საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი ბრეგაძე

განტოლებების, უტოლებების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში

13.00.02 - სწავლების და აღზრდის თეორია და მეთოდიკა

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
განათლების აკადემიური დოქტორი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
სრული პროფესორი გიორგი ბერძულიშვილი

ქუთაისი

2013

სარჩევი

I თავი

ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების თეორიული საფუძვლები

II თავი

განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება მათემატიკის სასკოლო კურსში

შესავალი

საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ გამოცემულ მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტში [52] ნათქვამია: „XX საუკუნეში განათლების ძირითადი მიზანი იყო იმ ცოდნისა და უნარ-ჩვევების დაგროვება, რაც აუცილებელია პროფესიული ფუნქციების შესასრულებლად ინდუსტრიულ საზოგადოებაში. მათემატიკური დისციპლინებიც უწყობენ ხელს შესაბამისი სოციალური დაკვეთის შესრულებას, მაგრამ ამჟამად საზოგადოება ხდება ინფორმაციული და პოლიტექნიკური განათლების ძველი კონცეფცია აღარ შეესაბამება მის მოთხოვნებს. გადაისინჯება შეხედულებაც მათემატიკის სასწავლო შინაარსზე, მის როლზე და ადგილზე ზოგად განათლებაში“.

მათემატიკის სწავლების მდგომარეობის კრიტიკული ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოსწავლეთა უმეტესობა სუსტად ფლობს ამოცანების ამოხსნის ხერხებს. საშუალო სკოლის მათემატიკის მაღალი კლასები სასწავლო სახელმძღვანელოებში საჭიროზე ნაკლები დრო აქვს დათმობილი ამოცანების ამოხსნას, რასაც ვერ ვიტყვით თეორიული საკითხების შესწავლაზე.

მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ერთ-ერთი აქტუალური პრობლემაა სწორი თანაფარდობის აღდგენა თეორიასა და პრაქტიკას შორის. ეს პრობლემა ცხადია უნდა გადაწყდეს ამოცანების ამოხსნის სწავლების დროს. ამოცანების ამოხსნის უნარი და ჩვევები დამოკიდებულია არა მარტო ამოხსნილი ამოცანების რიცხვზე, არამედ ამოცანების შინაარსსა და ამოხსნის სპეციალურ ხერხებზე.

მათემატიკის სწავლების უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ყველა მოსწავლის მათემატიკური მომზადების სავალდებულო დონის უზრუნველყოფა მოსწავლეთა მომავალი პროფესიული არჩევანისაგან დამოუკიდებლად. საზოგადოების კომპიუტერიზაცია, თანამედროვე ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა მოითხოვს მუშაკის მათემატიკურად განათლებულობას თითქმის ყოველ სამუშაო ადგილზე. მათემატიკურ განათლებულობაში იგულისხმება საგნის კონკრეტული

ცოდნაც და მათემატიკის მეშვეობით გამომუშავებული აზროვნების სტილიც, რომლის ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება. კონკრეტული მათემატიკური ცოდნის გარეშე გაძნელებულია თანამედროვე ტექნიკის მუშაობის პრინციპების გაგება და გამოყენება, მეცნიერული ცოდნის შეთვისება, მრავალფეროვანი სოციალური, ეკონომიკური, პოლიტიკური ინფორმაციის აღქმა და ინტერპრეტაცია. შეუძლებელია თანამედროვე ადამიანის განათლების მიღება, ნაკლებად ეფექტიანია ასეთი ადამიანის ყოველდღიური პრაქტიკული საქმიანობა.

მათემატიკა საშუალო სკოლაში საყრდენი საგანია მომიჯნავე დისციპლინების შესასწავლად. თანამედროვე პირობებში საგრძნობლად გაიზარდა მათემატიკური განათლების გავლენა ჰუმანიტარული ციკლის საგნებზეც.

იმისათვის, რომ მოსწავლეს ჩამოუყალიბდეს ამოცანების ამოხსნის უნარი და გამოუმუშავდეს შესაბამისი ჩვევები, მეთოდიკურ ლიტერატურაში გვხვდება ორი თვალსაზრისი: პირველი, რომლის თანახმადაც საჭიროა ამოიხსნას რაც შეიძლება ბევრი რაოდენობის ამოცანა და მეორე, რომლის თანახმადაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს განსახილავი ამოცანების შინაარსს და ამოხსნის სპეციალურ ხერხებს.

ჩვენი აზრით, რასაკვირველია შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნის სწავლება ამოცანების ამოხსნის გარეშე, მაგრამ განსაკუთრებულ მნიშვნელობას ვანიჭებთ ამოცანების შინაარსის სპეციფიკიდან გამომდინარე ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას, რომელიც ხელს უწყობს მოსწავლეებში შესაბამისი ცოდნა-ჩვევების განვითარებას და განმავითარებელი სწავლებისათვის აუცილებელია.

ცოდნა-ჩვევების სრულფასოვნების უმნიშვნელოვანეს მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ის, თუ რამდენად გააზრებული და გაცნობიერებულია ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნა მოსწავლეთა მიერ, არამედ ისიც, თუ რამდენად ღრმად, საფუძვლიანად და მტკიცედ აქვს ათვისებული ის მოსწავლეს. ამიტომ, ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნის მტკიცედ დაუფლება სწავლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა და ამავე დროს სწავლების ზოგადმეთოდოლოგიური დიდაქტიკური პრინციპის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია. ეს პრინციპი გულისხმობს, უპირველეს ყოვლისა სასწავლო მასალის ისე

მიწოდებას, რომ მოსწავლე მტკიცედ იმახსოვრებდეს და ამის საფუძველზე უნარი შესწევდეს თავისუფლად აღადგინოს თავის მეხსიერებაში ის, რაც მან ადრე სწავლების პროცესში აღიქვა და აითვისა [100].

ცოდნა-ჩვევების განმტკიცება მჭიდროდაა დაკავშირებული გავლილი და ახალი მასალის თანმიმდევრულ ურთიერთკავშირზე, ამისათვის კი აუცილებელია დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვა, კერძოდ მასწავლებელმა ამოცანის ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება არ უნდა განახორციელოს მანამდე, ვიდრე მოსწავლეები საფუძვლიანად არ შეისწავლიან ამოხსნის ალგორითმულ ხერხებს, ამავე დროს უნდა დაიცვას გავლილი მასალიდან ახალ მასალაზე გადასვლის დიდაქტიკური მოთხოვნები, რომელთა შორის მთავარია ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული ხერხების სისტემაში მოყვანა და უმთავრესის გამოყოფა მეორეხარისხოვნისაგან, ამოცანის დასმა და ახალი საკითხის ფაბულის ისეთი მოხაზვა, რომ მოსწავლე ნათლად ხედავდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების აუცილებლობას. ყოველივე ამით მასწავლებელი მოსწავლეებში შექმნის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მოტივაციას და ადვილად დაძლევის განწყობას.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მტკიცედ დაუფლებისათვის უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება სისტემატიურ ვარჯიშს, რომელიც უნდა შეუფარდდეს განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების სიძნელე-სიადვილეს და მის შესაბამის სპეციფიკას.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მტკიცედ დაუფლება მოითხოვს აგრეთვე მოსწავლისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, თითოეული მოსწავლის თავისებურებების გათვალისწინებას, სწავლების პროცესში დავალებათა ინდივიდუალიზაციას და სხვ.

მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის დროს სწავლების ყველა ეტაპზე საჭიროა იმის გათვალისწინება, რომ თითოეული მოსწავლე წარმოადგენს განუმეორებელ ინდუვიდუალობას, რომელთაც საერთო ზოგად თავისებურებებთან ერთად ახასიათებს სპეციფიკური მხარეები, რომელიც მხოლოდ ინდივიდს ახასიათებს. მასწავლებელმა სწავლებაში რომ წარმატებას მიაღწიოს, პირველ რიგში, ყურა-

დღების ცენტრში უნდა მოიქციოს თითოეული მოსწავლის ყოველმხრივი შესწავლა, მოსწავლის ხასიათი, ტემპერამენტი, ნებისყოფა, ყურადღებიანობა, უნარ-ჩვევები, აკადემიური მომზადების დონე, შრომისმოყვარეობა, კოლეგიალობა, მშობელთა განათლების დონე და მათი სპეციალობები, მოსწავლის მეგობრების წრე და სხვა მხარეები. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესი მრავალფეროვანი შინაარსით, ორგანიზაციით და მეთოდებით. ასევე მრავალმხრივია მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის გზები და ფორმები, რომელიც მასწავლებელმა ყველა კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა გადაწყვიტოს ინდივიდუალურად.

მასწავლებელმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მთელი პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ, გაცნობიერებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან მოსწავლისაგან ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა რიგ სხვა ღონისძიებებთან ერთად მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო პროგრამები განსაზღვრავს თუ რა თემები უნდა შეისწავლოს მოსწავლემ თითოეულ კლასში, ე.ი. განსაზღვრულია ალგორითმულად ამოხსნადი სავარჯიშოების ტიპები და სახეები. აშკარაა, რომ მხოლოდ ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანების სწავლებით შეუძლებელია მოსწავლეთა მათემატიკური მომზადების მაღალი დონის მიღწევა.

მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი არ ზღუდავს მასწავლებელს ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული და სპეციალური ხერხების სწავლების არჩევისას. „სტანდარტი არ განსაზღვრავს ცალსახად მათემატიკის სასკოლო კურსის შინაარსს, იგი მხოლოდ იმ საკითხებს მოიცავს, რომელთაც აუცილებლად უნდა შეიცავდეს კურსი (გაცნობის თუ სისტემატიური კურსის სახით) ამიტომ, სტანდარტის მოთხოვნები შეიძლება პროგრამების და სახელმძღვანელოების სხვადასხვა ვარიანტმა დააკმაყოფილოს“ [52].

საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამებში [28], [29] და მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტში [52] მკაფიოდ არის ჩამოყალიბებული ის მოთხოვნები, რომელსაც უნდა ფლობდეს მოსწავლე კონკრეტული კლასის მათემატიკის კურსის გავლის შემდეგ. მასში მითითებულია, რომ მოსწავლეს მოეთხოვება არა მარტო ის მათემატიკური ცოდნა და უნარ-ჩვევები, რომლებიც მიიღწევა ალგორითმულად ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნა, არამედ მათზე დაყვანადი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მოსწავლეებმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით უნდა შეძლონ არაალგორითმულად ამოხსნადი განტოლებები, უტოლობები და მათი სისტემები და ერთობლიობები დაიყვანონ ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანის სახეზე.

მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების ჩამოყალიბებაში ძლიერ გავლენას ახდენს ისეთი ამოცანები, რომლებიც უშუალოდ არ ამოიხსნება ცნობილი ალგორითმების გამოყენებით. ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესი მოითხოვს შემეცნებით აზროვნებას, რაც მოსწავლეებში აძლიერებს ამოხსნის გზის აღმოჩენის სიხარულს, რაც ემოციონალურ ფაქტორს წარმოადგენს და მოსწავლის ქცევის მძლავრი ბერკეტია. ემოციონალურ ფაქტორის სწორად მართვას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს ადამიანის მოქმედების ყველა სფეროში, მოსწავლის სრულყოფილ პიროვნებად ფორმირებისა და სწავლების პროცესშიც.

მოსწავლის ემოციები, განცდები, როგორც მისი სუბიექტური მდგომარეობის გამომხატველი, უმთავრესად დაკავშირებულია სწავლებასა და მის პროცესთან, ამიტომ ემოციების სწორი მიმართულების მიცემა და იმავე დროს მათი, როგორც ფსიქოლოგიური ფაქტორის გამოყენება ამოცანის დასაძლევად პორველ ყოვლისა სკოლისა და მასწავლებლის საქმეა. მოსწავლეთა ემოციების თვისობრივი გარდაქმნა-განვითარება ძირითადად სწორედ აღზრდისა და სწავლების საშუალებებით ხორციელდება.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებით გამოწვეული ემოციები მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს როგორც აღმზრდელობითი პროცესის შემადგენე-

ლი ნაწილი. ამიტომ მასწავლებელმა წინასწარ ზუსტად უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტული გზები და ღონისძიებები, რომელთა საშუალებითაც უზრუნველყოფს მოსწავლეებში დადებითი ემოციების და განცდების აღზრდას, ამასთანავე მიმზიდველს და სახალისოს გახდის სასწავლო პროცესს. მასწავლებელი თავადაც უნდა განიცდიდეს მოსწავლის სიხარულს, თანაგრძნობით და გულისხმიერებით ეხმარებოდეს მოსწავლეს ყოველი დაბრკოლებისა და სიძნელის გადალახვაში, ის უნდა იცნობდეს მოსწავლეების მისწრაფებებს, მათ ემოციებს, სისტემატიურად უნდა აკვირდებოდეს და სწავლობდეს ემოციების გარდაქმნა-განვითარებას სწავლა-აღზრდის პროცესში, თითოეული მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომით ახორციელებდეს მოსწავლის განვითარებას სწორი მიმართულებით.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ამოსახსნელი ამოცანებისა და სავარჯიშოების ანალიზი ცხადყოფს, რომ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად განტოლებებს, უტოლობებს და მათ სისტემებსა და ერთობლიობებს ეთმობა უმნიშვნელო დრო, რის გამოც ვთვლით, რომ არსებული საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოები ნაკლებგანმავითარებელი ეფექტის მქონეა და არ აკმაყოფილებს თანამედროვე მოთხოვნებს. ეს ტენდენცია ახალი არ არის, ასე იყო წარსულშიც და გრძელდება დღესაც. მართლაც, თუ გადავავლებთ თვალს ახლო წარსულს ვნახავთ, რომ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის სპეციალისტთა საერთო აღიარებით საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში არსებულ სავარჯიშოთა სისტემებს მრავალ ნაკლზე საუბრობენ. ერთი მთავარი ნაკლი, რომელზეც ჩვენ ზემოთ გავამახვილეთ ყურადღება არის თეორიის მოწყვეტა პრაქტიკისაგან. ა.სტოლიარი აღნიშნავს [84], რომ მათემატიკის გაკვეთილებზე ძირითადად მიმდინარეობს მათემატიკურ ტერმინებში ჩამოყალიბებული განყენებული ამოცანების საწვრთნელი ამოხსნა; ი.კოლიაგინი, ვ.ოგანესიანი და სხვ., მიიჩნევენ [70], რომ სასკოლო მათემატიკის კურსის სავარჯიშოები მწირია სააზროვნო ხასიათის და შინაარსის მხრივ, ი.გრუდიონოვი [65], აღნიშნავს მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა ერთტიპიურობას, ა.დოგრაშვილი თვლის, რომ სასკოლო სახელმძღვანელოები არ შეიცავს ალბათური და კომბინატორული შინაარსის მქონე ამოცანებს [25], [26], თ.მორალიშვილი აღნიშნავს [42], რომ მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა სისტემა არ არის სტრუქტურულად სრული, გ.ბერძულიშვილი თვლის [5], რომ

სასკოლო კურსი არ შეიცავს საგანთაშორსისი და შიგასაგნობრივი კავშირის შინაარსის მქონე ამოცანებს, ნ. ონიანი-საღინაძე და ბ. ბაკურაძე თვლიან [1], [50], რომ ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი დაწყებით და საშუალო სკოლაში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანა სისტემებს, ნ.ნახუცრიშვილი თვლის, რომ დაწყებითი სკოლის საფეხურზე საჭიროა პრობლემურ-განმავითარებელი შინაარსის მქონე ამოცანების წინა პლანზე დაყენება, [46], გ.ნოზაძე და მ.ოჩხიკიძე თვლიან, რომ განმავითარებელი ამოცანების სიმცირეს განიცდის სასკოლო მათემატიკის სახელმძღვანელოები [47], ი. ჩხიკვაძე თვლის, რომ, განმავითარებელი სწავლებისათვის დაწყებით კლასებში აუცილებელია ტექსტური ამოცანების უფრო მეტი დოზით ჩართვა სასწავლო პროცესში [56] და სხვ.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოთა სისტემები ფუნქციური დანიშნულების მიხედვით შეესაბამება ტრადიციულ სქემას „თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“. ჩვენ მიზანშეწონილად ვთვლით სწავლება მიმდინარეობდეს სქემით „ამოცანები $\rightarrow$ თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“. ამგვარი მიდგომა აუცილებელია საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში განმავითარებელი სწავლების პრინციპების ასამოქმედებლად, როდესაც სწავლება მიმდინარეობს ძირითადად სავარჯიშოების საშუალებით. სქემა „ამოცანები $\rightarrow$ თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“ საშუალებას იძლევა განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, მისი გამოყენების საშუალებით, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვებაში.

სწავლების შეცვლილი სქემა საჭიროებს მისთვის შესაფერის სავარჯიშოთა სისტემას, რომელიც შეიცავს არსებულისაგან განსხვავებული ფუნქციური დანიშნულების მქონე სავარჯიშოებსაც. რისთვისაც გაანაალიზებული იქნა არა მარტო ქართული და პოსტსაბჭოთა სივრცის, არამედ ევროპული გამოცდილებაც [94], [95].

ქართველი მეცნიერ-მეთოდისტები ამ ბოლო პერიოდში სისტემატიურად ხვეწენ ამოცანათა სისტემებს, რომლებიც დაფუძნებულია სქემაზე „ამოცანები $\rightarrow$ თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“, დაცულია არაერთი საკანიდიდატო და სადოქტორო დისერტაცია: თ.მორალიშვილი, გ.ბერძულიშვილი, ლ.ქურჩიშვილი, ლ.ბაბუნაშვილი, გ.ჯინჯიხაძე, ვ.ადეიშვილი, დ.გოშხეთელიანი, ბ.ბაკურაძე, ნ.ონიანი-საღინაძე, ლ.ციბაძე, შ.ლომთაძე და სხვ.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს განმავითარებელი სწავლების შესაბამისი სქემის “ამოცანები$\rightarrow$თეორია$\rightarrow$ამოცანები“ გამოყენებას, რომელიც მოითხოვს სავარჯიშოთა სისტემის ახლებურად აგებას.

შესამზადებელი სავარჯიშოების როლი და ადგილი კარგად არის ცნობილი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკაში, მაგრამ ასეთი სახის სავარჯიშოები არ გვხვდება მათემატიკის სასკოლო კურსისათვის დამხმარე ამოცანათა კრებულებში, ხოლო მათი შედგენა მასწავლებლებისათვის რთულია და მაღალ კვალიფიკაციას მოითხოვს. შესამზადებელი სავარჯიშოების შედგენასა და გამოყენებასთან დაკავშირებული საკითხები სათანადოდ არ არის შესწავლილი, ამიტომ პრაქტიკოსი მასწავლებელები იშვიათად მიმართავენ შესამზადებელ ამოცანებს. ისინი სწავლებაში ძირითადად ხელმძღვანელობენ ტრადიციული სქემით „თეორია$\rightarrow$ამოცანები“.

