლეთა მიერ დაკვირვებათა შედეგების ან სპეციალურად ჩატარებული ცდების შედეგების ელემენტარული სტატისტიკური დამუშავება. დაკვირვებათა შედეგების დამუშავებისას შემოაქვთ სპეციალური ტერმინოლოგია (ცნებები), რომელთა საშუალებით მოსახერხებელია ამა თუ იმ რეალური მოვლენის აღწერა.

ბ. უმარტივესი ექსპერიმენტები, რომლებიც საჭიროებენ კომბინატორული აზროვნების ელემენტებს.

გ. ზოგჯერ კი სწავლების პროცესში შემოიფარგლებიან მხოლოდ უმარტივესი ამოცანების განხილვით.

2. დაწყებითი სკოლის უფროსი კლასები და საშუალო სკოლის უმცროსი კლასები (10-16 წ.). რიგი ქვეყნების მათემატიკის სწავლების პროგრამებში შეიძლება გამოვყოთ საერთო ტენდენცია: რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები და მოქმედებები მათზე. ალგებრის ელემენტები, წრფივი და ზოგიერთი სხვა ფუნქციები, განტოლებები და უტოლობები, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები, ვექტორები, კოორდინატთა მეთოდი, გეომეტრია სიბრტყეზე და სხვა. სასკოლო პროგრამებში და სახელმძღვანელოებში სხვადასხვა ქვეყნების ექსპერიმენტულ პროგრამებში შეტანილი იყო მთელი რიგი ახალი საკითხები: მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები, სიმრავლეთა ალგებრის, ბულის ალგებრის, ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტები და სხვა.

რადაგან ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების საფუძველს წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, ამიტომ განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გამახვილდეს ალბათობის თეორიის ელემენტების შესწავლის მოსამზადებლი ბაზის შექმნისათვის. ამ თვალსაზრისით მეტად მნიშვნელოვანია, დამუშავებულ იქნეს ალბათობის თეორიის სასკოლო სწავლების კურსისათვის ზოგადი ტენდენციები, რაც გამოიხატება შესაბამისი ცნებების სწავლების მეთოდოლოგიური პრინციპების დამუშავებაში. ეს საკითხები კი უშუალოდ

დაკავშირებულია შემდეგი ძირითადი ცნებების სწავლებასთან: რიცხვები, ფუნქციები, კოორდინატები, სიმრავლის წერტილოვანი გარდაქმნები და სხვა. [96].

ამიტომ მიზანშეწონილია დაწყებით კლასებში მოსწავლეები უნდა მიეჩვიონ, რომ დასახელებულ ცნებათა ფარული და ცხადი განსაზღვრებების შემოღება უნდა მოხდეს თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიული საფუძვლების დამუშავება და მათი პრაქტიკული რეალიზება დაწყებით კლასებში, რადგან დაწყებით კლასებში ეყრება საფუძველი მათემატიკურ განათლებას, მათემატიკურ ენის შესწავლას, ზეპირ და წერით მეტყველებას და სხვა. ამ საკითხებთან დაკავშირებით საქართველოში გარკვეული მუშაობა მეოცე საუკუნის სამოციანი წლებიდან დაიწყო, რომელიც დღესაც გრძელდება. სამუშაოს გარკვეული ნაწილი უკვე ჩატარებულია, დაწერილია სამეცნიერო სტატიები, შემუშავებულია მეთოდური რეკომენდაციები, გამოქვეყნე-ბულია მეთოდური სახელმძღვანელოები დაწყებითი სკოლის მასწავლებლებისა-თვის, დაცულია რამდენიმე დისერტაციაც, განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი: სახელმძღვანელოში [53] ავტორები იზიარებენ იმ აზრს, რომ შეკრებასა და გამოკლებას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა გაერთიანება და სიმრავლეთა სხვაობა. ამას ადასტურებს შემდეგი ციტატა: „ორი (არასაერთო ელემენტების მქონე) სიმრავლის შეერთებით მიღებული ახალი სიმრავლის რიცხობრიობა ტოლია გასაერთიანებელი სიმრავლეების რიცხობრიობათა ჯამისა“. სახელმძღვანელოში კარგად არის განსაზღვრული სიმრავლეების გამოყენებით თუ რა არის შესაკრებები და ჯამი. ასევე, ნატურალური რიცხვების გამოკლებას საფუძვლად უდევს სასრული სიმრავლიდან მისი წესიერი ნაწილის ჩამოშორება.

სახელმძღვანელოში [54] ავტორი როდესაც აცნობს მოსწავლეებს ნატურალურ რიცხვებს, მიუთითებს ისეთ თვალსაჩინოებაზე, როდესაც საჭიროა მოცემული რიცხვის შესაბამისი რიცხობრიობის მქონე სიმრავლის შედგენა. ე.ი. მოსწავლე კონკრეტულად დაინახავს რიცხვების შესაბამის კონკრეტულ საგნებს. მასში შეკრება-გამოკლების სწავლება სიმრავლეთა გაერთიანებისა და სიმრავლეთა სხვაობის გამოყენებით ნაკლებად არის, მაგრამ გარკვეული მინიშნებები გაკეთებულია, რასაც მართალია არ ახლავს საკითხის სათანადო მეთოდიკური დამუშავება. ამ

სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი ნატურალური რიცხვების შეკრება-გამოკლების მეთოდიკა დაფუძნებულია შეკრება-გამოკლების აქსიომატურ მეთოდზე.

სახელმძღვანელოებში [36], [37], [38] რომელებიც ათეული წლების განმავლობაში გამოიყენებოდა სკოლაში, ავტორები რიცხვის ცნების შემოტანისას იყენებდნენ სხვადასხვა სიმრავლეებს. ორ სხვადასხვა სიმრავლეებს შორის ამყარებდნენ ურთიერთცალსახა შესაბამისობას და შესაბამის რიცხვებს ადარებდნენ ერთმანეთს. მათ მიერ გამოქვეყნებულ მეთოდურ შრომებში ნაკლებად არის დამუშავებული შეკრება-გამოკლების თეორიული საფუძვლები თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. აქაც უფრო მეტად გამოყენებულია აქსიომატური მეთოდი.

სახელმძღვანელოში [56] ვკითხულობთ: „არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიული საფუძველია სიმრავლეთა თეორიის ცნებები. შეკრებისათვის სიმრავლეთა გაერთიანება, გამოკლებისათვის სიმრავლიდან მისი წესიერი ნაწილის ჩამოშორება“. ავტორი შემდგომ ამ მეთოდიკის გამოყენებას ნაკლებ ყურადღებას უთმობს. შეკრება-გამოკლებას უფრო მეტად ახდენს აქსიომატური მეთოდით და ძირითადი წესების გამოყენებით. შეკრებაზე და გამოკლებაზე ამოცანების ამოხსნის დროს იყენებს სიმრავლეთა გაერთიანებას და სიმრავლეთა სხვაობას. იგივე აზრი აქვს ავტორს გატარებული შრომებში [57], [58].

სახელმძღვანელოში [8] ავტორები ზოგიერთი ცნების შემოტანისას იყენებენ თეორიულ-სიმრავლურ მიდგომას. მაგალითად, ნატურალური რიცხვების ცნების შემოტანისას, შეკრებისა და გამოკლების კონკრეტული აზრის გარკვევისას.

ისინი მოითხოვენ ნატურალური რიცხვების გაცნობას რიცხვი ოთხიდან. „რიცხვების გაცნობას ვიწყებთ რიცხვი ოთხიანით, რათა ბავშვმა დაინახოს, რომ ერთი სიმბოლოთი შეიძლება რამდენიმე საგნის ერთობლიობის აღნიშვნა, მისი რაოდენობის გამოხატვა“. ეს წინადადება ნაწილობრივ აკმაყოფილებს ნატურალური რიცხვის განმარტებას თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. მართლაც, საგანთა ერთობლიობა გააზრებული ჩვენს მიერ ერთ მთლიანობაში არის სიმრავლე, რომლის ელემენტების (საგნების) რაოდენობა არის რიცხვი. ამდენად, მიდგომა რიცხვის

ცნების შემოსატანად სწორია. ამავე სახელმძღვანელოში ავტორები ცდილობენ მოსწავლეებიც და მასწავლებლებიც გაარკვიონ შეკრებისა და გამოკლების არსში სიმრავლეების გამოყენებით. ავტორები შეკრებაში გულისხმობენ საგნების ერთად თავმოყრას, შეგროვებას, შეკრებას. სიმრავლურ ენაზე ეს ნიშნავს სიმრავლეთა გაერთიანებას. რა თქმა უნდა, აქ სწორია, როცა ავტორები ამბობენ, საგნების რაოდენობას მნიშვნელობა არა აქვსო. ეს იმას ნიშნავს, რომ შეკრებას ისინი საფუძვლად უდებენ სიმრავლეთა გაერთიანებას.

გამოკლების ოპერაცია შედარებით რთულია შეკრებასთან მიმართებაში. როდესაც გამოკლება გვინდა დავაკავშიროთ სიმრავლეებთან, ამ დროს ძნელია საკლების, მაკლების და სხვაობის გასაგნობრიოვება, განსაკუთრებით კი საკლების. გამოკლების წარმოდგენისათვის სხვადასხვა საშუალებები არსებობს. ავტორები მიმართვენ ერთ-ერთ ასეთ თვალსაჩინოებას. დახაზულია 9 პატარა რგოლი, რომელსაც აკლდება რიცხვი 2. ამ მაგალითში საკლები არის წრეების რაოდენობა-9. მაკლები რიცხვი 2 მიუთითებს, რომ მოცემულ 9 რგოლს უნდა გამოვაკლოთ ორი რგოლი. საკლები ორი რგოლის ცალკე დახატვა მეთოდური თვალსაზრისით მიუღებელია იმიტომ, რომ მაშინ სულ 11 რგოლი გვექნება. როდესაც ავტორები მიუთითებენ მოვაკლოთ ორი რგოლი, ეს ნიშნავს იმას, რომ მოცემულ სიმრავლეს უნდა ჩამოაშორო მისი წესიერი ნაწილი, ე.ი. საქმე გვაქვს სიმრავლეთა სხვაობასთან და ამიტომ ვამბობთ, გამოკლებას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა სხვაობა. აქედან გამომდინარე, ავტორები შეკრება-გამოკლებას საფუძვლად უდებენ სიმრავლეთა გაერთიანებას და სიმრავლეთა სხვაობას.

დამხმარე სახელმძღვანელოში [32] ავტორები იხილავენ შეკრებისადმი ორი სახის მიდგომას: აქსიომატურსა და თეორიულ-სიმრავლურს. შეკრებას საფუძვლად უდევს ორი არაგადამკვეთი სიმრავლის გაერთიანება. განხილულია სხვადასხვა სახის მაგალითები შეკრებასა და გამოკლებაზე.

სახელმძღვანელოში [28] ავტორი შეკრება-გამოკლების სწავლებისას ეყრდნობა შეკრება-გამოკლების თეორიულ საფუძვლებს. ეს საფუძვლებია: აქსიომატური

მეთოდი მათემატიკაში, თეორიულ-სიმრავლური მიდგომა და ძირითადი წესები, რომელსაც ეყრდნობა შეკრება-გამოკლების სწავლება დაწყებით კლასებში.

სახელმძღვანელოში [47] ავტორები იზიარებენ იმ აზრს, რომ შეკრება-გამოკლებას საფუძვლად უნდა დაედოს სიმრავლეთა გაერთიანება და სიმრავლეთა სხვაობა.

ჩატარებული მიმოხილვიდან ჩანს, რომ ქართველი მეცნიერები და მეთოდისტები თავიანთ სახელმძღვანელოებში გარკვეულ ყურადღებას უთმობენ არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიულ-სიმრავლურ საფუძვლებს, უფრო მეტად კი მათ გამოყენებას. ჩვენ დისერტაციის პირველი თავის მესამე პარაგრაფში არითმეტიკული მოქმედების თეორიული საფუძვლების გამოკვლევას მოვახდენთ ფუნდამენტურად, კონკრეტულად კი, დავამუშავებთ ნატურალურ რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების მეთოდოლოგიურ საფუძვლებს თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. რადგან ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებების შესწავლა მათემატიკის შესწავლის საფუძველთა საფუძველია, ამიტომ დაწყებით კლასებში მოსწავლეთა აზროვნების ჩამოყალიბებაში თეორიულ-სიმრავლური მიდგომის გამოყენება მტკიცე ბაზას შექმნის მათემატიკის შესწავლისათვის სწავლების შემდგომ საფეხურებზეც. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე მათემატიკის კურსში შესასწავლი მასალა მთლიანად დაფუძნებულია სიმრავლურ მიდგომებზე, (მათ შორის ალბათობის თეორიის და მათემატიკური სტატისტიკის ელემენტებიც), ამიტომ დაწყებით კლასებში განსახილავი საკითხების სწავლებაში თეორიულ-სიმრავლური მიდგომების გამოყენება ლოგიკური გაგრძელებას ჰპოვებს სწავლების შემდგომ საფეხურებზე და უმაღლეს სკოლაში, ვფიქრობთ, რომ წარმოდგენილი მიდგომა დაეხმარება მოსწავლეებს და მათემატიკის მასწავლებლებს, ერთიან სისტემაში მოიყვანს მათემატიკის სწავლებას დაწყებით, ზოგადსაგანმა-ნათლებლო და უმაღლეს სკოლებში.

§2. საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების თეორიული საფუძვლები მათემატიკის სასკოლო კურსში

დისერტაციის თემიდან გამომდინარე, ჩვენი მიდგომები სიმრავლეთა თეორიისა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ძირითადად დაფუძნებულია საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზებაზე. მიზანშეწონილად მივიჩნიეთ დეტალურად განვიხილოთ საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების თეორიული საფუძვლები მათემატიკის სასკოლო კურსში, რადგან ვთვლით. რომ ამ კავშირების ცოდნა აუცილებელია მათემატიკის ყველა მასწავლებლისათვის განურჩევლად იმისა, სწავლების რომელ საფეხურზე უწევს მას მუშაობა.

სწავლებაში საგანთაშორისი კავშირების რეალიზება მჭიდროდ უკავშირდება პიროვნების აღზრდისადმი კომპლექსურ მიდგომას და მისი გადაჭრა სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის სრულყოფის ფართო შესაძლებლობებს იძლევა.

საგანთაშორისი კავშირები წარმოადგენენ დიდაქტიკური პრობლემის გადაჭრის მნიშვნელოვან საშუალებას. დღევანდელ პირობებში, მეცნიერებათა ინტეგრაციისა და დიფერენციაციის პროცესში დიდ როლს თამაშობს საგანთაშორისი კავშირების განხორციელების პრობლემა. საგანთაშორისი კავშირების მეშვეობით შესაძლებელია გარე სამყაროს მოვლენებსა და პროცესებს შორის არსებული მრავალნაირი მიმართებებისა და კავშირების შეცნობა, მათ შორის ურთიერთქმედების არსში ჩაწვდომა.

სწავლებაში მათემატიკის საგანთაშორისი კავშირების კვლევას საქართველოში საკმაოდ კარგი ტრადიციები აქვს. ამ საკითხებზე დაცულია არაერთი საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაცია: ვ.ქელბაქიანი, გ.ჩაჩანიძე, ლ.ბაბუნაშვილი, გ.ბერძულიშვილი, მ.გელაშვილი, დ.ბენდელიანი, ა.ნანავა, რ.ქურდაძე, ლ. ჯინჯიხაძე და სხვ. [9], [55], მაგრამ ამ კუთხით გასაკეთებელი კვლავ ბევრია. ჩვენ დისერტაციაში წარმოვადგენთ საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების

თეორიულ ასპექტებს, რაც დაეხმარება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებს პრაქტიკული მოღვაწეობის დროს.

ცნებაში „საგანთაშორისი კავშირები“ გამოიყოფა სამი არსებითი ნიშანი:

1. კავშირის შემადგენლობა; 2. კავშირის ხერხები; 3. კავშირის მიმართულება.

კავშირის შემადგენლობაში იგულისხმება კონკრეტული საკითხებისა და სასწავლო თემების ერთობლიობა, რომლებიც ერთმანეთთან თანაფარდობაში იმყოფებიან განსაზღვრული წესებისა და ნიშნების მიხედვით. მხედველობაში მიიღება ის, რომ კავშირის შემადგენლობის დეტალიზაცია მდგომარეობს ძირითადი მეცნიერული ფაქტების, მოვლენების, პროცესების, მათი შემადგენელი ნაწილებისა და თვისებების დანაწევრებაში. ყოველი მათგანი ერთ მთლიანობაში იძლევა იმ მასალას, რომელიც გადაეცემა მონათესავე სასწავლო დისციპლინას.

კავშირის დამყარების ქვეშ იგულისხმება ის მიმართულება, რომლითაც ხორციელდება რაიმე ცნებების გადაცემა ერთი სასწავლო დისციპლინიდან მეორეზე. ამასთან მხედველობაში მიიღება ის, რომ ეს კავშირი შეიძლება იყოს როგორც ორმხრივი, ასევე ცალმხრივი.

დროებითი კავშირების მიხედვით შეიძლება გამოვყოთ პერსპექტიული კავშირები, რომლებიც გამომდინარეობს მათი წინამორბედი კავშირებისაგან. ამ არსებითი ნიშნებისაგან გამომდინარეობს საგანთაშორისი კავშირის სპეციფიკა:

-რამდენიმე სასწავლო საგნის ელემენტები შინაარსის მიხედვით ერთმანეთთან უნდა იყვნენ თანაფარდობაში;

-სწავლების მეთოდებს შორის უნდა დამყარდეს ურთიერთკავშირი;

-თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის საკითხების გადაწყვეტისას საჭიროა ცოდნის კომპლექსური გამოყენების უნარ-ჩვევების ფორმირება.

საგანთაშორისი კავშირები გამოყენებული უნდა იქნეს პედაგოგიური მიზნებიდან გამომდინარე. უნდა მოხდეს:

1. ცოდნის ინტეგრაცია, სხვადასხვა სასწავლო საგნის თეორიული და პრაქტიკული მონაცემების შეჯამება;

ამ პროცესის განხორციელება განპირობებულია იმ გარემოებით, რომ ცოდნის შეძენა ხდება სხვადასხვა საგნის შესწავლით. ამ საგნებიდან თითოეული აღწერს

სინამდვილის მხოლოდ ერთ-ერთ მხარეს. ეს ბუნებრივიცაა, რადგან გარე სამყაროს მოვლენების დანაწევრების გზითაა შესაძლებელი ღრმად შევიმეცნოთ მისი ცალკეული მხარეები. თუმცა სინამდვილის ასეთი დიფერენცირებული შესწავლა საკმარისი არ არის, რადგან ამ შემთხვევაში სამყარო არ აღიქმება როგორც ერთიანი მთლიანი. ამიტომ, აუცილებელია სხვადასხვა სახის ცოდნის ე.ი. მონათესავე სასწავლო საგნების მონაცემების სინთეზი. ეს ნიშნავს, რომ ერთი და იგივე ფაქტი, თუ მოვლენა განვიხილოთ სხვადასხვა კუთხით, გამოვავლინოთ ურთიერთკავშირი სხვადასხვა სასწავლო დისციპლინის თეორიულ მონაცემებს შორის.

2. ახალი ცოდნის შეძენა;

ამ მიზნის ფორმულირება განპირობებულია არა მარტო ამა თუ იმ სასწავლო დისციპლინის შინაარსის, არამედ მისი მონათესავე სასწავლო დისციპლინის შინაარსის ღრმად გაგებით. რამდენადაც თეორიული და პრაქტიკული ცოდნა შეუძლებელია მიღებულ იქნას მხოლოდ ერთი სასწავლო დისციპლინის მეშვეობით, ამიტომ აუცილებელია კავშირის დამყარება მონათესავე სასწავლო დისციპლინებთან ინფორმაციის მიღების მიზნით.

3. სასწავლო ინფორმაციის ხარისხობრივი და რაოდენობრივი მხარეების სინთეზი;

ეს მიზანი გულისხმობს სწავლებაში იმ პრინციპის ასახვას, რომელიც ემყარება რეალური სამყაროს მოვლენებისა და პრცესების ახსნას რაოდენობრივი ფაქტორის გათვალისწინებით. ხარისხობრივად განსხვავებული მოვლენების შეფასება რაოდენობრივი მაჩვენებლების მიხედვით წარმოადგენს მნიშვნელოვან ფაქტორს პრაქტიკულად ყველა სასწავლო დისციპლინის შესწავლაში.

4. ცოდნის პრაქტიკული გამოყენების სფეროს გაფართოება.

ეს მიზანი გულისხმობს ცოდნის კომპლექსური გამოყენების აუცილებლობას და მოითხოვს სასწავლო პროცესში „საგანთაშორისი“ კავშირების დამყარების სიტუაციის შექმნას. [71].

პედაგოგთა ერთ ნაწილს მიაჩნია, რომ საგანთაშორისი კავშირები ზოგადად ცოდნის სისტემის ფორმირების დიდაქტიკურ საფუძველს წარმოადგენს, მეორე ნაწილი თვლის, რომ ისინი სასწავლო პროცესის სრულყოფის მეთოდებს

მიეკუთვნებიან, მესამენი საგანთაშორის კავშირებში ხედავენ მოსწავლეთა შემეცნებითი აქტივობის განვითარების სტიმულს, მეოთხენი მას განიხილავენ, როგორც სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის ორგანიზაციის შემადგენელ ნაწილს, მეხუთენი მას თვლიან მეცნიერებათშორის არსებული კავშირების ეკვივალენტად და სხვ. [51], [78].

უნდა შევნიშნოთ, რომ საგანთაშორისი კავშირების განხილვა ზემოთ აღნიშნული პოზიციებიდან არ იძლევა შესაძლებლობას ზუსტად და ობიექტურად განვსაზღვროთ მათი ფუნქციები.

პედაგოგიურ ლიტერატურაში არსებობს მრავალრიცხოვანი მონაცემები, მცდელობები, მიმართულებები, კონკრეტულად, პედაგოგიური და უნივერსალური სახით საგანთაშორისი კავშირების განსაზღვრისა.

მაგალითად, ო.შებალინის აზრით, საგანთაშორისი კავშირების ფუნქცია და როლი სასწავლო-აღმზრდელობით პროცესში უწინარეს ყოვლისა უნდა განისაზღვროს იმ დიდაქტიკური მიზნებით რომელთა მისაღწევადაც გამოიყენება ისინი [91], [92], [93]. ერთიანი მეცნიერული მსოფლხედველობის ფორმირებისას საგანთაშორისმა კავშირებმა უნდა უზრუნველყოს ცალკეული სასწავლო დისციპლინების კოორდინაცია, ცოდნის ინტეგრაცია. მათი მეშვეობით მოსწავლეებს უნდა შეექმნას სრულყოფილი წარმოდგენა სამყაროს მეცნიერულ სურათზე, რომლითაც ისინი გააანალიზებენ ბუნებაში მიმდინარე სხვადასხვა სახის მოვლენებს, პროცესებს და განაზოგადებენ მათ.

სამეცნიერო-პედაგოგიურ ლიტერატურაში არსებობს საგანთაშორისი კავშირების სისტემატიზაციის და კლასიფიკაციის სხვადასხვა ვარიანტი. დავახასიათოთ ზოგიერთი მათგანი.

1. ნაშრომში [59] ს.ბაბაჯანიანი და ვ.მონახოვი აღნიშნავენ, რომ ცნება „საგანთაშორისი კავშირები“ მოიცავს კავშირის შემდეგ ტიპებს:

ა) ცნებითი ანუ დროებითი კავშირები;

ბ) საგანთაშორისი ცალმხრივი კავშირები, რომლის ამოცანაა კონკრეტული საგნის კონკრეტული საკითხის შესწავლისას სხვა საგნების გამოყენება;

გ) დამატებითი კავშირები;

დ) საგანთაშორისი კავშირების განხორციელება ცნებისა და განსაზღვრებების მეშვეობით.

2. ი.ლაშქარავა [77] აღნიშნავს, რომ საგანთაშორისი კავშირები გავლენას ახდენს სასწავლო-აღმზრდელობით პროცესის ყველა მხარეზე, განსაკუთრებით დიდია მათი როლი მოსწავლეთა შემეცნებითი აქტიურობის განვითარებაში, სწავლების მეთოდების შემუშავებასა და გამოყენებაში.

ი. ლაშქარავა გამოყოფს კავშირების სამ ეტაპს:

ა) კავშირი სასწავლო დისციპლინების შინაარსის მიხედვით;

ბ) კავშირი უნარ-ჩვევების ფორმირების მიხედვით;

გ) კავშირი სწავლების მეთოდების მიხედვით.

3. მ.სკატკინისა და ი.ლერნერის [81], [82] მიხედვით საგანთაშორისი კავშირები შეიძლება დავყოთ:

ა) თითოეული სასწავლო საგნისათვის დამახასიათებელ სპეციფიკურ ცოდნასა და უნარ-ჩვევებს შორის კავშირებად;

ბ) კავშირებად, იმ ცოდნასა და უნარ-ჩვევებს შორის რომლებიც დამახასიათებელია ზოგადად ყველა სასწავლო საგნისათვის;

გ) კავშირებად დროის ფაქტორის მიხედვით.

4. ო.შებალინი [91], [92], [93] გამოყოფს კავშირების შემდეგ ჯგუფებს:

ა) მსოფლხედველობრივი კავშირები;

ბ) საინფორმაციო კავშირები;

გ) ქრონოლოგიური ანუ დროითი კავშირები.

მსოფლხედველობრივი კავშირები იყოფა სამ კატეგორიად:

ა) გენერალური საგანთაშორისი კავშირები სასწავლო-აღმზრდელობით პროცესში უზრუნველყოფენ სამყაროს მეცნიერული სურათის შესახებ წარმოდგენების ჩამოყალიბებას;

ბ) შიდაციკლური საგანთაშორისი კავშირების ამოცანაა უზრუნველყონ მოსწავლეებში მეცნიერების ზოგადი კანონზომიერებების შესახებ ადექვატური წარმოდგენბის გამომუშავება;

გ) ლოგიკური კავშირების მიზანია ცალკეული მეცნიერული დისციპლინების შესახებ ცოდნის ერთიან სისტემაში მოყვანა.

უნდა აღინიშნოს, რომ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს კავშირებს დროის მიხედვით. ამ ნიშნით მათი კლასიფიკაცია ასეთია:

ა) წინამორბედი კავშირები, რომლებიც მოითხოვენ სხვა სასწავლო დისციპლინიდან შესწავლილი მასალის აღდგენას;

ბ) თანმხლები კავშირები, რომლებიც მოითხოვენ ამა თუ იმ ცნების შინაარსის ცალსახა გამოყენებას სხვადასხვა სასწავლო საგნის ერთდროული სწავლებისას;

გ) პერსპექტიული კავშირები, რომლებიც მოითხოვენ ამა თუ იმ ცნების შინაარსის უფრო ღრმად გაანალიზებას მომავალში შესასწავლი სხვა სასწავლო დისციპლინებიდან მასალის მოშველიებით.

საგანთაშორისი კავშირების რეალიზაციის არსის ანალიზი, მათი კლასიფიკაცია, დიდაქტიკური პრინციპების გამოყენება მიუთითებს, რომ სწავლების პროცესის ორგანიზაციისას აუცილებელია მთელი რიგი მოთხოვნების შესრულება ამ კავშირების განხორციელების პირობებში. ამ მოთხოვნებიდან ყველაზე არსებითია:

1. დამოუკიდებელი სამუშაოებისა და კომპლექსური სასწავლო მეცადინეობის ორგანიზაცია;

2. ცოდნის შეძენა, განვითარება, განმტკიცება და განზოგადება საგანთშორის კავშირების საფუძველზე;

3. სასწავლო მასალაში იმ თეორიის ჩართვა, რომელიც წამოჭრის საგანთაშორის სასწავლო-შემეცნებით პრობლემებსა და შემეცნებით ამოცანებს.

4. სასწავლო მეცადინეობებზე მონათესავე სასწავლო დისციპლინებიდან ფსიქოლოგიურ-დიდაქტიკური მასალისა და მეთოდების გამოყენება;

5. სწავლების სხვადასხვა მოტივების შექმნა და გამოყენება.

იმ დიდაქტიკური ამოცანის გადაჭრა, რომელიც საფუძვლად უდევს სასწავლო-შემეცნებითი პროცესის ორგანიზაციას, დამოკიდებულია ცოდნის ათვისების ამა თუ იმ ფსიქოლოგიური კონცეფციის რეკომენდაციებზე.

გონებრივი მოქმედებები დამოკიდებულია შემეცნებითი მოღვაწეობის მიზნებზე. ამის შესაბამისად პედაგოგიურ ფსიქოლოგიაში შემუშავებულია კონცეფციები,

რომლებიც აღწერენ შემეცნებითი მოქმედებების შესაძლო სისტემებს, რომელთა საფუძველზეც შემდგომში წარმატებით ვითარდება ისეთი ფუნდამენტური აზრობრივი ფუნქციები, როგორიცაა ანალიზი, სინთეზი, განზოგადება და სხვ.

ასოციაციურ-რეფლექტორული კონცეფცია შემუშავებულია ს.რუბენშტეინის [89], [90], ი.სამარინის [80], პ.შევარიოვის [94], ე.კაბანოვა-მელერის [73] და სხვათა მიერ. ამ კონცეფციისათვის ამოსავალი პუნქტია ი.სეჩენოვისა და ი.პავლოვის ასოციაციურ-რეფლექტორული თეორია. კონცეფციის ძირითად საფუძველს წარმოადგენს იმის დასაბუთება, რომ ადამიანი გარე სამყაროს შესახებ ცოდნასა და გამოცდილებას აგროვებს სინამდვილის მოვლენებსა და ობიექტებს შორის კავშირების ასახვის გზით.

ასოციაციურ-რეფლექტორული კონცეფციის შესახებ ი.სამარინი [115] გვთავაზობს ასოციაციის თავისებურ კონცეფციას:

-ლოკალური, ანუ ცალსახა ასოციაციები, რომლებიც ასახავენ ცალკეულ კავშირებს ცალკეულ ფაქტებს შორის;

-კერძო სისტემური ასოციაციები, მოცემული სასწავლო თემების საზღვრებში;

-შიგასისტემური ასოციაციები, რომლებიც მოცემული სასწავლო საგნის ფარგლებში ერთ სისტემად აერთიანებს მთელ რიგ ასოციაციებს.

სასწავლო პროცესში ხდება ასოციაციების უწყვეტი ცვლილება ორი ურთიერთ-საპირისპირო მიმართულებით. ერთის მხრივ კავშირები რთულდება, იქმნება ასოციაციათა ჯაჭვი, მათი სისტემები, დაბალი სახეობები გადადიან მაღალ სახეობებში, მეორეს მხრივ ხდება ასოციაციების გამარტივება.

ე.კაბანოვა-მელერი [73] გვთავაზობს ასოციაციების რამდენიმე განსხვავებულ კლასიფიკაციას. იგი გამოყოფს პირველად ასოციაციებს, სადაც კავშირები მყარდება სასწავლო მასალის აღქმისას და მეორადი ასოციაციები-ახალი კავშირები ცნებებსა ანუ წარმოდგენებს შორის, როცა აღქმის პროცესში წინასწარ არ მყარდება კავშირები თვალსაჩინოების საფუძველზე. მეორადი ასოციაციები პირველადი ასოციაციებისაგან განსხვავებით მყარდება მეხსიერების მეშვეობით. პირველად და მეორად ასოციაციებს შორის არსებობს შუალედური ასოციაციები-ეს არის კავშირები აღქმასა და წარმოდგენას შორის.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, საგანთაშორისი კავშირების დამყარების პროცესში მასწავლებლის უმთავრესი ამოცანაა სწორი განზოგადებული ასოციაციების შექმნა. ასოციაციური თეორიის ავტორები არაფერს ამბობენ იმაზე, თუ როგორ იქმნება აღქმები და წარმოდგენები მოვლენებზე, ობიექტებზე, კავშირებზე, რომელთა შორისაც შემდგომში მყარდება ასოციაციები.

მეორე ფსიქოლოგიური კონცეფცია არის-გონებრივი მოქმედების ეტაპობრივი ფორმირების თეორია, რომელიც შემუშავებულია პ.გალპერინისა და ნ.ტალიზინას მიერ [64], [65], [84], [85], [86] და სხვ.

ამ კონცეფციის საფუძველს შეადგენს არა აღქმა არამედ მოქმედება (გარეგანი-პრაქტიკული ან შინაგანი-გონებრივი). ამ თეორიის მიმდევრების აზრით, მოქმედება-ათვისებული ცოდნის დონის პროპორციულია, ამასთან მოქმედებები განიხილება ორ ასპექტში. ერთი, როგორც სასწავლო-შემეცნების წყარო და მეორე, როგორც შემეცნებითი მოქმედების აქტივიზაციის და მასზე კონტროლის საშუალება.

გონებრივი მოქმედების ეტაპობრივი თეორიის თანახმად, გონებრივ მოქმედებათა საწყის ფორმას წარმოადგენს გარეგანი, მატერიალური მოქმედებები. მოქმედება სანამ გადაიქცეოდეს გონებრივად, მაქსიმალურად განზოგადებულად, გაივლის მთელ რიგ გარდამავალ საფეხურებს. განასხვავებენ ინფორმაციის გადამუშავების ხუთ ძირითად ეტაპს. ეს სახეები ვ. ბესპალკოს [61] ფორმულირებით შემდეგია:

1. გონებრივი მოქმედების შესრულების დროს ორიენტაცია და სასწავლო პროცესის თანმიმდევრობის განსაზღვრა;

2. გარეგანი მატერიალური მოქმედება შესწავლის ობიექტებზე დაყრდნობით, რაც საშუალებას აძლევს მოსწავლეებს შეითვისონ მოძრაობის შინაარსი, მისი ყველა ოპერატორის შემადგენლობა, მათი შესრულების წესები და ამავე დროს გააკონტროლონ მათ მიერ შესრულებული თვითოეული ოპერაცია და მათი შესრულების წესები.

3. სასაუბრო მოქმედებები. ამ მოქმედების ელემენტები წარმოდგენილია გარეგანი მოქმედების ფორმით ზეპირი ან წერილობითი სახით. მოქმედება შემდგომ განზოგადდება, შეიკვეცება, მაგრამ ჯერ კიდევ არ არის ავტომატიზირებული.

4. მოქმედების შესრულება მეტყველების სახით. ამ დროს ხდება მოქმედების შემდგომი განზოგადება და ჩამოყალიბება.

5. გონებრივი მოქმედებები. ამ ეტაპზე მოქმედება უკვე ავტომატიზირებულია.

ამ ხუთი სახის მოქმედების თანმიმდევრულად შესრულება აუცილებელია გონებრივი მოქმედების სრულყოფილი ფორმებისათვის. ეს იმას ნიშნავს, რომ თავდაპირველად მოსწავლეები იღებენ ორიენტაციას, ეუფლებიან მოვლენათა ანალიზის ზოგად მეთოდებს, შემდგომში კი დამოუკიდებლად ადგენენ საორიენტაციო მოქმედების გეგმას.

გონებრივი მოქმედების რეალიზაციის მიზნით მასწავლებელმა უნდა გაითვალისწინოს მოქმედების ის ეტაპები, რომლებიც აუცილებელია ცოდნის შეძენისა და მისი პრაქტიკულად გამოყენების უნარ-ჩვევების ფორმირებისათვის. ეს ეტაპებია:

1. მოქმედების მიზნის განსაზღვრა;

2. მოქმედების მეცნიერული საფუძვლების გარკვევა;

3. მოქმედების მოდელის აგება კოლექტიური ან ინდივიდუალური, დამოუკიდებელი ძიების გზით. ეს მოდელი მოიცავს მოქმედების სტრუქტურის ანალიზს და განსაზღვრავს ოპერაციების შესრულების უფრო რაციონალურ თანმიმდევრობას;

4. მოსწავლეთა მიერ მოქმედების შესრულება, სადაც კონტროლს აწარმოებს მასწავლებელი;

5. შესრულებულ მოქმედებაზე თვითკონტროლი;

6. მოცემული მოქმედების სხვა სასწავლო სიტუაციებში დამოუკიდებლად ორგანიზაცია.

ამ ეტაპების მიზანმიმართული და სისტემატური დანერგვა ხელს უწყობს მოსწავლეთა გონებრივი მოქმედების აქტივიზაციას.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ფსიქოლოგიური კონცეფცია. ეს არის სწავლების პროცესის ალგორითმიზაცია.

ალგორითმიზაციის კონცეფციის ძირითადი ამოსავალი ის არის, რომ სწავლება განხილული უნდა იქნეს, როგორც მართვის პროცესი.

ცნობილია, რომ მართვა ხორციელდება ალგორითმის შედგენის საფუძველზე. არსებობს განსხვავება სასწავლო ალგორითმებსა და მათემატიკურ ალგორითმებს შორის.

მათემატიკური ალგორითმის შედგენის დროს სარგებლობენ ამოხსნის ხერხებით და ამასთანავე განსაზღვრავენ ამოხსნის ყველაზე რაციონალურ გზას.

სასწავლო ალგორითმების შედგენის დროს ხელმძღვანელობენ არა მარტო ამოცანების ამოხსნის ხერხებით, არამედ ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიური მეთოდებით. სწავლების მიზნით გამოყენებულ ალგორითმებს ყოფენ მატერიალური ობიექტების ინფორმაციის გარდაქმნისა და შემეცნების ალგორითმებად. დღეისათვის შემუშავებულია შემეცნების ალგორითმების აგების პრინციპები და მათი გამოყენების მეთოდები სასწავლო პროცესში.

ალგორითმების სწავლებამ ხელი უნდა შეუწყოს მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების განვითარებას. მიზანშეწონილია მოიძებნოს და სპეციალურად შესწავლილი იქნას ერთი და იმავე ტიპის ამოცანების ამოხსნის ალგორითმი და შემდეგ ამოიხსნას ასეთი ტიპის ამოცანები ალგორითმული პროცედურების მეშვეობით. [83].

მეთოდიკურ ლიტერატურაში განასხვავებენ სწავლების ალგორითმებს და ალგორითმებით სწავლებას.

სწავლების ალგორითმი ეს არის ის პროგრამა, რომლითაც ხელმძღვანელობს პედაგოგი. ეს პროგრამა განსაზღვრავს აღმზრდელის მოქმედებას აღსაზრდელთა საქმიანობის შესაბამისად.

ალგორითმების სწავლება-ეს არის იმ პროგრამის სწავლება, რომლითაც ხელმძღვანელობს აღსაზრდელი. ამ დროს ხდება ინფორმაციის გადაცემა იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა წარიმართოს მოქმედება მოცემული ტიპის ამოცანების ამოხსნისათვის. ამ დროს სრულდება შესაბამისი ოპერაციები.

განხილული ფსიქოლოგიური კონცეფციები წარმოადგენენ ძირითად შემეცნებით საშუალებებს სასწავლო პროცესის ორგანიზაციაში საგანთშორისი კავშირების დამყარებისა და გამოყენების დროს.

გარდა ამისა, სასწავლო მუშაობის თვითოეულ ეტაპზე მიღებული მეთოდების მიზნობრივი რეალიზაცია გვიკარნახებს მოთხოვნებს შემეცნებითი საქმიანობის ორგანიზაციისადმი. ყველა ამ მოთხოვნათა კომპლექსური გამოყენება სასწავლო-შემეცნებითი მუშაობის ორგანიზაციის საფუძველია, რომელიც მიმართულია სხვადასხვა სახის მეცადინეობებზე საგანთაშორისი კავშირების განხორციელებისა და გამოყენებისაკენ.

ამრიგად, თანამედროვე პირობებში საგანთაშორის კავშირებს უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება, ჯერ ერთი იმიტომ, რომ იგი დაკავშირებულია სწავლების და განათლების სტრუქტურასთან და ასახვას პოულობს სწავლების მეთოდებში, ფორმებსა და საშუალებებში. მეორე-მართალია, მეცნიერებათა საფუძვლები სკოლაში ისწავლება ცალ-ცალკე, მაგრამ პედაგოგიური პროცესი ერთიანია, მთლიანობაში უწყვეტია აღზრდის, სწავლების და განვითარების პროცესი. ბუნებაში ნებისმიერ პროცესს სწავლობს სხვადასხვა მეცნიერება სხვადასხვა მხრივ, სხვადასხვა მიდგომით, მაგრამ ეს მოვლენა თუ საგანი ხომ ერთია. სწორედ ამიტომ აქვს დიდი მნიშვნელობა სასწავლო საგნების ურთიერთშეთანხმებას, ხოლო სწავლება დაფუძვნებული უნდა იყოს საგანთაშორისი კავშირების ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიურ კონცეფციაზე.

საბოლოოდ შეგვიძლია გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა: მათემატიკის სწავლება უნდა მიმდინარეობდეს საგანთაშორისი კავშირების რეალიზებით, გათვალისწი-ნებული უნდა იქნეს მათემატიკის მეთოდების გამოყენება მონათესავე სასწავლო დისციპლინებში, აგრეთვე სხვა მეცნიერებათა მეთოდები მათემატიკის სწავლებაში. ამასთან სასწავლო პროცესი უნდა მიმდინარეობდეს დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით.

საგანთაშორისი კავშირების განხორციელებაში მნიშვნელოვანი წვლილის შეტანა შეუძლია, საგანთაშორისი კავშირების მქონე ამოცანათა სისტემის სწავლებას, ეს საგანთაშორისი კავშირების განხორციელების ერთ-ერთი დიდაქტკური პრობლემაა. ეს საკითხი განსაკუთრებით აქტუალურია ბოლო პერიოდისათვის, რადგან მეცნიერულ-ტექნიკური პროგრესის ძირითადი ტენდენცია მიმართულია ადამიანთა

საქმიანობის სამეცნიერო და ტექნიკური სფეროების ურთიერთდაკავშირების პროცესისაკენ, მათი ინტერესისა დიფერენციაციისაკენ.

საგანთაშორისი კავშირები ასახავენ იმ დიალექტიკურ ურთიერთობებს, რომელიც ობიექტურად არსებობენ ბუნებაში და შეიმეცნებიან თანამედროვე მეცნიერებების მიერ. ამიტომ საგანთაშორისი კავშირები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მეცნიერებათა შორის კავშირების ეკვივალენტი.

საგანთაშორისი კავშირები ამჟამად განიხილებიან, როგორც სასწავლო პროცესის სრულყოფის დიდაქტიკური პირობა, სწავლების მეცნიერული დონის ამაღლების საშუალება.

საგანთაშორისი კავშირების პრობლემის განვითარების ისტორიულ-პედაგოგიური ანალიზი წარმოაჩენს მისი კვლევის ძირითად მიმართულებებს შემდეგ ასპექტებში:

1. სოციალურ-პედაგოგიური, რომელიც გვიჩვენებს საგანთშორისი კავშირების მნიშვნელობას პიროვნების ყოველმხრივი განვითარების საქმეში.

2. ფილოსოფიური, რომელიც ასახავს საგანთშორისი კავშირების მეთოდოლოგიურ საფუძველს.

3. ფსიქოლოგიური, რომელიც აანალიზებს სასწავლო-შემეცნებითი პროცესის სტრუქტურის თავისებურებებს.

4. დიდაქტიკური, რომელიც გვიჩვენებს სწავლების საგანთშორისი კავშირების სპეციფიკას, სწავლების შინაარსის ფორმებისა და მეთოდების სრულყოფას.

5. მეთოდური მიმართულება გვიჩვენებს სწავლების მეთოდური სისტემის აგებულებას საგანთშორისი კავშირების საფუძველზე სასწავლო მასალის შინაარსისა და სპეციფიკის გათვალისწინებით.

6 კიბერნეტიკული-წარმოაჩენს საგანთშორისი კავშირების როლს, როგორც სწავლების საგნობრივი სისტემის კოორდინაციის მთავარ ფაქტორს.

საგანთაშორისი კავშირები ფუნქციონირებენ სწავლების პროცესში და ხორციელდებიან ამა თუ იმ მეთოდებისა და ორგანიზაციული ფორმების მეშვეობით.

მოსწავლეთა შემეცნებითი აქტივობა ხორციელდება საგანთაშორისი კავშირების საფუძველზე უნივერსალური ფსიქოლოგიური მექანიზმის მეშვეობით „ანალიზი-

სინთეზი“, რომელითაც ხასიათდება შემეცნებითი აზროვნება ამოცანების ამოხსნის პროცესში.

საგანთაშორისი კავშირები ხელს უწყობს მოსწავლეებში პრაქტიკული უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებას, იგი განსაკუთრებულ გავლენას ახდენს სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის ყველა ძირითად მხარეზე.

საგანთაშორისი კავშირები სწავლებაში დადებით შედეგს იძლევა მაშინ, როცა წინასწარ კარგად არის მოფიქრებული ამ კავშირების სახეები და მათი განხორციელების გზები.

ამრიგად, მათემატიკის შესწავლაში საგანთაშორისი კავშირების დამყარება და გამოყენება მჭიდროდ უკავშირდება პიროვნების აღზრდისადმი კომპლექსური მიდგომის პრობლემას და მისი გადაჭრა სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის სრულყოფის ფართო შესაძლებლობებს იძლევა.

შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზაციის ერთ-ერთი მიზანია ცნების არსებითი ნიშნების გამოყენებისა და სხვადასხვა სახით ცნების განსაზღვრის უნარ-ჩვევების გამომუშავება. მნიშვნელოვანია ის ფაქტიც, რომ მოსწავლეებმა გაიცნობიერონ ის კავშირები, რომლებიც არსებობს ცნებების თვისებებს შორის, ამასთან სასწავლო მასალა აგებული უნდა იქნეს ცნების არსებითი და არაარსებითი ნიშნების გამოყოფის საფუძველზე. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ასეთი სამუშაოების ჩატარება გეომეტრიული ცნებების ფორმირებისას.

პედაგოგიურმა პრაქტიკამ გვიჩვენა, რომ ცნებათა შორის კავშირების უკეთ რეალიზაციისათვის აუცილებელია აზროვნების ისეთი ლოგიკური ფორმების გამოყენება, როგორიცაა შედარება, ანალოგია, დასკვნა და ა.შ.

ცნებათა შორის კავშირების განხორციელების საკითხებში წამყვანი ადგილი უჭირავს იმ უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებას, როგორიცაა გაანალიზება, დაკონკრეტება, სინთეზირება, მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების დამყარება.

ცნებებს შორის სხვადასხვა სახის თანაფარდობათა დაფიქსირება ხდება საკლასიფიკაციო სქემების, სისტემატიზირებული ცხრილების-გრაფების მეშვეობით. დანიშნულების მიხედვით სქემები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. არსებობს

სქემები, რომლებიც ასახავენ ობიექტის სტრუქტურას და სქემები, რომლებიც ასახავენ ობიექტების ურთიერთკავშირს.

მაშასადამე, შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზაცია პედაგოგიურ პროცესში ხორციელდება მასწავლებლის სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობითა და მოსწავლეთა სასწავლო-შემეცნებითი მოღვაწეობით. მათემატიკის სწავლებაში შიგასაგნობრივი და საგანთაშორისი კავშირების სრულყოფილი განხორციელება დიდად არის დამოკიდებული მოსწავლეთა აქტივობაზე და შემოქმედებით მუშაობაზე.

სწავლა განიხილება არა როგორც სასწავლო მასალის აღქმა და დამახსოვრება, არამედ პირველ რიგში, როგორც აქტიური შემეცნებითი მოღვაწეობა, რაც მოსწავლეთა დამოუკიდებელი მუშაობით მიიღწევა [79]. დამოუკიდებელი მუშაობა შეიძლება იყოს შემდეგი სახის:

1. დამოუკიდებელი სამუშაოები ნიმუშის მიხედვით;
2. დამოუკიდებელი სამუშაოები მათი შესრულების მითითებით;
3. დამოუკიდებელი სამუშაოები ვარიანტების მიხედვით;
4. შედარებით რთული სახის დამოუკიდებელი სამუშაოები.

შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზაციას ვახდენთ ისეთი სახის დამოუკი-დებელი სამუშაოების გამოყენებით. რომელთაც თან ახლავს თანმიმდევრული, გეგმაზომიერი მითითებები. ასეთი სახის დავალებები ხელს უწყობს ცნობილი ხერხებისა და მეთოდების გამოყენებას მსგავს შიგასაგნობრივ სიტუაციებში.

დამოუკიდებელი სამუშაოები სათანადო მითითებებით იძლევიან ძირითად მიმართულებას სამუშაოს შესასრულებლად. მითითებებში აუცილებელია გათვალისწინებული იქნეს ის მოსალოდნელი გართულებები, რომლებსაც მოსწავლეები წააწყდებიან კონკრეტული საკითხების გადაწყვეტისას.

დამოუკიდებელი სამუშაოები ვარიანტების მიხედვით ითვალისწინებს დავალების ნაწილობრივ შეცვლას. შიგასაგნობრივი კავშირების განხორციელება ხდება ცოდნისა და უნარ-ჩვევების ახალ პირობებში გამოყენების საფუძველზე. ასეთი სახის დამოუკიდებელი სამუშაოები იძლევიან ცოდნის განზოგადების შესა-ძლებლობას.

შედარებით რთული სახის დამოუკიდებელი სამუშაოები მოითხოვს მოსწავლეთა დამოუკიდებელი შემოქმედებითი უნარ-ჩვევების გამოყენებას. ამ სამუშაოების შესრულებისას მოსწავლეები ავლენენ თავიანთ შესაძლებელობებს. მათ დამოუკიდებლად უნდა შეძლონ ხერხებისა და მეთოდების ძიება და საკითხის გადაწყვეტის ოპტიმალური გზის შერჩევა. [76].

შიგასაგნობრივი კავშირების განხორციელების ერთ-ერთი კარგი საშუალებაა შემაჯამებელი მეცადინეობები ე.წ. კოლოკვიუმები, რომლებიც ითვალისწინებენ შესწავლილი თემის ან მთლიანი კურსის განმაზოგადებელ განმეორებას, რომელიც ხელს უწყობს განვლილი მასალის სისტემაში მოყვანას. განმაზოგადებელი განმეორება განხილულ უნდა იქნეს დიდაქტიკურ ასპექტში ცნებების, ცნებათა სისტემების და თეორიების დონეზე.

§3. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში ნატურალური რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედებების სწავლება თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით

3.1. ნატურალური რიცხვების შეკრება-გამოკლების თეორიულ-სიმრავლური საფუძვლები

ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი გამოსახავს საგანთა ჯგუფის (სიმრავლის) რიცხობრიობას ანუ ელემენტების რაოდენობას. სხვადასხვა სიმრავლეებს შორის ყოველთვის არსებობდა რაოდენობითი ხასიათის რაიმე დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება შეიძლება იყოს სასრული სიმრავლეების შეერთება ან სასრული სიმრავლიდან მისი ნაწილის ჩამოშორება. ნატურალურ რიცხვებზე მოქმედებებს შეკრებასა და გამოკლებას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა გაერთიანება და სხვაობა.

მოცემული სასრული სიმრავლეებს შორის რომელიმე რაოდენობით ხასიათის დამოკიდებულების შედეგად, მოცემული სიმრავლეების გამომსახველი რიცხვებიდან შეიძლება მიღებული იქნას ახალი რიცხვი .

მოცემული რიცხვებიდან რაიმე მოცემული წესით ახალი რიცხვის მიღებას, მოქმედება ეწოდება.

ნატურალური რიცხვების შეკრება - გამოკლების სწავლებას თეორიულ - სიმრავლური მიდგომით ქართველი მეცნიერები და მეთოდისტები თავიანთ მეცნიერულ გამოკვლევებში და მეთოდურ ნაშრომებში გარკვეულ ადგილს უთმობდნენ.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში მოყვანილი მიმოხილვიდან ჩანს, რომ ქართველი მეცნიერები და მეთოდისტები თავიანთ სახელმძღვანელოებში გარკვეულ ყურადღებას უთმობენ არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიულ საფუძვლებს, უფრო მეტად კი მათ გამოყენებას. ჩვენ მოვახდენთ თეორიული საფუძვლების გამოკვლევას ფუნდამენტურად, კონკრეტულად კი, არითმეტიკული მოქმედებების თეორიული საფუძვლების დამუშავებას მოვახდენთ თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით.

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ, პირველი და მეორე კლასის მოსწავლეები წაიყვანეს ექსკურსიაზე. ამ შემთხვევაში მოხდება ორი კლასის მოსწავლეთა სიმრავლეების გაერთიანება, ორი სიმრავლის გაერთიანების შედეგად მივიღებთ ახალ სიმრავლეს. ცხადია ახალი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა იქნება თითოეული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობათა ჯამი. რადგან ისინი არ შეიცავს საერთო ელემენტებს. არ შეიძლება ერთი და იგივე ბავშვი სწავლობდეს ერთდროულად ორ კლასში.

თუ A-თი აღვნიშნავთ ერთი კლასის მოსწავლეთა სიმრავლეს, B-თი მეორე კლასის მოსწავლეთა სიმრავლეს, მაშინ მათი გაერთიანება იქნება $A \cup B = C.$ თუ A სიმრავლეში შემავალი მოსწავლეების რაოდენობას აღვნიშნავთ $n(A)$-თი, B სიმრავლეში შემავალი მოსწავლეების რაოდენობას აღვნიშნავთ $n(B)$-თი, $C = A \cup B$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას $n(C)$-თი, მაშინ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$n(C) = n(A) + n(B).$$

ე.ი. ორი მოცემული სიმრავლეთა გაერთიანება, რომლებსაც არ აქვს საერთო ელემენტი ეწოდება ისეთ ახალ სიმრავლეს, რომელიც შედგება მოცემული სიმრავლეების ყველა ელემენტისაგან და მხოლოდ მათგან. ასეთი ორი სიმრავლის შეერთებით მიღებული სიმრავლის რიცხობრიობა ტოლია გასაერთიანებელი სიმრავლეთა რიცხობრიობის ჯამის.

ვთქვათ, $n(A)=25,$ ხოლო $n(B)=30.$ ე.ი. კლასებში მოსწავლეთა რიცხვებია 25 და 30. მათი შეერთებით მიღებული სიმრავლის რიცხობრიობა იქნება:

$$25+30=55.$$

ნატურალურ რიცხვებს 25 და 30-ს, რომლებიც გამოსახვენ გასაერთიანებელი სიმრავლეების რიცხობრიობას შესაკრებები ეწოდებათ. რიცხვ 55-ს, რომელიც გამოსახავს გაერთიანებული სიმრავლის რიცხობრიობას - ეწოდება ჯამი.

მოქმედებას, რომლითაც მოცემული შესაკრებებით ჯამი მოიძებნება-შეკრება ეწოდება.

თუ ერთი შესაკრები სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არის a, მეორესი - b, და მათ საერთო ელემენტი არ აქვთ, მაშინ გაერთიანებული სიმრავლის c ელემენტების რაოდენობა უდრის მათ ჯამს. ანუ

$$a+b=c.$$

განსაზღვრება. a და b ნატურალური რიცხვების შეკრება ნიშნავს, ისეთი c ახალი ნატურალური რიცხვის მიღებას, რომელიც შეიცავს იმდენ ერთეულს, რამდენი ერთეულიც არის a და b რიცხვებში ერთად.

შეკრების არსი თვით ნატურალური რიცხვების ცნებაშია, რადგან ყოველი მომდევნო ნატურალური რიცხვი მიიღება წინა რიცხვზე ერთის მიმატებით. შეერთების შედეგად მიღებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის გასაგებად უნდა დავთვალოთ ამ სიმრავლის ელემენტები. გაერთიანებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა შეგვიძლია გავიგოთ სხვა გზითაც. თუ წინასწარ გვეცოდინება გასაერთიანებელი სიმრავლეთა რიცხობრიობა. ვთქვათ, $n(A)=5,\quad n(B)=3.$ ე.ი. A სიმრავლე შეიცავს 5 ელემენტს და B სიმრავლე 3-ს. მაშინ

პირველი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას მივათვალოთ თითო-თითოს მიმატებით მეორე სიმრავლის ელემენტები შემდეგნაირად:

$$5+1=6;$$

$$6+1=7;$$

$$7+1=8.$$

აქედან ცხადია, რომ გაერთიანებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა შეიძლება განისაზღვროს ორი ხერხით. ან როგორც ამბობენ შეკრება წარმოადგენს ორი სახის თვლის ერთობლიობას. ერთ შემთხვევაში თვლა იწყება ერთიდან: ერთი, ორი, სამი, ოთხი, ... ხოლო მეორე შემთხვევაში პირველი შესაკრებიდან

$$5+1=6; \quad 6+1=7; \dots$$

ორივე ხერხით დაითვლება გაერთიანებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა, რომელიც არის ერთი რიცხვი 8.

შევკრიბოთ რიცხვები 5 და 3 ნიშნავს, ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობაში მოვძებნოთ ისეთი რიცხვი, რომელიც 5-ის შემდეგ მესამე ადგილზე მდებარეობს

$$5, 6, 7, 8$$

ეს რიცხვი არის 8.

ან შეგვიძლია კიდევ ვთქვათ, რომ ნატურალურ რიცხვთა წყვილს $(5;3)$ ამავე სიმრავლიდან შევუსაბამოთ რიცხვი 8 და მას ვუწოდოთ 5-ისა და 3-ის ჯამი.

შეკრების ამ სახით განსაზღვრება აკმაყოფილებს შეკრების აქსიომატურ განსაზღვრებას. [15].

სიმრავლის მოცემის ერთ-ერთი ხერხი არის სიმრავლის მოცემა მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, იმ პირობით, რომ სიმრავლეში ერთი და იგივე ელემენტი არ მეორდება. ამის გამო ორი სიმრავლის გაერთიანებისას თუ მათ საერთო ელემენტი აქვთ, გაერთიანებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არ უდრის გასაერთიანებელი სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობათა ჯამს. ორი A და B სიმრავლის გაერთიანების შედეგად მიღებული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა გამოისახება ფორმულით:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

ეს ნიშნავს, რომ გასაერთიანებელი სიმრავლეთა ელემენტების ჯამს უნდა გამოაკლდეს საერთო ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ,

$$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\} \qquad n(A)=5,$$

$$B=\{7;\ 3;\ 5;\ 8;\ 9\} \qquad n(B)=5.$$

$$A\cap B=\{3;\ 5\}, \qquad n(A\cap B)=2;\ A\cup B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 9\}, \qquad n(A\cup B)=8.$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B)=5+5-2=8.$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს 5 კვადრატი და 3 კვადრატი

□ □

□ □   □ □

□ 5   □ 3

თუ მათ გავაერთიანებთ, მივიღებთ:

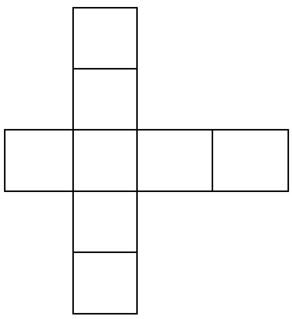
□ □

□ □ □

□ □ □

$$5+3=8.$$

თუ იგივე კვადრატებს დავალაგებთ შემდეგნაირად



თუ დავთვლით ჰორიზონტალური მიმართულებით მივიღებთ 4-ს, ვერტიკალური მიმართულებით 5-ს. ჯამი იქნება $5+4=9$.

$$8=4+5-1.$$

რადგან საერთო კვადრატების რიცხვი არის ერთი.

ასეთივე მაგალითი შეიძლება განვიხილოთ სკოლაში კლასების მიხედვით ცალ-ცალკე ჩატარებულ მშობელთა კრებაზე დამსწრე მშობელთა რიცხვი არ იქნება ტოლი საერთო კრებაზე დამსწრე მშობელთა რიცხვისა, რადგან ზოგიერთ მშობელს შეიძლება ჰყავდეს როგორც ტყუპი ბავშვები, ასევე სკოლაში შეიძლება სწავლობდეს ერთი და იმავე მშობლის ერთზე მეტი შვილი.

განვიხილოთ ჯამის ზოგიერთი თვისება

1. ჯამის არსებობა და ერთადერთობა. შეკრების განსაზღვრის შედეგად მივიღეთ

$$a+b=c$$

სადაც a და b არის A და B სიმრავლეების რიცხობრიობა. რადგან არსებობს A და B სიმრავლეების გაერთიანება $A\bigcup B=C$, ამიტომ არსებობს ამ გაერთიანების რიცხობრიობაც, რომელიც იქნება c ტოლი. ე.ი. არსებობს $a+b$ ჯამი.

ახლა დავამტკიცოთ ჯამის ერთადერთობა.

ჯამის განსაზღვრისას A და B სიმრავლეთა გაერთიანება და მისი რიცხობრიობა არ არის დამოკიდებული A და B სიმრავლეების შერჩევაზე. ვთქვათ, გვაქვს A სიმრავლის ეკვივალენტური A_1 სიმრავლე $A\sim A_1$ და B სიმრავლის ეკვივალენტური B_1 სიმრავლე $B\sim B_1$: $A\bigcap A_1=B\bigcap B_1=\varnothing$, მაშინ

$$C=A\bigcup B\sim C_1=A_1\bigcup B_1.$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ ამ სიმრავლეების რიცხობრიობა ტოლია. ე.ი.

$$n(C)=n(C_1).$$

რადგან $A\bigcup B$ და $A_1\bigcup B_1$ ეკვივალენტური სიმრავლეებია, ამიტომ მათ შორის შეგვიძლია დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

დავამტკიცოთ, რომ $c_1\in C_1$ არის ერთადერთი სახე $c\in C$ ელემენტისა. c_1 შეიძლება ეკუთვნოდეს A_1 და B_1 სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს, ორივეს არ შეიძლება ეკუთვნოდეს, რადგან $A_1\bigcap B_1=\varnothing$.

თუ c_1 ეკუთვნის A_1 სიმრავლეს, მაშინ ის არის სახე A სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტისა. თუ $c_1\in B_1$, მაშინ ის არის სახე B სიმრავლიდან

ერთადერთი ელემენტისა. აქედან გამომდინარე c_1 არ შეიძლება იყოს სახე რომელიმე ელემენტისა A და B სიმრავლეებიდან. c_1 მიეკუთვნება მხოლოდ ერთს A_1 და B_1 სიმრავლეებიდან, რადგან $A_1 \cap B_1 = \varnothing$.

ამ მსჯელობით C და C_1 სიმრავლეებს შორის მყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა. რაც ნიშნავს, რომ

$$n(C) = n(C_1).$$

2. გადანაცვლებადობის (კომუტაციურობის) თვისება. შესაკრებთა ადგილების შეცვლით ჯამი არ იცვლება

$$a + b = b + a.$$

ვთქვათ, $n(A) = a$ და $n(B) = b$.

სიმრავლეთა გაერთიანებას ახასიათებს გადანაცვლებადობის თვისება

$$A \cup B = B \cup A.$$

ცხადია

$$n(A \cup B) = n(B \cup A)$$

$$n(A) + n(B) = n(B) + n(A).$$

ანუ

$$a + b = b + a.$$

3. ჯამის ჯუფთებადობის (ასოციატიურობის) თვისება

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

სიმრავლეთა გაერთიანებას ახასიათებს ჯუფთებადობის თვისება

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)..$$

ცხადია

$$n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)).$$

თუ $n(A) = a; \quad n(B) = b; \quad n(C) = c,$

რადგან

$$n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C) = (a + b) + c;.$$

$$n(A\cup(B\cup C))=n(A)+n(B\cup C)=a+(b+c).$$

საიდანაც

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

ჯუფთებადობის ეს თვისება ფართოდ არის გამოყენებული ოცეულის ფარგალში რიცხვების შეკრების დროს.

მაგალითად:

$$8+7=8+(2+5)=(8+2)+5.$$

4. ნატურალური რიცხვისა და ნულის ჯამი ისევ მოცემული ნატურალური რიცხვია. ე.ი. $a+0=a$ ან $0+a=a.$

რადგან ნული არის ცარიელი სიმრავლის რიცხობრიობა, ამიტომ მისი გაერთიანება რომელიმე სიმრავლესთან არ ცვლის ამ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას.

მართლაც,

$$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A.$$

ცხადია

$$n(A\cup\varnothing)=n(\varnothing\cup A)=n(A).$$

ვთქვათ, $n(A)=a,$ რადგან $n(\varnothing)=0,$ ამიტომ მარტივი მსჯელობით მივიღებთ:

$$n(A\cup\varnothing)=n(A)+n(\varnothing)=a+0=a;.$$

$$n(\varnothing\cup A)=n(\varnothing)+n(A)=0+a=a.$$

საიდანაც

$$a+0=a \text{ ან } 0+a=a.$$

განვიხილოთ გამოკლება არაუარყოფით რიცხვით სიმრავლეში. გამოკლებას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა სხვაობა, რაც ნიშნავს იმას, რომ სასრულ A სიმრავლეს უნდა ჩამოვაშოროთ ამ სიმრავლის წესიერი ნაწილი - B სიმრავლე. B სიმრავლე არის A სიმრავლის ნაწილი ნიშნავს, რომ B სიმრავლე არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომელიც ასე აღინიშნება $B\subset A.$ სიმრავლეთა სხვაობა ასე ჩაიწერება:

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ და } x\notin B\}.$$

A და B სიმრავლეთა სხვაობა შეიცავს მხოლოდ A სიმრავლის ელემენტებს და არ შეიცავს B სიმრავლის ელემენტებს.

თუ A სიმრავლის რიცხობრიობას აღვნიშნავთ a-თი $n(A)=a$, B სიმრავლისას b-თი $n(B)=b$, ხოლო $A\setminus B$ სიმრავლისას c-თი $n(A\setminus B)=c$, მაშინ მივიღებთ:

$$n(C)=n(A\setminus B)=n(A)-n(B).$$

$$c=a-b \text{ ან } a-b=c.$$

a და b რიცხვების სხვაობა ეწოდება ისეთ c რიცხვს, როცა სრულდება პირობა

$$a=b+c.$$

გამოკლების დროს განიხილავენ სამ განსაკუთრებულ შემთხვევას:

1. $a-a=0;$
2. $a-0=a;$
3. $0-0=0.$

პირველ შემთხვევაში ხდება A სიმრავლიდან მისი ყველა ელემენტის ჩამოშორება და დაგვრჩება ცარიელი სიმრავლე.

მეორე შემთხვევაში სიმრავლეს თუ ჩამოვაშორებთ ცარიელ სიმრავლეს, ამით ამ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არ შეიცვლება.

მესამე შემთხვევაში ცარიელ სიმრავლეს ვაკლებთ ცარიელ სიმრავლეს და დაგვრჩება ცარიელი სიმრავლე. [16].

სხვაობის თვისებები. 1. სხვაობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

a და b ნატურალური რიცხვების სხვაობა მთელ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არსებობს, თუ $a \geq b$.

მოცემულ ნატურალურ რიცხვს არ შეიძლება გამოაკლდეს მასზე მეტი ნატურალური რიცხვი მთელ არაუარყოფით სიმრავლეში.

ვთქვათ, A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაა a, ხოლო მისი წესიერი B ნაწილის ელემენტების რაოდენობაა b; A სიმრავლიდან არ შეიძლება მისი B ისეთი წესიერი ნაწილის ჩამოშორება, რომლის ელემენტების რაოდენობა მეტი იქნება A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნატურალური რიცხვების გამოკლება ყოველთვის შესაძლებელია თუ საკლები მეტია ან ტოლი მაკლებზე, ე.ი. $a \geq b.$ ე.ი. $a - b$ სხვაობა არსებობს, თუ $a \geq b.$

2. a და b ნატურალური რიცხვების სხვაობა ერთადერთია. თუ გვაქვს A სიმრავლე და მისი ელემენტების რაოდენობა არის a და B არის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტების რაოდენობა არის b და A სიმრავლიდან მისი წესიერი B ნაწილის ჩამოშორების შემდეგ დარჩენილი ელემენტების რაოდენობას აღვნიშნავთ c-თი, გვექნება

$$a - b = c.$$

თუ A სიმრავლეს ჩამოვაშორებთ მის წესიერ B_1 ნაწილს, რომლის ელემენტების რაოდენობაც იქნება b-ს ტოლი, დარჩენილი C_1 სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა ტოლი იქნება c-სი, რადგან ორივე შემთხვევაში დარჩენილი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არ არის დამოკიდებული ქვესიმრავლის შერჩევაზე.

3. რიცხვიდან ჯამის გამოკლება.

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

ვთქვათ გვაქვს სამი $A, \quad B, \quad C$ სიმრავლე.

$$n(A) = a, \quad n(B) = b, \quad n(C) = c.$$

შევადაროთ ერთმანეთს

$$A \setminus (B \cup C) \text{ და } (A \setminus B) \setminus C$$

ორი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

თუ ეს სიმრავლეები ტოლია, მაშინ მათი რიცხობრიობაც ტოლი იქნება. დავამტკიცოთ

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

ტოლობა.

ვთქვათ, $x \in A \setminus (B \cup C)$. დავამტკიცოთ, რომ $x \in (A \setminus B) \setminus C.$

$x \in A \setminus (B \cup C)$ ნიშნავს: $x \in A$ და $x \notin (B \cup C);$ ეს კი ნიშნავს, რომ $x \in A$ და $x \notin B$ და $x \notin C.$

$x \in A$ და $x \notin B$, ნიშნავს, რომ $x \in A \setminus B;$

$x \in A \setminus B$ და $x \notin C$, ნიშნავს, რომ $x \in (A \setminus B) \setminus C.$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \setminus C \qquad (1)$$

ვთქვათ, $x \in (A \setminus B) \setminus C$. დავამტკიცოთ, რომ $x \in A \setminus (B \cup C)$. $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ნიშნავს: $x \in A \setminus B$ და $x \notin C;$ ეს კი ნიშნავს, რომ $x \in A$ და $x \notin B$ და $x \notin C.$

$x \notin B$ და $x \notin C$, ნიშნავს, რომ $x \notin (B \cup C).$

$x \in A$ და $x \notin (B \cup C)$, ნიშნავს $x \in A \setminus (B \cup C).$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus (B \cup C) \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების შედარებით მივიღებთ, რომ:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C .$$

ამით ტოლობა დამტკიცებულია.

რადგან ეს სიმრავლეები ტოლია, ამიტომ მათი რიცხობრიობაც ტოლი იქნება

$$n[A \setminus (B \cup C)] = n[(A \setminus B) \setminus C]$$

$$n(A) - n(B \cup C) = [n(A) - n(B)] - n(C).$$

$$n(A) - [n(B) + n(C)] = [n(A) - n(B)] - n(C).$$

თუ შევიტანთ $A, \quad B, \quad C$ სიმრავლეების

$$n(A) = a, \quad n(B) = b, \quad n(C) = c$$

რიცხობრიობებს, მივიღებთ

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

ამით სხვობის ეს თვისება დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თვისება არის ოცის ფარგლებში გამოკლების თეორიული საფუძველი.

მაგალითად,

$$15 - 7 = 15 - (5 + 2) = (15 - 5) - 2 = 10 - 2 = 8;.$$

$$18-12=18-(10+2)=(18-10)-2=8-2=6.$$

4. ჯამიდან რიცხვის გამოკლება.

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c).$$

ამ ტოლობების დასამტკიცებლად უნდა დავამტკიცოთ ტოლობები

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B=A\cup(B\setminus C).$$

დავამტკიცოთ ამ ტოლობების სამართლიანობა.

ჯერ დავამტკიცოთ

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$$

ტოლობა.

ვთქვათ, $x\in(A\cup B)\setminus C$. ვაჩვენოთ, რომ $x\in(A\setminus C)\cup B$.

მართლაც, $x\in(A\cup B)\setminus C$ ნიშნავს $x\in(A\cup B)$ და $x\notin C$.

$x\in(A\cup B)$ ნიშნავს $x\in A$ ან $x\in B$.

$x\in A$ ან $x\in B$ და $x\notin C$ ნიშნავს:

1) $x\in A$ და $x\notin C$ ან $x\in B$. ე.ი. $x\in(A\setminus C)$ ან $x\in B$. ე.ი.

$$x\in(A\setminus C)\cup B.$$

2. $x\in B$ და $x\notin C$ ან $x\in A$. მაშინ განიხილება ორი ქვეშემთხვევა:

ა) $x\in A$ და $x\notin C$ და $x\in B$. ე.ი. $x\in(A\setminus C)$ და $x\in B$. ე.ი.

$$x\in(A\setminus C)\cup B.$$

ბ) $x\notin A$ და $x\notin C$ და $x\in B$. ე.ი. $x\notin(A\setminus C)$ და $x\in B$. ე.ი.

$$x\in(A\setminus C)\cup B.$$

ე.ი.

$$(A\cup B)\setminus C\subset(A\setminus C)\cup B.$$

ვთქვათ, $x\in(A\setminus C)\cup B$. ვაჩვენოთ, რომ $x\in(A\cup B)\setminus C$.

მართლაც, $x\in(A\setminus C)\cup B$ ნიშნავს $x\in(A\setminus C)$ ან $x\in B$.

$x\in(A\setminus C)$ ან $x\in B$ ნიშნავს $x\in A$ და $x\notin C$ ან $x\in B$.

$x\in A$ და $x\notin C$ ან $x\in B$ ნიშნავს $x\in(A\cup B)$ და $x\notin C$.

$x \in (A \bigcup B)$ და $x \notin C$ ნიშნავს $x \in (A \bigcup B) \setminus C$.

ე.ი.

$$(A \setminus C) \bigcup B \subset (A \bigcup B) \setminus C .$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup B .$$

ახლა დავამტკიცოთ

$$(A \bigcup B) \setminus C = A \bigcup (B \setminus C)$$

ტოლობა.

ვთქვათ, $x \in (A \bigcup B) \setminus C$. ვაჩვენოთ, რომ

$$x \in A \bigcup (B \setminus C).$$

მართლაც, $x \in (A \bigcup B) \setminus C$ ნიშნავს $x \in (A \bigcup B)$ და $x \notin C$.

$x \in (A \bigcup B)$ ნიშნავს $x \in A$ ან $x \in B$. და $x \notin C$

$x \in A$ ან $x \in B$ და $x \notin C$ ნიშნავს:

1) $x \in A$ და $x \notin C$ ან $x \in B$. აქ განიხილება ორი ქვეშემთხვევა:

ა) $x \in A$ და $x \notin C$ ან $x \in B$. ნიშნავს $x \in A$ და $x \notin (B \setminus C)$.

$x \in A$ და $x \notin (B \setminus C)$ ნიშნავს $x \in A \bigcup (B \setminus C)$.

ბ) $x \in B$ და $x \notin C$ ან $x \notin A$. ნიშნავს $x \in (B \setminus C)$ და $x \notin A$.

$x \in (B \setminus C)$ და $x \notin A$ ნიშნავს $x \in A \bigcup (B \setminus C)$.

2. $x \in B$ და $x \notin C$ ან $x \in A$, მაშინ $x \in (B \setminus C)$ ან $x \in A$.

$x \in (B \setminus C)$ ან $x \in A$ ნიშნავს $x \in A \bigcup (B \setminus C)$.

ე.ი.

$$(A \bigcup B) \setminus C \subset A \bigcup (B \setminus C).$$

ვთქვათ, $x \in A \bigcup (B \setminus C)$. ვაჩვენოთ, რომ

$$x \in (A \bigcup B) \setminus C .$$

მართლაც, $x \in A \bigcup (B \setminus C)$ ნიშნავს $x \in A$ ან $x \in (B \setminus C)$.

$x \in A$ ან $x \in (B \setminus C)$, ნიშნავს $x \in A$ ან $x \in B$ და $x \notin C$.

$x \in A$ ან $x \in B$ და $x \notin C$ ნიშნავს $x \in (A \cup B)$ და $x \notin C$.

$x \in (A \cup B)$ და $x \notin C$, ნიშნავს $x \in (A \cup B) \setminus C$.

ე.ი.

$$(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C).$$

(3) და (4) ტოლობების შედარებით მარტივად მივიღებთ ტოლობას

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B = A \cup (B \setminus C).$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$n[(A \cup B) \setminus C] = n[(A \setminus C) \cup B] = n[A \cup (B \setminus C)];.$$

$$n(A \cup B) - n(C) = n(A \setminus C) + n(B) = n(A) + n(B \setminus C);$$

$$(n(A) + n(B)) - n(C) = (n(A) - n(C)) + n(B) = n(A) + (n(B) - n(C)).$$

ანუ

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

მაგალითი.

$$18 - 7 = (10 + 8) - 7 = 10 + (8 - 7) = 10 + 1 = 11.$$

საბოლოოდ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა: სიმრავლეთა გაერთიანება და სიმრავლეთა სხვაობა თავისი თვისებებით არის შეკრება-გამოკლების თეორიული საფუძვლები.

3.2. გამრავლებისა და გაყოფის თეორიული საფუძვლები

გამრავლების თეორიული საფუძვლები

ნატურალური რიცხვებისა და არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიულ საფუძვლებს შეადგენს მათი განსაზღვრისადმი ორი სხვადასხვაგვარი მიდგომა: აქსიომატური და თეორიულ-სიმრავლური.

გამრავლების თეორიულ საფუძვლებად მიღებულია აქსიომატური მეთოდი და თეორიულ-სიმრავლური მიდგომა, კერძოდ სიმრავლეთა გაერთიანება და სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.

აქსიომატური მეთოდით ნატურალური რიცხვების გამრავლება ასე განისაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გამრავლება არის ბინარული ალგებრული ოპერაცია, რომელიც ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვთა წყვილს (a,b) -ს სადაც $a \in N$ და $b \in N$ შეუსაბამებს ერთადერთ $a \cdot b$ რიცხვს, რომელიც მიეკუთვნება იმავე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. a და b რიცხვებს უწოდებენ თანამამრავლებს, კერძოდ a -ს სამრავლს და b -ს მამრავლს, ხოლო $a \cdot b$ -ს ნამრავლს. გამრავლება ხასიათდება ორი აქსიომით:

1. ნებისმიერი a ნატურალური რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა:

$$a \cdot 1 = a.$$

2. ნებისმიერი a და b ნატურალური რიცხვისათვის სრულდება ტოლობა:

$$a \cdot b' = ab + a, \text{ სადაც } b' = b + 1.$$

ე.ი. $a \cdot b' = a(b+1) = ab + a.$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ დაწყებით კლასებში გამრავლებას საფუძვლად უდევს ეს ორი აქსიომა, ისე რომ გამრავლების განსაზღვრება და ფორმულები გამოყენებული არის არა ცხადი სახით, ფარულად მაგალითების განხილვისას.

ტრადიციულად გამრავლების შესწავლა დაწყებით კლასებში იწყება ერთნიშნა რიცხვების ერთზე გამრავლების ცხრილით. ფაქტიურად აქ გამოყენებული არის პირველი აქსიომა $a \cdot 1 = a.$, სადაც a ღებულობს მნიშვნელობას ერთიდან ცხრის ჩათვლით. ამჟამად მოქმედ სახელმძღვანელოებში გამრავლება ერთნიშნა რიცხვებისა 2-ზე, 3-ზე, და ა.შ. ხდება მექანიკურად პირდაპირ ცხრილების შემოტანით. ასე მაგალითად: $2 \cdot 2 = 4; \quad 3 \cdot 2 = 6; \quad 4 \cdot 2 = 8$ და ა.შ.

მოსწავლეებს ეძლევათ განმარტება მხოლოდ გამრავლების კონკრეტული აზრის შესახებ, რომ $3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6.$ რაც ჩვენი აზრით საკმარისი არ არის. ჩვენ ვფიქრობთ,

მოსწავლეებს მივცეთ განმარტება, რომ 2-ზე, 3-ზე გამრავლება კიდევ შეიძლება სხვანაირად, პირველი და მეორე აქსიომების გამოყენებით, ისე რომ აქსიომები დასახელებული არ იყოს. ასე მაგალითად, ერთნიშნა რიცხვების ორზე გამრავლებისას გამოყენებული იქნეს რიცხვის ერთზე გამრავლება-შეკრება და გამრავლების განრიგებადობის თვისება შეკრების მიმართ. მაგალითად:

$$2 \cdot 2 = 2(1+1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

ეს ჩანაწერი ფაქტიურად გამოსახავს გამრავლების აქსიომატურ მეთოდს

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$$

გამრავლების ასეთი მიდგომით ჩვენ ვასაბუთებთ თუ რატომ არის ვთქვათ, $3 \cdot 2$ 6-ის ტოლი. ფაქტიურად ვიყენებთ წინა მაგალითს მომდევნო მაგალითის შესასრულებლად. გამრავლებისადმი ასეთი მიდგომა ფაქტიურად ნიშნავს აქსიომატური მეთოდის გამოყენებას და ყოველ რიცხვზე გამრავლებისას შემოტანილ ცხრილს სახელმძღვანელოში თან უნდა ახლდეს ერთ-ერთი მაგალითის ახსნა-განმარტებითი ჩანაწერი. ამ მეთოდის გამოყენებით გამრავლების სწავლება ეყრდნობა გარკვეულ მეცნიერულ საფუძველს და გამორიცხავს გამრავლების ცნების შემოტანის მექანიკურობას.

ტოლი რიცხობრიობის მქონე სიმრავლეთა გაერთიანებას და იქედან გამომდინარე ტოლ შესაკრებთა ჯამის მოძებნას საფუძვლად უდევს გამრავლების ცნების შემოტანამდე რიცხვების თვლა გროვებად, რომელსაც ქართველ მეცნიერთა ერთი ჯგუფი დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს და თავიანთ სახელმძღვანელოებში და მეთოდურ წერილებში მასზე ამახვილებენ ყურადღებას (გ. ბერიშვილი, ი. კოტეტიშვილი, ბ. სულაკაური. მათემატიკა-1).

ვთქვათ, გვაქვს ერთნაირი რიცხობრიობის მქონე სამი სიმრავლე: $A = \{a; b\}; \ B = \{c; d\}$ და $C = \{k; l\}$ და სრულდება პირობა $A \bigcap B \bigcap C \bigcap = \varnothing$ ე.ი. საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ. თითოეული სიმრავლის რიცხობრიობა არის ორის ტოლი ე.ი. $n(A) = n(B) = n(C) = 2.$ მათი გაერთიანება იქნება

$$A \cup B \cup C = \{a;b\} \cup \{c;d\} \cup \{k;l\}.$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 2 + 2 + 2$$

მიიღება ტოლ შესაკრებთა ჯამი, რომელიც შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3.$$

მოსწავლეებთან ეს მუშაობა ასე წარიმართება:

მოსწავლეებს ორ-ორ ფანქარს დავალაგებინებთ 3 ჯგუფად. დავადგენთ, რომ საქმე გვაქვს 3 შესაკრებთან რომელთაგან თითოეულში შედის ორ-ორი ფანქარი. ამ ჯგუფებს თუ გავაერთიანებთ, ფანქრების როდენობა იქნება $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3 = 6.$ რომელიც ასე იკითხება: ორ-ორი ავიღოთ სამჯერ იქნება ექვსი. ზოგიერთ მეთოდიკურ ლიტერატურაში წერია: ორი ავიღოთ 3-ჯერ იქნება 6. რაც შინაარსობრივად ზუსტი არ არის. აქვე მოსწავლეთა ყურადღება უნდა გავამახვილოთ თუ რას ნიშნავს $3 \cdot 2 = 3 + 3 = 6.$ ე.ი. $2 \cdot 3$ და $3 \cdot 2$ რიცხობრივად ტოლია, მაგრამ შინაარსობრივად განსხვავებული.

გამრავლების ეს კონკრეტული აზრი უნდა იქნეს გათვალისწინებული სახელდებული რიცხვების გამრავლებისას.

ნატურალურ რიცხვთა გამრავლება დაკავშირებულია სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლთან. ორი a და b ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლი უდრის შესაბამისი A და B სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლში წყვილთა რაოდენობას ან $A \times B$ სიმრავლის სიმძლავრეს.

თუ გვაქვს ორი სიმრავლე $A = \{a; b\}, B = \{c; d; k;\}$, მაშინ

$$A \times B = \{(a;c);(a;d);(a;k);(b;c);(b;d);(b;k)\}.$$

$n(A \times B) = 6.$ ე.ი. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6.$

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის გამოყენებით გამრავლების კონკრეტული აზრი იძენს უფრო სხვა ხასიათს.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე, რომლის ელემენტებია გეომეტრიული ფიგურები

$$A = \{\Theta, \triangleright\}, \quad B = \{\bigcirc, \oslash, \otimes\}$$

$$n(A)=2 \qquad n(B)=3$$

ამ სიმრავლეთა გაერთიანება იქნება:

$$A\bigcup B=\{\Theta, \triangleright, \bigcirc, \oslash, \otimes\}$$

ცხადია, რომ $n(A)\bigcup n(B)=n(A)+n(B)=2+3=5.$

ე.ი. გაერთიანება არის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს 5 ფიგურას. ბუნებრივია დაისმის კითხვა: რა სახის სიმრავლეა $2\cdot 3=6$ შესაბამისი სიმრავლე.

$$2\cdot 3=2+2+2$$

ეს ჩანაწერი ნიშნავს, რომ სამი ორელემენტიანი სიმრავლე არის გაერთიანებული, ჩვენ კი გვაქვს ერთი ორელემენტიანი სიმრავლე და მეორე სამელემენტიანი სიმრავლე. 2-ის 3-ზე გამრავლება არ უნდა ნიშნავდეს A სიმრავლის გაერთიანებას თავის თავთან სამჯერ, სიმრავლის თავის თავთან გაერთიანება არის ისევ იგივე სიმრავლე $A\bigcup A\bigcup A=A$. აქედან გამომდინარე, გამრავლების კონკრეტული აზრი უნდა იყოს A და B სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის რიცხობრიობის განსაზღვრა

$$A\times B=\{(\Theta,\bigcirc),(\Theta,\oslash),(\Theta,\otimes),(\triangleright,\bigcirc),(\triangleright,\oslash),(\triangleright,\otimes)\}$$

$n(A\times B)=6.$ ე.ი. $2\cdot 3$ გამრავლების შედეგი 6 არის $A\times B$ სიმრავლის წყვილთა რაოდენობა.