ფუნქციური დანიშნულების მიხედვით გამამდიდრებელი სავარჯიშოები განსამტკიცებელი სავარჯიშოების კლასს მიეკუთვნება. სავარჯიშოთა ამ კლასზე ყურადღების გამახვილება გამოწვეულია იმით, რომ ამჟამად ჩვენში მოქმედ მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოცემული გამამდიდრებელი სავარჯიშოების აბსოლუტური უმრავლესობა მოსწავლეთა ცოდნის დონეს არც აღრმავებს და არც აფართოებს. მათ შორის იშვიათად გვხვდება შემოქმედებითი ხასიათის სავარჯიშოები. გამამდიდრებელი სავარჯიშოები მოსწავლეებს ეხმარება ახალი მასალა განიხილონ სხვადასხვა კუთხით და დაუკავშირონ ისინი ადრე მიღებულ ცოდნას, განაზოგადონ შეძენილი ცოდნა და მოახდინონ მისი შეჯერება შესწავლილი თეორიულ საკითხებთან ახალი ცოდნის ცალკეული ნაწილების ერთმანეთთან დაკავშირება. ახალი ცოდნის ჩართვა ადრე მიღებული ცოდნის სტრუქტურაში აძლიერებს აღქმის სიღრმეს და სიცხადეს, ეხმარება მოსწავლეებს ახალი მასალის უკეთ დამახსოვრებაში.

გამამდიდრებელი სავარჯიშოები საშუალებას იძლევა მათემატიკის სასწავლო შინაარსი გადანაწილდეს თეორიულ ტექსტებსა და ამოცანებზე ისე, რომ არ მოხდეს ახალი მასალის შემეცნებითი დონის დაწევა.

ყოველივე ზემოთთქმული საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ ერთი არსებითი ხასიათის შენიშვნა: ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება თავისი შინაარსით დაფუძნებულია განმავითარებელი და გამამდიდრებელი ხასიათის სავარჯიშოების განხილვაზე. ასეთი სახის სავარჯიშოების ნაკლებობა გარკვეულ ბარიერს უქმნის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას.

საშუალო სკოლების მათემატიკის სასწავლო მასალა გადატვირთულია არა მარტო ჩვეთან, რამედ მსოფლიოს მრავალ წამყვან ქვეყანაში უმრავლეს შემთხვევაში მასწავლებლებს საშუალება არ აქვთ ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება განახორციელონ მთელ კლასთან [99],[101]. როგორც წესი ასეთი ამოცანების ამოხსნა ხდება ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. ე.ი. მოსწავლეთა მხოლოდ მცირე ნაწილთან. მაშასადამე, ის მოსწავლეები, რომლებიც შედარებით უკეთ ითვისებენ ტრადიციულ სასკოლო კურსს იღებენ უფრო მეტ გონებრივ დატვირთვას აზროვნების განვითარებისათვის, ვიდრე საშუალო და სუსტი მოსწავლეები. ამის მიზეზია ის, რომ სკოლის კურსდამთავრებულთა უმეტესობას უჭირს მარტივი ალგორითმული მათემატიკური ამოცანის ამოხსნაც კი.

მეთოდურად დამუშავებულია ამოცანათა ამოხსნის ზოგადი მეთოდები [40],[41], [54],[59],[71],[72],[73],[83], [93] და სხვა, მაგრამ კერძომეთოდიკურ ასპექტებს ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი, ასევე დამუშავებულია ზოგიერთი კლასის ამოცანათა ამოხსნის ხერხები [2],[7],[44],[45],[51],[55], რომლებიც არასისტემატიზირებულია, რადგან საშუალო სკოლაში არ წარმოებს ისეთი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების მქონე ისეთი ამოცანების სისტემის კლასიფიკაცია, რომლებიც საჭიროებენ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას, სისტემურად არ არის დამუშავებული მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, რომლებიც მათემატიკის გაღრმავებული სისტემის სპეციფიკავსთან არის დაკავშირებული, რაც პირველ რიგში განპირობებულია იმით, რომ უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებთან სათანადო ყურადღება არ ეთმობა ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების თეორიულ და მეთოდიკურ თავისებურებებს.

აღნიშნული პრობლემის გადასაჭრელად საჭიროდ მიგვაჩნია:

- განისაზღვროს განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების არსი, სპეციფიკა, დანიშნულება და ფუნქცია;
- შემუშავდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველ სავარჯიშოთა კლასიფიკაციის კრიტერიუმები;
- შემუშავდეს ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველ სავარჯიშოთა სწავლების კერძო მეთოდიკა.

ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების პრობლემის კვლევა მრავალ ასპექტს მოიცავს, კერძოდ: ფსიქოლოგიურ, ზოგად და კერძო მეთოდიკურ ასპექტებს და სხვ.

ფსიქოლოგიური ასპექტების კვლევის დროს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, აზროვნების პროცესის თავისებურებანი მოსწავლეთა ფსიქიკური განვითარების სხვადასხვა ასაკობრივ საფეხურზე და როგორია ცოდნის დაუფლების შესაძლებლობები ამა თუ იმ ასაკის მოზარდთან. ქართველმა ფსიქოლოგებმა ცნების შემუშავების უნარისა და მასზე სწავლების სხვადასხვა ფორმის გავლენის პრობლემის კვლევას საგანგებო შამოკვლევები მიუძღვნეს დ.უზნაძემ [53], რ.ნათაძემ [37], შ.ნადირაშვილმა [38], ი.კოტეტიშვილმა [39], ზ.ვახანიამ [30] და სხვებმა. საბჭოთა და პოსტსაბჭოთა სივრცეში ჩატარებული კვლევებიდან შეიძლება გამოვყოთ ს.რუბენ-შტეინის [78],[79], ე.კაბანოვა-მელერის, ვ.კრუტეცკის, ი.კალიუტკინას, ნ.მენჩინ-სკაიას, ნ.ტალიზინას, ლ.ფრიდმანის, ა.რახიმოვის [77] და სხვათა შრომები. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია დ. ელკონინისა [90], [91] და ვ. დავიდოვის [66] წვლილი, რომლებმაც სწავლების საგანგებო სისტემაც კი შექმნეს ე.წ. „ელკონინ-დავიდოვის სისტემა“ და მათემატიკის სწავლებაში ახალი პრინციპი შემოიტანეს. დასავლეთელი მკვლევარებიდან ამ საქმეში დიდი დამსახურება ბავშვის ინტელექტუალური განვითარების შესახებ ორიგინალური თეორიის ავტორს შვეიცარიელ ჟან პიაჟეს [74],[75] მიუძღვის. ასევე, ამ საკითხების კვლევას დიდი

ღვწლი დასდო ამერიკელმა მეცნიერმა ჯ.ბრუნერმა, რომელმაც დაადასტურა, რომ ბავშვს ყოველთვის გაცილებით მეტის გაგება შეუძლია ვიდრე ეს ერთი შეხედვით ჩანს, თუ სასწავლო მასალას მისი აზროვნების ფორმის შესაბამისად მივაწვდით [60].

ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების კერძომეთოდიკური ასპექტები ნაკლებად დამუშავებულია. ამ საკითხებზე გამოკვლევები აქვთ დ.პოიას, ა.სტოლიარს, მ.ტიმოშჩუკს, თ.მორალიშვილს, გ.ბერძულიშვილს, ტ.პივოვარუკს, ი.როზკას, ლ.ციბაძეს, ლ.ქურჩიშვილს, ლ.ბაბუნაშვილს, ვ.ადეიშვილს, ნ.ონიანი-საღინაძეს, ბ.ბაკურაძეს, გ.ჯინჯიხაძეს, მ. ლომთაძეს, შ.ლომთაძეს და სხვ.

სამეცნიერო შრომები, რომლებიც სხვადასხვა ასპექტით ეხებიან დასახელებულ პრობლემას, განხილულია ამოცანათა ამოხსნის ზოგიერთი ცალკეული ხერხის გამოყენება, რომლებშიც ასახული არ არის საერთო თეორიული და მეთოდიკური კონცეფციები, რაც ქმნის იმის შთაბეჭდილებას, რომ თითქოს შეუძლებელია ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების ზოგადმეთოდიკური და კერძომეთოდიკური საფუძვლების დამუშავება. ასეთი მოსაზრებები მცდარია და შორს არის ჭეშმარიტებისაგან.

ჩამოყალიბებული მოსაზრებებიდან ნათლად ჩანს არჩეული სადისერტაციო თემის „განტოლებების, უტოლებების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში“ აქტუალობა.

ჩვენს მიერ დასმული ამოცანების გადასაჭრელად განისაზღვრა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების დანიშნულება და ფუნქცია, შემუშავდა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად სავარჯიშოთა კლასიფიკაციის კრიტერიუმები და სწავლების კერძო მეთოდიკა [3],[4],[8],[9],[10],[11],[12],[13],[14]. მისი გამოყენება მასწავლებელს შეუძლია ჩვეულებრივ საგაკვეთილო პროცესში ასეთი შინაარსის მქონე ამოცანების ჩართვით, არ მოითხოვს დამატებით სასწვლო დროს, ეფექტურია თავისი განმავითარებელი ფუნქციით და ხასიათდება ლოგიკური აზროვნების მაღალი დონით, ამაღლებს მოსწავლეთა მათემატიკურ კულტურას და

ზოგადად ინტელექტს, რაც დაადასტურა ჩატარებულმა ხანგრძლივმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა..

კვლევის ობიექტი. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური, ეფექტური ხერხების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში. ამასთან დაკავშირებით გავეცანით და კრიტიკულად გავაანალიზეთ პრობლემასთან დაკავშირებული სამეცნიერო-პედაგოგიური და მეთოდიკური ლიტერატურა. მოსწავლეებთან ანკეტური გამოკითხვისა და პრაქტიკოს-ნოვატორ მასწავლებელთან საუბრების შედეგად დავადგინეთ, რომ ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის დამუშავებული განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდოლოგიური, თეორიული და მეთოდიკური საფუძვლები. მასწავლებელთათვის გამოცემიული დამხმარე მეთოდურ სახელმძღვანელოებსა და მოსწავლეთათვის გამოცემულ ამოცანათა კრებულებში ნაკლები ყურადღება აქვს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული საკითხების გაშუქებას.