A და B სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობას აქვს შემდეგი სახე:

დაწყებითი კლასების მათემატიკაში გარკვეულ ინტერესს იწვევს ნატურალურ რიცხვზე ნულის გამრავლება და ნატურალური რიცხვის ნულზე გამრავლება. გამრავლება, რომელიც განისაზღვრება ტოლ შესაკრებთა ჯამის მოძებნით გამოდგება ნულის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლებისათვის.

$$0\cdot a=0+0+0+\cdots+0=0$$

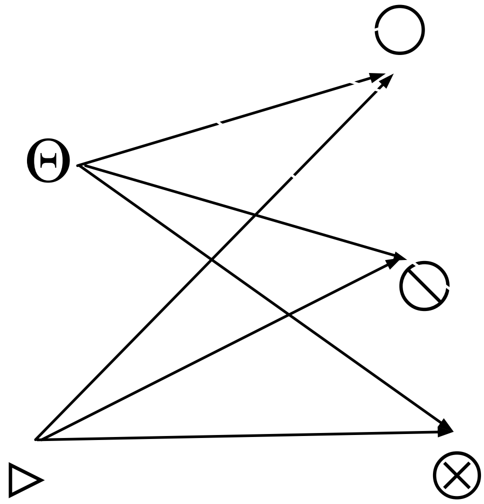
რადგან ნული არის ცარიელი სიმრავლის რიცხობრივი მახასიათებელი, ამიტომ მათი გაერთიანების რიცხობრიობაც იქნება ნულის ტოლი. გამრავლების ზემოთ მოტანილი განსაზღვრება ვერ გამოდგება ნატურალური რიცხვის ნულზე გამრავლებისათვის.

$0 \cdot a = 0$ ამ ტოლობის მართებულობაში დავრწმუნდებით შემდეგი მსჯელობით:

$$a \cdot 3 = a + a + a;$$

$$a \cdot 2 = a + a;$$

$$a \cdot 1 = a.$$



თუ დავუკვირდებით ამ ტოლობებს შევამჩნევთ, რომ როცა მამრავლი მცირდება ერთით, მაშინ შესაკრებთა რაოდენობაც მცირდება ერთით ე.ი.

$$a(1-1) = a - a;$$
$$a \cdot 0 = 0.$$

დაწყებით კლასებში უფრო გამოიყენება გადანაცვლებადობის თვისება

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ გამრავლების შემდეგი კანონები:

1. $a \cdot 1 = a$;.

2. $a \cdot b = b \cdot a$;.

3. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

4. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

დავამტკიცოთ $a \cdot 1 = a$ ტოლობა.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სიმრავლე A და B. A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა იყოს a, ხოლო B-სი 1. $B=\{\alpha\}$. ე.ი. $n(A)=a$ და $n(B)=1$. ცხადია $A\times B$ დეკარტულ ნამრავლში $(a;\alpha)$ სახის წყვილები იქნება A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის ტოლი ე.ი. $n(A\times B)=a.$ მაგრამ მეორეს მხრივ

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)=a\cdot 1.$$

ე.ი. $a\cdot 1=a$.

დავამტკიცოთ $a\cdot b=b\cdot a$ ტოლობა.

სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს არ ახასიათებს გადანაცვლებადობის თვისება. ე.ი. $A\times B\neq B\times A$. მაგრამ, მას ახასიათებს თვისება

$$n(A\times B)=n(B\times A).$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მათ შესაბამის წყვილებს შორის $(a;b)$ -ს და $(b;a)$ -ს შორის.

$$n(A\times B)=n(B\times A)$$

$$n(A)\cdot n(B)=n(B)\cdot n(A)$$

ე.ი. $a\cdot b=b\cdot a$.

სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს ახასიათებს დისტრიბუტულობის კანონი გაერთიანების მიმართ

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

ამ თვისებიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$n[(A\cup B)\times C]=n[(A\times C)\cup(B\times C)]$$

$$n((A\cup B)\cdot n(c))=n(A\times C)+n(B\times C)$$

$$[n(A)+n(B)]\cdot n(C)=n(A)\cdot n(C)+n(B)\cdot n(C)$$

თუ $n(A)=a;\quad n(B)=b$ და $n(C)=c$, მაშინ მივიღებთ ტოლობას

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

ამ თვისების დამტკიცება კიდევ შეიძლება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

გამრავლების განრიგებადობის თვისება შეკრების მიმართ საფუძვლად ედება არა ტაბულურ გამრავლების შესწავლას.

გაყოფის თეორიული საფუძვლები

გაყოფის თეორიულ საფუძველს წარმოადგენს სიმრავლის დაყოფა თანაუკვეთ ქვესიმრავლეებად და მისი კავშირი გამრავლებასთან.

სიმრავლის დაყოფა თანაუკვეთ ქვესიმრავლეებად ასე უნდა გავიგოთ:

ვთქვათ გვაქვს X სიმრავლე და მისი სასრული რამდენიმე ქვესიმრავლე

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_n.$$

მაშინ ამბობენ, რომ X სიმრავლე დაყოფილია წყვილ-წყვილად არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად, თუ სრულდება ორი პირობა:

1. ორი ნებისმიერი ქვესიმრავლის თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა

$$A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \dots \bigcap A_n = \varnothing.$$

2. ყველა ქვესიმრავლის გაერთიანება არის X სიმრავლე

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \dots \bigcup A_n = X.$$

გაყოფის თეორიულ საფუძველს წარმოადგენს მოცემული სიმრავლის დაყოფა არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად და ამ დროს ორი ამოცანის გადაწყვეტა:

1. გამოყოფილი ქვესიმრავლეთა რიცხვის მიხედვით თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის განსაზღვრა;

2. ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის მიხედვით ქვესიმრავლეთა რიცხვის განსაზღვრა.

აქედან გამომდინარე, საქმე გვაქვს ორი სახის გაყოფასთან: შემცველობითი გაყოფა და ტოლ ნაწილებად გაყოფა.

განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, სიმრავლე შეიცავს ელემენტების გარკვეულ რაოდენობას

$$X = \{a; b; c; d; e; k; n; m; l; t\}$$

ამ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაა $n(X) = 10.$

ამ სიმრავლიდან გამოვყოთ ქვესიმრავლეები, რომლებიც შეიცავს ორ-ორ ელემენტს. ასეთებია

$$A_1 = \{a; b\}, \quad A_2 = \{c; d\}, \quad A_3 = \{e; k\}, \quad A_4 = \{m; n\}, \quad A_5 = \{l; t\}.$$

ცხადია, რომ ეს სიმრავლეები არ გადაიკვეთებიან და მათი გაერთიანება გვაძლევს X სიმრავლეს:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \varnothing;$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = X.$$

ხოლო

$$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = 2.$$

ქვესიმრავლეთა რიცხვს თუ აღვნიშნავთ x -ით, მაშინ $x = 5.$

ე.ი.

$$x = n(X) : 2 = 10 : 2 = 5.$$

2. X სიმრავლიდან გამოვყოთ 5 ქვეიმრავლე, რომელშიც ელემენტების რაოდენობა ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში ავიღებთ ნებისმიერ ხუთ ელემენტს და დავალაგებთ მას

$$a, \qquad b, \qquad c, \qquad d, \qquad e.$$

შემდეგ მათ გვერდით დავალაგებთ მეორე ელემენტებს და მივიღებთ:

$$a; k; \qquad b; n; \qquad c; m; \qquad d; l; \qquad e; t.$$

თითოეულ წყვილში ელემენტების რაოდენობა

$$y = n(X) : 5 = 10 : 5 = 2.$$

ამ მაგალითის განხილვიდან დავასკვნით, რომ ორივე შემთხვევაში საქმე გვაქვს გაყოფის ოპერაციასთან. პირველი არის ტოლშემცველობითი გაყოფა, ხოლო მეორე - ტოლ ნაწილებად გაყოფა.

განვიხილოთ მაგალითი, როდესაც ნატურალური რიცხვების გაყოფას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა დაყოფა თანაუკვეთ ქვესიმრავლეებად.

მასწავლებელი ატარებს შემდეგი სახის სამუშაოს:

შემცველობითი გაყოფის სწავლებისას მასწავლებელი იწყობს გასაყოფი საგნების რაოდენობას. მაგალითად, 18 ჩხირს. თუ გვინდა 18 გავყოთ 3-ზე, მაშინ 18 ჩხირიდან ვიღებთ 3 ჩხირს და ვდებთ ცალკე, შემდეგ კიდევ 3 ჩხირს. ეს პროცესი გაგრძელდება მანამ სანამ არ გამოილევა 18 ჩხირი. შემდეგ დავითვლით ჩხირების რაოდენობას. იქნება 6 ჯგუფი. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ რიცხვი 6 არის 18-ისა და 3-ის განაყოფი, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$18 : 3 = 6.$$

ეს ასე უნდა წავიკითხოთ:

18 რომ გავყოთ სამ-სამად მივიღებთ ექვსს.

ტოლ ნაწილებად გაყოფისას ასე ვიქცევით:

18 ჩხირიდან ვიღებთ 6 ჩხირს ვალაგებთ ცალ-ცალკე. შემდეგ თითოეულის გვერდით ვდებთ კიდევ თითო ჩხირს, მანამ სანამ გაყოფა არ დამთავრდება.

დავთვალოთ თითოეულ ჯგუფში რამდენი ჩხირი იქნება. ჩვენ შემთხვევაში 3. ეს იქნება 18-ის განაყოფი 6-ზე, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$18 : 3 = 6.$$

ეს ასე წაიკითხება:

18 რომ გავყოთ 6 ტოლ ნაწილად, თითოეულ ნაწილზე მოვა სამ-სამი.

მოსწავლეთა ყურადღება მახვილდება გაყოფის ორმაგ აზრზე: რომ გაყოფა არ არის მარტო მოქმედების შედეგი $6\,(3)$ არამედ $18 : 3 \quad (18 : 6)$ არის გამოსახულებაც.

გაყოფის ცნების შემოტანა დაკავშირებულია გამრავლებასთან. კერძოთ, გაყოფა არის გამრავლების შებრუნებული მოქმედება.

თუ $a \cdot b = c,$ მაშინ $c : b = a$ ან $c : a = b.$

შემოგვაქვს გაყოფის განსაზღვრება: გაყოფა ეწოდება გამრავლების შებრუნებულ მოქმედებას, რომლის საშუალებით ორი თანამამრავლის მოცემული ნამრავლით და ერთ-ერთი თანამამრავლით ვპოულობთ მეორე თანამამრავლს.

მთელი არაუარყოფითი რიცხვითი სიმრავლე აღვნიშნოთ N_0-ით, $N_0=\{0\}\cup N;$ და მასში განვიხილოთ გაყოფის არსებობის და ერთადერთობის პირობები

$$a:b=c\Leftrightarrow a=b\cdot c.$$

1. ნებისმიერი a რიცხვის განაყოფი 1-ზე არის თვით ეს რიცხვი

$$(\forall a\in N_0)\,a\,\vdots\,1=a.$$

ვთქვათ $A=\{d;b;c\}$. ამ სიმრავლიდან უნდა შევადგინოთ ისეთი სამი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს თითო ელემენტს

$$A_1=\{d\};A_2=\{b\}\ \text{ და }\ A_3=\{c\}.$$

მათი რიცხვი $n=n(A)=3.$

რადგან $n(A)=3$, A სიმრავლე დაიყო ერთელემენტიან არაგადამკვეთ სამ ქვესიმრავლედ;

2. ნებისმიერი a რიცხვისათვის სრულდება პირობა

$$(\forall a\in N_0)\,0\,\vdots\,a=0.$$

ცარიელი სიმრავლე ელემენტს არ შეიცავს $n(\varnothing)=0.$ ამიტომ გამოყოფილი ქვესიმრავლეები იქნება ერთიდაიგივე სიმრავლე (ჩვენს შემთხვევაში ცარიელი სიმრავლე)

$$A_1=\varnothing,\quad A_2=\varnothing,\quad A_3=\varnothing,\ldots$$

და მათი რიცხობრიობა იქნება ნულის ტოლი.

3. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი იყოფა თავის თავზე და განაყოფი უდრის 1-ს.

$$(\forall a\in N_0)\,a\,\vdots\,a=1.$$

თუ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არის a და მისგან გვინდა შევადგინოთ ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტების რაოდენობა იქნება a-ს ტოლი,

მაშინ ასეთი სიმრავლე იარსებებს მხოლოდ ერთი. სხვა ნებისმიერი ქვესიმრავლის თანაკვეთა მოცემულ სიმრავლესთან ცარიელი სიმრავლე არ იქნება. ამიტომ

$$a \vdots a = 1.$$

4. ნატურალური რიცხვის ნულზე გაყოფის შეუძლებლობა.

ეს ერთ-ერთი საინტერესო საკითხია. შევეცადოთ მის დამტკიცებას თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით ანუ სიმრავლის არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად დაყოფის საშუალებით

$$(\forall a \in N)\, a \,\bar{\vdots}\, 0$$

ვთქვათ a არის რომელიმე სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა $a \neq 0$ ნიშნავს, რომ ეს სიმრავლე ცარიელი არ არის. 0 არის ცარიელი სიმრავლის რიცხობრიობა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ ნული არის ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, მაშინ a:0 უნდა იყოს თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა, რადგან გამოყოფილ ქვესიმრავლეთა რიცხვი ნულია ე.ი. არ გვაქვს ქვესიმრავლეები, მაშინ, ცხადია არ იარსებებს ამ ქვესიმრავლეში ელემენტებიც. ე.ი. $a \vdots 0$ არ არსებობს.

2. ვთქვათ ნული არის გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა, მაშინ a:0 უნდა იყოს ქვესიმრავლეთა რიცხვი. ეს ნიშნავს, რომ რამდენია ისეთი ქვესიმრავლე, რომლებიც არიან ცარიელ ქვესიმრავლეები, ასეთი ქვესიმრავლეები არცერთი არ იქნება ცარიელი ქვესიმრავლე. ე.ი. $a \vdots 0$ არ არსებობს.

განაყოფის თვისებების დამტკიცება თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით.

გაყოფის თეორიული საფუძვლები დამყარებულია სასრული სიმრავლის არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად დაყოფასთან და გამრავლებასთან.

$$a : b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c.$$

ამ ტოლობებში a, b და c არის რომელიმე სასრული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

გაყოფის განსაზღვრასთან დაკავშირებით განიხილავენ ორ ამოცანას: პირველი, ტოლ ნაწილებად დაყოფა და მეორე შემცველობითი გაყოფა. სიმრავლურ ენაზე ეს ამოცანები ნიშნავს: პირველ შემთხვევაში მოცემული სასრული სიმრავლის დაყოფას ტოლი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეებად და თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის განსაზღვრას. მეორე შემთხვევაში სასრული სიმრავლეს ვყოფთ ტოლი რიცხობრიობის ქვესიმრავლეებად და ვსაზღვრავთ ასეთი ქვესიმრავლეების რაოდენობას. აქედან გამომდინარე გამყოფი b რიცხვი შეიძლება იყოს გამოყოფილი ქვესიმრავლეების რიცხვი ან ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა. ამიტომ საქმე გვაქვს ორ ამოცანასთან, რომლებიც საბოლოოდ განსაზღვრავენ გაყოფის ოპერაციას.

ჩვენი მიზანია განაყოფის თვისებები დავამტკიცოთ თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით, რომელიც განსხვავებულია სახელმძღვანელოებში ამ თვისებების დამტკიცებებისაგან.

1. რიცხვი ნული იყოფა ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვზე და უდრის ნულს

$$(\forall a \in N) 0 : a = 0.$$

ნული არის ცარიელი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა $n(\varnothing) = 0.$ ხოლო a არის არაცარიელი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა, ამიტომ $a \neq 0.$ a შეიძლება იყოს გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა ან ქვესიმრავლეთა რიცხვი. ვთქვათ a არის გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ქვესიმრავლეთა რიცხვი იქნება ნულის ტოლი. ცარიელი სიმრავლიდან ისეთი ქვესიმრავლეების გამოყოფა, რომელშიაც a რაოდენობის ელემენტები იქნება არ შეიძლება. ამიტომ ასეთი ქვესიმრავლეების რიცხვი იქნება ნულის ტოლი. ახლა ვთქვათ გამყოფი a არის გამოყოფილი ტოლი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეთა რიცხვი, მაშინ $0{:}a$ იქნება თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა. რადგან გასაყოფის შესაბამისი სიმრავლე ცარიელია და მისგან გამოვყოფთ a რაოდენობის ისეთ ქვესიმრავლეებს, რომლებიც

ელემენტებს არ შეიცავს ნიშნავს, რომ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა ნულის ტოლია. ე.ი.

$$0 : a = 0.$$

2. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი არ იყოფა ნულზე ანუ ნატურალური რიცხვის ნულზე გაყოფა შეუძლებელია.

$$(\forall a \in N\ )\, a \not\vdots\ 0$$

a არის არაცარიელი სასრული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა. ე.ი. $a \neq 0$. ხოლო გამყოფი ნული-ცარიელი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა. აქაც განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ გამყოფი ნული არის მოცემული a რაოდენობის ელემენტების მქონე სიმრავლიდან გამოყოფილი ტოლი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეთა რიცხვი, მაშინ $a \vdots 0$ იქნება თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა. რადგან გამოყოფილ ქვესიმრავლეთა რიცხვი ნულია ე.ი. არ არსებობს ქვესიმრავლეები, მაშინ არ არსებობს ქვესიმრავლეში ელემენტებიც. ეი. $a \vdots 0$ არ არსებობს.

2. ვთქვათ ნული არის გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა, მაშინ $a : 0$ იქნება ქვესიმრავლეთა რიცხვი. ეს ნიშნავს, რომ გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა ნულია. ასეთი ქვესიმრავლეები არ იარსებებს, რადგან გამოყოფილი ქვესიმრავლეები არ იქნებიან ცარიელი იმის გამო, რომ მოცემული სიმრავლე არაცარიელია.

აქედან გამომდინარე $a : 0$ არ იარსებებს.

3. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი იყოფა ერთზე და უდრის თავის თავს

$$(\forall a \in N) \quad a : 1 = a.$$

ვთქვათ a არის რომელიმე A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა, ხოლო 1-ერთელემენტიანი სიმრავლის.

მაგალითად,

$$A = \{b; c; d\}.$$

1) ვთქვათ გამყოფი რიცხვი 1 არის A სიმრავლიდან გამოყოფილი ტოლი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეთა რიცხვი, მაშინ $a:1$ იქნება თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა. მოცემული სიმრავლიდან უნდა გამოვყოთ ქვესიმრავლეები, რომლებიც უნდა იყოს ტოლი რიცხობრიობის და არაგადამკვეთი, აგრეთვე მათი რაოდენობა უნდა იყოს ერთი. ასეთი სიმრავლე იქნება თვით A სიმრავლე.

რადგან ჩვენ შემთხვევაში A სიმრავლე შეიცავს 3 ელემენტს, ამიტომ გამოყოფილი ქვესიმრავლეც შეიცავს 3 ელემენტს, ე.ი.

$$3:1=3.$$

თუ A სიმრავლე შეიცავს a ელმემენტს, მაშინ

$$a:1=a.$$

2) ვთქვათ, ერთი არის გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა. მაშინ $a:1$ იქნება ქვესიმრავლეთა რაოდენობა. A სიმრავლის ქვესიმრავლეები იქნება:

$$\{b\};\{c\};\{d\}.$$

მათი რიცხვი არის 3. ე.ი.

$$3:1=3.$$

თუ A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაა a, მაშინ

$$a:1=a.$$

4. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი იყოფა თავის თავზე და უდრის ერთს

$$(\forall a\in N)\quad a:a=1.$$

1) ვთქვათ გამყოფი a არის ქვესიმრავლეთა რიცხვი. მაშინ $a:a$ იქნება თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა. თუ a არის ქვესიმრავლეთა რიცხვი ისეთი სიმრავლისა რომელიც შეიცავს a რაოდენობის ელემენტს, ეს ნიშნავს, რომ მოცემული სიმრავლიდან უნდა შევადგინოთ a რაოდენობის ქვესიმრავლე, რომელთა თანაკვეთა უნდა იყოს ცარიელი, ასეთი სიმრავლეები ყველანი უნდა შეიცავდეს თითო ელემენტს, სხვა შემთხვევაში თანაკვეთა ქვესიმრავლეებისა არ

იქნება ცარიელი, ე.ი. ამ შემთხვევაში განაყოფი არის თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა და ის უდრის 1-ს.

ე.ი.

$$a : a = 1.$$

2) თუ გამყოფი a არის გამოყოფილ ქვესიმრავლეებში ელემენტების რაოდენობა, მაშინ $a : a$ იქნება ქვესიმრავლეთა რიცხვი.

a ელემენტების რაოდენობის მქონე სიმრავლიდან თუ გამოვყოფთ ქვესიმრავლეებს, რომლებიც შეიცავენ a რაოდენობის ელემენტებს და მათი თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, მაშინ ასეთი სიმრავლეების რაოდენობა იქნება ერთადერთი.

ე.ი.

$$a : a = 1.$$

§4. გეომეტრიული გარდაქმნები და მათი სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასებში

4.1 ფიგურის სიმეტრიულობა წრფის მიმართ

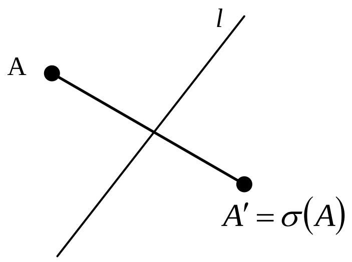
გეომეტრიული გარდაქმნების შესწავლა მერვე კლასში იწყება და მასში განიხილება ფიგურის სიმეტრიულობა წრფის მიმართ და ფიგურის სიმეტრიულობა წერტილის მიართ. ჩვენ ვფიქრობთ, რომ სასურველი არ არის წრფის მიმართ სიმეტრიის შესწავლა მოსწავლეებმა დაიწყონ ფორმალური განსაზღვრებით. უმჯობესია მასწავლბელმა გამოიყენოს ილუსტრაციები, რომლებიც მოსწავლეთა დაინტერესებას გამოიწვევს და ხელს შეუწყობს თემის უკეთ ათვისებას. შესაძლებელია გაკვეთილებზე გამოყენეული იქნეს თემისათვის სპეციალურად მოსწავლეებისაგან შექმნილი თვალსაჩინოებები , მაგალითად, მოსწავლეებმა თავისი შეხედულებისამებრ სახელმძღვანელო წიგნიდან რომელიმე ნახატის ასლი დახატოს ისე, რომ ასლი უფრო დიდი იყოს ზომით წიგნში მოცემულისაგან, მასწავლებელმა

შეიძლება შეარჩიოს სხვა მაგალითებიც. მიზანშეწონილია აგრეთვე გაკვეთილის მსვლელობის დროს მოსწავლეებს მოთხოვოს იმ საგნების დასახელება (შესაძლოა დაფაზე დახატვაც), რომლებსაც გააჩნიათ სიმეტრიის ღერძი. ამ დავალებას მასწავლებელმა შეიძლება რამდენიმე წუთი დაუთმოს.

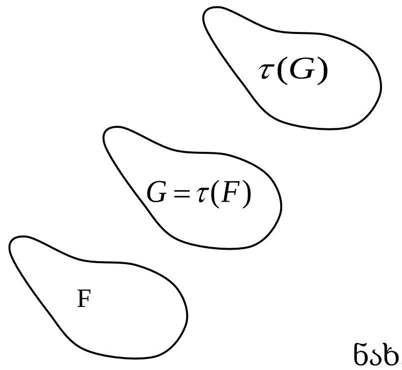
ღერძული სიმეტრია ითვლება შედარებით მარტივად შესასწავლ გეომეტრიულ გარდაქმნად. ამიტომ სახელმძღვანელოშიც გეომეტრიული გარდაქმნების სწავლება ამ თემის განხილვით იწყება. [20]. ამ თემის გავლის შემდეგ მოსწავლეებმა უნდა აღიქვან, რომ ღერძული სიმეტრია წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ეს ნიშნავს შემდეგს: ავიღოთ სიბრტყეზე რაიმე l წრფე და ამ წრფის მიმართ სიმეტრია აღვნიშნოთ σ ასოთი. σ სიმეტრიას ყოველ A წერტილს გადაიყვანს $A'=\sigma(A)$ წერტილში. (ნახ.1). ჩანაწერი $A'=\sigma(A)$ გამოსახავს, რომ გეომეტრიულ გარდაქმნას, ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში ღერძულ სიმეტრიას კავშირი აქვს ფუნქციის ცნებასთან. კერძოდ, σ სიმეტრია წარმოადგენს ფუნქციას, რომელსაც ყოველი A წერტილი (არგუმენტი) გადაყავს შესაბამის რაიმე $\sigma(A)$ წერტილში (კერძოდ წერტილში, რომელიც A წერტილის სიმეტრიულია l წრფის მიართ). ეს ფუნქცია განსხვავდება ალგებრის კურსში მოსწავლეების მიერ ამ პერიოდისათვის განხილული ფუნქციებისაგან: ალგებრის კურსში მათ მიერ განხილული ფუნქციებისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობები რიცხვებია, მაშინ როცა σ ფუნქციისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობებს წერტილები წარმოადგენენ.

გეომეტრიული გარდაქმნების მკაცრი მათემატიკური განსაზღვრება საკმაოდ რთულია. ამის გამო სასკოლო სახელმძღვანელოებში მიღებულია გეომეტრიული გარდაქმნების შემოღების ინდუქციური გზა, რომლის დროსაც მოსწავლეები თავდაპირველად ეცნობიან გარდაქმნებს კონკრეტულ მაგალითებზე და ამის შემდეგ ხდება მათთვის გეომეტრიული გარდაქმნების ზოგადი იდეის გაცნობა. [34], [35]. ამიტომ ტერმინიც „გეომეტრიული გარდაქმნები“ სასკოლო სახელმძღვანელოში მოგვიანებით შემოაქვთ ავტორებს. [20], [26]. გეომეტრიული გარდაქმნების ცნების და ფუნქციის ცნების კავშირის გახსნაც სცილდება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის კურსს. ამტომ ფუნქციონალური სიმბოლიკა (ჩანაწერი $A'=\sigma(A)$)

სასკოლო სახელმძღვანელოში არ გამოიყენება, მაგრამ მასწავლებლმა უნდა მიაღწიოს იმას, რომ თემის გავლის შემდეგ მოსწავლეებმა იცოდნენ, რომ ღერძული სიმეტრია სიბრტყის ყოველ A წერტილს გადაიყვანს სიბრტყის რაიმე A' წერტილში, ამასთან თუ A წერტილი l წრფეზე არ ძევს, მაშინ ის გადავა l წრფეზე არამდებარე რაიმე A' წერტილში, ხოლო თუ წერტილი l წრფეზე ძევს, მაშინ ის გადავა იმავე წერტილში ანუ თავის თავში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მხოლოდ ის წერტილები, რომლებიც l წრფეზე ძევს წარმოადგენენ განხილული გეომეტრიული გარდაქმნის-ღერძული სიმეტრიისათვის უძრავ წერტილებს. ანალოგიურად, l წრფის მიმართ ღერძული სიმეტრიისათვის უძრავ წრფეებს წარმოადგენენ თვით l წრფე და ყველა ის წრფე, რომელიც l წრფის მართობულია. ამასთან l წრფე წარმოადგენს წერტილოვნად უძრავ წრფეს, ე.ი. ამ წრფის ყველა წერტილი ღერძული სიმეტრიის დროს გადადის თავის თავში, ხოლო l წრფის მართობული წრფეები წარმოადგენენ უძრავ წრფეებს, მაგრამ არა წერტილოვნად უძრავს. [52].



ნახ.1.

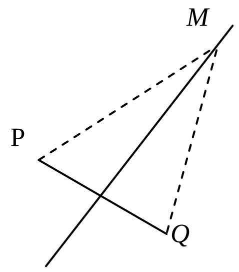


ნახ.2.

მასწავლებელმა ხაზი უნდა გაუსვას იმ გარემოებას, რომ თუ B წერტილი სიმეტრიულია A წერტილისა l წრფის მიართ, მაშინ სამართლიანია მისი საპირისპიროც: A წერტილი სიმეტრიულია B წერტილის l წრფის მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ l წრფის მიმართ σ სიმეტრიისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება: თუ $\sigma(A) = B$, მაშინ $\sigma(B) = A$. იგივე დამოკიდებულებას აქვს ადგილი ფიგურების მიართაც: თუ G ფიგურა F ფიგურის სიმეტრიულია l წრფის მიართ, მაშინ F ფიგურაც G ფიგურის სიმეტრიულია l წრფის მიმართ. ეს თვისება დამახასიათებელია მხოლოდ წრფის მიმართ სიმეტრიისა და წერტილის მიმართ სიმეტრიისათვის. ნებისმიერი გეომეტრიული გარდაქმნა ამ თვისების მატარებელი

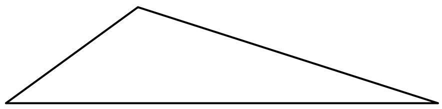
არ არის. მაგალითად, თუ τ პარალელური გადატანაა და $\tau(F)=G$, მაშინ საზოგადოდ $\tau(G)\neq F$. (ნახ.2).

საშუალო ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის კურსში ნებისმიერი გეომეტრიული ფიგურა განიხილება როგორც წერტილთა რაიმე სიმრავლე. მაგალითად, წრეწირი ცენტრით O წერტილში და r რადიუსით, არის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც O წერტილიდან დაშორებულია r მანძილით. წრე არის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგანაც დაშორება O წერტილამდე არ აღემატება r-ს. წრფე არის წერტილთა სიმრავლე (წრფე შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც P და Q განსხვავებული წერტილებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილების სიმრავლე) (ნახ.3).

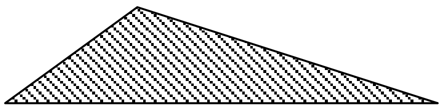


ნახ.3

AB მონაკვეთი არის AB წრფის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც მოთავსებულია A-ს და B-ს შორის. სამკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ორი განსხვავებული წერტილთა სიმრავლე. პირველი: ABC სამკუთხედი არის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელსაც შეიცავს AB, BC და AC მონაკვეთები (ABC კონტური) და მეორე: სამკუთხედი არის სიბრტყის ნაწილი, ე.ი. ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც განლაგებულია ABC კონტურზე და მის შიგნით. (ნახ. 4, ნახ. 5).

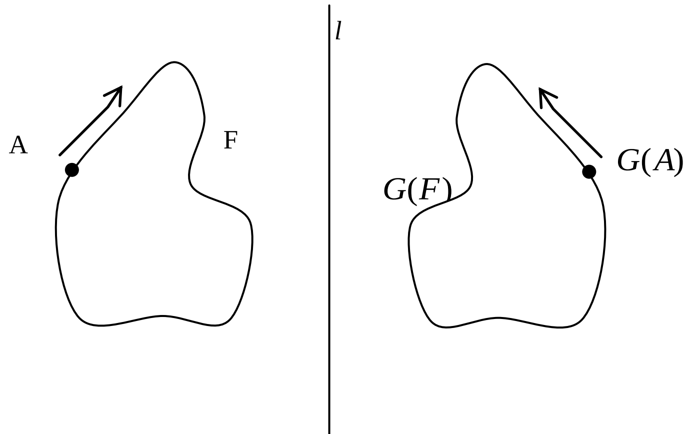


ნახ.4.



ნახ.5.

ის ფაქტი, რომ ყოველი ფიგურა განიხილება როგორც წერტილთა სიმრავლე, საშუალებას გვაძლევს ავხსნათ გამონათქვამის აზრი „σ გეომეტრიული გარდაქმნის დროს F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში“.



ნახ.6.

ვთქვათ F რაიმე ფიგურაა, რომლის A წერტილი გაირბენს F სიმრავლეს, $\sigma(A)$ წერტილი გაირბენს რაიმე F' სიმრავლეს. (ნახ.6). ამ F' სიმრავლეს ეწოდება ფიგურა, რომელშიც σ გეომეტრიული გარდაქმნის დროს გადადის F ფიგურა. ამრიგად დებულება „σ გეომეტრიული გარდაქმნის დროს F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში“, ნიშნავს, რომ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

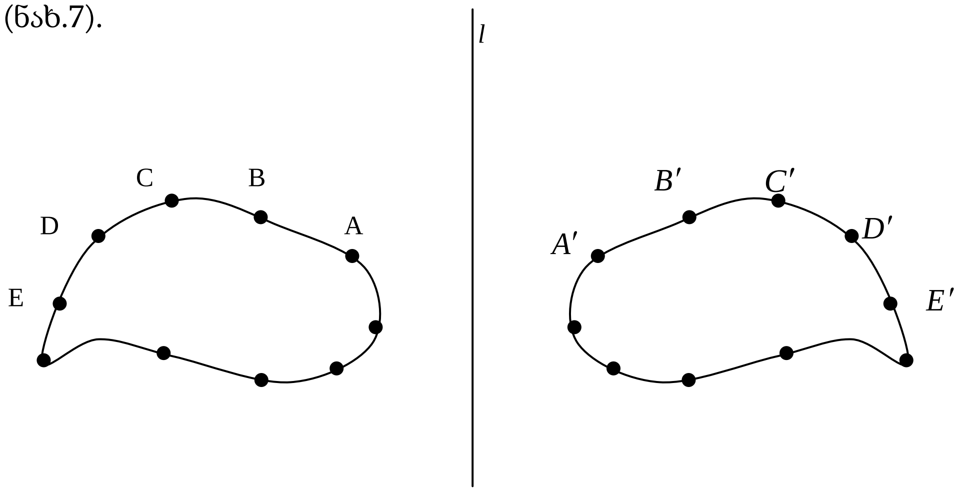
1. თუ A წერტილი F ფიგურის წერტილია, მაშინ $\sigma(A)$ წერტილი ეკუთვნის F' ფიგურას;

2. თუ A' წერტილი F' ფიგურის წერტილია, მაშინ არსებობს F ფიგურის ისეთი A წერტილი წერტილი, რომ $A' = \sigma(A)$.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, F' ფიგურა შედგება იმ და მხოლოდ იმ წერტილებისაგან, რომლებშიც σ გარდაქმნის დროს გადადიან F ფიგურის წერტილები.

მასწავლებლის მიერ სათანადოდ ახსნის შემდეგ მოსწავლეებისათვის ნათელი ხდება, თუ რას ნიშნავს დებულება: σ გეომეტრიული გარდაქმნის დროს F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში. თუმცა უნდა შევნიშნოთ, რომ მათთვის ზემოთ მოყვანილი დებულებების მკაცრი ფორმულირება სავალდებულოდ არ მიგვაჩნია, რადგან ის სცილდება მერვე კლასის მოსწავლის გონებრივ შესაძლებლობებს.

მიზანშეწონილია მასწავლებელმა წრფის მიმართ სიმეტრიის გავლის დროს მოსწავლეებს შესთავაზოს დამოუკიდებელი სამუშაოების შესრულება, რომლებსაც მოსწავლეები შეასრულებენ მასწავლებლის მეთვალყურეობის გარეშე - სახლში. დამუკიდებელი სამუშაოების მიზანი იმაში მდგომარეობს, რომ დაეხმაროს მოსწავლეებს გეომეტრიული გარდაქმნების შესახებ სკოლაში მიღებული ცოდნის განმტკიცებაში, რათა მათ ნათელი წარმოდგენა ჰქონდეთ, რომ გეომეტრიული ფიგურა შედგება წერტილთა სიმრავლისაგან. მაგალითად, მოსწავლეებს შეიძლება შევთავაზოთ: ააგეთ მოცემული F ფიგურის სიმეტრიული F' ფიგურა l წრფის მიმართ. (ნახ.7).



ნახ.7.

დამუკიდებელი სამუშაოს შესრულების დროს მოსწავლეები აცნობიერებენ, რომ F ფიგურა (ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში-წირი) შედგება წერტილთა უსასრულო სიმრავლისაგან და ნებისმიერად აღებული წირისათვის წრფის მიმართ სიმეტრიული წირის აგება პრაქტიკულად მხოლოდ მიახლოებით არის შესაძლებელი. რაც უფრო ახლოსაა მოცემულ F ფიგურაზე აღებული წერტილები, მით უფრო ზუსტად აიგება წრფის მიმართ მისი სიმეტრიული F' ფიგურა.

ამასთან F' ფიგურის $A', B', C', \cdots$ წერტილები, რომლებიც F ფიგურის $A, B, C, \cdots$ წერტილების სიმეტრიულია, უნდა შევაერთოთ იმ თანმიმდევრობით, ე.ი. რა თანმიმდევრობითაც F ფიგურის $A, B, C, \cdots$ წერტილები არიან შეერთებული. ანუ, თუ $A, B, C, \cdots$ წერტილები F ფიგურაზე შეერთებული არიან მოცემული თანმიმდევრობით, მაშინ F' ფიგურის მისაღებად უნდა ავაგოთ ჯერ $A'B'$ რკალი, შემდეგ $B'C'$ რკალი და ა.შ. (ნახ.7). შევნიშნოთ, რომ თუ F ფიგურა არ არის

ნებისმიერი მრუდი, არამედ წარმოადგენს მონაკვეთს, მრავალკუთხედს, წრეწირს, ან ზოგადად შედგება მონაკვეთებისა და წრეწირის რკალებისაგან, მაშინ l წრფის მიმართ მისი სიმეტრიული F' ფიგურის აგება შედარებით მარტივია და შესაძლებელია ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით.

როცა შეისწავლება ფიგურის სიმეტიულობა წრფის მიმართ, მასწავლებელს ყურადღების გარეშე არ უნდა დარჩეს ღერძის მიმართ სიმეტრიული გეომეტრიული ფიგურების განხილვა.

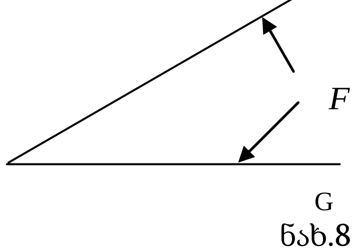
ვთქვათ, l-რაიმე წრფეა. σ-თი აღვნიშნოთ ამ წრფის მიმართ სიმეტრია. l წრფეს ეწოდება F ფიგურის სიმეტრიის ღერძი, თუ $\sigma(F)$ ფიგურა ემთხვევა F-ს:

$$\sigma(F) = F .$$

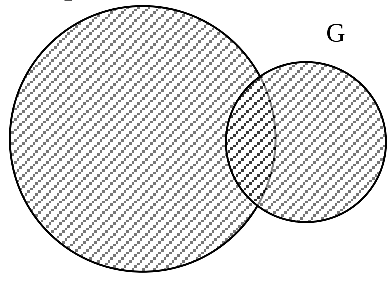
თვითონ F ფიგურას ეწოდება სიმეტრიული l წრფის მიმართ.

ვთქვათ F და G რაიმე ორი გეომეტრიული ფიგურაა (წერტილოვანი სიმრავლეებია). F და G ფიგურების გაერთიანება ეწოდება ფიგურას, რომელიც მიიღება თუ F ფიგურის ყველა წერტილს დავუმატებთ G ფიგურის ყველა იმ წერტილს, რომელიც F-ს არ ეკუთვნის. F და G ფიგურების გაერთიანება აღინიშნება სიმბოლოთი $F \cup G$. მაგალითად, თუ F და G-ერთი წერტილიდან გამოსული ორი სხივია, მაშინ $F \cup G$ წარმოადგენს კუთხეს (ნახ. 8). თუ სამკუთხედს განვიხილავთ, როგორც კონტურს, ის წარმოადგენს სამი AB, BC და AC მონაკვეთების გაერთიანებას. ნახ.9-ზე გამოსახულია ორი წრეწირის გაერთიანება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თუ F და F' ფიგურები სიმეტრიული არიან l წრფის მიმართ, მაშინ მათი $F \cup F'$ გაერთიანებისათვის l წრფე წარმოადგენს სიმეტრიის ღერძს



ნახ.8.



ნახ.9.

მართლაც, σ-თი აღვნიშნოთ l წრფის მიმართ სიმეტრია. მაშინ $\sigma(F')=F$ და $\sigma(F)=F'$. ამიტომ $F\cup F'$ ფიგურა σ სიმეტრიის დროს გადადის ფიგურაში $\sigma(F)\cup\sigma(F')=F'\cup F$. ე.ი. გადადის თავის თავში.

ამ თეორემის ილუსტრირება შესაძლებელია შემდეგ მარტივ მაგალითზე: თუ F არის O სათავის მქონე სხივი და l არის O წერტილზე გამავალი F-საგან განსხვავებული წრფე, ხოლო $F'=\sigma(F)$ - F-ის სიმეტრიული სხივია l წრფის მიმართ, მაშინ $F\cup F'$ ფიგურა სიმეტრიულია l წრფის მიმართ. ე.ი. კუთხის ბისექტრისა მისი სიმეტრიის ღერძია.

ღერძული სიმეტრიის გაცნობის დროს ძალზედ საინტერესოა მოცემული ფიგურების გაერთიანების ან თანაკვეთის შედეგად მიღებული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის განხილვა, რომელიც ჩვეულებრივი სასკოლო კურსის ფარგლებს სცილდება, მაგრამ ამ საკითხის განხილვა მიზანშეწონილია ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე. განვიხილოთ აღნიშნული საკითხი მოკლედ. აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ საკითხმა საკმაოდ დააინტერესა მოსწავლეები და მისი შესწავლის მიმართ დიდი ინტერესი გამოავლინეს.

დავამტკიცოთ ასეთი თეორემა: ვთქვათ F და G ორი ფიგურაა, ხოლო $F'=\sigma(F)$ და $G'=\sigma(G)$-მათი სიმეტრიული ფიგურებია შესაბამისად l წრფის მიმართ. მაშინ $F\cup G$ და $F'\cup G'$ ფიგურები ერთმანეთის სიმეტრიულია l წრფის მიმართ.

თუ ვისარგებლებთ ფუნქციონალური აღნიშვნებით, ჩამოყალიბებული თეორემა შეიძლება ასეთნაირად ჩავწეროთ:

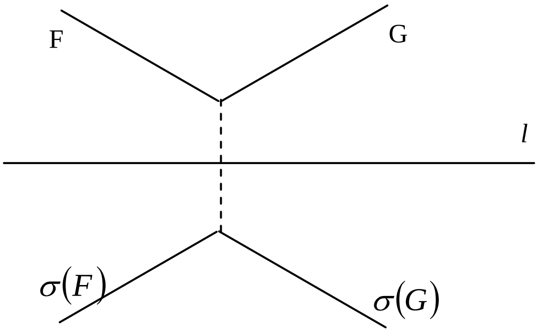
$$\sigma(F\cup G)=\sigma(F)\cup\sigma(G).$$

მაგალითად, თუ F და G საერთო სათავის მქონე ორი სხივია, მაშინ კუთხე-$F\cup G$ სიმეტრიულია კუთხისა $\sigma(F)\cup\sigma(G)$. (ნახ.10).

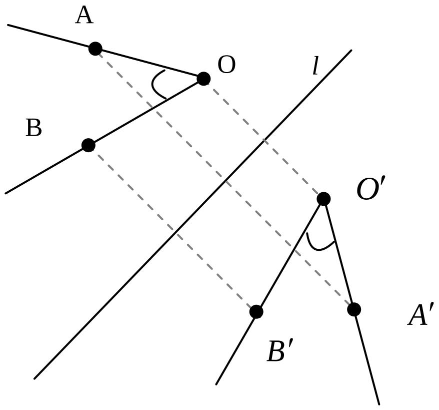
დამტკიცება. ვთქვათ M წერტილი ეკუთვნის $F\cup G$ ფიგურას. მაშინ ეს წერტილი ეკუთვნის ან F ფიგურას, ან G ფიგურას. ვთქვათ, ის ეკუთვნის F ფიგურას. მაშინ $\sigma(M)$ წერტილი ეკუთვნის $F'=\sigma(F)$ ფიგურას, და ცხადია ეკუთვნის $F'\cup G'$ გაერთიანებასაც. პირიქით, თუ N' წერტილი ეკუთვნის $F'\cup G'$ ფიგურას, მაშინ ის ეკუთვნის ერთ-ერთს F' და G' ფიგურებიდან. ვთქვათ, ის ეკუთვნის G' ფიგურას.

მაშინ N სიმეტრიის დროს გადავა მის სიმეტრიულ N' წერტილში, რომელიც ეკუთვნის G ფიგურას, და ცხადია ეკუთვნის $F\bigcup G$ გაერთიანებასაც.

ამრიგად, $\sigma(F\bigcup G)$ ფიგურის ყველა წერტილი ეკუთვნის $F'\bigcup G'=\sigma(F)\bigcup\sigma(G)$ ფიგურას და პირიქით. ეს ნიშნავს, რომ $\sigma(F\bigcup G)$ და $F'\bigcup G'$ ფიგურები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს, რომ $F\bigcup G$ და $F'\bigcup G'$ სიმეტრიულია.



ნახ. 10.



ნახ.11.

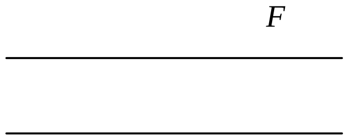
შედეგი: თუ წერტილები $A',B',C',\cdots,K'$ წერტილები სიმეტრიულია $A,B,C,\cdots,K$ წერტილებისა l წრფის მიმართ, მაშინ $A'B'C'\cdots K'$ მრავალკუთხედი სიმეტრიულია $ABC\cdots K$ მრავალკუთხედისა l წრფის მიმართ.

მართლაც, რადგან $A'B'$ მონაკვეთი AB მონაკვეთის სიმეტრიულია, $B'C'$ მონაკვეთი BC მონაკვეთის სიმეტრიულია და ა.შ. ამიტომ $A'B'C'\cdots K'$ მრავალკუთხედი, რომელიც წარმოადგენს $A'B',B'C',\cdots,K'A'$ მონაკვეთების გაერითიანებას, სიმეტრიულია $ABC\cdots K$ მრავალკუთხედისა, რომელიც წარმოადგენს $AB,BC,\cdots,KA$ მონაკვეთების გაერთიანებას.

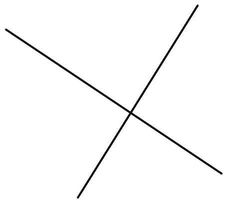
ამ თეორემის საილუსტრაციოდ შეიძლება გამოვიყენოთ საერთო სათვის მქონე ორი F და G სხივი. ვთქვათ F' და G' შესაბამისად ამ სხივების სიმეტრიული სხივებია l წრფის მიმართ. მაშინ დამტკიცებული თეორემის ძალით, $F\bigcup G$ კუთხე, $F'\bigcup G'$ კუთხის სიმეტრიულია. (ნახ. 11).

ვთქვათ F და G რაიმე ორი გეომეტრიული ფიგურაა (წერტილოვანი სიმრავლეებია). F და G ფიგურების თანაკვეთა ეწოდება ფიგურას, რომელიც შედგება ყველა იმ წერტილებისაგან, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან როგორც F ფიგურას ასევე G ფიგურას. F და G ფიგურების თანაკვეთა აღინიშნება სიმბოლოთი $F\bigcap G$. მაგალითად, თუ F და G ფიგურები წრფეებს წარმოადგენენ,

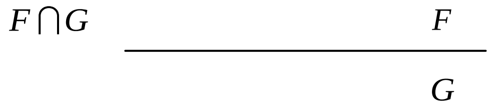
მაშინ მათი თანაკვეთა არ შეიცავს არცერთ წერტილს, თუ წრფეები პარალელურია (ნახ.12), ერთი წერტილია, თუ ისინი გადაიკვეთებიან (ნახ.13) და წარმოადგენს წრფეს, თუ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა. (ნახ. 14).



ნახ. 12.

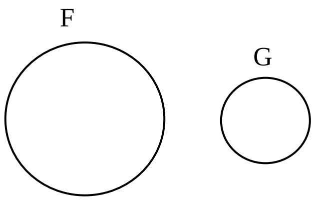


ნახ.13.

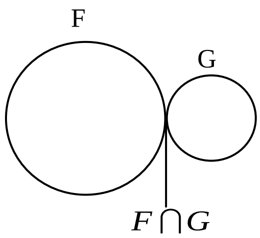


ნახ.14.

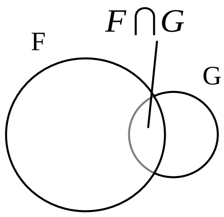
თუ F და G ფიგურები წრეწირებს წარმოადგენენ. მაშინ მათი თანაკვეთა შეიძლება არ შეიცავდეს არცერთ წერტილს (ნახ. 15), შეიცავდეს ერთ წერტილს (ნახ. 16), ორ წერტილს (ნახ. 17), ან ემთხვეოდეს ერთ-ერთ წრეწირს. (ნახ. 18)



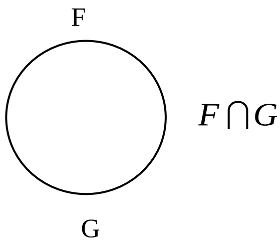
ნახ. 15.



ნახ.16.

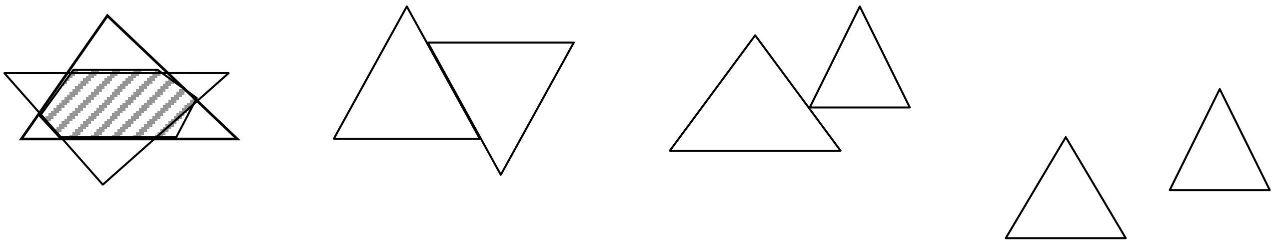


ნახ.17.

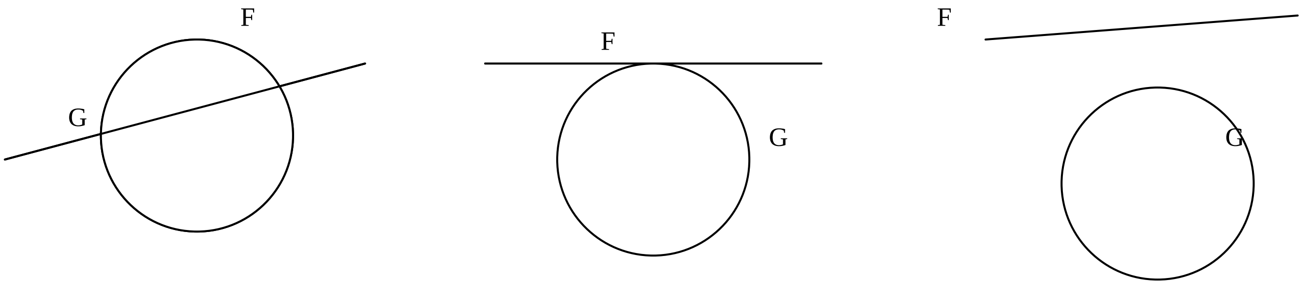


ნახ.18.

მე-19 ნახაზზე გამოსახულია ორი სამკუთხედის თანაკვეთის, ხოლო მე-20 ნახაზზე წრფისა და წრეწირის თანაკვეთის შესაძლო შემთხვევები.



ნახ.19.



ნახ.20.

სამართლიანია ასეთი თეორემა:

ვთქვათ F და G ორი ფიგურაა, ხოლო $F' = \sigma(F)$ და $G' = \sigma(G)$-მათი სიმეტრიული ფიგურებია შესაბამისად l წრფის მიმართ. მაშინ $F \cap G$ და $F' \cap G'$ ფიგურები ერთმანეთის სიმეტრიულია l წრფის მიმართ.

თუ ვისარგებლებთ ფუნქციონალური აღნიშვნებით, ჩამოყალიბებული თეორემა შეიძლება ასეთნაირად ჩავწეროთ:

$$\sigma(F \cap G) = \sigma(F) \cap \sigma(G).$$

ამ თეორემის დამტკიცება ანალოგიურია ზემოთ მოყვანილი დამტკიცებისა, ამიტომ აქ აღარ მოვიყვანთ.

მიზანშეწონილად მივიჩნევთ, რომ ღერძული სიმეტრიის გავლის დროს ამოცანები ისეთნაირად იყოს შერჩეული, რომ მათი ამოხსნის დროს სიმეტრია ღერძის მიმართ გამოვიყენოთ არა მარტო ფიგურების მიმართ, არამედ მათი რაიმე ნაწილის, ან თუნდაც კონკრეტული წერტილის მიმართ. ეს გადასვლა უნდა განხორციელდეს თანდათანობით, მოსწავლეთათვის მასალის მისაწვდომობის გათვალისწინებით. [48].

განვიხილოთ მაგალითები.

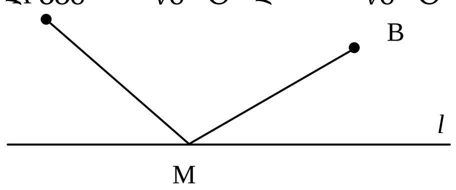
ამოცანა 1. მოცემულია l წრფე და ორი A და B წერტილი, რომლებიც ამ წრფის ერთ მხარეს მდებარეობენ. იპოვეთ l წრფეზე ისეთი M წერტილი, რომ ჯამი $AM + MB$ იყოს უმცირესი (ნახ.21).

ეს ამოცანა შეიძლება დავუკავშიროთ ცხოვრებისეულ ან სათამაშო სიტუაციას. ასე მაგალითად, ან მოსწავლეთა A და B პატრიოტული ბანაკები განთავსებულია მდინარის ერთ ნაპირზე. A ბანაკის პატრიოტებს აძლევენ დავალებას, რომ მივიდნენ B ბანაკში უმოკლესი მანძილით ისე, რომ ჯერ მივიდნენ მდინარის ნაპირზე და შემდეგ B ბანაკში. ამასთან მდინარის ბანაკი ჩათვლილია სწორხაზოვნად და მის ნებისმიერ წერტილთან მისვლა პატრიოტებს თავისუფლად შეუძლიათ. იპოვეთ მდინარის ნაპირზე ასეთი წერტილი, ან A და B წერტილები ჩავთვალოთ ბილიარდის ბურთულებად, ხოლო l წრფე ბილიარდის მაგიდის კიდედ. საჭიროა A ბურთულა მოვარტყათ B ბურთულას ისე რომ, A ბურთულა ჯერ უნდა მოხვდეს მაგიდის კიდეს და შემდეგ B ბურთულას. იპოვეთ მაგიდის კიდეზე ასეთი წერტილი.

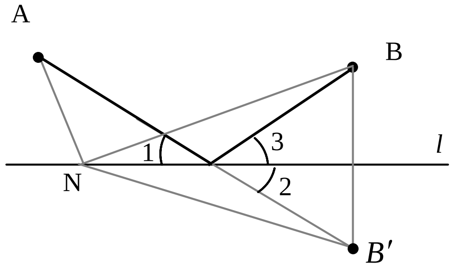
ამოხსნა. განვიხილოთ B წერტილის სიმეტრიული B' წერტილი l წრფის მიმართ. (ნახ.22). მაშინ l წრფის ნებისმიერი N წერტილისათვის $NB = NB'$, ამიტომ

$$AN + NB = AN + NB'.$$

ამრიგად, $AN + NB$ ჯამი ტოლია ANB' ტეხილის ჯამის ტოლი. ცხადია, რომ $AN + NB$ ჯამი უმცირესი იქნება, როცა უმცირესი იქნება ANB' ტეხილის სიგრძე. ANB' ტეხილის სიგრძე უმცირესი იქნება, როცა ის გადაიქცევა მონაკვეთად, ე.ი. როცა N წერტილი დაემთხვევა M წერტილს, სადაც M არის AB' და l წრფეთა გადაკვეთის წერტილი. M წერტილი საძიებელია.



ნახ.21.



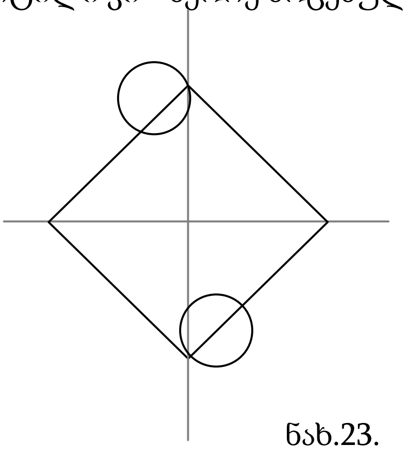
ნახ.22.

ამოცანის ამოხსნიდან გამომდინარეობს, რომ A, B' და საძიებელი M წერტილები ერთ წრფეზე ძევს. ამიტომ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (ნახ.22). სხვანაირად, რომ ვთქვათ უმცირესი AMB მანძილი ხასიათდება იმით, რომ მისთვის „დაცემის კუთხე“ ტოლია „არეკვლის კუთხისა“. ზუსტად ასეთი თვისებით ხასიათდება სინათლის სხივის თვისება, რომელიც აირეკლება სარკიდან, ამიტომ სინათლის სხივი, რომელიც გამოდის A წერტილიდან და უნდა მოხვდეს B წერტილში l „სარკიდან“ არეკვლის შემდეგ „ირჩევს“ უმოკლეს მანძილს. ეს ფაქტი არის ფიზიკაში კარგად ცნობილი ფერმას პრინციპის კერძო შემთხვევა, რომლის თანახმადაც სინათლის სხივი ყოველთვის (არეკლის დროს, გარდატეხის დროს, და ა.შ.) „ირჩევს“ ყველა შესაძლო გზებიდან ისეთს, რომლის გავლაზეც ის ხარჯავს უმცირეს დროს.

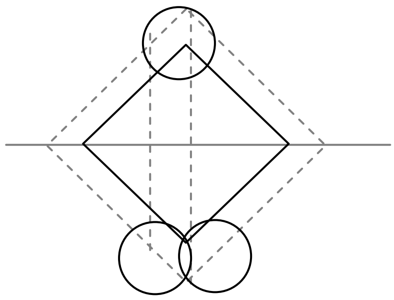
ამოცანა 2. ააგეთ კვადრატი, რომლის მოპირდაპირე წვეროები მოცემულ l წრფე მდებარეობს, ხოლო დანარჩენი ორი-მოცემულ ორ წრეწირზე. (ნახ.23).

ამოხსნა. აგების ამოცანების ამოხსნა შედგება ოთხი ეტაპისაგან: ანალიზი, აგება, დამტკიცება და გამოკვლევა. ამოცანის ამოხსნის დროს დავიცვათ ამ ეტაპების თანმიმდევრობა.

ანალიზი. ვთქვათ, რომ ამოცანა ამოხსნილია და $ABCD$ საძიებელი კვადრატია. A და C წერტილები l წრფეზე ძევს, B წერტილი - მოცემულ R წრეწირზე, ხოლო D წერტილი კი - მეორე მოცემულ S წრეწირზე. (ნახ.24).



ნახ.23.



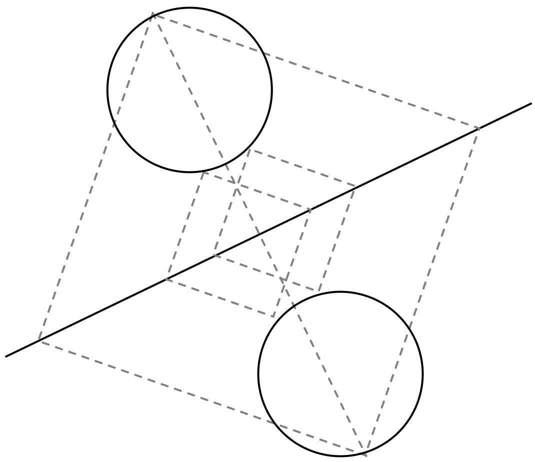
ნახ. 24.

რადგან კვადრატის დიაგონალები ურთიერპერპენდიკულარულია და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, ამიტომ B და D წერტილები AC წრფის მიმართ სიმეტრიულია. რადგან A და C წერტილები l წრფის წერტილებია, ამიტომ B და D - l წრფის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია, მაგრამ B წერტილი მოცემული R წრეწირის წერტილია, ამიტომ მისი სიმეტრიული D წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს R' წრეწირს, რომელიც R წრეწირის სიმეტრიულია l წრფის მიმართ. გარდა ამისა D წერტილი ეკუთვნის S წრეწირს. ე.ი. D არის S და R' წრეწირების გადაკვეთის წერტილი.

აგება. ავაგოთ R' წრეწირი, რომელიც R წრეწირის სიმეტრიულია l წრფის მიმართ. ვთქვათ D არის S და R' წრეწირების გადაკვეთის წერტილი (ვთვლით, რომ D. წერტილი არ ეკუთვნის l წრფეს). ავაგოთ l წრფის მიმართ D წერტილის სიმეტრიული B წერტილი. Q-თი აღვნიშნოთ BD მონაკვეთისა და l წრფის გადაკვეთის წერტილი. ბოლოს l წრფის ორთავე მხარეს Q წერტილიდან ავაგოთ QD მონაკვეთის ტოლი QA და QC მონაკვეთები. $ABCD$ საძიებელი კვადრატია.

დამტკიცება. $ABCD$ ოთხკუთხედი კვადრატია, რადგან მისი დიაგონალები ტოლია, ურთიერთმართობულია და გადაკვეთის Q წერტილით შუაზე იყოფა. A და C წერტილები აგების თანახმად l წრფის წერტილებია, ხოლო D-S წრეწირის წერტილია. რადგან D წერტილი R' წრეწირის წერტილია, ამიტომ მისი სიმეტრიული B წერტილი R წრეწირის წერტილია.

გამოკვლევა. S და R' წრეწირების განლაგების შესაბამისად მათი გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა, რომლებიც l წრფეს არ ეკუთვნის შეიძლება იყოს 2. 1 ან 0. შესაბამისად ამოცანის ამონახსნების რაოდენობა იქნება ორი, ერთი ამ არ ექნება ამონახსნი. შესამლებელია მოხდეს, რომ S და R' წრეწირები ერთმანეთს დაემთხვეს, ე.ი. მათ აქვთ უამრავი საერთო წერტილი (ეს მაშინ მოხდება, როცა R და S წრეწირები სიმეტრიულია l წრფის მიართ). ამ შემთხვევაში ამოცანას ექნება უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი. (ნახ. 25).



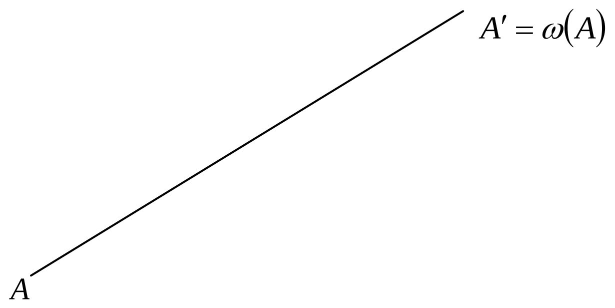
ნახ. 25.

4.2. ფიგურის სიმეტრიულობა წერტილის მიმართ

თემას „ფიგურის სიმეტრიულობა წერტილის მიმართ“ ანუ რაც იგივეა ცენტრული სიმეტრიას დათმობილი აქვს შედარებით ნაკლები სასწავლო დრო ვიდრე თემას „ფიგურის სიმეტრიულობა წრფის მიმართ“. ეს აიხსნება არა თემის ირგვლივ არსებული სასწავლო მასალის სიმცირით, არამედ ამ ორი თემის სწავლების შინაარსის თითქმის იდენტურობით. ამასთან თემის „ფიგურის სიმეტრიულობა წერტილის მიმართ“ შესწავლას მოსწავლეები გარკვეულად მომზადებულნი იწყებენ. თითქმის ყველა პრინციპული მომენტი, რომლებზეც ჩვენ ზემოთ გვქონდა საუბარი შენარჩუნებულია ამ თემის შესწავლის დროსაც. [20].

ისევე როგორც ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრიაც წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ვთქვათ O სიბრტყის რაიმე წერტილია. O

წერტილის მიმართ ϖ სიმეტრიას ყოველი A წერტილი გადაჰყავს $A'=\varpi(A)$ წერტილში (ნახ.26).



ნახ. 26.

ისევე, როგორც ღერძული სიმეტრიის დროს, ცენტრული სიმეტრიის დროსაც მიზანშეწონილია მასწავლებლმა გამოიყენოს გეომეტრიულ გარდაქმნათა ფუნქციონალური ჩანაწერი $A'=\varpi(A)$. ეს პირველ რიგში გამართლებულია იმით, რომ გეომეტრიული გარდაქმნების აღნიშვნა ერთი ϖ სიმბოლოთი მოსწავლეებისათვის ახალია და მათ დაინტერესებას იწვევს. ამავე დროს მოსწავლეებმა იციან, რომ მსგავსი აღნიშვნებით ალგებრის კურსში გამოისახება ფუნქცია და გარკვეულწილად მათ ამზადებს იმისათვის, რომ ეს არის ფუნქციის რაღაც სახე, რომელიც ჩვეულებრივად ალგებრის კურსში განხილული რიცხვითი ფუნქციებისაგან განსხვავებულია, რადგან ფუნქციის არგუმენტიც და მნიშვნელობაც გეომეტრიული ფიგურებია.

მას შემდეგ, რაც შემოღებული იქნება ცენტრული სიმეტრიის განსაზღვრება, მიზანშეწონილია მასწავლებელმა ყურადღება გაამახვილოს ცენტრული და ღერძული სიმეტრიის საერთო და განმასხვავებელ თვისებებზე. ისევე როგორც ღერძულ სიმეტრიას, ცენტრულ სიმეტრიასაც ყოველი A წერტილი გადაყავს A' წერტილში. თუმცა A' წერტილის პოვნა მოცემული A წერტილით ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების დროს განსხვავებულია. საერთო ცენტრული და ღერძული სიმეტრიისათვის არის აგრეთვე ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თვისება, კერძოდ თუ სიმეტრიის დროს A წერტილი გადადის A' წერტილში, ამ სიმეტრიის გამოყენებით A' წერტილი გადადის A წერტილში. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ

$\sigma(A)=A'$, მაშინ $\sigma(A')=A$. (ღერძული სიმეტრია);

$\varpi(A)=A'$. მაშინ $\varpi(A')=A$. (ცენტრული სიმეტრია).

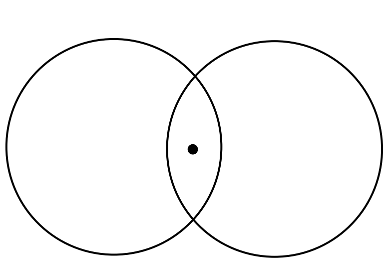
შემდგომ კლასებში განხილულ სხვა გეომეტრიული გარდაქმნებს ეს თვისება საზოგადოდ არ აქვთ.

O წერტილის მიმართ სიმეტრიას აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი -თვითონ O წერტილი. ხოლო უძრავ წრფეებს წარმოადგენენ O წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფე.

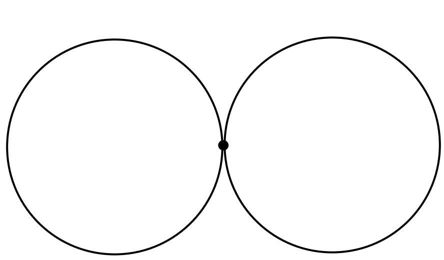
ღერძული სიმეტრიის შესწავლის დროს გეომეტრიული ფიგურები განვიხილეთ როგორც წერტილთა სიმრავლე, მაგრამ გეომეტრიული ფიგურების ასეთნაირი განხილვა ღერძული სიმეტრიისათვის სპეციფიკური არ არის, რადგან ასეთი მიდგომა განხორციელებულია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის კურსში განხილული ყველა გეომეტრიული გარდაქმნისათვის, მათ შორის ცენტრული სიმეტრიისათვისაც.

ცენტრული სიმეტრიის შესწავლის დროს სასურველია მოსწავლეებს ავუხსნათ, რომ O წერტილის მიმართ 180^0-იანი მობრუნება იგივე როლს ასრულებს, რასაც ღერძული სიმეტრიის დროს სიმეტრიის ღერძის მიმართ ნახაზის გადაკეცვა. კერძოდ, 180^0-იანი მობრუნება საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ, რომ ცენტრული სიმეტრიის დროს ყოველი ფიგურა გადადის მის ტოლ ფიგურაში. ე.ი. ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების დროს დროს ყოველი ფიგურა გადადის მის ტოლ ფიგურაში.

ვთქვათ O რაიმე წერტილია და ϖ არის O წერტილის მიმართ სიმეტრია. ყოველი F ფიგურისათვის არსებობს O წერტილის მიმართ სიმეტრიული $F'=\varpi(F)$ ფიგურა, ამასთან $F\cup\varpi(F)$ გაერთიანებისა და $F\cap\varpi(F)$ თანაკვეთისათვის O წერტილი სიმეტრიის ცენტრია.



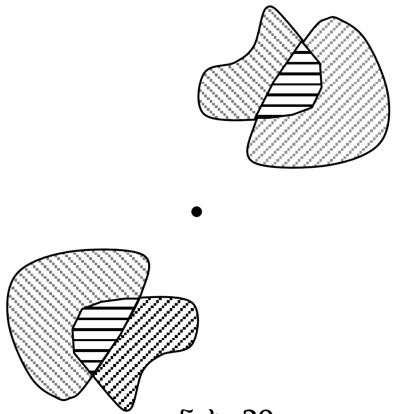
ნახ. 27.



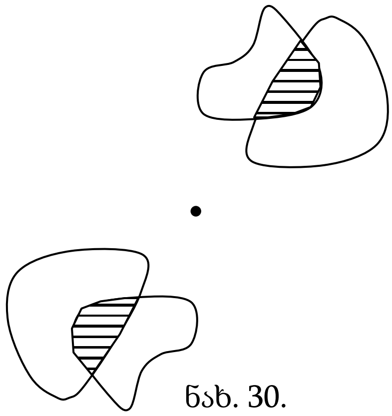
ნახ. 28.

მაგალითად, თუ F ფიგურა წრეწირია, ხოლო $\varpi(F)$ მისი სიმეტრიული წრეწირი O წერტილის მიმართ, მაშინ $F\cap\varpi(F)$ თანაკვეთა წარმოადგენს ფიგურას, რომელსაც

სიმეტრიის ცენტრად აქვს O წერტილი. ამიტომ თუ F და $\varpi(F)$ წრეწირები გადაიკვეთებიან, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილები სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ. (ნახ. 27). თუ F და $\varpi(F)$ წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს, მაშინ მათი შეხების წერტილი ემთხვევა O წერტილს. (ნახ. 28).



ნახ. 29.



ნახ. 30.

ვთქვათ ახლა F და G ორი ფიგურაა, ხოლო $F'=\varpi(F)$ და $G'=\varpi(G)$ ამ ფიგურების სიმეტრიული ფიგურებია O წერტილის მიმართ. მაშინ $F\bigcup G$ და $F'\bigcup G'$ ფიგურები ერთმანეთის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ (ნახ.29). ზუსტად ასევე $F\bigcap G$ და $F'\bigcap G'$ ფიგურები ერთმანეთის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ (ნახ.30).

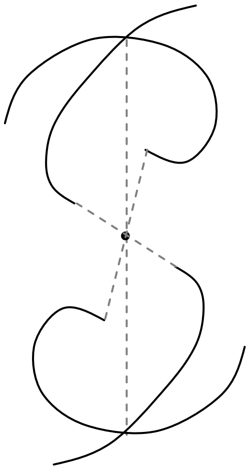
თუ გამოვიყენებთ ფუნქციონალურ სიმბოლიკას, ეს თეორემები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\varpi(F\bigcup G)=\varpi(F)\bigcup\varpi(G);$$

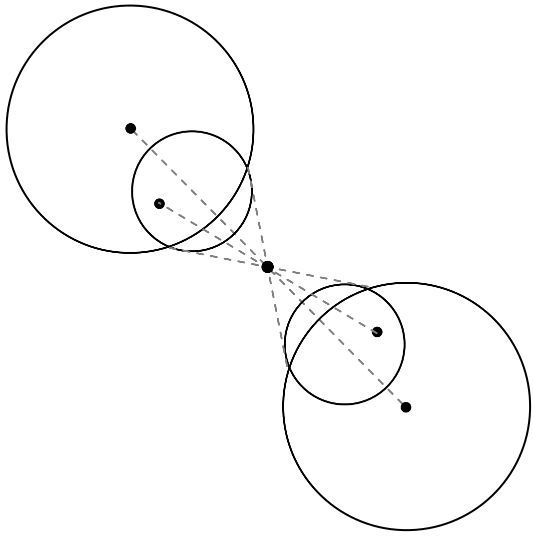
$$\varpi(F\bigcap G)=\varpi(F)\bigcap\varpi(G).$$

ეს თეორემები გამოყენებას პოულობს ცენტრალურ სიმეტრიაზე ამოცანების ამოხსნის დროს. ამიტომ მოსწავლეებისათვის საკმარისია ამ თეორემების აღქმა ინტუიციურ დონეზე, ხოლო თეორემების ფორმულირების მკაცრი ცოდნა არ არის აუცილებელი. მაგალითად, თუ F და G რაიმე ორი წირია, რომლებიც გადაიკვეთებიან M წერტილში, ხოლო F' და G'-წირებია, რომლებიც შესაბამისად F და G წირების სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ, მაშინ F' და G' წირები გადაიკვეთებიან M' წერტილში, რომელიც M წერტილის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ. (ნახ.31).

32-ე ნახაზზე გამოსახულია ორი გადამკვეთი წრეწირი და ორი წრეწირი, რომელიც მათი სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ.



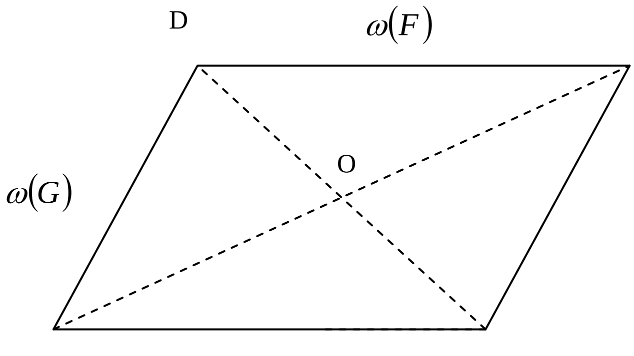
ნახ. 31.



ნახ. 32.

ზემოთ მოყვანილი ფიგურათა თანაკვეთისა და გაერთიანების შესახებ თეორემების გამოყენება საშუალო ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში არაერთგზის ხდება არაცხადადი სახით. მოვიყვანოთ ერთი მარტივი მაგალითი, რომელიც ეხება პარალელოგრამის სიმეტრიის ცეტრის დამტკიცებას.

ვთქვათ $ABCD$ პარალელოგრამში O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. AB გვერდი აღვნიშნოთ F -ით, ხოლო BC გვერდი - G -თი. (ნახ. 33).



ნახ. 33.

O ცენტრის მიმართ სიმეტრია აღვნიშნოთ ϖ -თი. გვაქვს $\varpi(F)=CD,\ \varpi(G)=DA$. ამიტომ ABC ტეხილი ე.ი ფიგურა $F\cup G$ - O ცენტრის მიმართ სიმეტრიულია ფიგურის $\varpi(F)\cup\varpi(G)$, ანუ CDA ტეხილის. რადგან ABC და CDA ტეხილები

ერთმანეთის სიმეტრიულია O ცენტრის მიმართ, ამიტომ მათი გაერთიანება, ე.ი მთლიანად $ABCD$ პარალელოგრამი სიმეტრიულია O ცენტრის მიმართ. რაც ნიშნავს, რომ ყოველი პარალელოგრამისათვის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მისი სიმეტრიის ცენტრია.

ცენტრული და ღერძული სიმეტრიის გავლის დროს სასწავლო მასალა შეიძლება დავუკავშიროთ ალბათობათა თეორიის ელემენტების შესწავლას და ალბათობის გამოთვლას. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

მოცემულია ლათინური ანბანის ასოები:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R S, T, U, V, W, X, Y, Z.

ამ სიმრავლიდან გამოყავით ქვესიმრავლეები, რომელსაც აქვთ სიმეტრიის ღერძი? სიმეტრიის ცენტრი? სიმეტრიის ღერძიც და ცენტრიც? რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ალალაბედზე აღებულ ასოს ექნება:

ა) სიმეტრიის ღერძი?

ბ) სიმეტრიის ცენტრი?

გ) სიმეტრიის ღერძიც და ცენტრიც?.

I თავის დასკვნები და რეკომენდაციები:

1. თეორიული და პრაქტიკული ცოდნის დონე, მეთოდური ლიტერატურის ცოდნა, პროფესიული სრულყოფა, მათემატიკის პრაქტიკული გამოყენების უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბება, თანამედროვე მეთოდების გამოყენება მათემატიკის სწავლებაში ქმნიან მათემატიკის მასწავლებლის შინაგან მათემატიკურ კულტურას. სწორ მეთოდოლოგიურ და მეთოდიკურ პრინციპზე დაფუძნებული მათემატიკის სწავლება პრაქტიკული მოღვაწეობის დროს თანდათანობით იხვეწება და სრულყოფილი ხდება.

2. სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის მაღალ დონეზე ჩატარებისათვის მათემატიკის მასწავლებლის პროფესიულ ცოდნასთან ერთად გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება ფსიქოლოგიის, პედაგოგიური ფსიქოლოგიის და პედაგოგიკის თეორისა და ისტორიის ძირითადი საკვანძო საკითხების ცოდნას.

3. საგანთშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების თეორიული და პრაქტიკული რეალიზება დამოკიდებულია არა მარტო მასწავლებლის გამოცდილებაზე, არამედ კავშირების რეალიზების ფორმებსა და მეთოდებზე. ამიტომ ზოგადსაგანმანათლებ-ლო სკოლის მეორე საფეხურზე საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები მოითხოვს სპეციალურ შესწავლას. მიგვაჩნია, რომ საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების მეთოდებსა და ხერხებს უნდა ფლობდეს მათემატიკის კლასების ყველა მასწავლებელი.

4. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე მათემატიკის კურსში რეალიზებული საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები შინაარსობრივად უნდა შეიცავდეს ისეთ სახეებს, რომლებიც ფასეულია ზოგადი განათლებისათვის, ადვილად ასათვისებელია მოსწავლეებისათვის, ამავე დროს ათვისებადობა მიღწეული უნდა იქნას მასალის ისეთნაირი დიდაქტიკური შერჩევით, რომ არ დაირღვეს საგანთშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირებით დამყარებული სასწავლო საგნების ზოგადსაგანმანათლებლო დანიშნულება. განსახილავმა მასალამ უნდა უზრუნველყოს მოსწავლის შემოქმედებითი უნარის, ზოგადი და მათემატიკური

აზროვნების განვითარება, თანამედროვე მსოფლხედველობის ფორმირება, მიღებული ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება, მეცნიერული თვალსაწიერის გაფართოება, მოსწავლის მომზადება ცხოვრებისეული პრობლემის დაძლევისათვის.

5. ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური თვალსაზრისით გამართლებულია და მეტად მნიშვნელოვანი ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე სასწავლო პროცესში შემეცნებითი ინტერესის წარმართვა ემოციაზე დაფუძნებით. მოსწავლის შემეცნებითი მიმართულება შერჩევით ხასიათს ატარებს. როდესაც ესა თუ ის საგანი, მოვლენა ან ცნება მისთვის მნიშვნელოვანია, მაშინ უფრო მეტი ხალისითა და ინტერესით სწავლობს. ამიტომ მასწავლებლის ძირითადი ფუნქცია არის არა მხოლოდ ცოდნის გადაცემა, არამედ ამ ცოდნისადმი განსაზღვრული ემოციური დამოკიდებულების შექმნა. სასწავლო პროცესის ასეთი წარმართვა ხელს უწყობს მოსწავლეებში შემეცნებითი ინტერესების აღძვრას.

6. ნატურალური რიცხვების შეკრება-გამოკლების თეორიული საფუძვლების ღრმა ცოდნა მასწავლებელს ხელს უწყობს შეკრებისა და გამოკლების კონკრეტული აზრის გარკვევაში. კერძოდ ნატურალური რიცხვების შეკრებას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა გაერთიანება, ხოლო გამოკლებას სიმრავლეთა სხვაობა. ეს კი ნიშნავს, რომ ნატურალური რიცხვების შეკრებისას საქმე გვაქვს კონკრეტული საგნების თავმოყრასთან, შეერთებასთან, ხოლო გამოკლებისას საგანთა ჯგუფს უნდა ჩამოვაშოროთ მისი გარკვეული რაოდენობა.

7. სადისერტაციო ნაშრომი მასწავლებელს საშუალებას აძლევს ღრმად და შინაარსიანად გაერკვეს გამრავლების კონკრეტულ აზრში. გამრავლების ცნების შემოტანა დაკავშირებულია ტოლი რიცხობრიობის მქონე სიმრავლეთა გაერთიანებასთან, გროვებად თვლასთან და აქედან გამომდინარე ტოლ შესაკრებთა ჯამის მოძებნასთან, აგრეთვე ის დაკავშირებულია ორი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლთან. ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის წყვილების გამოსახვა, როცა სიმრავლის ელემენტები კონკრეტული საგნებია სულ სხვა წარმოდგენას გვაძლევს გამრავლების კონკრეტულ აზრზე. წყვილებზე დაკვირვება გვიჩვენებს თუ რა სახის

კომბინაცია ტარდება სიმრავლეთა ელემენტებზე. სიმრავლეების შესაბამისი ნატურალური რიცხვების ნამრავლი უდრის დეკარტულ ნამრავლში წყვილთა რაოდენობას.

8. მასწავლებლისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს გაყოფის კონკრეტული აზრის გარკვევას. მისთვის გაყოფის კონკრეტული აზრის გასარკვევად საკმარისი არ არის ის, რომ გაყოფა არის გამრავლების შებრუნებული მოქმედება. საჭიროა გაყოფის აზრის გარკვევა თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით, რაც ნიშნავს მოცემული სიმრავლის დაყოფას ერთმანეთის არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად. განხილულ უნდა იქნას ორი ამოცანა: პირველი. სიმრავლის დაყოფა ტოლი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეებად და მეორე. სიმრავლის დაყოფა ერთნაირი რიცხობრიობის მქონე ქვესიმრავლეებად და თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის პოვნა.

9. ნაშრომში გამოკვეთილად და ნათლად არის წარმოდგენილი მასწავლებლი-სათვის ნულთან დაკავშირებული მოქმედებები: ნულის რიცხვზე გამრავლება, რიცხვის ნულზე გამრავლება, რომელიც საინტერესოა მასწავლებლისათვის, თუ რატომ არის ის ნული. თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით დამტკიცებულია ნულის რიცხვზე გაყოფა და რიცხვის ნულზე გაყოფის შეუძლებლობა. ვფიქრობთ, რომ დამტკიცების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული ხერხი მასწავლებლებს გამოადგებათ პრაქტიკაში.

10. მასწავლებელთათვის საინტერესოდ და საჭიროდ მიგვაჩნია არითმეტიკულ მოქმედებათა თვისებების დამტკიცება თეორიულ-სიმრავლური მიდგომით. ასეთებია: ჯამის არსებობა და ერთადერთობა, ჯამის გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები, სხვაობის არსებობა და ერთადერთობა, რიცხვიდან ჯამის გამოკლება, ჯამიდან რიცხვის გამოკლება. ამ თვისებების დამტკიცების შემდეგ ნაჩვენებია მათი გამოყენება შეკრება-გამოკლების სწავლების დროს.

11. არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიული საფუძვლების ცოდნა მათემატიკის მასწავლებელთათვის საჭირო და აუცილებელია, რათა მათ შეძლონ

მათემატიკის ღრმად და მაღალმეცნიერულ დონეზე სწავლება. ამ მიზნით აღნიშნული ნაშრომი დიდ დახმარებას გაუწევს მათემატიკის მასწავლებლებს.

12. ღერძული სიმეტრიის გავლის შემდეგ მოსწავლეებმა უნდა აღიქვან, რომ ღერძული სიმეტრია წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ჩანაწერი $A' = \sigma(A)$ გამოსახავს, რომ გეომეტრიულ გარდაქმნას-ღერძულ სიმეტრიას კავშირი აქვს ფუნქციის ცნებასთან. კერძოდ, σ სიმეტრია წარმოადგენს ფუნქციას, რომელსაც ყოველი A წერტილი (არგუმენტი) გადაყავს შესაბამის რაიმე $\sigma(A)$ წერტილში (კერძოდ წერტილში, რომელიც A წერტილის სიმეტრიულია l წრფის მიართ). ეს ფუნქცია განსხვავდება ალგებრის კურსში მოსწავლეების მიერ ამ პერიოდისათვის განხილული ფუნქციებისაგან: ალგებრის კურსში მათ მიერ განხილული ფუნქციებისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობები რიცხვებია, მაშინ როცა σ ფუნქციისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობებს წერტილები წარმოადგენენ.

13. ისევე როგორც ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრიაც წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ცენტრული სიმეტრიის დროსაც მიზანშეწონილია მასწავლებლმა გამოიყენოს გეომეტრიულ გარდაქმნათა ფუნქციონალური ჩანაწერი $A' = \varpi(A)$. ეს პირველ რიგში გამართლებულია იმით, რომ გეომეტრიული გარდაქმნების აღნიშვნა ერთი ϖ სიმბოლოთი მოსწავლეებისათვის ახალია და მათ დაინტერესებას იწვევს. ამავე დროს მოსწავლეებმა იციან, რომ მსგავსი აღნიშვნებით ალგებრის კურსში გამოისახება ფუნქცია და გარკვეულწილად მათ ამზადებს იმისათვის, რომ ეს არის ფუნქციის რაღაც სახე, რომელიც ჩვეულებრივად ალგებრის კურსში განხილული რიცხვითი ფუნქციებისაგან განსხვავებულია, რადგან ფუნქციის არგუმეტიც და მნიშვნელობაც გეომეტრიული ფიგურებია.

14. ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების შესწავლის დროს ძალზედ საინტერესოა მოცემული ფიგურების გაერთიანების ან თანაკვეთის შედეგად მიღებული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის განხილვა, რომელიც ჩვეულებრივი სასკოლოო კურსის ფარგლებს სცილდება, მაგრამ ამ საკითხის განხილვა მიზანშეწონილია ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე.

II თავი

ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე

§1. ხდომილობის ცნების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები VII-IX კლასებში

ალბათობის თეორიის შესწავლის ობიექტს ისეთი მოვლენები შეადგენენ, რომლებიც მასიურ და ამასთანავე შემთხვევით ხასიათს ატარებენ. ალბათობის თეორია მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი ნაწილია მსგავსად არითმეტიკისა, ალგებრისა, გეომეტრიისა და ა.შ. [7].

ამა თუ იმ მოვლენას, რომელსაც ალბათობის თეორია განიხილავს, ხდომილობა ეწოდება. ამრიგად, ხდომილობის ქვეშ ვგულისხმობთ ყველაფერ იმას, რაზედაც აზრი აქვს ლაპარაკს, რომ ის მოხდება თუ არ მოხდება.