კვლევის საგანი. კვლევის საგანს შეადგენს საშუალო სკოლაში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკის დამუშავება. ამასთან შევეცადეთ გამოგვეყო სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველი სავარჯიშოთა სისტემები, რომელთა განხილვა ჩვენი აზრით მიზანშეწონილია საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში.

შევარჩიეთ ისეთი საკითხები, რომლებიც შესაბამისობაშია საშუალო სკოლაში შესასწავლ საკითხებთან განსახილავი საკითხებიდან გამოვყავით შემდეგი თემები:

- შერეული სისტემების, განუსაზღვრელი განტოლებებისა და განუსაზღვრელ განტოლებათა სისტემების გამოყენება ტექსტური ალგებრული ამოცანების ამოხსნის სწავლების დროს;.
- ფუნქციათა თვისებების გამოყენება განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სწავლების დროს;

- გეომეტრიული მეთოდების გამოყენება განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სწავლების დროს;
- ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების ზოგიერთი კლასისათვის;
- უტოლობათა გამოყენება ზოგიერთი სახის განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის დროს;
- განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების გრაფიკული ამოხსნის ზოგიერთი არასტანდარტული ხერხის სწავლება.

კვლევის მიზანი. საშუალო სკოლაში სწავლების პროცესზე დაკვირვებით, კოლეგებისა და საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილების განზოგადებით პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებით მიზნად დავისახეთ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებით აგვემაღლებინა სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის დონე. დაგვემუშავებინა ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლბების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველი ამოცანების სისტემები და დაგვემუშავებინა მათი სწავლების მეთოდიკა.

ტრადიციული სწავლებისაგან განსხვავებით ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მიზანია მოსწავლეთა აზროვნება გადავაქციოთ მართვად პროცესად, ხოლო აზროვნების ძირითადი ხერხები-ათვისების სპეციალურ საგნად. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება მიზნად ისახავს მოსწავლეთა ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მიღებული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოძიება და შექმნა.

განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება საშუალებას იძლევა, რომ მათემატიკის სწავლება გადავაქციოთ დიდაქტიკურად დაფუძნებული მათემატიკური ცოდნის და ამ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების სწავლების შეწყვილებად.

აღნიშნული საკითხების ირგვლივ არსებობს პედაგოგების, ფსიქოლოგების, მეთოდისტების მიერ გამოვლენილი გარკვეული კანონზომიერებები, რომლებიც

არასისტემატიზირებულია. ჩვენ საჭიროდ ჩავთვალეთ მათგან გამოგვეყო სადისერტაციო თემისათვის გამოსაყენებელი მომენტები დადაგვემუშავებინა მათვი სწავლების კერძო მეთოდიკა.

საშუალო სკოლა მუშაობაში თავის მიზნად ისახავს მოსწავლეთათვის სწავლა-აღზრდისადმი შეგნებულ დამოკიდებულებას, ზნეობრივი და ინტელექტუალური ფორმირების გაუმჯობესებას და მოქალაქეობრიობის ჩამოყალიბებას. ამ მიზნების მისაღწევად საჭიროდ ვთვლით, რომ მოსწავლეებს ჩამოუყალიბდეთ ლოგიკური აზროვნება, შემეცნებითი აქტივობა, ობიექტური სინამდვილის აღქმის უარი, რაც მოითხოვს მოსწავლეთა სპეციალურ გონებრივ ვარჯიშს, ამიტომ ასათვისებელი მასალისათვის დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით უნდა შეირჩეს სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების შემცველ სავარჯიშოთა სისტემა. ამასთან სწავლების მეთოდები და შინაარსი უნდა შეესაბამებოდეს მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებებს. სასწავლო მასალის გაღრმავება-გაფართოება უნდა ხდებოდეს მოსწავლეთა ინტელექტუალური განვითარების დონის შესაბამისად.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს იმაში, რომ

- დამუშავებულია განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში.
- დასაბუთებულია, რომ სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის ეფექტიანობა დამოკიდებულია განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობე-ბის ამოხსნის სპეციალური ხერხების მქონე სავარჯიშოთა სისტემებზე.
- სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობე-ბის, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოცანათა სისტემების ჩართვა საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო პროცესში იწვევს მოსწავლეთა დაინტერესებას არა მარტო მათემატიკის შესწავლისადმი, არამედ მთლიანად საბუნებისმეტყველო-მათემატიკური დისციპლინებისადმი.
- ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური კანონზომიერებების ანალიზის საფუ-ძველზე შემუშავებულია შესაბამისი მეთოდიკური რეკომენდაციები.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების სრულყოფის ერთ-ერთ პერსპექტიულ გზას წარმოადგენს მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების სისტემის შექმნა, რომელიც დაფუძნებულია ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებაზე, რაც მნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მოსწავლეთა ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კერძოდ, კონსტრუქციული და კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას და ხვ.

ნაშრომის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ კვლევის შედეგების გამოყენება სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის პრაქტიკაში ხელს უწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას, მოსწავლეთა მიერ მტკიცე ცოდნის დაუფლებას და მათ დაინტერესებას მათემატიკის საფუძვლიანი შესწავლისათვის. ამასთან ერთად ნაშრომის თეორიული მნიშვნელობა გამოხატულია მეცნიერულ კონცეფციაში სასწავლო პროცესის მიზანმიმართულად წარმართვის შესახებ, ხოლო მისი პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს მათემატიკის სწავლებაში მთელი რიგი მეთოდიკური სიახლეების დანერგვასა და სასწავლო პროცესში ამოხსნის სპეციალური ხერხების მქონე სავარჯიშოთა სისტემის ეფექტურად გამოყენებაში.

კვლევის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენს ფილოსოფიურ-ფსიქოლოგიური დებულებები პიროვნების ინტელექტუალურ შესაძლებლობათა გახსნისა და განვითარების შესახებ.

პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №40 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს რაიონის სოფელ ჟონეთის საშკალო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის რაიონის სოფელ ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში. ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო წერებისა

და დამოუკიდებელი სამუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც შეეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2009-2011 წლები) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის დროს ზოგიერთი ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2011-2013 წლები) დადასტურდა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის სტატისტიკური შეფასება მოვახდინეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით. ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა გვიჩვენა, რომ სწავლების ეფექტურობის ამაღლებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვს მეთოდიკურად სწორად შერჩეულ სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად ამოცანათა სისტემებს. ასეთი სწავლება ამაღლებს შემეცნებით ინტერესებს და ანვითარებს ლოგიკურ აზროვნებას, ამაღლებს მოსწავლეთა ინტელექტს და ზრდის მათ დაინტერესებას მათემატიკის შესწავლისადმი.

თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევის პროცესში მიღებული იქნა ასეთი შედეგები:

- გაანალიზებული იქნა სპეციალური ხერხებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველი სავარჯიშოების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები და მათემატიკის სწავლებაში მათი პრაქტიკული მნიშვნელობა;
- დამუშავებულ იქნა სპეციალური ხერხებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების სწავლების მეთოდიკა, რომელიც დამყარებულია შერეული სისტემების, უტოლობების, განუსაზღვრელი განტოლებების და განტოლებათა სისტემების გამოყენებაზე, ფუნქციათა თვისებებზე (შემოსაზღვრულობა, ზრდაობა-კლებადობა, მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები, ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა და სხვ.), გეომეტრიული მეთოდების გამოყენებაზე და სხვ.
- თითოეული ნიშნის მიხედვით გამოყოფილ იქნა შესაბამისი სავარჯიშოთა სისტემები, რომელთა განხილვა შესაძლებელია მთელ კლასთან, ფაკულტატიურ,

მათემატიკის საგნობრივ წრეზე და ინდივიდუალური მუშაობისათვის. ამ ნიშნის მიხედვით დაყოფილი ამოცანების თითოეული კლასისათვის დამუშავებულია მათი სწავლების სპეციალური მეთოდიკა, რომელშიც გათვალისწინებულია ამოხსნის ცალკეული ეტაპების განხილვა, მათი თანმიმდევრობა, მათემატიკური მოდელების შესაბამისი ტიპების გამოყენებით.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ჩართვა სასწავლო პროცესში, როგორც მოსწავლეთა გონებრივი და ინტელექტუალური ფორმირების საშუალება;
- სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოცანების კლასიფიკაცია ამოხსნის ხერხების მიხედვით და მათი ადგილი საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში;
- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მეთოდური თავისებურებების გამოკვლევა;
- საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების სისტემების შედგენის მეთოდიკური საფუძვლები;
- შემუშავებული მეთოდიკის ექსპერიმენტული გამოკვლევა.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს. დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგი მოხსენდა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო სემინარს.

დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი სამეცნიერო შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. ბრეგაძე გ.-ზოგიერთი ხასიათის შენიშვნა არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, თბილისის ღია სასწავლო უნივერსიტეტის, შავი ზღვის უნივერსიტეტის, აზერბაიჯანის განჯის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, კამბოჯის ზამან უნივერსიტეტის ერთობლივი მეორე საერთაშორისო–სამეცნიერო კონფერენცია. ბათუმი. 2012 წ. თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

2. ბრეგაძე გ.-განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა (I ნაწილი). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ქუთაისის უნივერსიტეტის და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი საერთაშორისი სამეცნიერო–პრაქტიკული კონფერენცია მიძღვნილი აკადემიკოს ვარლამ ქელბაქიანის დაბადებიდან 80 წლისთავისადმი. ქუთაისი. 2013 წელი. გვ.–.