იმდენად, რამდენადაც ხდომილობა რაიმე მოვლენის მოხდენის ფაქტს ნიშნავს, იგი არც რიცხვია და არც სიდიდე. ესა თუ ის ხდომილობა შეიძლება გარკვეულ პირობებში განხორციელდეს. მასთან შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

1. მოცემულ პირობებში ესა თუ ის ხდომილობა ყოველთვის ხორციელდება.
2. მოცემულ პირობებში ესა თუ ის ხდომილობა შეუძლებელია განხორციელდეს.
3. მოცემულ პირობებში ესა თუ ის ხდომილობა ხან ხდება, ხან არა.

პირველ შემთხვევაში ხდომილობას ეწოდება აუცილებელი, მეორე შემთხვევაში შეუძლებელი და მესამე შემთხვევაში შემთხვევითი. მოსწავლეებს გავაცნობთ შესაბამის მაგალითებს. აუცილებელი ხდომილობის მაგალითებია: ყუთიდან, რომელშიც მხოლოდ თეთრი ბირთვები აწყვია, თეთრი ბირთვის ამოღება, აგრეთვე კამათლის გაგორებისას ერთიდან ექვსამდე რომელიმე რიცხვის მოსვლა. შეუძლებელი ხდომილობის მაგალითებია: შავი ბირთვის ამოღება იმ ყუთიდან, რომელშიც მხოლოდ თეთრი ბირთვებია, კამათელზე შვიდიანის მოსვლა, ვაშლის ამოღება იმ პარკიდან, რომელშიც მხოლოდ მსხლები აწყვია და ა.შ.

მოსწავლეებს უნდა დავავალოთ მოიფიქრონ აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობის მაგალითები.

შემთხვევითი ეწოდება ისეთ ხდომილობას, რომლის განხორციელება მოცემულ პირობებში არ არის გარდაუვალი, არამედ ის არის მხოლოდ შესაძლებელი.

მაგალითად, ავიღოთ ფაბრიკა, რომელიც კონვეიერული წესით ამზადებს სამი სხვადასხვა პირველი, მეორე და მესამე ხარისხის პროდუქციას.

მაშინ ცხადია, რომ ამ ფაბრიკის მიერ ყოველი გამოშვებული პროდუქცია შეიძლება იყოს „პირველი ხარისხის", „მეორე ხარისხის" და „მესამე ხარისხის".

„პირველი ხარისხის" პროდუქციის დამზადების ფაქტი აღვნიშნოთ A-თი, „მეორე ხარისხისა"-B-თი, ხოლო „მესამე ხარისხისა"-C-თი, მაშინ ყოველი პროდუქციის დამზადებისას ხან A, ხან B და ხან C ხდომილობები განხორციელდება. ამგვარად, ეს ხდომილობები შემთხვევით ხასიათს ატარებენ.

თუ გავაგორებთ ერთ კამათელს, მაშინ ცხადია, ლუწი და კენტი ციფრის მოსვლა ერთდროულად შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში ხდომილობებს არათავსებადი ეწოდება. ასევე არათავსებადია A, B და C ხდომილობები, რადგან თუ გამოშვებული პროდუქცია „პირველი ხარისხისაა", მაშინ ის არ შეიძლება ერთდროულად იყოს „მეორე ხარისხის" ან „მესამე ხარისხის".

მწარმოებელი დაინტერესებულია მაღალხარისხოვანი პროდუქციის გამოშვებით, ამიტომ ერთი და იმავე ნედლეულისაგან გამოშვებული პირველი ხარისხის პროდუქცია გაცილებით მეტია, მეორე-ნაკლები, ხოლო მესამე-უმნიშვნელო. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ცდათა საკმაო სერიისას (ცდის ქვეშ იგულისხმება რომელიმე ხარისხის პროდუქციის გამოშვება) A ხდომილობის განხორციელებას მეტი შანსი აქვს, B ხდომილობისას ნაკლები, C-ს კი უმნიშვნელო. ამ გაგებით შეიძლება ვთქვათ, რომ A, B და C ხდომილობები არატოლძალოვნები არიან.

ტოლძალოვანი ხდომილობების გაცნობის მიზნით შეიძლება მოვიყვანოთ მაგალითი: ვთქვათ, ტარდება ლატარიის ტირაჟი, გათამაშების წინ, ცხადია, რომ არც ერთ ბილეთს უპირატესობა არა აქვს. გათამაშების წინ ყველა ბილეთი მოგების

თვალსაზრისით ტოლძალოვანია. ამ გაგებით ბილეთის ყველა მფლობელისათვის ამა თუ იმ ბილეთის მოგება ტოლძალოვანი ხდომილობაა.

მოსწავლეებმა იციან, რომ ხდომილობათა სიმრავლე ერთმანეთთან მიზეზ-შედეგობრივად არიან დაკავშირებული. მაგრამ უნდა ვუთხრათ, რომ ცალკეულ შემთხვევებში ეს კავშირი შეიძლება მოვლენათა შორის იმდენად სუსტი და შეუმჩნეველი იყოს, რომ სავსებით შესაძლებელია პრაქტიკულად ასეთი ხდომილობები დამოუკიდებელ ხდომილობებად ჩავთვალოთ.

ორ ხდომილობას ურთიერთდამოუკიდებელს მაშინ ვუწოდებთ, როდესაც ერთის მოხდენა მეორის მოხდენაზე არავითარ გავლენას არ ახდენს. მაგალითად, თუ ორ კამათელს ერთად ვაგორებთ, მაშინ თითოეულზე ჩვენთვის სასურველი ნომრის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობანი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

ვთქვათ A რაიმე ხდომილობაა. ის ხდომილობა, რომელიც აღნიშნავს A ხდომილობის არ მოხდენას, $\overline{A}$ სიმბოლოთი აღინიშნება და მას A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა ეწოდება. მაგალითად, თუ კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლის აღმნიშვნელ ხდომილობას A-თი აღვნიშნავთ, მაშინ ლუწი ნომრის მოსვლა ნიშნავს A-ს არ განხორციელებას. ამიტომ ლუწი ნომრის მოსვლა იქნება A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა $\overline{A}$.

გაკვეთილზე ვიდრე ხდომილობათა ჯამის განსაზღვრებას შემოვიღებდეთ, საჭიროა მოსწავლეებს შევახსენოთ სიმრავლეთა თეორიიდან შემდეგი საკითხები:

1. თუ A სიმრავლე B სიმრავლეში შედის, მაშინ ვწერთ $A \subset B$.

2. თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.

3. თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ $A = B$.

4. A და B სიმრავლეთა გაერთიანება ანუ ჯამი ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი ან A ან B სიმრავლეს მიეკუთვნება. A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა ეწოდება ისეთ სიმრავლეს რომლის ყოველი ელემენტი როგორც A ისე B სიმრავლეს მიეკუთვნება.

5. $A \bigcup A = A, \quad A \bigcup B = B \bigcup A, \quad (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C), \quad A \bigcup \varnothing = A,.$

$$A \bigcap A = A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A, \quad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C), \quad A \bigcap \varnothing = \varnothing.$$

ამის შემდეგ განვმარტავთ ხდომილობათა ჩართვის, ჩართვის ტრანზიტულობის, გაერთიანებისა და თანაკვეთის ცნებებს:

თუ გვაქვს ორი A და B ხდომილობა, მასთან A ხდომილობა B ხდომილობას იწვევს, მაშინ ვწერთ: $A \subset B$.

მაგალითად, თუ A კამათელზე სამიანის მოსვლის ალბათობაა, ხოლო B კი, იმავე კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლის ალბათობა, მაშინ ცხადია, რომ სამიანის მოსვლა იმავე დროს კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლასაც ნიშნავს და $A \subset B$ ჩართვა გვექნება.

სიმრავლეთა ჩართვის ოპერაციის ტრანზიტულობის მსგავსად ტრანზიტულია ხდომილობათა ჩართვის ოპერაცია:

ე.ი. თუ $A \subset B$ და $B \subset C$, მაშინ $A \subset C$.

თუ B ხდომილობა მოიცავს A ხდომილობას $A \subset B$ და A ხდომილობა მოიცავს B ხდომილობას $B \subset A$, მაშინ A და B ხდომილობებს ტოლძალოვანი ეწოდება და $A = B$.

A და B ხდომილობათა ჯამი ანუ გაერთიანება $A \bigcup B$ იქნება ისეთი ხდომილობა, რომლიც ნიშნავს ან მარტო A-ს მოხდენას ან მარტო B-ს მოხდენას ან ორივეს ერთდროულად მოხდენას. ე.ი. ჯამი მაშინ გვექნება, როცა გვაქვს ერთ-ერთი შესაკრები მაინც.

საჭიროა მოვაგონოთ მოსწავლეებს საერთო ელემენტების მქონე A და B სიმრავლეთა შეკრების წესი და გავაკეთოთ ანალოგია ხდომილობათა შეკრების წესთან.

ავიღოთ რიცხვითი სიმრავლეები: $A = \{1,2,3,4,5\}$ და $B = \{4,5,6,7,8\}$.

მოსწავლეებმა იციან, რომ A და B სიმრავლეთა ჯამი (გაერთიანება) წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$A \bigcup B = \{4,5\} \bigcup \{1,2,3\} \bigcup \{6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

მოსწავლეები ხედავენ, რომ A და B სიმრავლეთა თანაკვეთა აღებულ მაგალითში არის სიმრავლე, რომელიც შედგება ორი ელემენტისაგან $\{4,5\}$.

მოსწავლეებს ხაზგასმით უნდა შევახსენოთ, რომ A და B ხდომილობათა თანაკვეთა ნიშნავს მათ ერთდროულად განხორციელებას. ე.ი. ნამრავლი მაშინ

გვექნება, როცა ცალ-ცალკე გვაქვს A და B. აუცილებელია მოსწავლეებს გავაცნოთ მაგალითები ხდომილობათა ჯამზე და ნამრავლზე.

ხდომილობათა ჯამის მაგალითი. ვთქვათ ყუთში გვაქვს 25 ბირთვი. აქედან 15 თეთრია, 6 წითელი და 4 მწვანე.

აღვნიშნოთ წითელი ბირთვის ამოღების ხდომილობა A-თი, მწვანე ბირთვის ამოღების ხდომილობა B-თი, ხოლო ფერადი ბირთვის ამოღების ხდომილობა C-თი. (ფერადი ბირთვის ამოღება ნიშნავს წითელი ან მწვანე ბირთვის ამოღებას). ამრიგად, C ხდომილობის განხორციელება ნიშნავს A ან B-ს განხორციელებას. C ხდომილობას ეწოდება A და B ხდომილობათა გაერთიანება ანუ ჯამი და $A \cup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, იმავე ყუთიდან, რომელშიც 15 თეთრი და 10 ფერადი ბირთვია ზედიზედ ამოგვაქვს თითო ბირთვი. აღვნიშნოთ A-თი ხდომილობა, რომელიც აღნიშნავს შემთხვევით ამოღებული ბირთვი ფერადია, B-თი ხდომილობა - მეორედ ამოღებული ბირთვი ფერადია, C-თი ხდომილობა, რომელიც აღნიშნავს ამოღებული ბირთვებიდან ერთი მაინც ფერადია. ამ შემთხვევაში C ხდომილობის განხორციელება ნიშნავს, რომ ადგილი ექნება A ან B ხდომილობას. C ხდომილობას, ისე როგორც პირველ შემთხვევაში ეწოდება A ან B ხდომილობების გაერთიანება ანუ ჯამი.

ხდომილობათა თანაკვეთის საილუსტრაციოდ შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ ქსნის შუშის ქარხანა 500 ბოთლის გამოშვებისას ვარგისს ამზადებს 496 ცალს. ხოლო ვარგისი ბოთლებიდან 95 % პირველი ხარისხისაა.

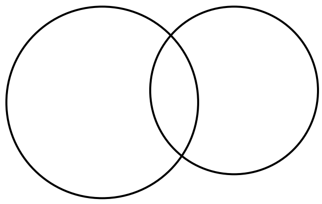
ვარგისი ბოთლების დამზადების ხდომილობა აღვნიშნოთ A-თი; პირველი ხარისხის ბოთლების დამზადების ხდომილობა B-თი, მაშინ A და B ხდომილობათა თანაკვეთა ეს იქნება ისეთი C ხდომილობა, რომელიც ნიშნავს ისეთი ბოთლის დამზადებას, რომელიც იქნება ვარგისი და ამასთან პირველი ხარისხის.

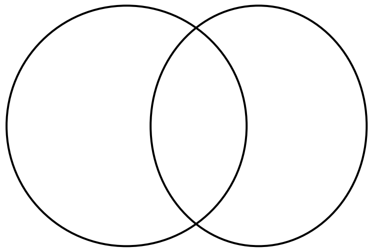
ორი ხდომილობის ჯამი, თანაკვეთა და სხვაობა სასურველია ვაჩვენოთ დიაგრამების სახით (ნახ.1):

მოსწავლეებს ავუხსნით, რომ გარე კონტურით შემოსაზღვრული არე ორი ხდომილობის ჯამია, თანაკვეთა კი დაშტრიხული ნაწილია. დაშტრიხული ნაწილის

მარცხნივ მდებარეობს A ხდომილობისა და AB (ანუ იგივე $A\bigcap B$) ხდომილობების სხვაობა, მარჯვნივ კი B ხდომილობისა და AB (ანუ იგივე $A\bigcap B$) ხდომილობების სხვაობა.

ხდომილობათა შეკრების, გამოკლებისა და თანაკვეთის ოპერაციების განმარტების შემდეგ მოსწავლეებს ვუხსნით ხდომილობათა სრული სისტემის ცნებას მაგალითების საშუალებით, შემდეგ კი ალბათობის კლასიკურ განსაზღვრებაზე გადავდივართ.





ნახ.1.

ვთქვათ A_1 არის სათამაშო კუბიკზე ერთიანის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა, A_2 - ორიანის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა და ა.შ. A_6 - არის ექვსიანის მოსვლის აღმნიშვნელი ხდომილობა. ადვილი მისახვედრია, რომ სისტემისათვის:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6 \qquad (1)$$

სამართლიანი იქნება დასკვნა:

1. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 - ხდომილობები არათავსებადია.

2. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ხდომილობებიდან ერთ-ერთი აუცილებლად მოხდება.

ხდომილობათა (1) სისტემას, რომელიც ამ ორ პირობას აკმაყოფილებს ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა.

ამის შემდეგ მიზანშეწონილია მოსწავლეებს შევთავაზოთ პრაქტიკული ამოცანები, რომელიც დაკავშირებულია ელემენტარულ ხდომილობათა სრულ სისტემასთან.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სრული სისტემა როდესაც ჰაერში ვაგდებთ ოთხ მონეტას.

ამოხსნა: თითეულ მონეტაზე შეიძლება მოვიდეს გერბი ან საფასური. ამიტომ სიტემას ექნება შემდეგი სახე:

(გ;გ;გ;გ) (გ;გ;ს;ს) (ს;ს;ს;ს) (ს;ს;გ;გ)

(გ;გ;გ;ს) (გ;ს:ს;გ) (ს;ს;ს;გ) (ს;გ;გ;ს)

(გ;გ;ს;გ) (გ;სგ;ს) (ს;ს;გ;ს) (ს;გ;ს;გ)

(გ;ს;გ;გ) (გ;ს;ს;ს) (ს;გ;ს;ს) (ს;გ;გ;გ)

ამოცანა 2. ნინის აქვს სამი სხვადსხვა ფერის მაისური და ორი სხვადსხვა ფერის შარვალი მაისურის და შარვლის არჩევის რამდენი სხვადასხვა შესაძლებლობა აქვს ნინის.

ამოხსნა: აღვნიშნოთ მაისურები ასოებით a, b, c ხოლო შარვლები m და n-ით. მაშინ ელემენტარულ ხდომილობათა სრულ სისტემას ექნება სახე:

$$(a;m)\ (a;n)\ (b;m)\ (b;n)\ (c;m)\ (c;n).$$

მაშასადამე ნინის აქვს მაისურის და შარვლის შერჩევის 6 ვარიანტი.

ამოცანა 3. მოლარეს დაავიწყდა სეიფის კოდის ბოლო ორი ციფრი თუმცა ახსოვს რომ პირველი მარტივი რიცხვია ხოლო მეორე კენტი რიცხვია. რამდენი ცდა დაჭირდება მოლარეს სეიფის გასაღებად.

ამოხსნა: ამ რიცხვებიდან პირველი შეიძლება იყოსს 2;3;5;7; ხოლო მეორე 1;3;5;7;9 ამიტომ ხდომილობათა სრულ სისტემას ექნება სახე: (2;1) (2:3) (2;5) (2;7) (2;9) (3:1) (3:3) (3;5) (3;7) (3;9) (5;1) (5;3) (5:5) (5;7) (5;9) (7;1) (7;3) (7;5) (7;7) (7;9) მაშასადამე ხდომილობათა სრული სისტემა შედგება 20 ელემენტისაგან.

§2 . ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება უნდა მოვახდინოთ მაგალითების განხილვით. ეს საკითხი შეიძლება კლასში შემდეგი თანმიმდევრობით განვახორციელოთ. მოსწავლეებს ჯერ შევახსენებთ ხდომილობის, აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილობების, ხდომილობათა სრული სისტემის და სხვა ცნებებს. შემდეგ გადავდივართ თვით ალბათობის ცნების განსაზღვრაზე. ამ მიზნით შეიძლება განვიხილოთ ასეთი მაგალითი. ვთქვათ. ყუთში აწყვია ერთი და იმავე მასალისაგან დამზადებული ერთნაირი ზომისა და ფორმის ბირთვები, რომლებიც დანომრილია

ციფრებით 1, 2, 3, 4. 5. ბირთვები ყუთში ავურიოთ. შედეგ ვაწარმოოთ ბირთვების ამოღება და ყოველი ცდის შედეგი ჩავიწეროთ, ბირთვი კი ისევ ყუთში ჩავაბრუნოთ და გავიმეოროთ ცდა. ცდის შედეგები შეიძლება სხვადასხვანაირი იყოს . შეიძლება ამოვიღოთ ბირთვი №1 ან №2 ან №3 ან №4 ან №5. ყველა განსხვავებული ნომრის ამოღება განსხვავებულ ხდომილობას წარმოადგენს. ამასთან ეს ხდომილობები არათავსებადი და ერთნაირად შესაძლებელი არიან. ეს ხდომილობები შესაბამისად აღვნიშნოთ A_1, A_2, A_3, A_4 და A_5-ით. ხუთივე ბირთვი ზუსტად ერთნაირი ზომისაა, ერთი და იმავე მასალისგანაა დამზადებული, ერთნაირი ფორმა და ზომა აქვთ. ბირთვებს ავურევთ ყუთში და ისინი ყუთიდან მასში ჩაუხედავად ამოგვაქვს, ამიტომ ჩვენ არავითარი საფუძველი არ გაგვაჩნია ვიფიქროთ, რომ რომელიმე ნომერს ამ ხუთი ბირთვიდან ამოღების მეტი შანსი ჰქონდეს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ხდომილობებს A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 განხორციელების ერთი და იგივე ობიექტური შესაძლებლობები აქვთ. ცხადია, რომ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ხდომილობები შემთხვევითი ხდომილობებია.

ამის შემდეგ მოსწავლეებს ვეუბნებით, რომ შემთხვევითი ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობის ზომას რიცხვით გამოსახავენ და ხდომილობის მათემატიკურ ალბათობას უწოდებენ.

მოსწავლეებს უნდა გავაცნობიერებინოთ, რომ ობიექტური შესაძლებლობა A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ხდომილობათა განხოციელებისა რიცხობრივად ხასიათდება იმით, რომ ხუთი ტოლშესაძლებელი ხდომილობიდან, მხოლოდ ერთი შეიძლება განხორციელდეს. ამიტომ ბუნებრივია, ობიექტური შესაძლებლობა თითოეული A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ხდომილობის განხორციელებისა რიცხვი $\frac{1}{5}$-ით შევაფასოთ.

განვიხილოთ იგივე ცდა შემდეგი სხვა ნიშნის მიხედვით. ერთ ნაწილს ბირთვებისას ლუწი ნომრები აქვს (2 და 4), მეორე ნაწილს კი კენტი (1, 3, 5). ლუწი ნომრის ბირთვის ამოღების ხდომილობა აღვნიშნოთ A-თი, ხოლო კენტი ნომრის ბირთვის ამოღების ხდომილობა B-თი. რა რიცხვით შევაფასოთ ობიექტური შესაძლებლობა ლუწნომრიანი ბირთვის ამოღებისა და ობიექტური შესაძლებლობა კენტნომრიანი ბირთვის ამოღებისა?

ამ საკითხის გარკვევის მიზნით კლასის წინაშე უნდა დაისვას კითხვები:

-ყუთიდან ბირთვის ამოღებისას რამდენი სხვადასხვა ნომრის გამოჩენაა შესაძლებელი?

-ხუთი სხვადასხვა ბირთვიდან რამდენია ლუწი, რამდენია კენტი?

-როდის განხორციელდება A ხდომილობა?

-როდის განხორციელდება B ხდომილობა?

-5 სხვადასხვა ხდომილობიდან რამდენი უწყობს ხელს A-ს განხორციელებას? B-ს განხორციელებას?

დასმულ კითხვაზე პასუხის გაცემით მოსწავლეებს ბუნებრივად მივიყვანთ დასკვნამდე, რომ A ხდომილობის განხორციელების ობიექტური შესაძლებლობა შეაფასონ რიცხვი $\frac{2}{5}$-ით, ხოლო B ხდომილობისა $\frac{3}{5}$-ით.

მოსწავლეები ხედავენ, რომ A და B ხდომილობის განხორციელების ობიექტური შესაძლებლობა შეფასდება ამ ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვის შეფარდებით ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვთან.

ასეთი მსჯელობის შემდეგ მოსწავლეებს ჩამოვუყალიბებთ ალბათობის კლასიკურ განსაზღვრებას:

რაიმე ხდომილობის ალბათობა უდრის ამ ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვს შეფარდებულს ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვთან, თუ ყველა შესაძლო შემთხვევა ხდომილობათა სრულ სისტემას ქმნის.

თუ A ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვს აღვნიშნავთ m-ით, ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვს n-ით, მაშინ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების ძალით

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

A ხდომილობის ალბათობა უდრის m-ის შეფარდებას n-თან. A ხდომილობის ალბათობა $P(A)$-თი აღინიშნება.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების შემოღების შემდეგ მიზანშეწონილია მოსწავლეები ვავარჯიშოთ ალბათობის გამოთვლის სხვადასხვა სახის პრაქტიკულ სავარჯიშოებზე. მოვიყვანოთ რამდენიმე სანიმუშო მაგალითი.

1. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული რიცხვების ჯამი არის 12; ჯამი არის 9, ჯამი მეტია 1-ზე.

2. იპოვეთ ერთი კამათლის გაგორებისას მარტივი რიცხვის მოსვლის ალბათობა; სამზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა; 5-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა.

3. ყუთში 4 შავი, 2 წითელი და 3 თეთრი ბურთია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეულ 7 ბურთს შორის ერთი მაინც წითელია?

4. ურნაში 33 ბირთვია. მათზე ქართული ასოებია გამოსახული-თითო ბირთვზე თითო ასო. ალაბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მასზე ხმოვანი ასოა გამოსახული?

5. პაპუნას ჯიბეში 5-თეთრიანი, 10 თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი თითო მონეტა აქვს. იგი ჯიბიდან შემთხვევით ერთმანეთის მიყოლებით იღებს ორ მონეტას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტები ჯამში ზუსტად 25 თეთრს შეადგენს?

6. სათამაშო ავტომატი 5 ცალ მონეტას ალალბედზე ორ კოლოფში (წითელსა და ლურჯში) ანაწილებს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ლურჯ კოლოფში ზუსტად 3 მონეტა აღმოჩნდება?

ამ სახის მაგალითების შერჩევა მასწავლებელს არ გაუჭირდება.

ამის შემდეგ მასწავლებელმა ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების გამოყენებით უნდა მოახდინოს ალბათობის თვისებების დამტკიცება.

1. აუცილებელ ხდომილობას ყველა შემთხვევა უწყობს ხელს. მაგალითად, ზემოთ განხილული ყუთიდან ისეთი ბირთვის ამოღება, რომელსაც ექნება ნომერი არაუმეტეს 5-სა, აუცილებელი ხდომილობა იქნება, ვინაიდან ამ ხდომილობას ხელს უწყობს 5-ივე შემთხვევა. ე.ი. $m=n$ და

$$P(A)=\frac{m}{n}=1. \quad P(A)=1. \qquad (2)$$

მოსწავლეები მიდიან დასკვნამდე: აუცილებელი ხდომილობის ალბათობა 1-ის ტოლია.

2. შეუძლებელ ხდომილობას არცერთი შემთხვევა არ უწყობს ხელს. მაგალითად, აღებული ყუთიდან ისეთი ბირთვის ამოღება, რომლის ნომერი 7 იქნება,

შეუძლებელი ხდომილობაა. ამიტომ შეუძლებელი ხდომილობის დროს $m=0$ და გვექნება

$$P(A)=\frac{0}{n}=0. \qquad P(A)=0. \quad (3)$$

მოსწავლეები დადაგენენ, რომ შეუძლებელი ხდომილობის ალბათობა უდრის ნულს.

3. ვინაიდან არცერთი ცდის შემთხვევაში ჩვენთვის სასურველი ხდომილობის განხორციელებისათვის რიცხვი m არ შეიძლებოდა აღემატებოდეს ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვს. ე.ი. $m \le n$ და რადგანაც, m არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო ისე n-ნატურალური რიცხვი, ამიტომ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$0 \le m \le n, \qquad \frac{0}{n} \le \frac{m}{n} \le 1 \quad (n \ne 0)$$

ანუ

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (4)$$

საჭიროა მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ (4) უტოლობის შინაარსზე, რომელიც გვეუბნება, რომ რაიმე ხდომილობის ალბათობა არა უარყოფითი რიცხვია, რომელიც არ აღემატება 1-ს.

თუ A და B ხდომილობები ერთმანეთის ტოლძალოვანია, მაშინ მათი ალბათობებიც ტოლია. ე.ი. თუ $A=B$, მაშინ $P(A)=P(B)$.

§3. ალბათობათა შეკრებისა და გამრავლების კანონების სწავლების შესახებ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე

ხდომილობათა ჯამის ალბათობის გამოთვლა შეიძლება დავაკავშიროთ სიმრავლეთა გეაერთიანებასთან (ჯამთან). მსჯელობას ვიწყებთ შემდეგნაირად: ვთქვათ, გვაქვს ორი A და B ხდომილობა. გამოვთვალოთ ხდომილობა, რომელიც ან A ან B-ს გაჩენაში მდგომარეობს. ვთქვათ, ყუთში ყვითელი, შავი და თეთრი ბურთებია. თუ A-თი აღვნიშნავთ ყუთიდან ყვითელი ბურთის ამოღებას, ხოლო B-

თი შავი ბურთის ამოღებას, მაშინ ხდომილობა A ან B განხილულ მაგალითში ყუთიდან ყვითელი ან შავი ბურთის ამოღება იქნება.

აღვნიშნოთ ყველა შესაძლო შემთხვევათა სიმრავლე I-თი, ხოლო A და B ხდომილობათა ხელშემწყობ შემთხვევათა სიმრავლე შესაბამისად P და Q-თი. მოსწავლეებს დაწვრილებით უნდა ავუხსნათ, რომ A ან B ხდომილობის გაჩენაში ხელს შეუწყობს $P \cup Q$ სიმრავლე.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების ძალით ამ ხდომილობის ალბათობა იქნება

$$\frac{n(P \cup Q)}{n(I)}.$$

მოსწავლეებმა იციან, რომ საერთო ელემენტების მქონე A და B სიმრავლეების გაერთიანების (ჯამის) ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

სადაც n აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტების რიცხვს, ხოლო $n(A \cap B)$ გამოსახავს A და B სიმრავლეთა საერთო ელემენტების რიცხვს.

თუ ამ ფორმულას P და Q სიმრავლეებისათვის გამოვიყენებთ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q).$$

უკანასკნელი ტოლობის ორთავე მხარე გავყოთ $n(I)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{n(P \cup Q)}{n(I)} = \frac{n(P)}{n(I)} + \frac{n(Q)}{n(I)} - \frac{n(P \cap Q)}{n(I)}.$$

ანუ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

თუ P და Q სიმრავლეებს საერთო ელემენტები არა აქვთ, ე.ი. $P \cap Q = \varnothing$, მაშინ A და B ხდომილობები ერთად ვერ განხორციელდება. ($n(A \cap B) = 0$). ისინი არათავსებადი არიან . ასეთ შემთხვევაში

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q)$$

საიდანაც

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

ე.ი. არათავსებად ხდომილობათა ჯამის ალბათობა მათი ალბათობათა ჯამის ტოლია.

ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოთვლის მიზნით აუცილებელია მოსწავლეებს გავაცნოთ პირობითი ალბათობის ცნება. რისთვისაც შეიძლება განვიხილოთ ასეთი ამოცანა. ვთქვათ, ვთქვათ ქარხნის მიერ გამოშვებული 100 წყვილი ფეხსაცმელიდან 96 ვარგისია, ხოლო აქედან 75% პირველი ხარისხისაა. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული ერთი წყვილი ფეხსაცმელი ვარგისი აღმოჩნდება მასთან პირველი ხარისხის?

ამოხსნა. A-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც იმას აღნიშნავს, რომ შემთხვევით აღებული ერთი წყვილი ფეხსაცმელი ვარგისია, B-თი კი ხდომილობა, რომელიც იმას აღნიშნავს, რომ შემთხვევით აღებული ერთი წყვილი ფეხსაცმელი პირველი ხარისხის იქნება.

მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშაობის სახით შეიძლება მივცეთ A ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა. მოსწავლეები იმსჯელებენ შემდეგნაირად; რადგან A ხდომილობის მოხდენას ხელს უწყობს 96 შემთხვევა, ხოლო აღებულ სიტუაციაში ყველა შესაძლო შემთხვევად მიღებულია 100. ამიტომ გამოთვლებით მივიღებთ:

$$P(A)=\frac{96}{100}=0{,}96.$$

ამის შემდეგ კლასის წინაშე უნდა დაისვას კითხვა: რას ნიშნავს A და B ხდომილობების ერთდროულად მოხდენა?

მოსწავლეები დაადგენენ, რომ A და B ხდომილობების ერთდროულად მოხდენა იმას ნიშნავს, რომ შემთხვევით აღებული ფეხსაცმელი პირველი ხარისხის უნდა იყოს. 96 წყვილიდან 75% პირველი ხარისხისაა, ამიტომ 96 წყვილიდან პირველი ხარისხის გვექნება:

$$\frac{96\cdot 75}{100}=72 \text{ (წყვილი)}$$

ამრიგად, A და B ხდომილობების ერთდროულად მოხდენაას ხელს უწყობს 100 შემთხვევიდან 72 შემთხვევა. ამიტომ

$$P(A \bigcap B) = \frac{72}{100} = 0{,}72.$$

ახლა განვსაზღვროთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით აღებული ფეხსაცმელი პირველი ხარისხის იქნება, თუ ცნობილია, რომ აღებული ფეხსაცმელი ვარგისია. ე.ი. უნდა განვსაზღვროთ B ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ A-ს აქვს ადგილი. ამ შემთხვევაში B ხდომილობის ალბათობას პირობითი ალბათობა ეწოდება ეწოდება და $P_A(B)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, იკითხება „B ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ A-ს აქვს ადგილი“.

$P_A(B)$ ალბათობის განსაზღვრის მიზნით კლასის წინაშე უნდა დაისვას შემდეგი კითხვები:

-რამდენი შემთხვევა უწყობს ხელს A ხდომილობას?

-96 შემთხვევიდან რამდენი უწყობს ხელს B ხდომილობას?

დასმულ კითხვებზე პასუხით მოსწავლეები ბუნებრივად მიგვყავს დასკვნამდე:

$$P_A(B) = \frac{72}{96} = \frac{0{,}72}{0{,}96} = 0{,}75.$$

$$P_A(B) = 0{,}75.$$

$$\left(P_A(B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} \right)$$

მსგავსი მაგალითის განხილვას შეიძლება მივცეთ ზოგადი ხასიათი და მივიღოთ ფორმულები:

$$P_A(B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)} \qquad (1)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} \qquad (2)$$

(1) ფორმულიდან გვაქვს:

$$P(A \bigcap B) = P_A(B)P(A). \qquad (3)$$

(2) ფორმულიდან

$$P(A \bigcap B) = P_B(A)P(B). \qquad (4)$$

(3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B).$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ მიღებული (3) ფორმულის გამოყენებით პირდაპირ შეგვიძლია ზემოთ ამოხსნილი ამოცანის პასუხის მიღება. ეს შეიძლება მოსწავლეებს დამოუკიდებელი სამუშაოს სახით მივცეთ.

მიღებული (3) და (4) ფორმულები გამოსახავენ შემდეგს:

ალბათობა იმისა, რომ ორ ხდომილობას ადგილი ერთად ექნება ტოლია ერთ-ერთი მათგანის ალბათობის ნამრავლის მეორის იმ პირობით აღებულ ალბათობაზე, რომ პირველს ადგილი აქვს.

ხაზგასმით უნდა ვუთხრათ მოსწავლეებს, რომ თუ A და B ხდომილობი ერთ-ერთი დამოუკიდებელია, მაშინ ცხადია, ერთ-ერთის მოხდენა ვერავითარ გავლენას ვერ მოახდენს მეორის მოხდენაზე ე.ი. $P_A(B)$ იგივე იქნება, რაც $P(B)$ და ხდომილობათა ნამრავლის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B).$$

რაც ნიშნავს, რომ დამოუკიდებელ ხდომილობათა ერთად შესრულების ალბათობა ცალკე ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლის ტოლია.

ალბათობის შეკრებისა და გამრავლების წესების გამოყვანის შემდეგ საჭიროა ამ წესების ცოდნა მოსწავლეებში სათანადო სავარჯიშოების შესრულებით განვამტკიცოთ.

1. ვთქვათ A ხდომილობის ალბათობაა p. იპოვეთ $\overline{A}$ ხდომილობის ალბათობა.

რადგან A და $\overline{A}$ ხდომილობებიდან ერთერთი აუცილებლად მოხდება. ე.ი. $A \bigcup \overline{A}$ აუცილებელი ხდომილობაა. ამიტომ $P(A \bigcup \overline{A}) = 1$. ცხადია, რომ $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$. მეორეს მხრივ $P(A \bigcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = p + P(\overline{A}) = 1.$

საიდანაც $P(\overline{A}) = 1 - p.$

ამოცანა 1. მონეტას ჰაერში აგდებენ სამჯერ იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ გერბი მოვა მხოლოდ ერთჯერ.

ამოხსნა: ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე შედგება $2^3 = 8$ ელემენტისაგან.

(გ,გ,გ) (ს,ს,ს)

(გ,გ,ს) (ს,ს,გ)

(გ,ს გ) (ს,გ,ს)

(გ,ს,ს) (ს,გ,გ)

ამ ხდომილობებიდან გერბის ერთხელ მოსვლას ხელს უწყობს სამი შემთხვევა. მაშასადამე $p(A)=\frac{3}{8}$. ე.ი.ი გერბის ერთჯერ მოსვლის ალბათობა $\frac{3}{8}$ -ის ტოლია.

ამოცანა 2. ყუთში დევს ოთხი თეთრი სამი შავი და ორი ყვითელი ბურთი რას უდრის ალბათობა იმისა რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი ფერის.

ამოხსნა: ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ცხრა ელემენტისაგან. რომელთაგანაც მოცემული ხდომილობის ხელშემწყობია ოთხი მაშასადამე ხდომილობის ალბათობა იქნება $p(A)=\frac{4}{9}$ -ის ტოლი.

ამოცანა 3. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ნებისმიერად არჩეული ორნიშნა რიცხვის ჩანაწერი შეიცავს სამიანს.

ამოხსნა: ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ყველა ორნიშნა რიცხვისაგან ანუ შეიცავს 90 ელემენტს. რაც შეეხება ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობას ის შედგება ყველა ისეთი ორნიშნა რიცხვისაგან რომლის ჩანაწერიც ერთ სამიანს მაინც შეიცავს. ასეთი ორნიშნა რიცხვი კი 18 -ია. მაშასადამე საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით $p(A)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$. ესეიგი მოცემული ალბათობა $\frac{1}{5}$ -ის ტოლია.

ამოცანა 4. ვაგორებთ ორ კამათელს იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ კამათლებზე მოვა სამის ჯერადი რიცხვი.

ამოხსნა: ორი კამათლის გაგორებისას ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 36 ელემენტისაგან. ამათთაგან ჩვენთვის ხელშემწყობია 11 წყვილი. ამიტომ $p(A)=\frac{11}{36}$. მაშასადამე მოცემული ხდომილების ალბათობა $\frac{11}{36}$ -ია.

ამოცანა 5. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ტელეფონის ექვსნიშნა ნომრის ყოველი ციფრი კენტი იქნება.

ამოხსნა: თუ გავითვალიწინებთ იმ ფაქტს რომ ტელეფონის ნომერი არ შეიძლება იწყებოდეს ციფრით ნული. მაშინ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება

$9 \cdot 10^5$ ელემენტისაგან. აქედან ჩვენთვის ხელსაყრელ შემთხვევათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით 5^5. მაშასადამე ალბათობა $p(A) = \frac{5^6}{9 \cdot 10^5} = \frac{5}{9 \cdot 2^5}$ ის ტოლია.

ამოცანა 6. ჯგუფში 30 მოსწავლეა მათშორის ერთერთი გიორგია. ჯგუფიდან ოლიმპიადისთვის შეარჩიეს 5 მოსწავლე. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ამ ხუთკაციან ჯგუფში მოხვდება გიორგი.

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ყველა იმ ხუთკაციანი ჯგუფისაგან რომელიც შეიძლება გამოიყოს 30 კაციანი სიმრავლიდან ასეთი ჯგუფების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = 26 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 7 .$$

ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = 27 \cdot 29 \cdot 35 .$$

საძიებელი ალბათობაა

$$P(A) = \frac{C_{30}^4}{C_{30}^5} = \frac{5}{26} .$$

ამოცანა 7. ლოტოს გათამაშებაში 41 ბურთულაა. ირაკლი მოიგებს ჯეკპოტს თუ გამოიცნობს ექვსივე მოსულ რიცხვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ირაკლი მოიგებს ჯეკპოტს.

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე შედგება ექვსეულებისაგან რომელთა რაოდენობაა

$$C_{41}^6 = \frac{41!}{6!(41-6)!} = 4496388 .$$

რაც შეეხება ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვს ის ერთის ტოლია.
მაშასადამე

$$P(A) = \frac{1}{4496388} .$$

§4. გეომეტრიული ალბათობა. გეომეტრიული ალბათობის სწავლება სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე

თანამედროვე პირობებში, როდესაც ხდება მათემატიკის სასწავლო კურსის დახვეწა, განსაკუთრებით აქტუალურია კითხვები, რომლებიც მუდმივად დგას მეთოდისტების წინაშე ესენია: რა ვასწავლოთ? როგორ ვასწავლოთ და როდის ვასწავლოთ? ვის ვასწავლოთ? ამ კითხვებზე პასუხები არასდროს იქნება საბოლოო, ვინაიდან მეცნიერების განვითარებასთან ერთად ვითარდება და იცვლება საკითხები რომელთა სწავლება განსაკუთრებით აქტუალურია. ჩვენ აქ შევეხებით ალბათობის გამოთვლის გეომეტრიულ მეთოდს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია რომ მოსწავლეებს ესმოდეთ ალბათობის გამოთვლის გეომეტრიული მეთოდის პრაქტიკული გამოყენება. ისეთი ამოცანების ამოხსნა, სადაც საჭიროა როგორც ალბათობის თეორიის ისე გეომეტრიული მასალის გამოყენება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, რათა მათ შეძლონ ალბათობის გამოთვლა გეომეტრიული მეთოდით.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრებით, თუ A ხდომილობის ხელშემწყობ შემთხვევათა რაოდენობა m-ის ტოლია, ხოლო ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობა n-ის ტოლია, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა $\frac{m}{n}$ -ის ტოლია.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა არ არის სრულყოფილი. მისი ძირითადი ნაკლი ისაა, რომ არ შეიძლება მისი გამოყენება როდესაც ხელშემწყობ შემთხვევათა და ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობები არის უსასრულო. ასეთ შემთხვევაში შესაძლებელია ვისარგებლოთ ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრით.

ავიღოთ რაიმე E არე დავუშვათ ის მოიცავს F არეს. ვთქვათ A არის ხდომილობა, რომლის ხელშემწყობ შემთხვევათა სიმრავლეს შეესაბამება E ფიგურის F ნაწილი.

ვთქვათ E არეში ვაგდებთ წერტილს და გვინდა ვიპოვოთ ამ წერტილის F არეში მოხვედრის ალბათობა. როდესაც ვსაუბრობთ E არეში წერტილის ჩაგდებაზე, ვგულისხმობთ რომ ის ამ არის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება დაეცეს. ალბათობა იმისა რომ წერტილი დაეცემა E არის რაიმე ნაწილში, ცხადია ამ ნაწილის ზომის პროპორციული იქნება. ის დამოკიდებული არ იქნება ამ ნაწილის არც ფორმაზე და არც მდებარეობაზე. აქედან გამომდინარეობს რომ საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A)=\frac{m(E)}{m(F)}\ .$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ რიცხვს, A ხდომილობის გეომეტრიული ალბათობა ეწოდება. აქ $m(E)$ წარმოადგენს E არის ზომას (წრფის შემთხვევაში მონაკვეთის სიგრძე, სიბრტყის შემთხვევაში ფიგურის ფართობი).

განვიხილოთ რამდენიმე პრაქტიკული მაგალითი.

ამოცანა 1. ვთქვათ $[0,1]$ სეგმენტზე სვამენ წერტილს. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ დასმული წერტლი M(0,5) წერტილიდან 0,125-ზე არაუმეტესი მანძილით იქნება დაშორებული.

ამოხსნა: ცხადია ხელშემწყობ შემთხვევათა სიმრავლე იქნება $[0{,}375;\,0{,}625]$ სეგმენტი. ხოლო შესაძლო შემთხვევათა სიმრავლეა $[0,1]$ მონაკვეთი. მაშასადამე $P(A)=\frac{0{,}25}{1}=0{,}25\cdot$

ამოცანა 2. $[0;10]$ სეგმენტზე ნებისმიერად სვამენ წერტილს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წერტილი $[3;7]$სეგმენტში მოხვდება.

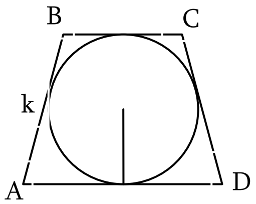
ამოხსნა: ხელშემწყობი მონაკვეთის სიგრძეა 4 . მთლიანი მონაკვეთის სიგრძე-10.

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\cdot$$

ახლა განვიხილოთ ალბათობა სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში საძიებელ ფორმულას შემდეგი სახე ექნება

$$P(A)=\frac{S(F)}{S(E)}$$

სადაც *S(F)- F* ფიგურის ფართობია. *S(E)* კი *E* ფიგურის ფართობი.



ამოცანა 3. ტოლფერდა ტრაპეციაში რომლის ფერდი k -ს ტოლია, ჩახაზულია r რადიუსიანი წრე. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ტრაპეციაში შემთხვევით დასმული წერტილი წრეში მოხვდება.

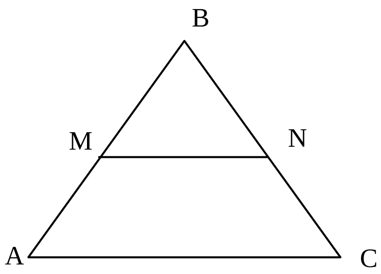
ამოხსნა: ცხადია საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A)=\frac{S(F)}{S(E)}.$$

თუ გამოვიყენებთ შემოხაზული ოთხკუთხედის თვისებას , მაშინ $AD+BC=2k$ ე.ი. ტრაპეციის ფართობი $S=k\cdot 2r$ ტოლია. მაშასადამე

$$P(A)=\frac{\pi r^2}{2kr}=\frac{\pi r}{2k}.$$

ამოცანა 4. ABC სამკუთხედში გავლებულია MN შუახაზი . იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ამ სამკუთხედში შემთხვევით დასმული წერტილი BMN სამკუთხედში არ მოხვდება.

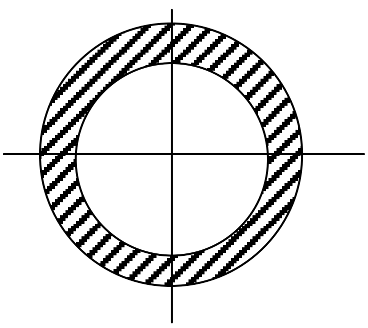


ამოხსნა: ჯერ ვიპოვოთ ალბათობა იმისა რომ წერტილი BMN სამკუთხედში მოხვდება. $P(A)=\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}}$.

რადგან $\Delta ABC \sim \Delta BMN$ ცხადია მსგავსების კოეფიციენტი $k=\frac{1}{2}$ მაშასადამე $\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}}=(k)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ე.ი. $P(A)=\frac{1}{4}$

მაშასადამე $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

ამოცანა 5. იმ x და y რიცხვებიდან რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x^2+y^2<81$, შემთხვევით არჩევენ x და y რიცხვებს. იპოვეთ ალბათობა იმისა,რომ $x^2+y^2>25$.



ამოხსნა: $x^2+y^2<81$ არის წრის განტოლება რომლის ცენტრი კორდინატთა სათავეშია ხოლო რადიუსი 9-ის ტოლია. $x^2+y^2>25$ არის ყველა წერტილი წერტილი რომელიც მდებარეობს იმ წრის გარეთ რომლის ცენტრი

კორდინატთა სათავეშია, ხოლო რადიუსი 5-ის ტოლია. მაშასადამე

$$P(A)=\frac{81\pi-25\pi}{81\pi}=\frac{56}{81}$$

ამოცანა 6. (ბიუფონის ამოცანა). სიბრტყე დახაზულია პარალელური წრფეებით, რომლებიც ერმნეთთან $2a$ მანძილითაა დაშორებული. სიბრტყეზე ნებისმიერად ისვრიან $2l$, $(l<a)$ სიგრძის ჯოხს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ჯოხი გადაკვეთს პარალელური წრფეებიდან რომელიმეს.

ამოხსნა: შემოვიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემა, სადაც OX ღერძს შეესაბამება ჯოხის მიერ პარალელურ წრფეებთან შედგენილი კუთხე, ხოლო Y -ს _ ჯოხის შუაწერტილიდან უახლოეს წრფემდე მანძილი. ამ შემთხვევაში ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვს შეესაბამება მართკუთხედი, რომლის გვერდებია a და $\frac{\pi}{2}$ (ნახ. 4), ხოლო ხელშემყობ შემთხვევათა რიცხვს ის წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$y>l\sin x.$$

საძიებელი ალბათობა გამოვთვალოთ (1) ფორმულით, სადაც

$$m(S)=\frac{\pi a}{2}\cdot$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ:

$$m(s)=l.$$

საიდანაც

$$P(E)=\frac{2l}{\pi a}\cdot$$

განვიხილოთ გეომეტრიული ალბათობის სწავლება სიმრავლეთა თეორიის გამოყენებით. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი A და B სიმრავლე. ეს სიმრავლეებს გამოვსახოთ ეილერის წრეებით. ცხადია, რომ თუ $A\bigcap B=\varnothing$, მაშინ

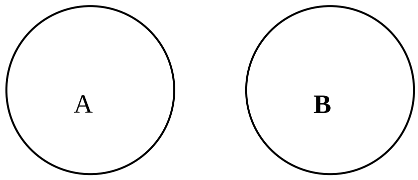
$$S(A\bigcup B)=S(A)+S(B),$$

სადაც $S(A\bigcup B)$ არის A და B სიმრავლეების გაერთიანების შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი, ხოლო $S(A)$ და $S(B)$, შესაბამისად, A და B სიმრავლეების ფართობები. (ნახ.1).

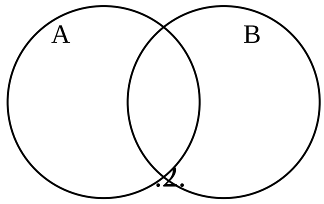
თუ $A\bigcap B\neq\varnothing$, მაშინ

$$S(A\bigcup B)=S(A)+S(B)-S(A\bigcap B),\quad (10)$$

სადაც $S(A\bigcap B)$ არის A და B სიმრავლეების თანაკვეთის შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი. (ნახ. 2).



ნახ.1.



.2.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სამი A, B და C სიმრავლე და ეს სიმრავლეები გამოვსახულია ეილერის წრეებით. განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა $A\bigcap B\neq\varnothing$, $A\bigcap C\neq\varnothing$, $B\bigcap C\neq\varnothing$ და $A\bigcap B\bigcap C=\varnothing$. (ნახ.3). მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$S(A\bigcup B\bigcup C)=S(A)+S(B)+S(C)-S(A\bigcap B)-S(A\bigcap C)-S(B\bigcap C)\qquad (11)$$

მოსწავლეებისათვის გაცილებით რთულია ზოგადი შემთხვევის განხილვა, როცა $A\bigcap B\bigcap C\neq\varnothing$. ამ დროს ასე უნდა მოვიქცეთ: ვისარგებლოთ სიმრავლეთა გაერთიანების ჯუფთებადობის თვისებით

$$S(A\bigcup B\bigcup C)=S\big((A\bigcup B)\bigcup C\big).$$

ამის შემდეგ ვისარგებლოთ (10) ფორმულით:

$$S(A\bigcup B\bigcup C)=S\big((A\bigcup B)\bigcup C\big)=S(A\bigcup B)+S(C)-S\big((A\bigcup B)\bigcap C\big)=$$

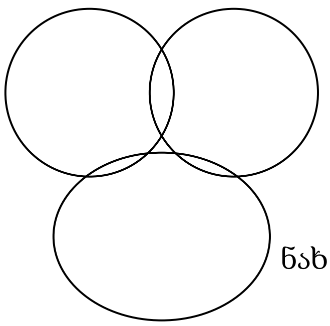
$$=S(A)+S(B)+S(C)-S(A\bigcap B)-S\big((A\bigcup B)\bigcap C\big)\quad (12)$$

სიმრავლეთა ალგებრის მე-12 კანონის ძალით

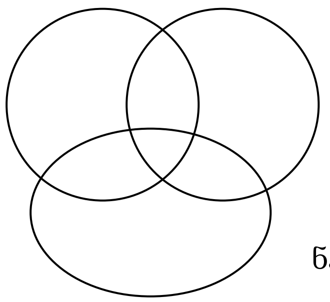
$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C).$$

საიდანაც

$$S\big((A\bigcup B)\bigcap C\big)=S\big[(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)\big]=S(A\bigcap C)+S(B\bigcap C)-S(A\bigcap B\bigcap C).$$



ნახ.3.



ნახ.4.

თუ მიღებულს ჩავსვამთ (12) ტოლობაში მივიღებთ, რომ ზოგად შემთხვევაში სამი A, B და C სიმრავლის გაერთიანების შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S(A\bigcup B\bigcup C)=S(A)+S(B)+S(C)-S(A\bigcap B)-S(A\bigcap C)-S(B\bigcap C)+S(A\bigcap B\bigcap C) \quad (13)$$

სადაც $S(A\bigcup B\bigcup C)$ არის A, B და C სიმრავლეების გაერთიანების შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი, $S(A)$, $S(B)$ და $S(C)$, შესაბამისად, A, B და C სიმრავლეების ფართობები, $S(A\bigcap B)$ არის A და B სიმრავლეების თანაკვეთის შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი. $S(A\bigcap C)$ არის A და C სიმრავლეების თანაკვეთის შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი. $S(B\bigcap C)$ არის B და C სიმრავლეების თანაკვეთის შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი, ხოლო $S(A\bigcap B\bigcap C)$-A, B და C სიმრავლეების თანაკვეთის შედეგად მიღებული სიმრავლის ფართობი. (ნახ.4).

ასეთი წარმოდგენა გვეხმარება გეომეტრიული ალბათობის გამოთვლის დროს.

განვიხილოთ პრაქტიკული ხასიათის ამოცანები.

ამოცანა 7. 10 კვადრატული მეტრის ფართობის მქონე ოთახი მთლიანად დაფარულია ორი ხალიჩით. ერთი ხალიჩის ფართობია 8 კვადრატული მეტრი, მეორის 3,5 კვადრატული მეტრი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება

ა) მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარულ ნაწილში:

ბ) მხოლოდ მეორე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში:

გ) ორივე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში.

ამოხსნა. ვთქვათ, პირველი ხალიჩის ფართობია $S(A)$, მეორე ხალიჩის ფართობი $S(B)$, $S(A\bigcap B)$-ორივე ხალიჩის მიერ გადაფარული ფართობია, მარტო პირველი ხალიჩით დაფარული ფართობია $S(A_1)$, ხოლო მარტო მეორე ხალიჩით დაფარული ფართობია $S(B_1)$. ცხადია, რომ $S(A\bigcup B)$-ოთახის ფართობია,

ცხადია, რომ $S(A_1)=S(A)-S(A\bigcap B)$, $S(B_1)=S(B)-S(A\bigcap B)$.

გამოვთვალოთ $S(A\bigcap B)$.

(10) ფორმულის ძალით

$$S(A\bigcap B)=S(A)+S(B)-S(A\bigcap B),$$

საიდანაც $S(A\bigcap B)=1{,}5$ (კვადრატული მეტრი).

მარტო პირველი ხალიჩით დაფარული ფართობი იქნება

$$S(A_1)=S(A)-S(A\bigcap B)=6{,}5 \text{ (კვადრატული მეტრი).}$$

მარტო მეორე ხალიჩით დაფარული ფართობი იქნება

$$S(B_1)=S(B)-S(A\bigcap B)=2 \text{ (კვადრატული მეტრი).}$$

ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრების თანახმად, ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთი მოხვდება მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება

$$p(A_1)=\frac{S(A_1)}{S(A\bigcup B)}=0{,}65 .$$

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთი მოხვდება მხოლოდ მეორე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება

$$p(B_1)=\frac{S(B_1)}{S(A\bigcup B)}=0{,}2 .$$

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთი მოხვდება ორივე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება

$$p(A\bigcap B)=\frac{S(A\bigcap B)}{S(A\bigcup B)}=0{,}15 .$$

ამოცანა 8. 12 კვადრატული მეტრის ოთახი დაფარულია სამი ხალიჩით. პირველი ხალიჩის ფართობია 5 კვადრატული მეტრი, მეორის 4 კვადრატული მეტრი, მესამის 3 კვადრატული მეტრი. ყოველი ორი ხალიჩა ფარავს ერთმანეთს 1,5 კვადრატული მეტრით. ამასთან 1,5 კვადრატული მეტრი ფართობიდან 0,5 კვადრატული მეტრი მოდის იატაკის ნაწილზე, სადაც სამივე ხალიჩა ერთმანეთს ფარავს.

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება:

ა) მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარულ ნაწილში:

ბ) მხოლოდ მეორე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში:

გ) მხოლოდ მესამე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში:

დ) ოთახის იმ ნაწილში, რომელიც ხალიჩებით არ არის დაფარული.

ამოხსნა. ვთქვათ, პირველი ხალიჩის ფართობია $S(A)$, მეორე ხალიჩის ფართობი $S(B)$, მესამე ხალიჩის ფართობია $S(C)$. $S(A\bigcap B)$-პირველი და მეორე ხალიჩების მიერ გადაფარული ფართობია, $S(A\bigcap C)$-პირველი და მესამე ხალიჩების მიერ გადაფარული ფართობია, $S(B\bigcap C)$-მეორე და მესამე ხალიჩების მიერ გადაფარული ფართობია, $S(A\bigcap B\bigcap C)$-პირველი, მეორე და მესამე ხალიჩების მიერ გადაფარული ფართობია, $S(A\bigcup B\bigcup C)$-არის მთლიანი ფართობი, რომლელიც სამივე ხალიჩის მიერ არის დაფარული. მარტო პირველი ხალიჩით დაფარული ფართობი აღვნიშნოთ S_1-ით, მარტო მეორე ხალიჩით დაფარული ფართობი S_2-ით და მარტო მესამე ხალიჩით დაფარული ფართობი S_3-ით, ოთახის ფართობი კი Q-თი.

ამოცანის პირობის ძალით

$$S(A)=5,\quad S(B)=4,\quad S(C)=3,\ S(A\bigcap B)=S(A\bigcap C)=S(B\bigcap C)=1{,}5\,,\ S(A\bigcap B\bigcap C)=0{,}5,$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (13) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}S(A\bigcup B\bigcup C)=S(A)+S(B)+S(C)-S(A\bigcap B)-S(A\bigcap C)-S(B\bigcap C)+S(A\bigcap B\bigcap C)=\\=5+4+3-1{,}5-1{,}5-1{,}5+0{,}5=8.\end{gathered}$$

ე.ი. სამივე ხალიჩის მიერ დაფარულია სულ 8 კვადრატული მეტრი ფართობი. დაუფარავია 12 - 8 = 4 კვადრატული მეტრი ოთახის ფართობი.

ადვილი შესამოწმებელია სიმრავლური ტოლობები:

მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარული ნაწილია

$$A\setminus\left[(A\bigcap B)\bigcup\left((A\bigcap C)\setminus(A\bigcap B\bigcap C)\right)\right].$$

მხოლოდ მეორე ხალიჩით დაფარული ნაწილია

$$B \setminus \left[(A \cap B) \cup \left((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)\right)\right].$$

მხოლოდ მესამე ხალიჩით დაფარული ნაწილია

$$C \setminus \left[(A \cap B) \cup \left((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)\right)\right].$$

ამ ტოლობებიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$S_1 = S(A) - \left[S(A \cap B) + S(A \cap C) - S(A \cap B \cap C)\right],$$

$$S_2 = S(B) - \left[S(A \cap B) + S(A \cap C) - S(A \cap B \cap C)\right],$$

$$S_3 = S(C) - \left[S(A \cap B) + S(A \cap C) - S(A \cap B \cap C)\right],$$

თუ ამ ტოლობებში შევიტანთ შესაბამის რიცხვით მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$S_1 = 2{,}5$ (კვადრატული მეტრი).

$S_2 = 1{,}5$ (კვადრატული მეტრი).

$S_3 = 0{,}5$ (კვადრატული მეტრი).

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება მხოლოდ პირველი ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება:

$$p(s_1) = \frac{S_1}{Q} = \frac{2{,}5}{12} = \frac{5}{24}.$$

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება მხოლოდ მეორე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება:

$$p(s_2) = \frac{S_2}{Q} = \frac{1{,}5}{12} = \frac{1}{8}.$$

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება მხოლოდ მესამე ხალიჩით დაფარულ ნაწილში იქნება:

$$p(s_3) = \frac{S_3}{Q} = \frac{0{,}5}{12} = \frac{1}{24}.$$

ალბათობა იმისა, რომ ოთახში შემთხვევით დავარდნილი პატარა ზომის ბურთულა მოხვდება ოთახის იმ ნაწილში, რომელიც ხალიჩებით არ არის დაფარული იქნება:

$$p(q) = \frac{q - S(A \cap B \cap C)}{Q} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

§5. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის ეტაპები მათემატიკის სასკოლო კურსში

მათემატიკის სასკოლო კურსი შეიცავს ისეთ ამოცანებს, რომლებსაც აქვთ პრაქტიკული ხასიათი და არიან ალბათური შინაარსის.

მეთოდურ ლიტერატურაში პრაქტიკული შინაარსის ამოცანების ამოხსნას ზოგიერთი მკვლევარი ყოფს სამ ეტაპად:

1. ამოცანის ფორმალიზაცია;

2. პრაქტიკული რეალიზაცია;

3. ინტერპრეტაცია.

ამოცანათა და მაგალითების ნებისმიერი სისტემის ამოხსნის დროს მოსწავლეები ხვდებიან სრულად ან ნაწილობრივ მაინც ამ ეტაპებს, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ამ საკითხს დავუთმოთ გარკვეული ყურადღება, რადგან ალაბათობის თეორიის სწავლება სკოლებში არც თუ ისე დიდი ხანია რაც შემოიღეს და ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის დამუშავებული ამ საკითხების მეთოდიკური საფუძვლები. [13].

განვიხილოთ ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები დაწვრილებით.

1. ფორმალიზაცია-არის მოცემული სიტუაციიდან გადასვლა ფორმალურ მათემატიკურ მოდელზე, რომელიც მიახლოებით ასახავს ამ სიტუაციას.

ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ამ ეტაპს მიეკუთვნება: ამოცანის პირობების შესწავლა, იმის განსაზღვრა, თუ რომელი წესი უნდა იქნეს გამოყენებული ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვის მოსაძებნად, როგორი ბუნებისაა ალალბედზე შერჩევა, თანაბრად შესაძლებელია თუ არა, აუცილებელია თუ შეუძლებელი და სხვ.

2. რეალიზაცია-არის ამოცანის ამოხსნა მისთვის განკუთვნილი მეთოდის მიხედვით, ამ დროს მოსწავლეები გამოიყენებებნ ზოგად წესებს და ფორმულებს ყველა შემთხვევათა რიცხვის მოსაძებნად.

3. ინტერპრეტაცია-არის ამოცანის ამოხსნის გათვალისწინება, ამოხსნის სისწორის შემოწმება და პრაქტიკული მნიშვნელობა.

ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ინტერპრეტაცია შეიძლება მოხდეს სხვადასხვა გზით, როგორიც არის დიაგრამებისა და ნახაზების აგება, გრაფებისა და გრაფ-ხის გამოყენება, ექსპერიმენტული ლაბორატორიული შემოწმება და სხვ.

ტექსტიანი ამოცანა აღწერს რეალურ ან მასთან მიახლოებულ სიტაციას, სადაც მოთხოვნილია გავიგოთ უცნობი სიდიდე ან გავაკეთოთ რაიმე თვისობრივი დასკვნა დამახასიათებელი ამ სიტუაციისათვის. პირველ ეტაპზე საჭიროა უცნობი სიდიდე შევიტანოთ ამოცანის პირობებში, მისი საშუალებით გამოვსახოთ სხვა სიდიდეები და შევადგინოთ ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე მათემატიკური მოდელი. ეს შეიძლება იყოს განტოლება, ფორმულა და სხვ. შესაძლებელია, როს ეს მათემატიკური მოდელი შეესაბამებოდეს კიდევ სხვა სიტუაციას.

ეს სამი ეტაპი სქემატურად ასე წარმოდგება:

ajhvfkbpfwb → ***htfkbpfwbf*** → ***bynthghtnfwb***

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანის ამოხსნა ამ ეტაპების გათვალისწინებით.

ამოცანა. რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებით 1, 3 და 9 ისე რომ მასში ციფრები არ განმეორდეს.

ამოხსნა. I ეტაპი - ფორმალიზაცია. აქ მოსწავლეებმა გაარკვიეს, რომ მოცემული ციფრებიდან საჭიროა შევადგინოთ სამნიშნა რიცხვები, რა ელემენტებისაგან შედგება სიმრავლე $\{1, 3, 9\}$. განსაზღვრა იმისა, რომ რიცხვში ციფრის გამეორება არ შეიძლება, რომ მნიშვნელობა აქვს ელემენტების დალაგებას, ასე მაგალითად, რიცხვები 391 და 913 სხვადასხვაა. რიცხვები 333 და 999 არ არის დასაშვები.მოსწავლეები დაადგენენ, რომ საჭიროა მოცემული სიმრავლის ყველა შესაძლო დალაგებათა რიცხვის მოძებნა და ამისათვის გამოიყენებენ საჭირო წესს და მოახდენენ ყველა შემთხვევის განხილვას.

II ეტაპი-რეალიზაცია. აქ მოსწავლეები ახდენენ მათთვის ცნობილი წესით ან ფორმულით გამოთვლას მოცემული სიმრავლის ყველა შესაძლო დალაგებათა რიცხვის მოძებნას ან ახდენენ ყველა შესაძლო შემთხვევების ჩამოთვლას. თუ

გამოვიყენებთ ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვის მოსაძებნ წესს მივიღებთ, რომ სამი ციფრისაგან შეიძლება შევადგინოთ $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ რიცხვი.

III ეტაპი-ინტერპრეტაცია. ამ ეტაპზე მოსწავლეები მასწავლებლის დახმარებით აგებენ ე.წ. ხეს, რომელზედაც ილუსტრირებულია მოცემული სიმრავლის ელემენტების განლაგება ყველა შემთხვევაში. (ნახ. 1).

ამ ხის საშუალებით მოსწავლეები თვალსაჩინოდ ხედავენ, თუ როგორ მიიღება თითოეული საძებნი რიცხვი.

ალბათური ხასიათის ამოცანების ამოხსნის დროს ამოცანის ამოხსნის სისწორის შესამოწმებლად ზოგჯერ მიზანშეწონილია გამოყენებული იქნეს ლაბორატორიული მეთოდი. განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითი.

ამოცანა. ყუთში არის თანაბარი რაოდენობის წითელი და თეთრი ბირთვები, იმდენი, რამდენი მოსწავლეც არის კლასში, სულ 24. ალალბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი.

პირველი და მეორე ეტაპის განხილვით მოსწავლეებმა დაადგინეს: ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი, ტოლია

$$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

განვიხილოთ მესამე ეტაპი, თუ როგორ შევამოწმოთ ამოცანის ამოხსნის სისწორე.

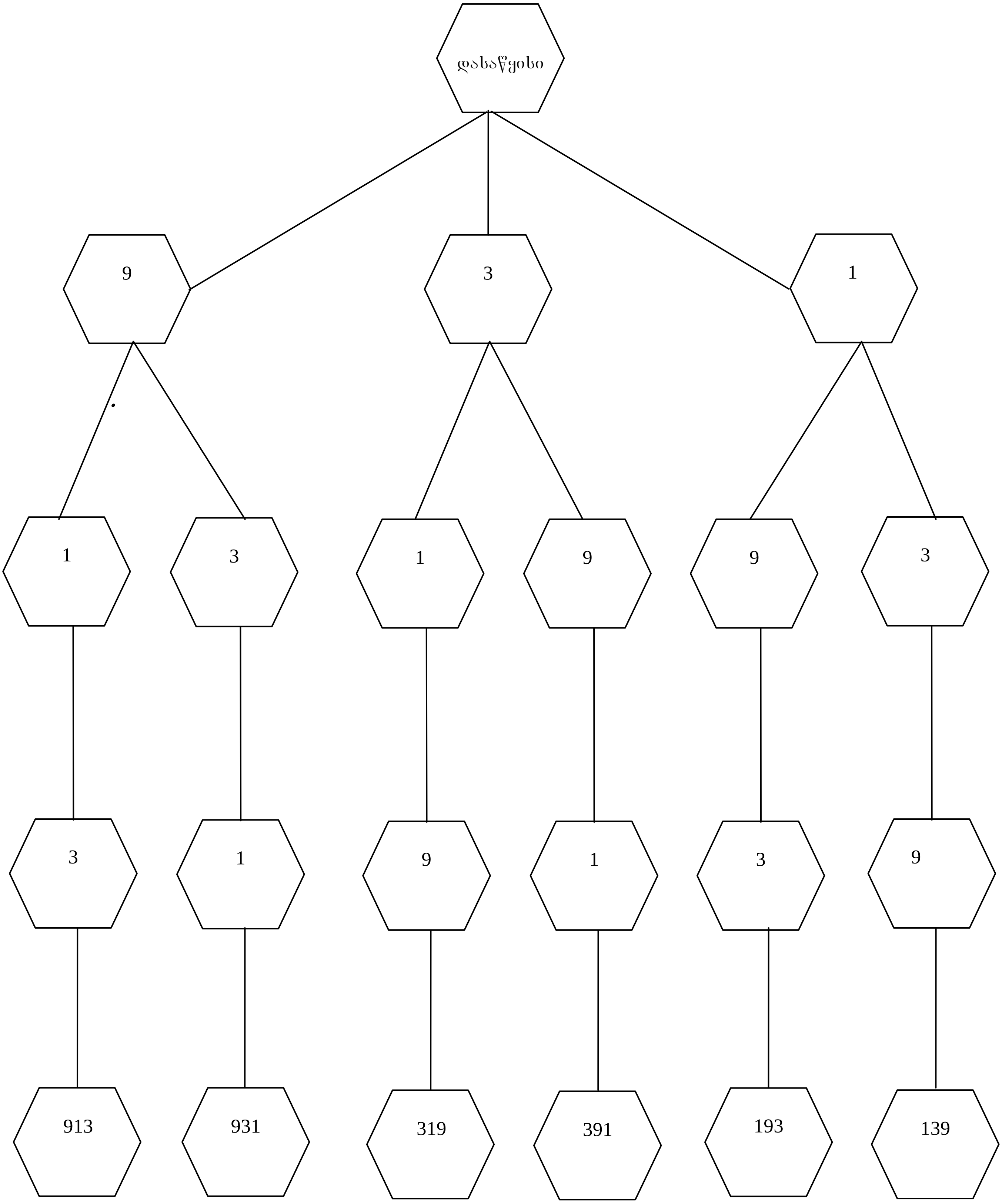
ყუთში მოვათავსეთ ერთნაირი ზომისა და წონის 24 ბირთვი-12 წითელი და 12 თეთრი. სულ ჩავატარეთ 24 ცდა. თითოეული ცდა მდგომარეობდა შემდეგში:

გამოვიძახეთ თითოეული მოსწავლე, რომელიც ყუთში ჩაუხედავად იღებდა ბირთვს. ამოღებული ბირთვის ფერი შეგვქონდა ცხრილში და ბირთვს ისევ უკან ვაბრუნებდით. ცხრილიდან ჩანს, რომ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი ან თეთრი უახლოვდება თეორიულად გამოთვლილი რიცხვს.

ცხრილი

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	სულ	Iეფარდება
წითელი	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	11	$\frac{11}{24} = 0{,}46$
თეთრი	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	13	$\frac{13}{24} = 0{,}54$

Ყaზ.1



სიმრავლეებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის დროს შეგვიძლია გამოვიყენოთ გრაფები.

მათემატიკის სახელმძღვანელოებში გვხვდება ისეთი შინაარსის ამოცანები, სადაც საჭიროა მრავალჯერადი ცდების ჩატრება, როგორიც არის აწონვა, სითხის გადასხმა ერთი ჭურჭლიდან მეორეში და სხვ.

განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა გრაფთა გამოყენებით.

ამოცანა 1. გვაქვს ერთნაირი ზომისა და ფორმის 81 მონეტა, რომელთა შორის ერთი ყალბია (მსუბუქია დანარჩენებზე). დადგინეთ ყალბი მონეტა ოთხი აწონვით პინებიანი სასწორის გამოყენებით (საწონების გარეშე).

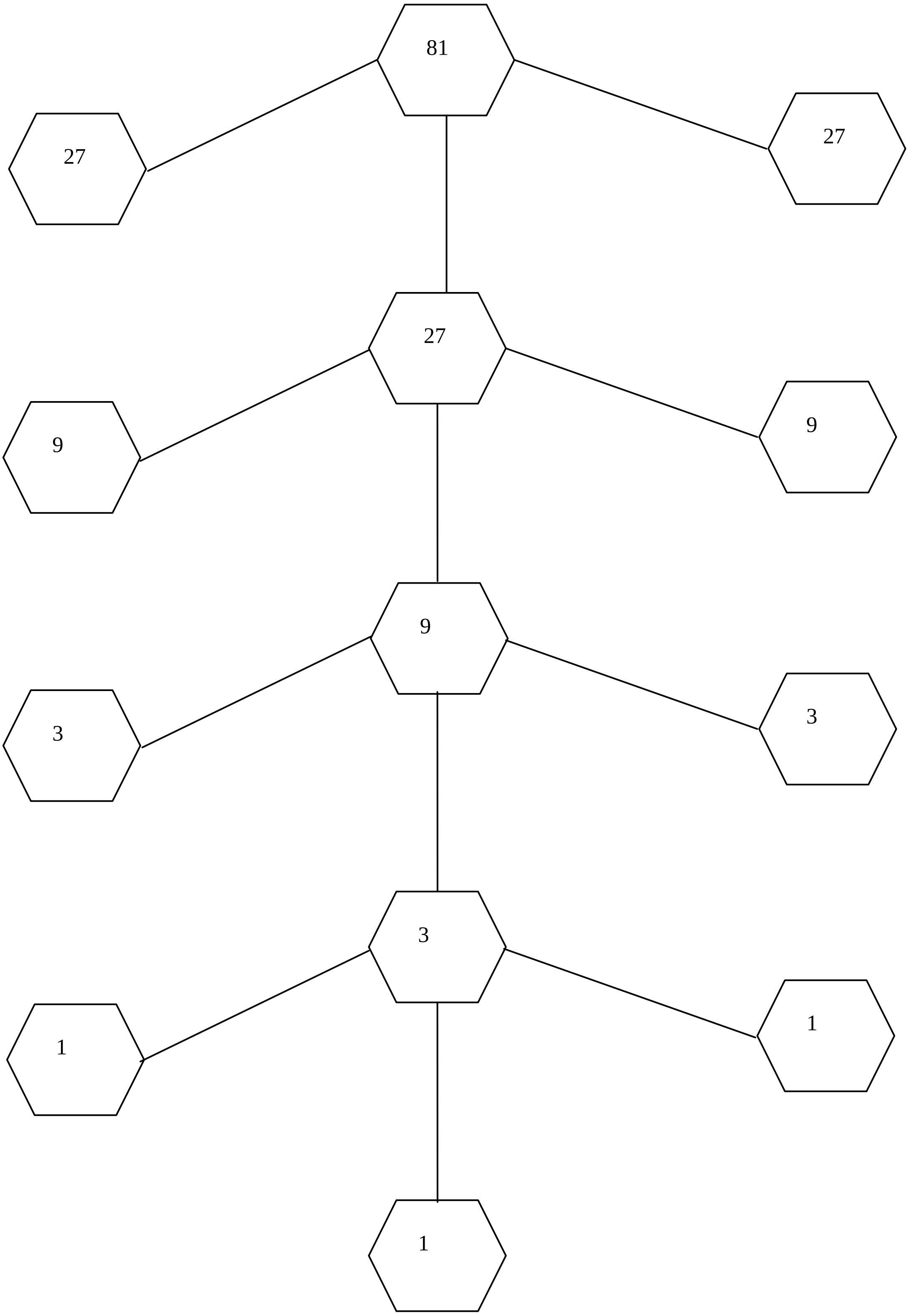
ამოხსნა. მოსწავლეები დარწმუნდებიან, 81 Vონეტის გაყოფა ორ ნაწილად სასურველ შედეგს ვერ იძლევა. ამიტომ მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა შესთავაზოს მონეტების ჯგუფებად დაყოფის სხვა გზის მოძებნა, რისთვისაც სასურველია მასწავლებელმა მოსწავლეებს გაახსენოს თუ რომელ რიცხვებზე იყოფა რიცხვი 81. მოსწავლეები მიხვდებიან, რომ უმჯობესია 81 მონეტის დაყოფა მოხდეს სამ ტოლ ჯგუფად, თითოეულში 27 მონეტა. პირველი აწონვით მსწავლეები დაადგენენ 27 მონეტის შემცველ რომელ ჯგუფშია ყალბი მონეტა. ანალოგიურად, მოსწავლეები მიხვდებიან, რომ 27 მონეტის გაყოფა ორ ნაწილად სასურველ შედეგს ვერ იძლევა, ამიტომ მასწავლებლის ჩარევით ისინი მიდიან დასკვნამდე, რომ უმჯობესია 27 მონეტა გაიყოს სამ ჯგუფად: 9, 9 და 9.

ამის შემდეგ რაც დადგინდა ამოხსნის სტრატეგია, მოსწავლეებისათვის სირთულეს აღარ წარმოადგენს ამოცანის ამოხსნა. კერძოდ, ისინი მეორე აწონვით ადგენენ 9 მონეტის შემცველ რომელ ჯგუფშია ყალბი მონეტა.

შემდეგ 9 მონეტისაგან შედგენილ ჯგუფს ისევ ყოფენ 3 ჯგუფად: 3, 3 და 3. მესამე აწონვით ადგენენ სამი მონეტისაგან შედგენილ რომელ ჯგუფშია ყალბი მონეტა.

რის შემდეგაც ყალბი მონეტის შემცველი სამი მონეტისაგან შედგენილი ჯგუფის დანაწილება ხდება თითო მონეტებად და მეოთხე აწონვით დადგინდება რომელია ყალბი მონეტა.

ამის შემდეგ მიზანშეწონილია საშინაო დავალებად მივცეთ ანალოგიური შინაარსის ამოცანები. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ რამდენიმე მათგანი:



ამოცანა 2. მოცემული გვაქვს სამი ჭურჭელი-8 ლიტრიანი, 5 ლიტრიანი და 3 ლიტრიანი. 8 ლიტრიანი ჭურჭელი ავსებულია ზეთით, დანარჩენი ორი ჭურჭელი ცარიელია. როგორ გავცეთ ამ ჭურჭლების საშუალებით 4 ლიტრი ზეთი? სითხის გადასხმის რა უმცირესი რიცხვია ამისათვის საჭირო?

ამოცანა 3. მოცემული გვაქვს რვეულების სამი დასტა. პირველ დასტაში 11 რვეულია, მეორეში - 7 რვეული, მესამეში - 6 რვეული. საჭიროა თითოეულ დასტაში რვეულების რაოდენობა გათანაბრდეს გადაწყობის გზით. ნებადართულია ერთი დასტიდან მეორეში იმდენი რვეულის გადაწყობა, რამდენიც მეორეშია (მიმღებშია). გადაწყობის რა უმცირესი რაოდენობაა საჭირო?

ამოცანა 4. თორმეტლიტრიანი ჭურჭელი სავსეა რძით. საჭიროა რძე გაიყოს ორ თანაბარ ნაწილად, რისთვისაც შესაძლებელია გამოვიყენოთ მხოლოდ რვალიტრიანი და ხუთლიტრიანი ჭურჭლები. როგორ გავაკეთოთ ეს? სითხის გადასხმის რა უმცირესი რაოდენობაა საჭირო?

გრაფების გამოყენებისას მოსწავლეებს შეიძლება გავაცნოთ თუ რა არის გრაფის წვერო, წიბო, იზოლირებული შვერო და სრული გრაფი.

ალბათური შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის დროს ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს ამოხსნის სამივე ეტაპის განხილვას. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, რომ მასწავლებელმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიაქციოს მესამე ეტაპს, რადაგან ამ ეტაპის განხილვისას მოსწავლეები ნათლად ხედავენ ამოცანის ამოხსნის პრაქტიკულ ღირებულებას, ადგენენ ამოცანაში საპოვნი სიდიდის იმ ოპტიმალურ მნიშვნელობებს, რომელიც სინამდვილეს შეეფერება და ხელსაყრელია.

§6. ალბათური შინაარსის ამოცანების ჩართვა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის VII-IX კლასების მათემატიკის სისტემატიურ კურსში

6.1. პირდაპირპროპორციულობა. უკუპროპორციულობა. რიცხვის გაყოფა მოცემული შეფარდებით

მათემატიკის პროგრამის შესაბამისად მოსწავლეები სწავლობენ პირდაპირ და უკუპროპორციულ დამოკიდებულებებს. რიცხვის გაყოფას მოცემული შეფარდებით. ამ თემებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა სიმრავლეთა თეორიის და ლოგიკური კავშირების გამოყენება. რომლის დროს აუცილებელია მოსწავლეებს შეექმნათ სწორი წარმოდგენები სიმრავლეთა თანაკვეთის, სიმრავლეთა გაერთიანებისა და სიმრავლეთა გამოკლებას შორის არსებულ ლოგიკურ კავშირებს შორის.

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მასწავლებელმა საკლასო მეცადინეობაზე განიხილოს ასეთი შინაარსის

ამოცანა. ჯგუფი, რომელიც შედგება 25 სტუდენტისაგან თითოეული სწავლობს გერმანულ ან ინგლისურ ენას. სტუდენტების რიცხვი, რომელიც სწავლობენ გერმანულს, ისე შეეფარდებიან სტუდენტების რიცხვს, რომლებიც სწავლობენ ინგლისურს, როგორც $3:5$, მათ შორის გერმანულს სწავლობს 8-ით ნაკლების სტუდენტი, ვიდრე ინგლისურს. რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულ ენას, მხოლოდ ინგლისურ ენას და ორივე ენას.

ამოცანის ამოხსნის დაწყებამდე მოსწავლეებს მასწავლებელმა უნდა შეახსენოს ლოგიკური კავშირის „ან"-ის სიმბოლური ჩაწერა ($\vee$) და აგრეთვე მისი მნიშვნელობა, რომ ის ნიშნავს ერთს ან მეორეს, ან ორივეს. აგრეთვე უნდა განუმარტოს მნიშვნელობა სიტყვისა „მხოლოდ". ამის შემდეგ დაიწყოს ამოცანის ამოხსნა. ამოხსნის პროცესი მიზანშეწონილია წარიმართოს შემდეგნაირად:

მასწავლებელი: შემოვიღოთ აღნიშვნები: a-თი აღვნიშნოთ ის სტუდენტები, რომლებიც სწავლობენ მხოლოდ გერმანულ ენას, ხოლო A-თი სიმრავლე იმ სტუდენტებისა, რომლებიც სწავლობენ გერმანულ ენას, ცხადია, რომ $a \in A$. b-თი აღვნიშნოთ იმ სტუდენტების რიცხვი, რომლებიც სწავლობენ მხოლოდ ინგლისურს, ხოლო B-თი სიმრავლე იმ სტუდენტებისა, რომლებიც სწალობენ ინგლისურ ენას, ცხადია, რომ $b \in B$. C-თი სიმრავლე იმ სტუდენტებისა, რომლებიც სწავლობენ ორთავე ენას. ამოცანის პირობით, როგორ რიცხობრივ დამოკიდებულებაში არიან A და B რიცხვები?

მოსწავლე: ამოცანის პირობის ძალით A და B რიცხვები პროპორციულია რიცხვების 3-ისა და 5-ის.

მასწავლებელი: როგორ შეგვიძლია დავწეროთ ეს თანაფარდობა?

მოსწავლე: ეს თანაფარდობა შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5}.$$

მასწავლებელი: რა ეწოდება ჩაწერილ ტოლობას?

მოსწავლე: ამ ტოლობას პროპორცია ეწოდება.

მასწავლებელი: რა ასოთი აღვნიშნავთ პროპორციულობის კოეფიციენტს?

მოსწავლე: პროპორციულობის კოეფიციენტს აღვნიშნავთ k-ასოთი. (მოსწავლეები ჩაწერენ: $\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = k.$)

მასწავლებელი: რა დამოკიდებულებები შეგვიძლია დავწეროთ ამ ტოლობებიდან?

მოსწავლე: $A = 3k$ და $B = 5k$.

მასწავლებელი: ამოცანის პირობით გარდა განხილულისა, კიდევ რა დამოკიდებულებაა A და B რიცხვებს შორის?

მოსწავლე: B ანუ იგივე $5k$ - 8-ით მეტია A-ზე ანუ იგივე $3k$-ზე.

მასწავლებელი: როგორ შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლების სახით ეს დამოკიდებულება?

მოსწავლე: $5k - 3k = 8; \quad 2k = 8; \quad k = 4.$

ამის შემდეგ მოსწავლეები მარტივად დაადგენენ, რომ $A=12;$ $B=20.$ ე.ი. გერმანულ ენას სწავლობს 12 სტუდენტი, ინგლისურ ენას 20 სტუდენტი.

მასწავლებელი: როგორ გავიგოთ რამდენი სტუდენტი სწავლობს ორთავე ენას, ინგლისურს და გერმანულს?

მოსწავლე: 12-ისა და 20-ის ჯამს უნდა გამოვაკლოთ სტუდენტთა რაოდენობა ჯგუფში, ე.ი. 25.

$$12+20-25=7.$$

მასწავლებელი: რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულ ენას?

მოსწავლე: მარტო გერმანულს სწავლობს $12-7=5$ სტუდენტი.

მასწავლებელი: რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ინგლისურ ენას?

მოსწავლე: მარტო ინგლისურს სწავლობს $20-7=13$ სტუდენტი.

მასწავლებელი: რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულს?

მოსწავლე: ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულ ენას, ხასიათდება წილადით

$$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.$$

მასწავლებელი: რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს გერმანულს?

მოსწავლე: ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს გერმანულ ენას, ხასიათდება წილადით

$$\frac{12}{25}.$$

ანალოგიური კითხვებით მოსწავლეები დააგენენ რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ ინგლისურ ენას, ინგლისურ ენას ან ორივე ენას.

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს მოსწავლეებმა ფაქტიურად მოახდენენ სიმრავლეებზე შემდეგ მოქმედებებს: გაერთიანება, თანაკვეთა და გამოკლება, აგრეთვე გამოიყენებენ ლოგიკურ კავშირებს „ან“ და „მხოლოდ“. ეს კი ხელს უწყობს მოსწავლეთა ლოგიკური აზროვნების განვითარებას.

6.2. იგივეობა. იგივურად ტოლი გამოსახულებები

სანამ მასწავლებელი მოსწავლეებს მიაწოდებს ამ თემის შესახებ შესაბამის თეორიულ მასალას, მეთოდური თვალსაზრისით უმჯობესია კლასში განხილულ იქნას ასეთი

ამოცანა. ვთქვათ, $\{1, 2, 3\}$ არის x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $\{0, 2\}$ - y ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე. შეადგინეთ ყველა (x, y) წყვილი და შეადარეთ შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობები $x+y$ და $x \cdot y$

მასწავლებელი: რამდენი (x, y) სახის წყვილის შედგენა შეიძლება სულ ამ ორი სიმრავლისაგან?

მოსწავლე: რადგან პირველი სიმრავლე შეიცავს 3 ელემენტს, ხოლო მეორე სიმრავლე შეიცავს 2 ელემენტს, ამიტომ (x, y) წყვილთა რაოდენობა იქნება $3 \cdot 2 = 6.$

მასწავლებელი: როგორ შეგვძლია მივიღოთ ყველა წყვილი?

მოსწავლე: ეს წყვილები რომ მივიღოთ საჭიროა პირველი სიმრავლის ყოველ ელემენტს მივუწეროთ მეორე სიმრავლის ყველა ელემენტი ცალ-ცალკე.