3. ბრეგაძე გ.-განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა (II ნაწილი). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ქუთაისის უნივერსიტეტის და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი საერთაშორისო სამეცნიერო–პრაქტიკული კონფერენცია მიძღვნილი აკადემიკოს ვარლამ ქელბაქიანის დაბადებიდან 80 წლისთავისადმი. ქუთაისი. 2013 წელი. გვ.–.

4. ბრეგაძე გ.-ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებანი საშუალო სკოლაში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების

განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი. გვ. -.

5. ბრეგაძე გ.-ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებანი საშუალო სკოლაში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი. გვ.-.თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

6. ბრეგაძე გ.-ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურებების შესახებ (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადო-ების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2012 წელი. №1 (42). თბილისი. გვ.-. თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

7. ბრეგაძე გ.-ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურებების შესახებ (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადო-ების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2012 წელი. №1 (42). თბილისი. გვ.-.თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

8. ბრეგაძე გ.-მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითა-რების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2013 წელი. №2 (46). თბილისი. გვ.-.თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

9. ბრეგაძე გ.-მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემა-ტიკის კურსში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითა-რების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". 2013 წელი. №2 (46). თბილისი. გვ.-.თანაავტორი გ. ბერძულიშვილი.

I თავი

ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების თეორიული საფუძვლები

§1. ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში. ამოცანათა კლასიფიკაცია და ამოხსნის ხერხები

მათემატიკის სასკოლო კურსი მცირე რაოდენობით, მაგრამ მაინც შეიცავს ისეთ ამოცანებს, რომლებიც ემსახურებიან მოსწავლეთა განმავითარებელ სწავლებას, აქვთ პრაქტიკული შინაარსი და მოითხოვენ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას.

ამოცანის ცნების მრავალნაირი განმარტება არსებობს. ამოცანებს სხვადასხვანაირ ფუნქციებს მიაწერენ მკვლევარები [43],[57],[58].მაგალითად, მათემატიკურ ამოცანაში ი.კოლიაგინი გამოყოფს შემდეგ კომპონენტებს: საწყისი მდგომარეობა (ამოცანის პირობა); საბოლოო მდგომარეობა (ამოცანის დასკვნა); ამოხსნა (პირობის გარდაქმნა საძიებლის პოვნის მიზნით); ამოხსნის ბაზისი (მისი თეორიული დახასიათება). მათემატიკურად ითვლება ყველა ამოცანა, რომლებშიაც საწყისი მდგომარეობიდან საბოლოო მდგომარეობამდე გადასვლა მათემატიკური აპარატით ხორციელდება. ავტორი ამ ჯგუფს აკუთვნებს წმინდა მათემატიკურ ამოცანებს, რომელთა ყველა კომპონენტი მათემატიკურ ობიექტებს წარმოადგენს და ამოცანებსაც, რომლებიც ამოხსნადია მათემატიკური აპარატის გამოყენებით. [23].

ჩვენ ვისარგებლებთ ამოცანის ინტუიციური გაგებით. ყოველი ამოცანა შედგება ორი ნაწილისაგან-პირობისა და კითხვისაგან. პირობა წარმოადგენს რაიმე ობექტების ერთობლიობას და მათ შორის გარკვეულ მიმართებებს, რომლებიც შესაბამისი აღწერითაა მოცემული, ხოლო კითხვით მოითხოვება რაიმე მათემატიკური ფიგურის აგება (ამოცანები აგებაზე), ან კონკრეტული მათემატიკური ფაქტის დამტკიცება (ამოცანები დამტკიცებაზე), ან რაიმე სიდიდის (სიდიდეების) რიცხვითი მნიშვნელობების პოვნა (ამოცანები გამოთვლაზე).

ამოცანის ამოხსნის ქვეშ ვგულისხმობთ ისეთ აზრობრივ ქმედებას-პროცესს, რაც იწვევს იმ შედეგის დადგომას, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს.

ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები ემყარება მათემატიკურ მეთოდებსა და მათემატიკური ობიექტების თვისებებს (რიცხვი, ფუნქცია და ა.შ). ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები დისერტაციის თემიდან გამომდინარე ჩვენს მიერ გამოყენებული იქნება განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების განსაზღვრული კლასის ამოცანების ამოხსნის დროს, რის შემდეგაც მოხდება ასეთი ამოცანების სისტემის შედგენა.

ამოცანა სისტემის ქვეშ ჩვენ გვესმის რაიმე ნიშნის მიხედვით დალაგებული ამოცანათა ერთიბლიობა, რომლებიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ. ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესში აუცილებელია გამოვყოთ ის ამოცანები, რომელთა ამოხსნა შეიძლება ერთი და იმავე ხერხით, ხოლო შემდეგ ისინი დავალაგოთ სირთულის მიხედვით.

ჩვეულებრივ ამოცანებს ყოფენ სტანდარტულ და არასტანდარტულ ამოცანებად. სტანდარტულად ითვლება ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნის ალგორითმი ცნობილია, ხოლო არასტანდარტული ამოცანისათვის ამოხსნის ალგორითმი ცნობილი არ არის. ზოგჯერ არასტანდარტულ ამოცანებს მიაკუთვნებენ ოლიმპიადის ამოცანებს, ჩვენ არასტანდარტული ამოცანების ქვეშ ვგულიხსმობთ უფრო ფართო კლასს, კერძოდ იმ ამოცანებს, რომლებიც სტანდარტული არ არის.

მეთოდურ ლიტერატურაში მათემატიკური ამოცანების ამოხსნას ზოგიერთი მკვლევარი ყოფს სამ ეტაპად: 1. ამოცანის ფორმალიზაცია; 2. პრაქტიკული რეალიზაცია; 3. ინტერპრეტაცია. [27], [6].

მოსწავლეები ამოცანათა ნებისმიერი სისტემის განხილვის დროს, იქნება ის ალგორითმულად ამოხსნადი, თუ მოითხოვს ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას, სრულად ან ნაწილობრივ მაინც ხვდებიან ამ ეტაპებს, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ამ საკითხს დავუთმოთ გარკვეული ყურადღება, რადგან ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არის დამუშავებული.

განვიხილოთ მათემატიკის სასკოლო კურსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები დაწვრილებით.

1. ფორმალიზაცია-არის მოცემული სიტუაციიდან გადასვლა ფორმალურ მათემატიკურ მოდელზე, რომელიც მიახლოებით ასახავს ამ სიტუაციას.

ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნად ამოცანათა განხილვის შემთხვევაში ამ ეტაპს მიეკუთვნება: ამოცანის პირობებში მოცემული ინფორმაციის სრულფასოვანი შესწავლა, დადგენა იმისა, მოცემული ამოცანის მსგავსი ამოცანა ადრე ხომ არ აქვთ ამოხსნილი, თუ ასეთი სახის ამოცანა მოსწავლეებს უკვე ამოხსნილი აქვთ იმის გარკვევა რომელი ხერხით იქნა ამოხსნილი, შეიძლება თუ არა იმავე ხერხით მოცემული ამოცანის ამოხსნა, თუ ასეთი სახის ამოცანა ამოხსნილი არა აქვთ, მაშინ იმის დადგენა, რომელი ხერხით ამოხსნა უფრო პერსპექტიულია, რომელი გზა არ არის ჩიხური და სხვ.

2. რეალიზაცია-არის ამოცანის ამოხსნა მისთვის განკუთვნილი ხერხის მიხედვით, ამ დროს მოსწავლეები გამოიყენებენ ამოცანათა ამოხსნის შესახებ მათთვის უკვე ცნობილ მიდგომებს, წესებს, ფორმულებს, იგივეობებს, მათემატიკურ გარდაქმნებს და სხვ.

3. ინტერპრეტაცია-არის ამოცანის ამოხსნის გათვალისწინებით ამოხსნის სისწორის შემოწმება.

ამოხსნის სპეციალური ხერხებით ამოხსნადი ამოცანათა სისტემისათვის ინტერპრეტაცია შეიძლება მოხდეს სხვადასხვა გზით, როგორიც არის დიაგრამებისა და ნახაზების აგება, გრაფებისა და გრაფ-ხის გამოყენება, ექსპერიმენტული ლაბორატორიული შემოწმება და სხვ.

ყოველი ტექსტიანი ამოცანა აღწერს რეალურ სიტაციას ან მასთან მიახლოებულს, სადაც მოთხოვნილია გავიგოთ უცნობი სიდიდე ან გავაკეთოთ რაიმე თვისობრივი დასკვნა დამახასიათებელი ამ სიტუაციისათვის. პირველ ეტაპზე საჭიროა უცნობი სიდიდე შევიტანოთ ამოცანის პირობებში, მისი საშუალებით გამოვსახოთ სხვა სიდიდეები და შევადგინოთ ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე მათემატიკური მოდელი. ეს შეიძლება იყოს განტოლება, ფორმულა და სხვ.

შესაძლებელია, როს ეს მათემატიკური მოდელი შეესაბამებოდეს კიდევ სხვა სიტუაციას.

ეს სამი ეტაპი სქემატურად ასე წარმოდგება:

ფორმალიზაცია → რეალიზაცია → ინტერპრეტაცია

ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების ჩართვა სასწავლო პროცესში მიზანშეწონილია თითოეული თემის გავლასთან დაკავშირებით. ჩვენ არ ვითხოვთ, რომ ამისათვის გამოიყოს სპეციალურად სასწავლო დრო. თითოეული სასწავლო თემის განხილვის დროს, მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ ამ თემის შესაბამისი ამოცანები, რომლებიც მოითხოვენ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას, ამასთან სასწავლო პროცესი ისე უნდა წარვმართოთ, რომ გათვალისწინებული იყოს მოსწავლეთა ასკობრივი შესაძლებლობები.