მასწავლებელი: დაწერეთ ყველა წყვილი.

მოსწავლე: ყველა შესაძლო წყვილი იქნება:

$$(0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,0), (2,2).$$

მასწავლებელი: დაასახელეთ ის წყვილები, რომელთა მნიშვნელობებზე ტოლია $x+y$ და $x \cdot y$ გამოსახულებები.

მოსწავლე: ასეთი წყვილებია $(0,0)$ და $(2,2)$. რადაგან

$$0+0=0,\ 0 \cdot 0 = 0,\ 2+2=4,\ 2 \cdot 2 = 4.$$

მასწავლებელი: რამდენი შემთხვევა უწყობს ხელს შედეგს, ექვსი წყვილიდან ალალბედზე შერჩეული წყვილი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას

მოსწავლე: ასეთ შედეგს ხელს უწყობს ორი შემთხვევა.

მასწავლებელი: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული წყვილი დააკმაყოფილებს ამოცანის პირობას?

მოსწავლე: მახასიათებელი შეფარდება უდრის $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

ასეთი შინაარსის ამოცანების განხილვა ხელს უწყობს მოსწავლეებში ცოდნის განმტკიცებას იგივურ გამოსახულებეზე და მათ რიცხვით მნიშვნელობების მოძებნაზე.

საშინაო დავალების სახით მოსწავლეებს შეიძლება მივცეთ შემდეგი სავარჯიშო:

ვთქვათ, $\{5,7,8\}$ არის x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $\{0,2\}$- y ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე. რამდენი (x,y) სახის წყვილის შედგენა შეიძლება სულ და რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეულ წყვილში $x+y$ ჯამი იქნება მუდმივი.

6.3. ასახვა. ფუნქცია

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის კურსში VII კლასიდან განიხილება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნება-ფუნქცია. დაწყებით კლასებში მოსწავლეებს ეძლევათ პირველ დაწყებითი წარმოდგენები ფუნქციაზე, ხოლო სკოლის შემდგომ საფეხურებზე ხდება ფუნქციის სრულყოფილად შესწავლა.

ტრადიციულად, ფუნქციის ცნების შემოღებას წინ უსწრებს ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობის დადგენა. ორ სიმრავლეს შორის შესაბამისობის დადგენა ხდება წყვილების დახმარებით, ზოგჯერ საჭიროა ასეთი წყვილების რაოდენობის დადგენა, რაც მოსწავლეებისათვის დაწყებითი კლასებიდან უკვე ცნობილია. ჩვენ მოგვიხდება მხოლოდ მისი შეხსენება.

ფუნქციის ცნების სწავლების დროს მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია მასწავლებელმა ყურადღება მიაქციოს ორ მომენტს:

1. X სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის Y სიმრავლიდან არსებობს შესაბამისი ელემენტი.

2. ასეთი შესაბამისი ელემენტი ერთადერთია.

თუ X და Y სიმრავლეები აკმაყოფილებენ ამ ორ პირობას, მაშინ ვამბობთ, რომ X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობა არის ფუნქცია. მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და ფუნქციის მნიშვნელობათა არე და ერთი სიმრავლის ასახვა მეორე სიმრავლეზე.

A სიმრავლის ასახვა B სიმრავლეზე ეწოდება ისეთ შესაბამისობას, როცა A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლიდან ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი. აქედან გამომდინარე ფუნქცია შეგვიძლია ფუნქცია ასე განვსაზღვროთ:

ფუნქცია არის ერთი სიმრავლის ასახვა მეორე სიმრავლეზე.

ყველა შესაძლო ასახვათა რიცხვის დადგენაზე მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მასწავლებელმა საგაკვეთილო პროცესში ამოხსნას ასეთი შინაარსის

ამოცანა. მოცემულია სიმრავლეები $A=\{5,7\}$ და $B=\{50,340,14\}$. B სიმრავლე ასახეთ A სიმრავლეზე, რამდენი ხერხით შეიძლება B სიმრავლის ასახვა A სიმრავლეზე?

ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია მასწავლებელმა მოსწავლეებს წესი, რომელიც საშუალებას იძლევა დავადგინოთ დალაგებულ წყვილთა რაოდენობა ორი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის საშუალებით. მეცნიერულად მიუღებელია ყველა შესაძლო ასახვათა რაოდენობის დადგენა მოხდეს მხოლოდ წყვილთა რაოდენობის დადგენით. (რადგან თუ ჩვენ ადგილებს შევუცვლით A და B სიმრავლეეებს და მოსწავლეებს მოვთხოვთ A სიმრავლე ასახონ B სიმრავლეზე და დაადგინონ რამდენი ხერხით შეიძლება A სიმრავლის ასახვა B სიმრავლეზე. აღმოჩნდება, რომ ასეთი ასახვათა რაოდენობა არ ემთხვევა B სიმრავლის A სიმრავლეზე ასახვათა რაოდენობას, ხოლო წყვილთა რაოდენობა კი არ შეიცვლება. რადაგან A სიმრავლის B სიმრავლეზე ასახვათა რაოდენობა ამ კონკრეტულ შემთხვევაში არის 6,

1. (5,50), (7,340).
2. (5,50), (7,14).
3. (5,340), (7,50).
4. (5,340), (7,14).
5. (5,14), (7,340).
6. (5,14), (7,50).

ხოლო როგორც ქვემოთ ვნახავთ B სიმრავლის A სიმრავლეზე ასახვათა რაოდენობა კი 8.)

ამიტომ მიზანშეწონელია მასწავლებლის მიერ ამოცანის ამოხსნის პროცესის შემდეგნაირად წარმართვა.

მასწავლებელი: რამდენ ელემენტს შეიცავს A სიმრავლე?

მოსწავლე: A სიმრავლე შეიცავს ორ ელემენტს.

მასწავლებელი: რამდენ ელემენტს შეიცავს B სიმრავლე?

მოსწავლე: A სიმრავლე შეიცავს სამ ელემენტს.

მასწავლებელი: რამდენი წყვილის შედგენა შეიძლება ამ ორი სიმრავლის ელემენტებისაგან?

მოსწავლე: ამ ორი სიმრავლის ელემენტებისაგან შეიძლება შევადგინოთ $3 \cdot 2 = 6$ სხვადასხვა წყვილი.

მასწავლებელი: დაწერეთ ეს წყვილები.

მოსწავლე: ეს წყვილებია: $(50,5),(50,7),(340,5),(340,7),(14,5),(14,7)$.

ამის შემდეგ მასწავლებელი მოსწავლეებს უხსნის, როგორ უნდა აარჩიონ დაწერილი დალაგებული წყვილებიდან თითოეული ასხვისათვის საჭირო სამეულები. კერძოდ, არჩევა უნდა მოხდეს ასე: სამეულებში პირველი ელემენტები იქნება B სიმრავლიდან ყველა ელემენტი, ხოლო A სიმრავლის ელემენტები შეიძლება განმეორდნენ.

ამ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვექნება საკმაოდ შრომატევად სამუშაოსთან, კერძოდ, B და A სიმრავლეების დალაგებული წყვილებისაგან უნდა შევადგინოთ შემდეგი სამეულები:

1. $(50,5),(340,5),(14,7)$.
2. $(50,5),(340,7),(14,5)$.
3. $(50,5),(340,7),(14,7)$.
4. $(50,7),(340,5),(14,5)$.
5. $(50,7),(340,7),(14,5)$.
6. $(50,7),(340,5),(14,7)$.
7. $(50,5),(340,5),(14,5)$.
8. $(50,7),(340,7),(14,7)$.

მასწავლებელი: რამდენი ხერხით შეიძლება B სიმრავლის ასახვა A სიმრავლეზე?

მოსწავლე: B სიმრავლის ასახვა A სიმრავლეზე შეიძლება 8 სხვადასხვა ხერხით.

მართალია, ყველა შესაძლო ასახვათა მოძებნა რთულია და ბევრ დროს მოითხოვს, მაგრამ დაცულია სწავლებაში მეცნიერულობის პრინციპი, რაც ძალზედ მნიშვნელოვანია მათემატიკის სწავლებისათვის.

ფუნქციის ცნების შემოტანასთან დაკავშირებულ სავარჯიშოებში არის ისეთები, რომლებიც ორი სიმრავლისაგან შედგენილ წყვილებში ელემენტებმა უნდა დააკმაყოფილოს გარკვეული პირობები. ასეთი ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა ყველა წყვილის რაოდენობის დადგენა და შემდეგ იქიდან ისეთი წყვილების შედგენა, რომლებიც დააკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

ასეთი შინაარსის ამოცანების განხილვა მიზანშეწონილია საკლასო მეცადინეობაზე. ხოლო დავალების სახით მოსწავლეებს უნდა მიეცეთ ანალოგიურ ამოცანები.

ამოცანა. მოცემულია ორი სიმრავლე $A=\{1;\,2\}$ და $B=\{2;\,4;\,5\}$. ვთქვათ, $a\in A$ და $b\in B$. ასახეთ B სიმრავლე A სიმრავლეზე (b,a) წყვილების საშუალებით და გამოყავით ის წყვილები, რომ თითოეულ წყვილში:

ა) შეფარდება $\frac{b}{a}$ იყოს ერთი და იგივე რიცხვი;

ბ) ნამრავლი $a\cdot b$ იყოს ერთი და იგივე რიცხვი.

ამ ამოცანის ამოხსნის დროს მოსწავლეები დაადგენენ, რომ წყვილთა რაოდენობა სულ იქნება $3\cdot 2=6$.

დაწერენ ამ წყვილებს და შეარჩევენ თითოეული ასხვისათვის საჭირო სამეულებს. გარკვეული წესის მიხედვით, კერძოდ, შერჩევა უნდა მოხდეს ასე: სამეულებში პირველი ელემენტები იქნება B სიმრავლიდან ყველა ელემენტი, ხოლო A სიმრავლის ელემენტები შეიძლება განმეორდნენ.

ამის შემდეგ მოსწავლეები გამოყოფილი 6 წყვილიდან შეარჩევენ იმ წყვილებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობებს.

მომდევნო საკლასო მეცადინეობაზე მასწავლებელი საშინაო დავალების ანალიზის შემდეგ მოსწავლეებს დაუსვამს შეკითხვებს ამოცანის ირგვლით:

მასწავლებელი: იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეულ წყვილში შეფარდება $\frac{b}{a}$ იქნება ერთი და იგივე რიცხვის ტოლი?

მასწავლებელი: იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეულ წყვილში შეფარდება $a \cdot b$ იქნება ერთი და იგივე რიცხვის ტოლი?

ასეთი შინაარსის ამოცანების ამოხსნა ხელს უწყობს ფუნქციის ცნების უკეთ და გააზრებულ შესწავლას.

6.4. ერთწევრი და მრავალწევრი. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად

თემის „ერთწევრები“ გავლის დროს მოსწავლეები ეცნობიან სტანდარტული სახის ერთწევრებს, ერთწევრის ხარისხს და ნულოვან ხარისხს. ერთწევრებთან დაკავშირებული ამოცანების განხილვის დროს შეგვიძლია, მაგალითების ამოხსნა დავაკავშიროთ ჯერ კომბინატორიკასთან, ხოლო შემდეგ ალბათობის გამოთვლასთან.

ამოცანა. შეადგინეთ ყველა სტანდარტული სახის ერთწევრები კოეფიციენტით 3 და ცვლადები x და y ისე, რომ თითოეული ერთწევრის ხარისხი იყოს 6-ის ტოლი.

ამ ამოცანაში მოსწავლეებმა სიმრავლიდან $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ უნდა გამოყონ ორელემენტიანი ქვესიმრავლეები, რომელშიც ელემენტების ჯამი იქნება ექვსის ტოლი.

ასეთებია: $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$.

ყველა ეს წყვილები იქნება ერთწევრში ხარისხის მაჩვენებლები შესაბამისად x-ის და y-ის.

ყველა ასეთი სახის სტანდარტული ერთწევრები იქნება:

$$3x^5y, \quad 3x^4y^2, \quad 3x^3y^3, \quad 3x^2y^4, \quad 3xy^5.$$

სულ გვექნება 5 შემთხვევა.

კომბინატორული ხასიათის ამოცანების განხილვისას მოსწავლეებს მოეთხოვებათ, გვიჩვენონ ყველა შესაძლო შემთხვევა და გამოიანგარიშონ მათი რიცხვი და ამ რაოდენობებიდან გამოყონ ისეთები, რომლებსაც შეუძლიათ მიგვიყვანონ ამოცანის ამოხსნამდე, ე.ი. აკმაყოფილებენ რაღაც დამატებით მოთხოვნებს, რომლებიც ამოცანის პირობაშია მოცემული, დათვალონ ამოცანის ამოხსნისათვის მისაღები შემთხვევების რაოდენობა. მასწავლებელმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გაამახვილოს იმაზე, რომ რაც შეიძლება მარტივი გზებით, მეთოდურად დასაბუთებული ხერხით (ხერხებით) მოხდეს ამოცანის ამოხსნა, რაც გამოიწვევს სასწავლო დროის ეკონომიას, რომელიც მოხმარდება მათემატიკის შესწავლებისათვის სხვა არანაკლებ მნიშვნელოვან საკითხებს.

მეშვიდე კლასში მოსწავლეები ეცნობიან მრავალწევრს, მის სტანდარტულ სახეს და დაშლას მამრავლებად დაჯგუფების ხერხის გამოყენებით.

მრავალწევრის დაჯგუფების ხერხით დაშლის დროს საჭიროა მრავალწევრიდან გამოვყოთ გამოსახულებთა სიმრავლეები, რომლებიც შეიძლება შეიცავდეს ორ წევრს, სამ წევრს და ა.შ.

ამ დროს მოსწავლეებმა უნდა მოიფიქრონ გამოსახულებათა სიმრავლეების ისეთი სახით გამოყოფა, რომ რაც შეიძლება რაციონალური გზით მოხდეს დაშლა. წევრების დაჯგუფება შეიძლება მოხდეს სხვადასხვა გზით, რომელთაგან ზოგი ხელსაყრელია, ზოგი კი არა.

განვიხილოთ ასეთი

მაგალითი. დაშალეთ $a^2 - ab - 8a + 8b$ მრავალწევრი ორი წევრის ნამრავლის სახით და დაადგინეთ რამდენნაირად შეიძლება დავაჯგუფოთ მოცემული მრაალწევრი ერთწევრებად.

მასწავლებელი: რამდენ წევრს შეიცავს მრავალწევრი?

მოსწავლე: მრავალწევრი შეიცავს ოთხ წევრს.

მასწავლებელი: რამდენი წევრისაგან შედგენილი ქვესიმრავლე უნდა გამოვყოთ პირობის თანახმად?

მოსწავლე: პირობის თანახმად უნდა გამოვყოთ ჯგუფები, რომლებიც შეიცავს ორ წევრს.

მასწავლებელი: მამარავლის ფხჩხილებს გარეთ გამოტანის დროს აქვს თუ არა მნიშვნელობა წევრების დალაგებას?

მოსწავლე: მამარავლის ფრჩხილებს გარეთ გამოტანის დროს წევრების დალაგებას მნიშვნელობა არა აქვს.

მასწავლებელი: როგორი ორ ელემენტიანი ქვესიმრავლეების გამოყოფაა საჭირო ოთხი ელემენტისაგან?

მოსწავლე: საჭიროა ოთხი ელემენტისაგან გამოვყოთ ორ ელემენტიანი ქვესიმრავლეები, სადაც ელემენტების დალაგებას მნიშვნელობა არა აქვს.

მასწავლებელი: რამდენი ორი წევრისაგან შედგენილი ქვესიმრავლის გამოყოფა შეიძლება მოცემული მრავალწევრიდან?

მოსწავლე: მოცემული სიმრავლიდან შეიძლება გამოვყოთ $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ ორი წევრისაგან შედგენილი ქვესიმრავლე.

ამის შემდეგ მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა ჩამოაწერინოს ყველა შესაძლო შემთხვევა, რათა შეამოწმონ რომელი შემთხვევა არის ხელსაყრელი და რომელი არა.

1) $(a^2 - ab) - (8a - 8b) = (a - b)(a - 8)$;

2) $(a^2 - 8a) - (ab - 8b) = (a - b)(a - 8)$;

3) $(a^2 + 8b) - (ab + 8a)$;

4) $(-ab - 8a) + (a^2 + 8b)$;

5) $(-ab + 8b) + (a^2 - 8a) = (a - 8)(a - b)$;

6) $(-8a + 8b) + (a^2 - ab) = (a - b)(a - 8)$;

მასწავლებელი: რამდენი შემთხვევა არის ხელსაყრელი და რომელი?

მოსწავლე: ხელსაყრელია ოთხი შემთხვევა 1), 2), 4) და 5).

მასწავლებელი: იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ 6 შემთხვევიდან ალალბედზე შერჩეული ერთი შემთხვევა იქნება ა) ხელსაყრელი; ბ) არახელსაყრელი

მოსწავლე: ალბათობა ტოლი იქნება:

$$\text{ა) } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ ბ) } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

ასეთი შინაარსის მაგალითების ამ სახით განხილვა ხელს უწყობს მოსწავლეების აზროვნებაის განვითარებას კომბინატორული და ალბათური მიმართულებით, ანვითარებს მოსწავლეებში მოსაზრებულობისა და მიხვედრილობის ჩვევებს, რასაც დიდი მნიშვნელობა აქვს ამოცანების ამოხსნის დროს.

საშინაო დავალებად შეიძლება მოსწავლეებს მივცეთ ასეთი სახის დავალება:

ამოცანა. დაშალეთ ორი წევრის ნამრავლის სახით მრავალწევრი

$$a^2n - anx + x^2 - ax$$

ა) რამდენნაირად შეიძლება ამ მრავალწევრის დაჯგუფება ორ-ორ წევრად?

ბ) რამდენი შემთხვევაა ხელსაყრელი და რამდენი არა?

გ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული დაჯგუფება იქნება ხელსაყრელი?

6. 5. განტოლებები, უტოლობები და მათი სისტემების ამოხსნა

განტოლებათა ამოხსნის სწავლება შესაძლებელია დავუკავშიროთ ალბათობის გამოთვლას, რისთვისაც მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ამოცანის პირობის შეცვლა და მისთვის ალბათური შინაარსის მიცემა. განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა. x არის $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ სიმრავლის ელემენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული რიცხვი იქნება შემდეგი განტოლების ფესვი

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

ამ საკითხის გადაწყვეტას აქ არ შევუდგებით მისი სიმარტივის გამო, მაგრამ აღვნიშნავთ, რომ ასეთი ამოცანები მოსწავლეების დაინტერესებას იწვევს და ისინი ხალისით ხსნიან მათ.

ანალოგიურად, შეიძლება დავუკავშიროთ ალბათობის გამოთვლა უტოლობების ამოხსნასაც. რისთვისაც ნიმუშის სახით მოვიყვანოთ ასეთი

ამოცანა. მოცემულია სიმრავლე $\{2, 3, 4, 6\}$, რომლის ელემენტები მონაკვეთებს გამოსახავს. რამდენი სხვადასხვა საშუალებით შეიძლება ამ მონაკვეთებისაგან

სამკუთხედის აგება?. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოყოფილი სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის აგება?.

მოსწავლეებს შესაძლოა ეს ამოცანა გეომეტრიული შინაარსის მოეჩვენოთ, მაგრამ მას შემდეგ, რაც მასწავლებელი მიცემს ახსნას, რომ სამკუთხედის აგებისათვის საჭიროა შესრულდეს სამკუთხედის უტოლობა, ამოცანის ამოხსნის სირთულე უკანა პლანზე გადაიწევს და მოსწავლეები მარტივად ხსნიან მას.

მასწავლებელი: რამდენი დალაგებული სამეული შეიძლება გამოვყოთ მოცემული $\{2, 3, 4, 6\}$ სიმრავლიდან?

მოსწავლე: მოცემული $\{2, 3, 4, 6\}$ სიმრავლიდან შეიძლება გამოვყოთ შემდეგი სამეულები:

$$\{2, 3, 4\},\ \{2, 3, 6\},\ \{3, 4, 6\},\ \{2, 4, 6\}.$$

მასწავლებელი: გამოყოფილი სამეულებიდან რომელი სამეულები განსაზღვრავს სამკუთხედს?

მოსწავლე: სამკუთხედს განსაზღვრავს სამეულები:

$$\{2, 3, 4\},\ \{3, 4, 6\}.$$

მასწავლებელი: რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოყოფილი სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის აგება?.

მოსწავლე: საძიებელი ალბათობა ტოლია $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

ორუცნობიან განტოლებებათა სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია მარტივად დავუკავშიროთ ალბათობის გამოთვლას, თუ მოვახდენთ ამოცანის პირობისათვის ალბათური შინაარსის დამატებას. მაგალითისათვის განვიხილოთ ასეთი

ამოცანა: ვთქვათ, x ცვლადი მნიშვნელობებს ღებულობს სიმრავლიდან $A = \{-1, 0, 2, 5\}$, ხოლო y ცვლადი კი - $B = \{0, 1, 3\}$. შეადგინეთ ყველა შესაძლო დალაგებული $(x, y)\ x \in A,\ y \in B$ წყვილები და იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წყვილი არის

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი.

მასწავლებელი: რამდენ ელემენტს შეიცავს A სიმრავლე?

მოსწავლე: პირველი სიმრავლე შეიცავს 4 ელემენტს.

მასწავლებელი: რამდენ ელემენტს შეიცავს B სიმრავლე?

მოსწავლე: მეორე სიმრავლე შეიცავს 3 ელემენტს.

მასწავლებელი: რამდენი დალაგებული $(x,y)\, x\in A,\, y\in B$ წყვილი მიიღება ამ სიმრავლეებიდან?

მოსწავლე: ამ სიმრავლეებიდან მიიღება $4\cdot 3=12$ დალაგებული წყვილი:

$$(-1{,}0),\ (-1{,}1),\ (-1{,}3),\ (0{,}0),\ (0{,}1),\ (0{,}3),\ (2{,}0),\ (2{,}1),\ (2{,}3),\ (5{,}0),\ (5{,}1) \text{ და } (5{,}3).$$

მასწავლებელი: მიღებული დალაგებული წყვილებიდან გვაქვს თუ არა ისეთი, რომელიც მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს?

მოსწავლე: დიახ, ასეთი წყვილია $(2{,}1)$.

მასწავლებელი: რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წყვილი არის მოცემული სისტემის ამონახსნი?

მოსწავლე: საძიებელი ალბათობა ტოლია $\frac{1}{12}$-ის.

მასწავლებელს თავისი შეხედულების მიხედვით შეუძლია შეარჩიოს ისეთი წყვილებიც, რომლებიც მოცემულ სისტემას არ აკმაყოფილებენ, ამ შემთხვევაში საქმე გვექნება შეუძლებელ შედეგთან და მისი ალბათობა იქნება 0-ის ტოლი. ასევე, შესაძლებელია ისეთი სისტემის განხილვა, რომელსაც უამრავი ამოონახსენი აქვს და ისეთი წყვილების მიცემა, რომელთაგან ყველა წყვილი იქნება სისტემის ამონახსნი. ამ შემთხვევაში საქმე გვექნება აუცილებელ შედეგთან. სწავლების ასეთი ფორმით წარმართვა დამატებითი საათების გამოყოფას არ მოითხოვს და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების თვალსაზრისით მეტად ეფექტურია.

ორუცნობიან განტოლებათა და განტოლებათა სისტემების შესწავლის დროს მოსწავლეები ადგენენ, რომ სისტემის ამოხსნა არის დალაგებული წყვილი. მათემატიკის მერვე და მეცხრე კლასების სახელმძღვანელოებში არის ისეთი სავარჯიშოები, სადაც საჭიროა მოსწავლეებმა ორი რიცხვითი სიმრავლიდან ამოარჩიონ ისეთი წყვილი რიცხვები, რომლებიც იქნებიან რომელიმე მითითებული განტოლების ფესვები.

განვიხილოთ ასეთი სავარჯიშო.

ცხრილში მოცემულია x და y ცვლადების მნიშვნელობები:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	3	4	5	6	-5	-6	-5	4	-3	0

რომელი წყვილები არის მოცემული განტოლების ფესვები

ა) $x^2 + y^2 = 25$

ბ) $y^2 - x^2 = 21$.

მასწავლებელი: რამდენი (x, y) წყვილი არის სულ ცხრილში?

მოსწავლე: სულ ცხრილში არის 11 წყვილი.

მასწავლებელი: რომელი რიცხვითი წყვილები არის პირველი განტოლების ამონახსნები?

მოსწავლე: პირველი განტოლების ამონახსნებია წყვილები:

$$(-5, 0), (-4, 3), (-3, 4), (0, -5), (3, 4), (4, 3), (5, 0).$$

მასწავლებელი: რამდენი წყვილია მეორე განტოლების ამონახსნები?

მოსწავლე: მეორე განტოლების ამონახსენია ორი წყვილი:

$$(5,-2) \text{ და } (-5,2).$$

მასწავლებელი: იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული წყვილებიდან ალალბედზე შერჩეული წყვილი იქნება ა) განტოლების ამონახსნი; ბ) განტოლების ამონახსნი.

მოსწავლეები მარტივად დაადგენენ, რომ პირველ შემთხვევაში ალბათობა ტოლია $\frac{7}{11}$-ის, ხოლო მეორე შემთხვევაში $\frac{2}{11}$-ის.

მასწავლებლის მიერ გაკვეთილზე განხილულ იქნას ასეთი შინაარსის მქონე ამოცანები:

ამოცანა 1. $\{2, 3, 5\}$ სიმრავლის ელემენტი არის თუ არა $3x + 5 = 14$ განტოლების ამონახსნი?

ამოცანა 2. $\{25, 27, 28, 29, 30\}$ სიმრავლის რომელი ელემენტებია შემდეგი უტოლობის ამონახსნი?

$$20 < x \le 29.$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული რიცხვი იქნება მოცემული უტოლობის ამონახსნი.

ამოცანა 3. იპოვეთ $x+y=9$ განტოლების ყველა ნატურალური ამონახსნი.

ამოცანა 4. განვიხლოთ პირველი ხარისხის ერთუცნობიანი $ax=b$ განტოლება. ვთქვათ a და b აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $a\in[0,3]$ და $b\in[0,5]$, ამასთანავე $a\in N$ და $b\in N$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილი მნიშვნელობისათვის $ax=b$ განტოლების ფესვი იქნება 1-ზე მეტი.

ამოცანა 5. მოცემულია განტოლება $ax=b$, სადაც $a\in\{2,4,5\}$ და $b\in\{4,5,6\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილი მნიშვნელობისათვის $ax=b$ განტოლების ფესვი იქნება არაუმეტეს 1-ისა?

ამოცანა 6. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული განტოლება

$$ax^2+bx+c=0$$

სადაც $a\in\{2,3\}$ და $b\in\{3,4,5\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილისთვის მოცემულ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატულ განტოლებას ექნება ნამდვილი ფესვები.

ამოცანა 7. მოცემულია განტოლება $ax^2+bx+c=0$, სადაც a და b ნატურალური რიცხვებია და აკმაყოფილებენ პირობებს $a\in[1,2]$ და $b\in[2,3]$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილისთვის მოცემულ განტოლებას ექნება ნამდვილი ფესვები.

ამოცანა 8. x არის $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ სიმრავლის ელემენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული რიცხვი იქნება შემდეგი განტოლების ფესვი

$$x^2-5x+6=0.$$

ამოცანა 9. მოცემულია სიმრავლე $\{4,5,7,12\}$, რომლის ელემენტები მონაკვეთებს გამოსახავს. რამდენი სხვადასხვა საშუალებით შეიძლება ამ მონაკვეთებისაგან სამკუთხედის აგება?. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ალალბედზე გამოყოფილი სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის აგება?.

წილადის განსაზღვრის არის მოძებნასთან დაკავშირებით, მოსწავლეებს შეიძლება მივცეთ ასეთი შინაარსის მქონე ამოცანები.

ამოცანა 1. ვთქვათ მოცემულია წილადი $\frac{x+6}{(x-1)(x-4)}$. მოძებნეთ x-ის ის მნიშვნელობები, რომელზედაც მოცემული წილადი კარგავს აზრს. თუ $x=\{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სიმრავლიდან ალალბედზე შერჩეული x-ის მნიშვნელობისათვის მოცემული წილადი კარგავს აზრს.

ამოცანა 2. x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 9\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის აზრი ექნება წილადს $\frac{x+8}{(x+1)(x-3)}$.

ამოცანა 3. იპოვეთ x-ის ის მნიშვნელობებები, რომელზედაც მოცემული წილადი $\frac{x+5}{(x-2)(x-3)}$ კარგავს აზრს, თუ $x \in \{1, 2, 3, 4, 7\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სიმრავლიდან ალალბედზე შერჩეული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის მოცემულ წილადს არ ექნება აზრი.

ამოცანა 4. x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის მოცემულ წილადს ექნება აზრი.

$$\frac{x+8}{(x+1)(x-3)}.$$

საშინაო დავალებისს ახით მასწავლებელმა მოსწავლეებს შეიძლება მისცეს ზემოთ მოყვანილი სავარჯიშოების მსგავსი სავარჯიშოები, რომელთა ამოხსნა მოსწავლეებისათვის სირთულეს აღარ წარმოადგენს.

პედაგოგიური ექსპერიმენტით დადასტურდა, რომ ალბათობის თეორიის ცნებების ჩართვა სასწავლო პროცესში მოსწავლეებს ძალიან დიდ დახმარებას უწევს მათემატიკის სისტემატური კურსის შესწავლაში.

6.6. საშუალო არითმეტიკული

საშუალო არითმეტიკული არის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი ძირითადი საკითხი. საშუალო არითმეტიკულის

გამოყენება სხვადასხვა დარგებში საკმაოდ ფართოა. საშუალო არითმეტიკულის გამოყენებას მოსწავლეები ხვდებიან საშუალო სკოლაში უკვე მეოთხე-მეხუთე კლასებიდან გეოგრაფიის, ბიოლოგიის, შემდგომ კი ფიზიკისა და ქიმიის გაკვეთილებზე. ამიტომ მისი საფუძვლიანი და შინაარსობრივი გაცნობა მოსწავლეებისათვის აუცილებელია. მოსწავლეები საშუალო არითმეტიკულის ცნებას ეცნობიან კონკრეტული მაგალითების განხილვით, მოძრაობის სიჩქარის განსაზღვრით ან რაიმე სხეულის საშუალო წონის გაგებასთან დაკავშირებით. ჯერ კიდევ მეოთხე კლასში მოსწავლეებს ეძლევათ საშუალო არითმეტიკულის შემდეგი განსაზღვრება:

რამდენიმე რიცხვის საშუალო არითმეტიკული ეწოდება მათი ჯამის განაყოფს შესაკრებთა რიცხვზე.

მოსწავლეებს საგაკვეთილო მეცადინეობაზე უნდა შევახსენოთ საშუალო სიჩქარის ცნება, რომ ის არის მთლიანად გავლილი გზის შეფარდება დროსთან, მოსწავლეთა ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე, რომ საშუალო სიჩქარე არ არის სიჩქარეთა საშუალო არითმეტიკული

$$v_{\text{საშ}} \neq \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}.$$

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საკლასო მეცადინეობაზე განხილულ იქნას შემდეგი

ამოცანა. თბომავალმა მდინარეში 2 საათის განმავლობაში გაიარა 70 კმ და ტბაზე 3 საათის განმავლობაში 90 კმ. რა საშუალო სიჩქარით გაიარა მან მთელი გზა?

ამოცანის ამოხსნის დაწყებამდე მასწავლებელმა მოსწავლეებს უნდა მოაგონოს საშუალო სიჩქარის განსაზღვრება, რითაც მოსწავლეები დარწმუნდებიან იმაში, რომ სიჩქარეების გამოთვლას თუ დაიწყებდნენ ცალ-ცალკე მივიდოდნენ მცდარ დასკვნამდე.

მასწავლებელი. რამდენი კილომეტრი გაირა სულ თბომავალმა?

მოსწავლე. თბომავალმა სულ გაიარა 70 კმ + 90 კმ = 160 კმ.

მასწავლებელი. რამდენი საათი იმოძრავა თბომავალმა?

მოსწავლე. თბომავალმა იმოძრავა 2 სთ + 3 სთ = 5სთ.

მასწავლებელი. რას უდრის თბომავლის საშუალო სიჩქარე?

მოსწავლე. თბომავლის საშუალო სიჩქარე უდრის

$$\frac{160\ კმ}{5\ სთ} = 32 კმ/სთ.$$

მეშვიდე კლასის სახელმძღვანელოებში არის ისეთი ამოცანები საშუალო არითმეტიკულთან დაკავშირებით, სადაც ცნობილია საშუალო არითმეტიკული და საერთო (წონა, ზომა და სხვ.) გასაგებია რაოდენობა. ზოგჯერ საჭიროა შებრუნებული მოქმედება. მაგალითისავის განვიხილოთ ასეთი ამოცანები.

ამოცანა 1. ლაბორატორიაში ჩაატარეს ცდა, კოღოების ოთახში შეუშვეს ღამურა, რომლის წონაც 3,9 გრამია. 15 წუთში ღამურას წონა 10 პროცენტით გაიზარდა. კოღოს საშუალო წონა 0,002 გრამია. რამდენი კოღო შეუჭამია ღამურას?

მასწავლებელი. რამდენი გრამი მოიმატა ღამურამ 15 წუთში?

მოსწავლე. ღამურამ 15 წუთში მოიმატა $\frac{3{,}9}{100} \cdot 10 = 0{,}39$ გრამი.

მასწავლებელი. რამდენი კოღო შეჭამა ღამურამ 15 წუთში?

მოსწავლე. ღამურას შეუჭამია $0{,}39 : 0{,}002 = 195$ კოღო.

მასწავლებელი. რამდენი კოღო შეუჭამია ღამურას საშუალოდ წუთში?

მოსწავლე. ღამურას საშუალოდ წუთში შეუჭამია

$$\frac{195}{15} = 13\ კოღო.$$

ამოცანა 2. სკოლის კალათბურთელთა გუნდში 5 მოსწავლეა - გიორგი, დავითი, მერაბი, შალვა და კახა. მათი საშუალო ასაკი 13 წელია. გიორგი 15 წლისაა, დავითი 14 წლის, მერაბი 12 წლის, შალვა 11 წლისაა. რამდენი წლისაა კახა?

მასწავლებელი. ჯამში სულ რამდენი წლის არის კალათბურთელთა ასაკი?

მოსწავლე. სულ ჯამში კალათბურთელთა ასაკი არის $13 \cdot 5 = 65$ წელი.

მასწავლებელი. როგორ გამოვთვალოთ კახას ასაკი?

მოსწავლე. კახას ასკის გამოსათვლელად საერთო ასაკს უნდა გამოვაკლოთ დანარჩენი კალათბურთელების ასაკთა ჯამი $65 - (15 + 14 + 12 + 11) = 13$ წელი.

ამოცანა 3. სკოლის მოჭადრაკეთა ნაკრებ გუნდში სამი მოსწავლეა, მათ შორის ერთი კაპიტანია. მოჭადაკეთა გუნდის ყველა წევრთა საშუალო ასაკი 11 წელია, ხოლო საშუალო ასაკი კაპიტნის გარეშე 12 წელია. რამდენი წლისაა სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის კაპიტანი?

მასწავლებელი. ჯამში სულ რამდენი წლის არის სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის ასაკი?

მოსწავლე. სულ სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის ყველა წევრის ასაკი არის $11 \cdot 3 = 33$ წელი.

მასწავლებელი. ჯამში სულ რამდენი წლის არის სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის ასაკი კაპიტნის გარეშე?

მოსწავლე. სულ სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის წევრთა ასაკი კაპიტნის გარეშე არის $12 \cdot 2 = 24$ წელი.

მასწავლებელი. რამდენი წლის არის სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის კაპიტანი?

მოსწავლე. სკოლის მოჭადრაკეთა გუნდის კაპიტანი არის $33 - 24 = 9$ წლის.

განხილული ამოცანები მოსწავლეებს აძლევს საფუძვლიან ცოდნას საშუალო არითმეტიკულზე, რომელსაც მომდევნო კლასებში ისინი იყენებენ მათემატიკის და სხვა სასწავლო დისციპლინების შესწავლის დროს.

§7. პედაგოგიური ექსპერიმენტი

სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლების მეთოდიკამ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე (VII-IX კლასები), რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული იყო დისერტაციის I და II თავებში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა 3 წლის (2007-2010 წლებში)ქუთაისის №7 საჯარო სკოლაში, შპს სკოლა „ახალი თაობაში“, ქუთაისის №41 საჯარო სკოლაში და თერჯოლის რაიონის რუფოთის საშუალო სკოლაში.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, ჩვენს მიერ შესწავლილი იქნა აღნიშნული სკოლების VII-IX კლასების მოსწავლეთა მათემატიკის საკონტროლო წერების და დამოუკიდებელი სამუშაოების ნაშრომები, რომლებიც დისერტაციაში განხილული საკითხების სწავლებას ეხებოდა.

ანალიზმა ცხადყო, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის იმ საკითხების სწავლება, რომლებიც

დაკავშირებულია სიმრავლეთა თანაკვეთისა და გაერთიანების შედეგალ მიღებული ახალი სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის პოვნასთან, გეომეტრიულ გარდაქმნებთან, ალბათობის გეომეტრიულ გამოთვლებთან, ხდომილობის ჯამის და ნამრავლის გამოთვლასთან.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის განმავლობაში ძირითადი მუშაობა წარვმართეთ პრინციპით „ამოცანა-თეორია-ამოცანა“. რადგან თეორიული მასალის უკეთ ათვისებისათვის გაცილებით კარგი შედეგი მოგვცა მარტივი ამოცანების განხილვამ, რომლის შემდეგ მასწავლებლის სათანადო მსჯელობებით მოსწავლეები თვითონ მიდიოდნენ განსახილავი თეორიული საკითხის მარტივი წესების ჩამოყალიბებამდე, რომლის სათუძველზეც შემდგომ შედარებით უფრო რთული ამოცანების ამოხსნას ვახდენდით. ასეთი მიდგომა საკითხის შესწავლისადმი პოზიტიურ მოტივაციას ქმნიდა მოსწავლეებში და ხელს უწყობდა მიღებული ცოდნის განამტკიცებას.

მარტივი წესების ჩამოყალიბებაში ბუნებრივად მონაწილეობდა VII-IX კლასების მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოში მოთავსებული ის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან და ასევე ჩვენს მიერ სპეციალურად შერჩეული ამოცანები. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [10], [11], [12], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], 30], [31], [33], [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46], [50], [60], [62], [63], [66], [67], [68], [70], [74], [75], [87], [88].

საწყის ეტაპზე სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნის დროს აუცილებელია ყველა კონკრეტული შემთხვევის განხილვა, ხოლო შემდგომ ეტაპზე უნდა მოიძებნის და ჩამოყალიბდეს ზოგადი დამოკიდებულებები განსახილველ სიმრავლეთა ელემენტებს შორის.

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხები, ხოლო მეორეს მხრივ ამ საკითხების პრაქტიკული რეალიზების შემცველი ამოცანები VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში განიხილება მცირე რაოდენობით. მეორეს მხრივ, თუ განიხილება, არ ხდება ამოხსნისას გამოყენებული ხერხის სრულფასოვანი მეცნიერული ახსნა.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

I ეტაპი-მოსამზადებელი ექსპერიმენტი-რომელიც ძირითადად ტარდებოდა გაკვეთილებზე (VII-IX კლასები), ვიხილავდით ისეთ ამოცანებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან. ასეთი სახის, ოღონდ უფრო რთულ ამოცანებს, ვიხილავდით მათემატიკის ფაკულტატურ მეცადინეობებზე და მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობებზე (VII-IX კლასები).

II ეტაპი-სასწავლო ექსპერიმენტი რომელიც ტარდებოდა ძირითადად გაკვეთილებზე (VII-IX კლასები), მათემატიკის ფაკულტატურ მეცადინეობებზე და მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობებზე (VII-IX კლასები).

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა VII-IX კლასების მოსწავლეთა საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმება. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ მოსწავლეები ისეთ ამოცანების, ამოხსნის ხერხებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა 2 წლის განმავლობაში და მასში მონაწილეობა მიიღო ქუთაისის №7 საჯარო სკოლის, ქუთაისის №41 საჯარო სკოლის, სკოლის, თერჯოლის რაიონის რუფოთის საშუალო სკოლის და სხვა სკოლების მოსწავლეებმა მოსწავლეებმა.

მოსწავლეებთან მუშაობის ძირითადი ფორმა იყო გაკვეთილებზე, ფაკულტატურ მეცადინეობებზე, მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობებზე სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებულ თეორიული საკითხების განხილვა და შესაბამისი თემატიკით ამოცანების ამოხსნა. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახილავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

მოსწავლეებს ეძლეოდათ VII-IX კლასების მათემატიკის სახელმძღვანელოებში განთავსებული ამოცანები, რომლებიც ეხება სიმრავლეებს და ალბათობის თეორიის ელემენტებს [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], ასევე ამოცანები სხვა დამხმარე სახელმძღვანელოებიდან, ჟურნალებიდან და ჩვენს მიერ შედგენილი ამოცანები.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. რამდენნაირად შეიძლება მოსწავლემ გადაიხადოს სამარშუტო ავტობუსის ბილეთის ღირებულება თუ მას აქვს 2 ცალი 10 თეთრიანი, 1 ცალი 20 თეთრიანი, 3 ცალი 5 თეთრიანი და 6 ცალი ორთეთრიანი, თუ ბილეთის ღირებულებაა 30 თეთრი?

2. დაწერეთ ყველა ოთხნიშნა რიცხვი ციფრებით 2, 5, 0 და 8, ისე რომ რიცხვში ციფრი არ განმეორდეს.

3. თბილისიდან თელავში მიდის სამი გზა, თელავიდან ყვარელში ოთხი გზა. რამდენნაირად შეიძლება მგზავრი ჩავიდეს თბილისიდან ყვარელში თელავზე გავლით?

4. გვაქვს სამი ჭურჭელი: 8 ლიტრიანი, 5 ლიტრიანი და 3 ლიტრიანი. პირველი ჭურჭელი ავსებულია ზეთით, დანარჩენები კი ცარიელია. როგორ უნდა გავცეთ ამ ჭურჭლების აშუალებით 4 ლიტრი ზეთი?

5. რამდენ სხივს განსაზღვრავს წრფეზე ერთი წერტილი, ორი წერტილი, სამი წერტილი, n წერტილი?

6. რამდენ სამკუთხედად დაიყოფა ამოზნექილი ოთხკუთხედი, ხუთკუთხედი, ექვსკუთხედი, ყველა დიაგონალით, რომელიც შეიძლება გავავლოთ ერთი წვეროდან.

7. ყუთში არის ორი თეთრი და ორი მწვანე კუბი. ყუთში ჩაუხედავად ვიღებთ სამ კუბს, რამდენი კუბი შეიძლება იყოს ამოღებულთა შორის თეთრი და მწვანე (განიხილეთ ყველა შემთხვევა).

8. ყუთში არის 3 წითელი და 2 შავი ბირთვი. ალალბედზე ვიღებთ სამ ბირთვს. რამდენი შემთხვევა უწყობს ხელს შედეგს: ა) ამოღებულთა შორის იქნება ერთი მაინც წითელი ბირთვი; ბ) მხოლოდ ერთი წითელი ბირთვი; გ) ორი მაინც წითელი ბირთვი; დ) მხოლოდ ორი წითელი ბირთვი; ე) სამი წითელი ბირთვი.