დ. პოიას ამოცანის ამოხსნის პროცესის რამდენადმე განსხვავებული სქემა აქვს განხილული ნაშრომში [72], კერძოდ ის გამოყოფს შემდეგ ოთხ ეტაპს: 1. დასმული ამოცანის გაგება; 2. ამოცანის გეგმის შედგენა; 3. შედგენილი გეგმის შესრულება; 4. შემოწმება (მიღებული ამონახსენის შესწავლა).

თ. მორალიშვილი [41] აღნიშნავს, რომ „რაც შეეხება უკანასკნელ, მეოთხე ეტაპს (მიღებული ამონახსნის შესწავლა) იგი უმრავლეს შემთხვევაში არ სრულდება. ამოხსნის გეგმის შესრულების შემდეგ ამოცანის ამოხსნა სრულდება და ამოხსნის ძიებას ჩვეულებრივ არ უბრუნდებიან (დროის ნაკლებობის გამო)“. ეს ტენდენცია გრძელდება და არც თუ ისე სასარგებლო შედეგები მოაქვს სასწავლო პროცესში. ჩვენ გავითვალისწინეთ პროცესებისადმი ასეთი მიდგომა და სპეციალურად დავამუშავეთ შემოწმების მეთოდები ტრიგონომეტრიული განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემებისათვის, რომელიც მოცემულია დისერტაციის ამავე თავის მეოთხე პარაგრაფში.

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება სპეციალური ხერხებით ამოხსნადი ამოცანების მიმართ გარკვეული წესები. ჩამოვაყალიბოთ ამოცანების სპეციალური ხერხებით ამოხსნის რამოდენიმე წესი:

- „მარტივი“ წესი: არ გამოტოვოთ ყველაზე მარტივი ამოცანა. როგორც წესი მარტივ ამოცანებს არ განიხილავენ, არადა მეთოდურად გამართლებულია, რომ

ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა ასეთი ამოცანების განხილვით უნდა დავიწყოთ.

• „რიგითი" წესი: ამოცანის ზოგიერთი პირობა ან პირობები შესაძლებლობის შემთხვევაში უნდა შევცვალოთ რაიმე რიგით. ამოცანაში პირობები სასრული რიცხვით გამოისახება, ასე რომ, ყველა პირობას ადრე თუ გვიან თავისი რიგი მოუწევს.

• „უცნობი" წესი: შევცვალოთ ამოცანის ერთი რომელიმე პირობა, სხვა პირობით. მივიღებთ დამხმარე ამოცანას, რომლის ამოხსნა უფრო მარტივია მოცემულთან შედარებით. ამოვხსნით დამხმარე ამოცანას, რის შემდეგაც ვუბრუნდებით ძირითად ამოცანას და ამოვხსნით მას მოცემული პირობებით.

• „საინტერესო" წესი: შევცვალოთ ამოცანის პირობა უფრო საინტერესო პირობით.

• „დროებითი" წესი: თუ ამოცანის პირობაში საუბარია რაიმე პროცესზე და საბოლოო მდგომარეობა უფრო თვალსაჩინოა, ვიდრე საწყისი, მაშინ უფრო მოსახერხებელია დროის უკუათვლა: პირველად განვიხილოთ პროცესის ბოლო ბიჯი, შემდეგ ბოლოსწინა და ა.შ.

შევნიშნოთ, რომ ამ წესების სია არასრულია, რადგან კონკრეტული ამოცანიდან გამომდინარე შესაძლოა საჭიროებამ მოითხოვოს სხვა რომელიმე წესის გამოყენება ან სრულიად ახალი წესის შედგენა.

განვიხილოთ ამ წესების გამოყენებით რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. ხუთმა ბიჭმა იპოვა 9 სოკო. დამტკიცეთ, რომ ორმა მათგანმა მაინც იპოვა ერთი და იმავე რაოდენობის სოკო.

ამოხსნა. პირველი ბიჯი. ბიჭების რაოდენობა ძალიან ბევრია. ვთქვათ, მათი რაოდენობა 2-ით ნაკლებია შემდეგ ამოცანაში.

სამმა ბიჭმა იპოვა x სოკო. დაამტკიცეთ, რომ ორმა მათგანმა მაინც იპოვა ერთი და იმავე რაოდენობის სოკო.

დამტკიცებისათვის დავადგინოთ, x-ის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს ამოცანას ამონახსნი.

როცა x=0, x=1, x=2 ამოცანას ამონახსნი აქვს, როცა x=3 ამოცანას ამონახსნი არა აქვს. ჩამოვაყალიბოთ მსგავსი ამოცანა:

სამმა ბიჭმა იპოვა 2 სოკო. დაამტკიცეთ, რომ ორმა მათგანმა მაინც იპოვა ერთი და იმავე რაოდენობის სოკო.

ვთქვათ სამივე ბიჭმა იპოვა სოკოების თანაბარი რაოდენობა. მაშინ სოკოების მინიმალური რაოდენობა იქნება 3, რადგან 3=0+1+2. მაგრამ, ამოცანის პირობის ძალით, სოკოების რაოდენობა 3-ზე ნაკლებია. ამიტომ, სამიდან ორმა ბიჭმა იპოვა ერთნაირი რაოდენობის სოკოები.

მოცემული ამოცანის ამოხსნისას მსჯელობა წარიმართება ანალოგიურად. ვთქვათ, ხუთივე ბიჭმა იპოვეს სხვადასხვა რაოდენობის სოკოები. მაშინ სოკოების მინიმალური რაოდენობა უნდა იყოს 10. (10=0+1+2+3+4). მაგრამ, პირობის ძალით სოკოების რაოდენობა 10-ზე ნაკლებია. ამიტომ ორმა მათგანმა მაინც იპოვა ერთი და იმავე რაოდენობის სოკო.

ამოხსნის დროს გამოყენებული იყო „უცნობი“ წესი.

ამოცანა 2. ტბების თავზე მიფრინავდნენ გედები. თითოეულ ტბაზე დაჯდა გედების ნახევარი და კიდევ ნახევარი გედი, დანარჩენები აგრძელებენ ფრენას. ყველა გედი დაჯდა შვიდ ტბაზე. რამდენი გედი მიფრინავდა სულ?

ამოხსნა. მიმდინარეობს დროში გარკვეული პროცესი, რომელშიც საწყისი მდგომარეობა გაურკვეველია, საბოლოო მდგომარეობა ნულოვანია, ე.ი. ყველა გედი ტბებზე დასხდა, მფრინავი გედები აღარ არიან.

დავაბრუნოთ დრო უკან, მოვიყვანოთ ასეთი ამოცანა.

ტბების თავზე მიფრინავდნენ გედები. თითოეული ტბიდან აფრინდა ნახევარი გედი და კიდევ იმდენი, რამდენიც უკვე მიფრინავდა. ყველა გედი აფრინდა შვიდი ტბიდან. რამდენი გედი აფრინდა სულ?

მეორე ბიჯი. დავიწყოთ ნულიდან:

$$(((((((0+1/2)2+1/2)2+1/2)2+1/2)2+1/2)2+1/2)2+1/2)2 =127.$$

ამოცანა 3. მდინარეზე გადასასვლელ ხიდთან ერთმანეთს შეხვდა ორი გლეხი, ღარიბი ალალი და მდიდარი ცბიერი. ერთმანეთის მოკითხვის შემდეგ ალალმა თავის სიდუხჭირეზე დაიჩივლა, რაზეც მდიდარმა უთხრა:

-მე შემიძლია დაგეხმარო. ხიდის ყოველ გადასვლაზე შენი მონეტები გაორმაგდება, მაგრამ მე უნდა მომცე 24 მონეტა. ალალ კაცს გაეხარდა, მაგრამ სამჯერ ხიდზე გადასვლის შემდეგ ნახა, რომ ქისა ცარიელი ჰქოენდა. რამდენი მონეტა ჰქონდა ალალს?

$$(((0+24):2+24):2+24):2= 21.$$

მეორე და მესამე ამოცანების განხილვის დროს გამოყენებული იყო „დროებითი“ წესი.

ამოცანა 4. მჭედელი ცხენის ერთი ჩლიქის დაჭედვას უნდება 5 წუთი. რა დრო დასჭირდება 8 მჭედელს 10 ცხენის დასაჭედად? (ცხენს ორ ფეხზე დგომა არ შეუძლია).

ამოხსნა. პირველი ბიჯი. ცხენებისა და მჭედლების რაოდენობა საკმაოდ დიდია. გამარტივების მიზნით შევადგინოთ ასეთი შინაარსის ამოცანა.

მჭედელი ცხენის ერთი ჩლიქის დაჭედვას 5 წუთს ანდომებს. რა დრო დასჭირდება 4 მჭედელს 5 ცხენის დასაჭედად?

ცხადია, რომ 5 ცხენს 20 ნალი დაჭირდება, რომლის დაჭედვას სულ ცოტა 100 წუთი მოუნდება, ამიტომ მინიმალური დრო 25 წუთზე ნაკლები არ იქნება. მაგრამ შესაძლებელია კი ეს შესრულდეს? ამისათვის მჭედლების მოქმედებები ისე უნდა დავგეგმოთ, რომ მოცდენა არ მოხდეს. განვალაგოთ 5 ცხენი წრეზე. მას შემდეგ, რაც ოთხივე მჭედელი დაჭედავს თითოეული ცხენის ერთ ჩლიქს, მჭედლები გადაინაცვლებენ წრის მომდევნო ცხენის დასაჭედად. რომ შემოიარონ მთელი წრე მჭედლებს დასჭირდებათ ხუთი ტაქტი თითოეული ხუთი წუთის შუალედით. 4 ტაქტის შესრულების შემდეგ თითოეული ცხენი დაიჭედილი იქნება, ხოლო ერთი ტაქტს ცხენები დაისვენებენ. საბოლოოდ, 5 ცხენი 25 წუთის განმავლობაში დაიჭედება.

მეორე ბიჯი. დავუბრუნდეთ საწყის ამოცანას, შევნიშნოთ, რომ $8=4\cdot2$, ხოლო $10=5\cdot2$. ამიტომ 8 მჭედელი უნდა გავყოთ ორ ბრიგადად, თითოეულში 4 მჭედელი, ხოლო 10 ცხენი ორ რემად-თითოეულში 5 ცხენი.

25 წუთის განმავლობაში პირველი ბრიგადა დაჭედავს პირველ რემას, ხოლო მეორე ბრიგადა-მეორე რემას.

ამოხსნის დროს გამოყენებული იყო „რიგითი“ წესი.

შესაძლოა პრაქტიკული მოღვაწეობის დროს შეგვხვდეს ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნა არ მოხერხდეს არცერთი ზემოთ ჩამოყალიბებული წესით, მაშინ უნდა შევქმნათ ასეთი ამოცანის ამოხსნის განსაკუთრებული ხერხი. ამასთანავე, უნდა გვახსოვდეს, რომ ამოცანების ამოხსნა სპეციალური ხერხების გამოყენებით არის ხელოვნება, რომელსაც შეიძლება ამომხსნელი ფლობდეს მხოლოდ მაშინ, თუ სისტემატიურად ახდენს ამოცანების ამოხსნის მოქმედების თვითანალიზს.

ზოგჯერ, დაბალ კლასებში შესაძლებელია ამოხსნის სპეციალური ხერხები გამოყენებული იქნეს ისეთი ამოცანების მიმართ, რომელთა ამოიხსნა შესაძლებელია განტოლების შედგენით. ასეთი მიდგომა მიზანშეწონილია მაშინ, როცა მოსწავლეები განტოლების შედგენით ამოცანების ამოხსნაში ჯერ კიდევ კარგად გაწაფული არ არიან. ხოლო, როცა კარგად დაეუფლებიან, შემდგომში ასეთი ამოცანების ამოხსნა განტოლების შედგენით მათთვის მარტივი საქმე იქნება, მაგრამ თუ მოსწავლეები ასეთი ამოცანებს დაბალ კლასებში არ გაეცნენ, მაშინ უმჯობესია სანამ დავიწყებდეთ ტექსტური ალგებრული ამოცანების განვიხილვას განტოლებების და განტოლებათა სისტემების გამოყენებით შევთავაზოთ რამდენიმე ამოცანა, რომელთა ამოხსნა არითმეტიკული გზითაც შეიძლება და თავისი შინაარსით არასტანდარტულია.

განვიხილოთ ასეთი შინაარსის რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 5. უდაბნოში აქლემების ქარავანი მიემართება. სულ 40 აქლემი. თუ ამ აქლემების ყველა კუზს დავთვლით 57 კუზი გამოვა. ამ ქარავანში რამდენია ერთკუზიანი აქლემი?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნის დროს მასწავლებელმა უნდა დასვას კითხვები:

მასწავლებელი: რამდენი კუზი შეიძლება ჰქონდეს აქლემს?

მოსწავლე; ერთი ან ორი.

მასწავლებელი: მოდი ყველა აქლემს მივამაგროთ დროშა კუზზე ერთკუზიანებსაც და ორკუზიანებსაც. ცხადია ორკუზიან აქლემების ერთი კუზი დროშის გარეშე დარჩება. რამდენი დროშა დაგვჭირდება?

მოსწავლე: 40 აქლემს დასჭირდება 40 დროშა.

მასწავლებელი: რამდენი აქლემს არ ექნება მეორე კუზზე მიმაგრებული დროშა?

მოსწავლე: ასეთი იქნება 57-40=17 აქლემი.

მასწავლებელი: რამდენი ყოფილა ორკუზიანი აქლემი?

მოსწავლე: ორკუზიანი აქლემი სულ არის 17.

მასწავლებელი: რამდენია ერთკუზიანი აქლემი?

მოსწავლე: ერთკუზიანი აქლემია 40-17=23.

მასწავლებელი: რა არის ამოცანის პასუხი?

მოსწავლე: ორკუზიანია 17 აქლემი, ერთკუზიანი-23 აქლემი.

ამ ამოცანის ამოხსნა მარტივად შეიძლება განტოლების გამოყენებითაც.

ვთქვათ, ქარავანში ერთკუზიანი აქლემია x, მაშინ ორკუზიანი აქლემი იქნება $(40-x)$. რადგან სულ აქლემებს 57 კუზი აქვთ, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$x+2(40-x)=57.$$

საიდანაც, $x=23$.

ამოცანა 6. ავტოფარეხში 18 სატრანსპორტო საშუალება დგას, მსუბუქი ავტომობილები და ეტლიანი მოტოციკლები. ავტომანქანებსა და მოტოციკლებს სულ 65 ბორბალი აქვთ. რამდენი ეტლიანი მოტოციკლი იდგა ავტოფარეხში, თუ ავტომანქანებს 4 ბორბალი აქვთ და ეტლიან მოტოციკლებს კი-3?

ამოხსნა. მოვახდინოთ ამოცანის პირობის შეცვლა და ის ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: მძარცველები შეიპარნენ ავტოფარეხში, სადაც 18 სატრანპორტო საშუალება იდგა-მსუბუქი ავტომობილები და ეტლიანი მოტოციკლები. მოხსნეს თითოეულ ავტომანქანას და ეტლიან მოტოციკლს 3-3 ბორბალი და წაიღეს. რამდენი ბორბალი დარჩა ავტოფარეხში თუ სულ 65 ბორბალი იყო?

ამოხსნა. მასწავლებელმა სავარაუდოდ უნდა დასვას ასეთი კითხვები:

მასწავლებელი: რამდენი ბორბალი მოიპარეს მძარცველებმა?

მოსწავლე: $18 \cdot 3 = 54$ ბორბალი.

მასწავლებელი: რამდენი ბორბალი დარჩა?

მოსწავლე: 65-54=11 ბორბალი.

მასწავლებელი: რამდენი მსუბუქი ავტომანქანა იყო ავტოფარეხში?

მოსწავლე: რამდენი ბორბალიც დარჩა, ანუ 11.

მასწავლებელი: რამდენი ეტლიანი მოტოციკლი იყო ავტოფარეხში?

მოსწავლე: 18-11=7 ეტლიანი მოტოციკლი.

ამ ამოცანის პირობის შეცვლა შეიძლებოდა სხვანაირადაც. მაგალითად,

ავტოფარეხში 18 სატრანსპორტო საშუალება დგას, მსუბუქი ავტომობილები და ეტლიანი მოტოციკლები. ავტომანქანებსა და მოტოციიკლებს სულ 65 ბორბალი აქვთ. ყველა ეტლიან მოტოციკლში გვინდა ჩავდოთ თითო სათადარიგო ბორბალი, რამდენი ავტომანქანა დგას ავტოფარეხში, თუ ავტომანქანებს 4 ბორბალი აქვთ და ეტლიან მოტოციკლებს კი-3.

ცხადია, რომ ავტომანქანებისა და მოტოციკლების ბორბლების რაოდენობა ერთად გახდება $4 \cdot 18 = 72$.

სულ რამდენი სათადარიგო ბორბალი გახდა საჭირო ეტლიან მოტოციკლებში ჩასადებად?

72-65=7 ბორბალი.

რამდენი ავტომანქანაა ავტოფარეხში? 18-7=11.

ამოცანა 7. კომბლეს 13 ცხვარი ჰყავდა, რომელიც დათვმა, მგელმა და ტურამ შეუჭამა. ყველაზე მეტი ცხვარი დათვმა შეჭამა, ყველაზე ცოტა ტურამ. რომელმა ნადირმა რამდენი ცხვარი შეჭამა?

ამოხსნა. მასწავლებელმა სავარაუდოდ ასეთი კითხვები უნდა დასვას:

მასწავლებელი: ვის შეუძლია ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა?

(მასწავლებელი ეკითხება რამდენიმე მოსწავლეს, რომლებიც სხვადასხვა პასუხებს ასახელებენ).

მასწავლებელი: რატომ მოხდა, რომ სხვადასხვა პასუხები მივიღეთ?

მოსწავლე: იმიტომ, რომ კონკრეტულად ამოცანის პირობაში ნათქვამი არ არის რამდენი ცხვარი შეჭამა თითოეულმა ნადირმა.

მასწავლებელი: მოდი შევეცადოთ ამოვხსნათ ამოცანა სრულყოფილად და ვიპოვოთ ამოცანის ყველა შესაძლო ამონახსნი, რაშიც დაგვეხმარება ცხრილი

ნადირი	შეჭმული ცხვრების რაოდენობა						
ტურა	1	1	1	1	2	2	2	3
მგელი	2	3	4	5	3	4	5	4
დათვი	10	9	8	7	8	7	6	6

მასწავლებელი: რა პირობების დაცვაა აუცილებელი ამ ამოცანის ამოხსნის დროს?

მოსწავლე: ყველა ნადირმა სხვადასხვა რაოდენობის ცხვარი შეჭამა, ტურამ ყველაზე ცოტა, დათვმა ყველაზე მეტი.

მასწავლებელი: რამდენი განსხვავებული ამონახსნი აქვს ამოცანას?

მოსწავლე: ამოცანას აქვს 8 განსხვავებული ამონახსნი

მასწავლებელი: ასეთ ამოცანებს ეწოდება ამოცანები მრავალი ამონახსნით.