9. ყუთში არის ერთი თეთრი და ორი წითელი ბირთვი. ალალბედზე ვიღებთ ერთ ბირთვს. იპოვეთ ალბათობა, რომ ამოღებული ბირთვი იქნება წითელი?

10. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა უდრის 19 კუბურ სანტიმეტრს. რას უდრის მისი სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე, თუ ისინი ნატურალური რიცხვებია.

11. მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის სიგრძეა 4 სმ, სიგანე 3 სმ და სიმაღლე 2 სმ, შეღებეს ყველა მხრიდან და შემდეგ დაჭრეს 1 კუბიკურ სანტიმეტრებად, რამდენი კუბი მიიღება, რომელსაც შეღებილი ექნებათ ერთი

წახნაგი, ორი წახნაგი, სამი წახნაგი? რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეულ კუბს ექნება შეღებილი ერთი წახნაგი, ორი წახნაგი, სამი წახნაგი?

12. შეადგინეთ სიმრავლე იმ ორნიშნა რიცხვებისა, რომლის ჩაწერა შეიძლება ციფრებით 4, 5, 7, 8. იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ ალალბედზე შერჩეული ორნიშნა რიცხვში ციფრთა ჯამი იქნება 10-ის ტოლი?

13. რამდენი ქვესიმრავლე აქვს შემდეგ სიმრავლეებს

ა) $\{1, 2, 3\}$, ბ) $\{4, 5, 6, 7\}$.

14. ვთქვათ $\{0, 1, 2\}$ არის x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $\{0, 2\}$- y ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე. შეადგინეთ ყველა (x, y) წყვილები და შეადარეთ ამ გამოსახულებათა შესაბამისი რიცხვითი მნიშვნელობები $x+y$ და xy.

15. ვთქვათ $\{5, 7, 8\}$ არის x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $\{9, 4, 6, 2\}$- y ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე. რამდენი (x, y) სახის წყვილის შედგენა შეიძლება სულ და იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ ალალბედზე შერჩეულ წყვილში $x+y$ ჯამი იქნება მუდმივი?

16. ჯგუფი, რომელიც შედგება 25 სტუდენტისაგან თითოეული სწავლობს გერმანულ ან ინგლისურ ენას. სტუდენტთა რიცხვი, რომლებიც სწავლობენ გერმანულ ენასს, ისე შეეფარდებიან სტუდენტების რიცხვს, რომლებიც სწავლობენ ინგლისურ ენას, როგორც $3:5$. მათ შორის გერმანულ ენას სწავლობს 8 სტუდენტით ნაკლები ვიდრე ინგლისურ ენას. რამდენი სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულ ენას, მხოლოდ ინგლისურ ენას, გერმანულ და ინგლისურ ენებს? რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეული სტუდენტი სწავლობს მხოლოდ გერმანულ ენას? მხოლოდ ინგლისურ ენას? გერმანულ და ინგლისურ ენებს?

17. მოცემულია სიმრავლეები $A=\{5\ ,7\}$, $B=\{50, 340, 14\}$. B სიმრავლე ასახეთ A სიმრავლეზე. რამდენი ხერხით შეიძლება B სიმრავლის ასახვა A სიმრავლეზე?

18. მოცემულია ორი სიმრავლე $A=\{1; 2; 2{,}5; 5\}$, $B=\{2, 4, 5, 10\}$. ვთქვათ $a \in A$ და $b \in B$. ასახეთ A სიმრავლე ასახეთ B სიმრავლეზე (a, b). წყვილების საშუალებით ისე, რომ თითოეულ წყვილში: ა) შეფარდება $\dfrac{a}{b}$ იყოს ერთი და იგივე რიცხვის ტოლი; ბ) ნამრავლი ab იყოს ერთადერთი რიცხვის ტოლი.

19. შეადგინეთ ყველა სტანდარტული სახის ერთწევრი კოეფიციენტით 3 და ცვლადებით x და y, ისე რომ თითოეული ერთწევრის ხარისხი იყოს 5-ის ტოლი.

20. დაშალეთ ორი წევრის ნამრავლის სახით მრავალწევრი $a^2n - anx + x^2 - ax.$

ა) რამდენნაირად შეიძლება ამ მრავალწევრის დაჯგუფება ორ-ორ წევრად; ბ) რამდენი შემთხვევა არის ხელსაყრელი და რამდენი არა; გ) რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეული დაჯგუფება იქნება ხელსაყრელი?

21. ცხრილში მოცემულია x და y ცვლადების მნიშვნელობები

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	3	4	5	6	-5	-6	-7	4	-3	0

რომელი წყვილები არის მოცემული ორი განტოლების ფესვები

ა) $x^2 + y^2 = 25;$

ბ) $x^2 - y^2 = 7.$

გ) იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ ალალბედზე შერჩეული წყვილი რიცხვი მოცემული ცხრილიდან იქნება პირველი განტოლების ამონახსნი?

დ) იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ ალალბედზე შერჩეული წყვილი რიცხვი მოცემული ცხრილიდან იქნება მეორე განტოლების ამონახსნი?

ე) იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა,, რომ ალალბედზე შერჩეული წყვილი რიცხვი მოცემული ცხრილიდან არ იქნება არც ა) და არც ბ) განტოლებების ამონახსნი?

22. აჩვენეთ, რომ ოთხმა წერტილმა შეიძლება განსაზღვროს ერთი, ოთხი ან ექვსი წრფე.

23. რამდენ სამკუთხედად გაიყოფა ამოზნექილი ოთხკუთხედი, ხუთკუთხედი, n კუთხედი, ყველა დიაგონალით, რომელიც შეიძლება გავავლოთ ერთი წვეროდან?

24. რა ფიგურას ქმნის ყველა ისეთი ტოლფერდა სამკუთხედების წვეროების სიმრავლე, რომელთა ფუძე მოცემულია. შეადგინეთ ნახაზი.

25. რამდენი დიაგონალის გავლება შეიძლება ოთხკუთხედში, ხუთკუთხედში, n კუთხედში?

26. მოცემულია სიმრავლე $\{2, 3, 4, 6\}$, რომლის ელემენტები მონაკვეთებს გამოსახავს. რამდენი სხვადასხვა საშუალებით შეიძლება ამ მონაკვეთებისაგან

ავაგოთ სამკუთხედი. დაასახელეთ ისეთი სამი მონაკვეთისაგან შედგენილი ჯგუფი, რომლისგანაც შეიძლება სამკუთხედის აგება. იპოვეთ იმ ხდომილობის ალბათობა, რომ ალალბედზე შერჩეული სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის აგება.

27. რამდენ სამკუთხედად ყოფს ამოზნექილ n კუთხედს ერთი წვეროდან გავლებული ყველა დიაგონალი?

28. x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$. რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ მოცემული სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული x-ის რომელიმე მნიშვნელობისათვის მოცემულ წილადს ექნება აზრი

$$\frac{x+8}{(x+1)(x-3)}.$$

29. მოცემულია განტოლება $ax=b$, სადაც $a \in \{2, 4, 5\}$ და $b \in \{4, 5, 6\}$. რით დახასიათდება ის შედეგი, შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილი მნიშვნელობისათვის $ax=b$ განტოლების ფესვი იქნება არაუმეტეს 1-ისა?

30. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული განტოლება $ax^2+bx+c=0$, სადაც $a \in \{2, 3\}$ და $b \in \{3, 4, 5\}$. რით დახასიათდება ის შედეგი, შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილისთვის მოცემულ $ax^2+bx+c=0$ კვადრატულ განტოლებას ექნება ნამდვილი ფესვები.

31. მოცემულია განტოლება $ax^2+bx+c=0$, სადაც a და b ნატურალური რიცხვებია და აკმაყოფილებენ პირობებს $a \in [1, 2]$ და $b \in [2, 3]$. რით დახასიათდება ის შედეგი, შედეგი, რომ ალალბედზე შერჩეული (a,b) წყვილისთვის მოცემულ განტოლებას ექნება ნამდვილი ფესვები.

32. x არის $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ სიმრავლის ელემენტი. რით დახასიათდება ის შედეგი, რომ ამ სიმრავლიდან ალალბედზე აღებული რიცხვი იქნება $x^2-5x+6=0$ განტოლების ფესვი.

33. გვაქვს ერთნაირი ფორმისა და ზომის 80 მონეტა, რომელთაგან ერთი ყალბია (მსუბუქია დანარჩენებზე). პინებიანი სასწორის გამოყენებით (გირების გარეშე) ოთხი აწონვით დაადგინეთ რომელია ყალბი მონეტა.

34. თორმეტლიტრიანი ჭურჭელი სავსეა რძით. საჭიროა რძე გაიყოს ორ თანაბარ ნაწილად, რისთვისაც შესაძლებელია გამოვიყენოთ მხოლოდ რვალიტრიანი და

ხუთლიტრიანი ჭურჭლები. როგორ გავაკეთოთ ეს? სითხის გადასხმის რა უმცირესი რაოდენობაა საჭირო?

მოსამზადებელმა ექსპერიმენტმა საშუალება მოგვცა გაგვეკეთებინა შემდეგი დასკვნები:

1. სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული საკითხების სწავლებას VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში საკმარისი ყურადღება არ ექცევა;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო მოსწავლეთა უმრავლესობა ვერ ფლობს სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებულ ვერც თეორიულ საკითხებს და ვერც ამოცანების ამოხსნის იმ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ბევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. მოსწავლეთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხები, მართალია ახერხებენ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნას, მაგრამ ვერ ფლობენ ამოხსნის იმ რაციონალურ ხერხებს, რომლებიც სწავლებაში მეტად ეფექტურია.

4. სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხების და ამოცანების ამოხსნის ხერხების მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხების განხილვისას სწავლების რომელი მეთოდების და ფორმების გამოყენებაა მიზანშეწონილი სასკოლო პრაქტიკაში.

ბ) ამის საფუძველზე საამოცანო მასალის შერჩევა კონკრეტული თემებისათვის და შერჩეული ამოცანების ამოხსნის რომელი ხერხების სწავლებაა აუცილებელი და მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილი.

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ მათემატიკის VII-IX კლასების მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოთავსებული სასწავლო მასალა, რომელიც დაკავშირებულია სიმრავლეებთან და ალბათობის თეორიის ელემენტებთან, გავეცანით შესაბამის მეთოდიკურ ლიტერატურას, კონსულტაციები მივიღეთ სპეციალისტებისა და პრაქტიკოსი მასწავლებლებისაგან, მოვიძიეთ საზღვარგარეთული გამოცდილების შესახებ არსებული ლიტერატურა [97], [98], [99], [100]. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ ის ამოცანები, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში და დავამუშავეთ შერჩეული ამოცანების ამოხსნის ხერხები.

აღნიშნული საკითხები ექსპერიმენტის პროცესში განიხილებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატურ მეცადინეობებზე, მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობებზე .

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის I-II თავებში შემოთავაზებული მეთოდიკა .

აღნიშნული მეთოდიკა შემოწმებას გადიოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატურ მეცადინეობებზე, მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობებზე. რამდენჯერმე მოგვიხდა სწავლების მეთოდიკისა და დასმული ამოცანების კორექტირება მათი დახვეწის მიზნით. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სასწავლო წლის მანძილზე. ერთ გაკვეთილზე, მათემატიკის საგნობრივ წრეზე ან ფაკულტატურ მეცადინეობაზე განიხილებოდა არაუმეტეს ერთი საკითხისა, ხოლო მოსწავლეებს საშინაო დავალების სახით ეძლეოდათ ანალოგიური ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ ამოცანით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში, მათგან ზოგიერთი მათგანი ამოვხსენით გაკვეთილზე, მათემატიკის საგნობრივ წრეზე, ფაკულტატურ მეცადინეობაზე. დანარჩენი მოსწავლეებს მივეცით დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. გარდა ამისა ვსარგებლობდით სხვადასხვა სახელმძღვანელოებითა და კრებულებით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს.

სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება.

სასწავლო ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა სამი სასწავლო წლის (2007-2010 წლები) განმავლობაში რომლებშიც მონაწილეობა მიიღეს იმერეთის რეგიონის სკოლის მოსწავლეებმა.

ექსპერიმენტის დაწყების ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს მოსწავლეებს უნდა ამოეხსნათ სიმრავლეებთან დაკავშირებული, ან ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანები, დაახლოებით ისეთი, როგორც მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა მოსწავლეთა 34-36%. ორი სასწავლო წლის განმავლობაში მიმდინარეობდა სიმრავლეებთან დაკავშირებული და ალბათობის თეორიის ელემენტების თეორიული საკითხების სწავლება და ამოცანების ამოხსნის ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა ტრიმესტრების ბოლოს. მოსწავლეთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად მოსწავლეთა 90%-მდე ასრულებდა. ზემოთ თქმული ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა ექსპერიმენტში მონაწილე კლასებისა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ კლასებსაც.

საკონტროლო და ექსპერიმენტული კლასების მოსწავლეთა ცოდნის დონე მათემატიკაში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,3 და 7,6.

ექსპერიმენტული კლასებისათვის სწავლება მიმდინარეობდა ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ კლასებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით ტრიმესტრული წერებსა და შემაჯამებელ მუშაობაზე მიცემული ამოცანების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების ცოდნას და ამოცანის ამოხსნის კონკრეტული, ჩვენს მიერ ნასწავლი ხერხის გამოყენებას. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია სხვა ხერხითაც.

მოვიყვანოთ სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო კლასების მიერ ექსპერიმენტის ორი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწმების შედეგები. პირველი შემოწმება ითვალისწინებდა მოსწავლეთა საერთო დონის დადგენას, ხოლო დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო კლასებზე სტატისტიკურ შეფასებას ვახდენდით ორი ნიშნით:

1. რამდენი მოსწავლე შეეცადა ამოეხსნა მიცემული ამოცანა;
2. ამ მოსწავლეებიდან რამდენმა ამოხსნა ამოცანა სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1.

კლასები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
მოსწავლეთა რაოდენობა	193	193	193	193	193	180	180	180	180	180
ამოხსნა I	170	173	174	175	178	144	146	148	150	152
ვერ ამოხსნა	23	20	19	18	15	36	34	32	30	28
ამოხსნა II	153	154	156	157	160	117	118	119	133	124
ვერ ამოხსნა	17	19	18	18	18	27	28	29	28	28

იმის გამო, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე.

შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [69].

კრიტერიუმის სტატისტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან [69] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68.

T_o ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის მოსწავლეთა შორის შემთხვევითია.

ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის.

ცხრილი 2.

კლასები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
მოსწავლეთა რაოდენობა	193	180
ამოხსნა	174	148
ვერ ამოხსნა	19	32
ამოხსნა	156	120
ვერ ამოხსნა	18	28

ჩატარებული ექსპერიმენტის $T_ნ$ კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_ნ = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2 \left(O_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \qquad [69].$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3.

I ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 174$	$O_{21} = 148$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 19$	$O_{22} = 32$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 193$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 180$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 373$

ცხრილი 4.

II ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11} = 156$	$O'_{21} = 120$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12} = 18$	$O'_{22} = 28$
	$O'_{11} + O'_{12} = n'_1 = 174$	$O'_{21} + O'_{22} = n'_2 = 148$

სადაც $n'_1 + n'_2 = N' = 322$.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: $T_ნ = 9{,}93$;

მეორე ნიშნისათვის: $T_{ნ}=9,60$;

რადგან ორთავე მნიშვნელობა აღემატება $T_{კრ}$, ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების T_0 ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო კლასების მოსწავლეები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენტულ კლასებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. სწავლების მეთოდიკა, რომელიც მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას VII-IX კლასებში როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

2. VII-IX კლასებში სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების ჩვენს მიერ განხილული ხერხებით სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეებს ზოგადი განათლების მიღებაში, ამაღლებს მათ ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია VII-IX კლასებში სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანები დავყოთ მსგავსების ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით.

გაკვეთილებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები მოსწავლეებს მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

მიუღებლად მიგვაჩნია მოსწავლეთათვის სწავლების პროცესში ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება მოსწავლეთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებულმა მეთოდიკამ, ეფექტური გახადა სიმრავლეების და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება, მოსწავლეებს განუმტკიცა საკუთარი თავის რწმენა, აამაღლა სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის ინტერესი. ყოველივე ეს დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

ზოგადი დასკვნები და რეკომენდაციები

1. თეორიული და პრაქტიკული ცოდნის დონე, მეთოდური ლიტერატურის ცოდნა, პროფესიული სრულყოფა, მათემატიკის პრაქტიკული გამოყენების უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბება, თანამედროვე მეთოდების გამოყენება მათემატიკის სწავლებაში ქმნიან მათემატიკის მასწავლებლის შინაგან მათემატიკურ კულტურას. სწორ მეთოდოლოგიურ და მეთოდიკურ პრინციპებზე დაფუძნებული მათემატიკის სწავლება პრაქტიკული მოღვაწეობის დროს თანდათანობით იხვეწება და სრულყოფილი ხდება.

2. სასწავლო-აღმზრდელობითი პროცესის მაღალ დონეზე ჩატარებისათვის მათემატიკის მასწავლებლის პროფესიულ ცოდნასთან ერთად გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება ფსიქოლოგიის, პედაგოგიური ფსიქოლოგიის და პედაგოგიკის თეორისა და ისტორიის ძირითადი საკვანძო საკითხების ცოდნას.

3. საგანთშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების თეორიული და პრაქტიკული რეალიზება დამოკიდებულია არა მარტო მასწავლებლის გამოცდილებაზე, არამედ კავშირების რეალიზების ფორმებსა და მეთოდებზე. ამიტომ ზოგადსაგანმანათლებ-ლო სკოლის მეორე საფეხურზე საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები მოითხოვს სპეციალურ შესწავლას. მიგვაჩნია, რომ საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზების მეთოდებსა და ხერხებს უნდა ფლობდეს მათემატიკის კლასების ყველა მასწავლებელი.

4. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე მათემატიკის კურსში რეალიზებული საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირები შინაარსობრივად უნდა შეიცავდეს ისეთ სახეებს, რომლებიც ფასეულია ზოგადი განათლებისათვის, ადვილად ასათვისებელია მოსწავლეებისათვის, ამავე დროს ათვისებადობა მიღწეული უნდა იქნას მასალის ისეთნაირი დიდაქტიკური შერჩევით, რომ არ დაირღვეს საგანთშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირებით დამყარებული სასწავლო

საგნების ზოგადსაგანმანათლებლო დანიშნულება. განსახილავმა მასალამ უნდა უზრუნველყოს მოსწავლის შემოქმედებითი უნარის, ზოგადი და მათემატიკური აზროვნების განვითარება, თანამედროვე მსოფლხედველობის ფორმირება, მიღებული ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება, მეცნიერული თვალსაწიერის გაფართოება, მოსწავლის მომზადება ცხოვრებისეული პრობლემის დაძლევისათვის.

5. ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური თვალსაზრისით გამართლებულია და მეტად მნიშვნელოვანი ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მეორე საფეხურზე სასწავლო პროცესში შემეცნებითი ინტერესის წარმართვა ემოციაზე დაფუძნებით. მოსწავლის შემეცნებითი მიმართულება შერჩევით ხასიათს ატარებს. როდესაც ესა თუ ის საგანი, მოვლენა ან ცნება მისთვის მნიშვნელოვანია, მაშინ უფრო მეტი ხალისითა და ინტერესით სწავლობს. ამიტომ მასწავლებლის ძირითადი ფუნქცია არის არა მხოლოდ ცოდნის გადაცემა, არამედ ამ ცოდნისადმი განსაზღვრული ემოციური დამოკიდებულების შექმნა. სასწავლო პროცესის ასეთი წარმართვა ხელს უწყობს მოსწავლეებში შემეცნებითი ინტერესების აღძვრას.

6. არითმეტიკულ მოქმედებათა თეორიული საფუძვლების ცოდნა მათემატიკის მასწავლებელთათვის საჭირო და აუცილებელია, რათა მათ შეძლონ მათემატიკის ღრმად და მაღალმეცნიერულ დონეზე სწავლება. ამ მიზნით აღნიშნული ნაშრომი დიდ დახმარებას გაუწევს მათემატიკის მასწავლებლებს.

12. ღერძული სიმეტრიის გავლის შემდეგ მოსწავლეებმა უნდა აღიქვან, რომ ღერძული სიმეტრია წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ჩანაწერი $A'=\sigma(A)$ გამოსახავს, რომ გეომეტრიულ გარდაქმნას-ღერძულ სიმეტრიას კავშირი აქვს ფუნქციის ცნებასთან. კერძოდ, σ სიმეტრია წარმოადგენს ფუნქციას, რომელსაც ყოველი A წერტილი (არგუმენტი) გადაყავს შესაბამის რაიმე $\sigma(A)$ წერტილში რომელიც A წერტილის სიმეტრიულია l წრფის მიართ. ეს ფუნქცია განსხვავდება ალგებრის კურსში მოსწავლეების მიერ ამ პერიოდისათვის განხილული ფუნქციებისაგან: ალგებრის კურსში მათ მიერ განხილული ფუნქციებისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობები რიცხვებია, მაშინ როცა σ

ფუნქციისათვის არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობებს წერტილები წარმოადგენენ.

7. ისევე როგორც ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრიაც წარმოადგენს სიბრტყის წერტილოვან გარდაქმნას. ცენტრული სიმეტრიის დროსაც მიზანშეწონილია მასწავლებლმა გამოიყენოს გეომეტრიულ გარდაქმნათა ფუნქციონალური ჩანაწერი $A'=\varpi(A)$. ეს პირველ რიგში გამართლებულია იმით, რომ გეომეტრიული გარდაქმნების აღნიშვნა ერთი ϖ სიმბოლოთი მოსწავლეებისათვის ახალია და მათ დაინტერესებას იწვევს. ამავე დროს მოსწავლეებმა იციან, რომ მსგავსი აღნიშვნებით ალგებრის კურსში გამოისახება ფუნქცია და გარკვეულწილად მათ ამზადებს იმისათვის, რომ ეს არის ფუნქციის რაღაც სახე, რომელიც ჩვეულებრივად ალგებრის კურსში განხილული რიცხვითი ფუნქციებისაგან განსხვავებულია, რადგან ფუნქციის არგუმეტიც და მნიშვნელობაც გეომეტრიული ფიგურებია.

8. ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების შესწავლის დროს ძალზედ საინტერესოა მოცემული ფიგურების გაერთიანების ან თანაკვეთის შედეგად მიღებული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის განხილვა, რომელიც ჩვეულებრივი სასკოლო კურსის ფარგლებს სცილდება, მაგრამ ამ საკითხის განხილვა მიზანშეწონილია ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე.

9. სიმრავლისა და ალბათობის თეორიის ცნებების და მასთან დაკავშირებული საკითხების სწავლების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდიკა წარმოადგენს მეთოდურად გამართულს და შესაბამისობაშია სწავლების თანამედროვე მოთხოვნებთან. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება მოსწავლეებისაგან მოითხოვს აბსტრაქტული აზროვნების მაღალ დონეს, რაც ხელს უწყობს მოსწავლეებში ლოგიკური აზროვნების უნარის განვითარებას;

10. VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შესწავლა უნდა მიმდინარეობდეს კონკრეტული მაგალითების განხილვით, რომლებიც დკავშირებულია ადამიანის ყოველდღიურ საქმიანობასთან;

11. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შესწავლის დროს ყურადღება უნდა გამახვილდეს მოსწავლეთა შემოქმედებითი უნარის გამომუშავებისაკენ, მიუღებელია ცნებების მხოლოდ მექანიკური დაზეპირება;

12 სიმრავლისა და შესაბამისობის ცნებების შესწავლით მტკიცე საფუძველი ეყრება ფუნქციონალური დამოკიდებულების შეგნებულად შესწავლას;

13. სიმრავლეებზე ოპერაციების შესწავლით მოსწავლეები ეცნობიან არა რიცხვით ობიექტებზე წარმოებულ ოპერაციებს და მოქმედებათა კანონებს;

14. უსასრულო სიმრავლის ცნების შემოღებით მოსწავლეები ეცნობიან მატერიალური სამყაროს თვისებას, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ საგნები და მოვლენები არსებობენ სასრული, კონკრეტული სახით, მაგრამ ჯამში ქმნიან მატერიალურ სამყაროს, რომელიც უსასრულოა. უსასრულო სიმრავლეებზე სწორი წარმოდგენების მიცემას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა მოსწავლეებში მეცნიერული მსოფლხედველობის გამომუშავებისათვის;

15. ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის VII-IX კლასებში უნდა მიმდინარეობდეს სავალდებულო მასალების გულმოდგინე შერჩევით, ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებების: ხდომილობები, ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება, ალბათობათა შეკრებისა და გამრავლების კანონები, გეომეტრიული ალბათობა და სხვ. სწავლება უნდა წარმოებდეს მეცნიერულად დასაბუთებული მეთოდიკით, ინდუქციური მეთოდით სიმრავლეთა თეორიასთან ურთიერთკავშირში;

16. VII-IX კლასების მათემატიკის კურსში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნისას მასწავლებელმა უნდა გააღვივოს მოსწავლეთა ინტერესი ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად და მომავალ მუშაობას დადებითი ემოციური შეფერილობა მისცეს. მიზანშეწონილია მუშაობა წარიმართოს სქემით: „ამოცანა-თეორია-ამოცანა“. მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ ამოცანის პირობის გაანალიზება, ცნობილი და უცნობი კომპონენტების გამოვლენა, ამოცანის მთავარი კითხვის გააზრება და ამოცანის შინაარსი შეუფარდონ მათ

განკარგულებაში არსებულ ცოდნასა და გამოცდილებას და ამის საფუძველზე გამოთქვან ვარაუდები მისი ამოხსნის შესაძლო მიმართულებების ძიების თაობაზე. უნდა მოხდეს ამოხსნის ყოველი ეტაპის მართებულობის კრიტიკული გააზრება, მიღებული შედეგის სისწორის შემოწმების შესრულება, რადაგან შემოწმების მსვლელობამ შესაძლოა უფრო მოკლე, ლამაზი და რაციონალური ამოხსნის მიმართულებები გვიკარნახოს.

17. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია VII-IX კლასებში სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების შინაარსის შემცველი ამოცანები დავყოთ მსგავსების ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. გაკვეთილებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები მოსწავლეებს მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია მოსწავლეთათვის სწავლების პროცესში ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება მოსწავლეთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

18. სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდიკით მტკიცე ხიდი გახდება საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლებასა და უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის სწავლებას შორის, მათემატიკის სწავლება საშუალო სკოლაში დაუახლოვდება თანამედროვე მათემატიკის სტილს და ხასიათს.

19. შემუშავებულმა მეთოდიკამ, ეფექტური გახადა სიმრავლეების და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება, მოსწავლეებს განუმტკიცა საკუთარი თავის რწმენა, აამაღლა სიმრავლეთა თეორიის და ალბათობის თეორიის ელემენტების შემცველი ამოცანების ამოხსნის ინტერესი. ყოველივე ეს დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ვ. ადეიშვილი, ბ. ბაკურაძე, გ. ბერძულიშვილი, თ. მორალიშვილი-ამოცანის ამოხსნის პროცესი და ამოხსნის ძიების პროცესი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1 (24), 2006 წელი, გვ.238-239
2. ბ. ბაკურაძე-ინვერსიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება. თბილისის ეკონომიკურ ურთიერთობათა სახელმწიფო უნივერსიტეტის პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „საზრისი“, თბილისი, 2008 წ. გვ. 25-27.
3. ბ. ბაკურაძე-სიმრავლის ცნების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №2 (34), 2009 წელი, გვ.218-219
4. ბ. ბაკურაძე-სიმრავლეებთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.161-163.
5. ბ. ბაკურაძე, ნანა-ონიანი საღინაძე, გ. ბერძულიშვილი-კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 141-144.
6. ბ.ბაკურაძე, გ. ბერძულიშვილი-ალბათობის გამოთვლის გეომეტრიული მეთოდის სწავლების ზოგიერთი ასპექტი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.164-166.
7. ა.ბარკალაია-ალბათობის თეორიის ელემენტები საშუალო სკოლაში. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1970 წ. №1.
8. გ.ბერიშვილი, ი.კოტეტიშვილი-„მათემატიკა პირველ კლასში“, 1991 წ.
9. ბერძულიშვილი გ.-საგანთშორისი კავშირები ელემენტარული გეომეტრიის სპეცკურსებსა და სპეცსემინარებზე და მათი როლი მათემატიკის მომავალი მასწავლებლის მომზადებაში. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1998 წელი.

10. გ.ბერძულიშვილი, გ.ჩაჩანიძე, თ.დოგრაშვილი-ელემენტარულ სკოლაში ალბათობის თეორიის პროპედევტიკული კურსის ზოგიერთი ასპექტის შესახებ. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი სამეცნიერო კონფერენციის „სწავლებისა და აღზრდის აქტუალური პრობლემები" შრომები. ქუთაისი. 2007 წელი. გვ. 65-68.

11. გ.ბერძულიშვილი, თ.დოგრაშვილი, შ.ლომთაძე-ალბათობის თეორიის პროპედევტიკა ელემენტარული სკოლის მათემატიკის კურსში. ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 3 (37), 2005 წელი. პედაგოგიკისა და სწავლების მეთოდიკათა სერია. გვ. 76-83.

12. გ.ბერძულიშვილი-გეომეტრიული მეთოდის გამოყენება ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის დროს. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი", №2, თბილისი, 1998 წელი, გვ.93-97.

13. გ. ბერძულიშვილი, ნ. ონიანი-საღინაძე, ბ. ბაკურაძე. კომბინატორული და ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები მათემატიკის კურსში. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი", თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 145-147..

14. თ. ბოკელავაძე, გ. ლომინაშვილი, ბ. ბაკურაძე-*Probality Theori; 1. probality experiment, sample spaces*. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი"თბილისი, №3 (35), 2009 წელი, გვ.171-173.

15. მ. გოგაძე, მ. მამასახლისი, თ. ედიბერიძე, ბ. ბაკურაძე, გ.ბერძულიშვილი-დაწყებით კლასებში ნატურალურ რიცხვების შეკრების თეორიული საფუძველი. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის მეორე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. 2008 წელი, ქუთაისი-თბილისი, გვ. 102-105.

16. მ. გოგაძე, მ. მამასახლისი, თ. ედიბერიძე, ბ. ბაკურაძე, გ.ბერძულიშვილი-დაწყებით კლასებში ნატურალურ რიცხვების გამოკლების თეორიული საფუძველი. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის მეორე საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. 2008 წელი, ქუთაისი-თბილისი, გვ. 106-109.

17. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა V კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

18. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა VI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

19. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა VII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

20. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა VIII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

21. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა IX კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

22. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა X კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

23. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა XI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

24. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- მათემატიკა XII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

25. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, I ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

26. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი- გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, II ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.

27. ა.დოგრაშვილი-მათემატიკა. პედაგოგიური ფაკულტეტის დაწყებითი განათლების პედაგოგიკისა და მეთოდიკის სტუდენტებისათვის. გამომცემლობა „ცის ნამი“, თბილისი, 1998 წელი.

28. ა.დოგრაშვილი-დაწყებითი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „ცის ნამი“, თბილისი, 1996 წელი.

29. ა.დოგრაშვილი-ალბათობის თეორიის ელემენტები საშუალო სკოლაში. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1974 წ. №1.

30. ა.დოგრაშვილი-ალბათობის ამოცანების ამოხსნა კომბინატორიკის გამოყენებით. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1973 წ. №3.

31. ა.დოგრაშვილი-ალბათობის და კომბინატორიკის საწყისი ცნებების გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს რვაწლიანი სკოლაში. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1974 წ. №3.

32. ა.დოგრაშვილი, ნ.ჭავჭანიძე-„სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტების გამოყენება დაწყებით კლასებში“. თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1996 წ.

33. შ. ებრალიძე,ქ. მანჯგალაძე, გ. ნოზაძე, მ. ტყებუჩავა, ზ. ხარაძე-რას გვიმალავენ მონაცემები?. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სასკოლო სახელმძღვანელო VII-IX კლასებისათვის. I ნაწილი. თბილისი, გამომცემლობა „დიოგენე“. 2002 წელი

34. ეროვნული სასწავლო გეგმა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებისათვის. თბილისი, 2004 წელი.

35. ეროვნული სასწავლო გეგმა, საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში VII-XII კლასები. თბილისი, 2004 წელი.

36. შ.იაშვილი, შ.ბაკურაძე-მათემატიკა I კლასის სახელმძღვანელო, თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1972 წ.

37. შ.იაშვილი, შ.ბაკურაძე-მათემატიკა II კლასის სახელმძღვანელო, თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1972 წ.

38. შ.იაშვილი, შ.ბაკურაძე-მათემატიკა III კლასის სახელმძღვანელო, თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1972 წ.

39. ე. იმერლიშვილი-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა, ზოგადი მეთოდიკა. თსუ გამომცემლობა. თბილისი, 2001 წ.

40. რ.თავართქილაძე-სიმრავლურ-ლოგიკური ენა და მისი გამოყენება მათემატიკის სასკოლო კურსის სწავლებაში. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1972 წ. №2.

41. ქ. მანჯგალაძე, გ. ნოზაძე, მ. ტყებუჩავა, ზ. ხარაძე-მოვიდა ლუწი, მოვიდა კენტი... სარწმუნო ცნობები შემთხვევითობის შესახებ. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სასკოლო სახელმძღვანელო VII-IX კლასებისათვის. II ნაწილი. თბილისი, გამომცემლობა „დიოგენე“. 2003 წელი.

42. გ.ნოზაძე-ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის საწყისების სწავლება სკოლაში. თბილისი, გამომცემლობა „დიოგენე“. 2003 წელი

43. გ.ნოზაძე, მ.ოჩხიკიძე-მათემატიკის სახელმძღვანელოებისათვის სავარჯიშოთა შერჩევის კრიტერიუმები. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, №117, გვ. 59-62.

44. ნ. ონიანი-საღინაძე, ზ. ბაკურაძე, .გ. ბერძულიშვილი,- კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“,თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 172-175.

45. ნ.ონიანი, გ.ბერძულიშვილი-ალბათობის თეორიის პროპედევტიკული კურსის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი დაწყებით კლასებში. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, №3(35), თბილისი, 2009 წელი, გვ. 185-187.

46. ნ. ონიანი, გ. ბერძულიშვილი-კომბინატორულ-ალბათური მიმართულება და მისი კავშირი სხვა ძირითად თეორიულ-მეთოდურ მიმართულებებთან დაწყებითი კლასების მათემატიკის კურსში. პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ,,ინტელექტი‘‘, №3(35), თბილისი, 2009 წელი, გვ. 188-190.

47. ი.რუხაძე, მ.მაისურაძე, ი.გოგოლაძე-ნოზაძე, ს.ანყვარელი, ნ.ონიანი– „მათემატიკის გაკვეთილები“ მასწავლებელთა დასახმარებლად. თბილისი, გამომცემლობა „პედაგოგიკა“, 1999 წ.

48. ა.ფარჯანაძე-მათემატიკის სწავლების ახალი მეთოდებისა და ხერხების შესახებ. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1975 წ. №2.

49. ვ. ქელბაქიანი-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა, I ნაწილი, ზოგადი მეთოდიკა. ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ქუთაისი, 2001 წ.

50. ვ.ქელბაქიანი, გ.ბერძულიშვილი-საშუალო მნიშვნელობის ცნების გამოყენება. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, №2, თბილისი, 1998 წელი, გვ.112-118.

51. ქელბაქიანი ვ.-მათემატიკისა და ფილოსოფიის მეცნიერული კავშირის ზოგიერთი ასპექტი. თბილისი 1998 წ.

52. ნ. ხადური-სიმრავლეთა თეორიის ელემენტების გამოყენება გეომეტრიული მასალის სწავლებისას. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1973 წ. №1.

53. ალ.წერეთელი, ნ.თოფურიძე, გ.გორგოძე, გ კომლაძე, გ.ჯაფარიძე, რ.თავართქილაძე-„თეორიული და პრაქტიკული არითმეტიკის კურსი“, დაწყებითი განათლების პედაგოგიკისა და მეთოდიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1970 წ.

54. ალ. წერეთლი-„მათემატიკის დაწყებითი სწავლების მეთოდიკა“, თბილისი, გამომცემლობა „განათლება“, 1976 წ.

55. ლ. ჯინჯიხაძე-ქართული ენისა და მათემატიკის საგანთშორისი კავშირების ზოგიერთი ასპექტი. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 2002 წელი. [193]

56. ჯ.ჯინჯიხაძე-დაწყებით სკოლაში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი 1990 წელი. 550 გვ. [194]

57. ჯ.ჯინჯიხაძე-მათემატიკის დაწყებითი კურსის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2005 წელი. 47 გვ.

58. ჯინჯიხაძე ჯ.-დაწყებით სკოლაში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1994 წელი. [195].

59. Бабаджанян С. В., Монахов В. М.-Межпредметные связи естественно-математических дисциплин на факультативных занятиях. Москва. изд. "Просвещение", 207 г. 319 стр.

60. Бажанов М.А.-Из опита преподавания элементов теории вероятностей. "Математика в школе". 1969 г. №2.

61. Беспалько В. П. - Основы теории педагогических систем. Воронеж. Изд-во Воронежского университета. 2007 г.

62. Боев Г.П.-Элементы теорий вероятностей в школе."Математика в школе".1986г. №1.

63. Варга Т.-Логика и теория вероятностей в младших классах средней школы. "Математика в школе". 1973 г. №3.

64. Галперин П. Я. - Психологигия мышления и учение о поетапном формировании умственных действии /Исследование мышления в психологии/. Москва. изд. "Наука". 2007 г.

65. Галперин П. Я. - Формирование знаний и умении на основе теории поэтапного формирования умственных действии. Москва. изд-во. Московского университета. 2007 г.

66. Гнеденко Б.В.-О методах комбинаторики и теории вероятностей и математической статистике. "Математика в школе". 1966 г. №5.

67. Гнеденко Б.В., Журбенко И.Г.-Теория вероятностей и комбинаторики. "Математика в школе". 1968 г. №3.

68. Гнеденко Б.В. - Обзор статей, посвященных факултативному курсу теорий вероятности. "Математика в школе". 1972 г. №2.

69. Грабарь М.И., Краснянская К.А. - Применения математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. Москва. Педагогика. 1977. 136 с.

70. Громов А.П., Громов В.А. - Комбинаторные принципы и операция над множествами. "Математика в школе". 1975 г. №2.

71. Дорофеев Г.В., Розов Н.Х. - Как надо рассжуждать. Москва. "Наука и жизнь". 1998 2-125. 30 с.

72. Заключения и рекомендации международного симпозиума по вопросам преподавания математики. Журнал "Математика в школе". 1965 №3. с.70-74

73. Кабанова- Меллер Е. Н. - Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. изд. "Наука". Москва. 2009 г. 207 стр.

74. Колмогоров А.Н. - Введение в теорию вероятностей и комбинаторику. "Математика в школе". 1968 г. №2.

75. Колмогоров А.Н. - Элементи комбинаторики. "Математика в школе". 1975 г. №2.

76. Левин А.А. - Процесс воспитания познавательных интерессов старшекласников. Москва. "Просвещение". 1999 г. 345 с.

77. Лошкарова Н. А. - О понятии и видах межпредметных связей. III изд. изд. "Просвещение". Москва. 2009 .г. 234 стр.

78. Методика преподования математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для ст-ов физ.-мат. фак-ов пед. инст. / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 368с.

79. Педагогика: педагогические теории, системы, технология: Учебное пособие для ст-ов ср. пед. уч. зав. / Под ред. С.А. Смирнова. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Академия, 1999. 544с.

80. Самарин Ю. А. - Очерки психологии ума. . изд. "Просвещение". Москва. 2009 .г. 354 стр.

81. Скаткин М. Н. - Проблемы современной дидактики. . изд. "Просвещение". Москва. 2009 .г. 418 стр.

82. Скаткин М. Н., Лернер И. Я. - Дидактика средней школы (Некоторые проблемы современной дидактики. Под ред. Данилова М. А. и Скаткина М. Н.). Москва, изд. "Просвещение", 2005 г.

83. Столяр А. А. - Педагогика математики. Минск. Высшая школа, 1986г. 413 стр.

84. Тализина Н. Ю. - Формирование познавательной деятельности учащихся. Москва. изд. "Знание". 2007 г. 309 стр.

85. Тализина Н. Ю. -Пути и проблемы управления познавательной деятельности человека (Теоретические проблемы управления познавательной деятельности человека). Москва. изд. "Знание". 2008 г. 395 стр

86. Тализина Н. Ю. - Что значит знать? Москва. изд. "Наука". Москва. 2009 г. 169 стр.

87. Журбенко И.Г, - Из опита преподавания факультативных занятий по теорий вероятностей. "Математика в школе". 1972 г. №2.

88. Рибников К.А. - О комбинаторных методах современной математики. "Математика в школе". 1966 г. №4.

89. Рубинштеин С, А. - Проблемы общей психологии (отв. ред. Шорохова Е. В.) IV изд. перераб. изд. "Просвещение". Москва. 2007 .г. 423 стр.

90. Рубинштеин С, А. - Основы общей психологии. V изд. перераб. изд. "Педагогика". Москва. 2006 .г. 253 стр.

91. Шебалин О. Д.- Связ преподавания физики с другими учебными предметами (Методика преподавания школьного курса физики) Ч. I. Общие вопросы. III изд. изд. "Просвещение". Москва. 2009 .г. 319 стр.

92. Шебалин О. Д.-Подготовка учителей и реализаций мирозренческой функции школьного предмета. Изд-во Московского гос. пед. института. Москва. 2008 г. 248 стр.

93. Шебалин О. Д.-Роль межпредметных связей в формировании мирозрения учащихся (Матерялы пленума учеббно-методического Совета при Министерство просвещение России). Москва. 2008 г.

94. Шеварёв П.А. - Обобщенные асоциации в учебном работе школьника. II изд. Москва. изд. "Наука". Москва. 2009 г. 159 стр.

95. Юдиной И.В.- О факультативных занятиях в восмилетной школе. "Математика в школе". 1971 г. №1.

96. Якуба Э.Г.-Из опита преподавания математики в VII-VIII классах. Москва., "Педагогика", 2006 г.

97. Jodith S. Zawojewski. Dealing with data and chance / Jodith S. Zawojewski; with Gary Brooks...[et al.]. Curriculum and evalution standards for shool mathematics addenda series. Grades 5-8. the national Council of Teachers of Mathematics, USA, 2006.

98. Data analysis and statistics across the curriculum /Gail Burnill...[et al.] Curiculum and evalution standards for shool mathematics addenda series. Grades 9-12. the national Council of Teachers of Mathematics, USA, 2006.

99. J. Michael Shaughnessy. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In Handbook of research on mathematics teaching and learning/ Douglas A. Grouwns ed. A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company, NY 2007. pp.465-494.

100. D. Nelson, and J. Worthy. How tochoose and create good problems for primary children. The National Council of Teachers of Mathematics. Printed in the USA. 2008.