ასეთი სახის ამოცანების განხილვის დროს მიზანშეწონილია საკლასო მეცადინეობაზე გავარჩიოთ ასეთი

ამოცანა 8. ცისკარა სამთავიან და სამკუდიან გველეშაპს უნდა შეებრძოლოს. ცისკარას ხმლის ერთი მოქნევით შეუძლია გველეშაპს მოჭრას ან ერთი თავი, ან ორი თავი, ან ერთი კუდი, ან ორი კუდი. თუ მოჭრის ერთ თავს-ახალი ამოიზრდება, თუ მოჭრის ერთ კუდს-ორი ამოიზრდება, თუ მოჭრის ორ კუდს-თავი ამოიზრდება, თუ მოჭრის ორ თავს-არაფერი არ ამოიზრდება. დაეხმარეთ ცისკარას როგორ მოიქცეს, რომ დაამარცხოს გველეშაპი ე.ი. მოჭრას ყველა თავი და ყველა კუდი.

მასწავლებელი: რა მოხდება თუ ცისკარა შგველეშაპს მოჭრის ერთ თავს?

მოსწავლე: ამოიზრდება ახალი თავი.

მასწავლებელი: აქვს თუ არა აზრი გველეშაპისათვის ერთი თაის მოკვეთას?

მოსწავლე: არა, ამით არაფერი არ იცვლება.

მასწავლებელი: გველეშაპისათვის ერთი თავის მოკვეთა უპერსპექტივო გზაა, დროისა და ძალების უქმი ხარჯვაა. რა მოხდება, თუ ცისკარა გველეშაპს მოაჭრის ერთ კუდს?

მოსწავლე: ამოიზრდება ორი ახალი კუდი.

მასწავლებელი: თუ მოაჭრის ორ კუდს?

მოსწავლე: ამოიზრდება ახალი თავი.

მასწავლებელი: თუ ორ თავს მოაჭრის?

მოსწავლე: არაფერი არ ამოიზრდება.

მასწავლებელი: ამრიგად, გველეშაპისათვის ერთი თავის მოჭრით არაფერი არ იცვლება, ისევ ამოიზრდება ახალი თავი. უნდა მივიღოთ ისეთი მდგომარეობა, რომ გველეშაპის თავების რაოდენობა იყოს ლუწი, ხოლო კუდები არ დარჩეს, მაგრამ ამისათვის კუდების რაოდენობაც უნდა იყოს ლუწი. როგორ უნდა მივაღწიოთ ამას?

ცისკარას გველეშაპთან ბრძოლის I სტრატეგია

1-ლი დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 4 თავი და 1 კუდი,

მე-2 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 4 თავი და 2 კუდი,

მე-3 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 4 თავი და 3 კუდი,

მე-4 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 4 თავი და 4 კუდი,

მე-5 დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 5 თავი და 2 კუდი,

მე-6 დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 6 თავი და 0 კუდი,

მე-7 დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 4 თავი,

მე-8 დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 2 თავი,

მე-9 დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 0 თავი.

ცისკარას გველეშაპთან ბრძოლის II სტრატეგია

1-ლი დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 1 თავი და 3 კუდი,

მე-2 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 1 თავი და 4 კუდი,

მე-3 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 1 თავი და 5 კუდი,

მე-4 დარტყმა-მოაჭრას 1 კუდი-გაუხდება 1 თავი და 6 კუდი,

მე-5 დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 2 თავი და 4 კუდი,

მე-6 დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 3 თავი და 2 კუდი,

მე-6 დარტყმა-მოაჭრას 2 კუდი-გაუხდება 4 თავი და 0 კუდი,

მე-8 დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 2 თავი,

მე-9 დარტყმა-მოაჭრას 2 თავი-გაუხდება 0 თავი.

მასწავლებელი ცისკარას გველეშაპთან ბრძოლის მოყვანილი ორი სტრატეგიიდან გაკვეთილზე გაარჩევს ერთს, მეორეს მოსწავლეებს მიცემს საშინაო დავალებად.

ამოცანა 9. ოჯახში ოთხი ბავშვია: სოსო, ირინა, ვახო და თამარი. ისინი 5, 7, 9 და 11 წლის არიან. რამდენი წლის არის თითოეული, თუ ერთი ბიჭი საბავშვო ბაღში დადის, ირინა უმცროსია სოსოზე, ხოლო გოგონების ასაკთა ჯამი 3-ზე იყოფა ?

მასწავლებელი, იმისათვის, რომ გამარტივდეს ამოცანის ამოხსნა იყენებს ცხრილს:

ასაკი სახელი	5 წლის	7 წლის	9 წლის	11 წლის
სოსო				
ირინა				
ვახო				
თამარი				

ამის შემდეგ კლასს დაუსვამს კითხვებს და პარალელურ რეჟიმში ავსებს ცხრილს:

მასწავლებელი: ამოცანის პირობიდან რა არის ჩვენთვის ცნობილი ერთ-ერთი ბიჭის შესახებ?

მოსწავლე: ის დადის საბავშვო ბაღში.

მასწავლებელი: რამდენი წლის არის ეს ბავშვი?

მოსწავლე: 5 წლის.

მასწავლებელი: ეს ბიჭი შეიძლება სოსო იყოს?

მოსწავლე: არა, სოსო ირინაზე უფროსია, ამიტომ ეს ბიჭი ვახოა.

ჩავსვათ ვახოს გასვრივ „5 წლის" სვეტში „+" ნიშანი. ეს ნიშნავს, რომ ოჯახის ყველაზე უმცროსი შვილი ვახოა და ის 5 წლისაა.

მასწავლებელი: რა ვიცით ირინას ასაკის შესახებ?

მოსწავლე: ის სოსოსზე უმცროსია და თუ მის ასაკს მივუმატებთ მეორე დის ასაკს, ჯამი გაიყოფა 3-ზე.

მასწავლებელი: შევადგინოთ სოსოს, ირინას და თამრიკოს შესამლო ასკთა 7, 9 და 11 ჯამების ყველა შესამლო ვარიანტი.

მოსწავლეები წერენ: 7+9=16, 7+11=18. 9+11=20.

მიღებული ჯამებიდან 3-ზე იყოფა 18. ე.ი. გოგონების ასკია 7 და 11 წელი.

მასწავლებელი: რამდენი წლის არის სოსო?

მოსწავლე: სოსო 9 წლისაა.

მასწავლებელი: ირინა?

მოსწავლე: 7 წლის, რადგან ის სოსოზე უმცროსია.

მასწავლებელი: თამარი?

მოსწავლე: თამარი 11 წლისაა.

ამის შემდეგ ცხრილი მიიღებს სახეს:

ასაკი სახელი	5 წლის	7 წლის	9 წლის	11 წლის
სოსო			+	
ირინა		+		
ვახო	+			
თამარი				+

მასწავლებელი: როგორ ჩამოყალიბდება ამოცანის პასუხი?

მოსწავლე: ვახო 5 წლისაა, ირინა-7 წლის, სოსო-9 წლის, თამარი-11 წლის.

ამოცანების ამოხსნა სპეციალური ხერხების გამოყენებით ხასიათდება ზოგიერთი თავისებურებებით, კერძოდ,

1. ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნის სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის დროს;

2. უმრავლეს შემთხვევაში მასწავლებელმა არ უნდა მოახდინოს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მზა რეცეპტების სახით მიწოდება, მან უნდა ისარგებლოს ისეთი მითითებებითა და კითხვებით, რომლებიც საშუალებას მისცემს მოსწავლეებს თვითონ მივიდნენ ამოხსნის სპეციალური ხერხის „აღმოჩენამდე";

3. მასწავლებელმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესი უნდა წარმართოს ისე, რომ მასში მონაწილეობა მიიღოს მთელმა კლასმა, მოსწავლეებს საშუალება უნდა ჰქონდეთ გამოთქვან თავიანთი შეხედულებები, აზრები, თუნდაც მცდარი, დაიცვან საკუთარი აზრები. მასწავლებლებმა პატივი უნდა სცენ მოსწავლეთა აზრებს;

4. მასწავლებელმა ამოცანის ამოხსნის შემდეგ უნდა მოახდინოს გამოყენებული ხერხის სრულყოფილი მეთოდური ანალიზი და თუ ამოხსნილი ამოცანის ტიპი იძლევა ამის შესაძლებლობას, მოახდინოს ამ ხერხის განზოგადება სხვა უფრო ფართო კლასის ამოცანების მიმართ;

5. მომდევნო ეტაპებზე, როცა მოსწავლეები მიიღებენ საკმაო გამოცდილებას, დახელოვნდებიან ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებაში, მასწავლებლის ჩარევა უნდა შემცირდეს, როგორც ამოხსნის სპეციალური ხერხის შერჩევისას, ასევე ამოხსნის პროცესშიც. მან ყურადღება უნდა გადაიტანოს იმ მოსწავლეებზე, რომლებსაც შედარებით უძნელდებათ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება.

§2. ამოცანების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში

საქართველოში განათლების რეფორმის მიმდინარეობა დიდად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი ლოგიკური აზროვნების და მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარებით აღჭურვილი დაამთავრებს ახალგაზრდა საშუალო სკოლას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია მოსწავლე დაეუფლოს ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს და საძიებო ხერხებს, რომელიც შემდგომში მას საშუალებას მისცემს თვითონვე შეადგინოს იმავე ტიპის ამოცანები. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ამოცანის ამოხსნა, ჩამოყალიბება, შედგენა, რისთვისაც შეიძლება გამოიყენოს მათემატიკური თვისებები, დამოკიდებულებები, გამოთვლები, გაზომვები, აგებები, გარდაქმნები და სხვ. ამოცანათა მიმართ ასეთი მოთხოვნები სკოლის სამივე საფეხურს ეხება, ხოლო, ამოცანებისა და მაგალითების სირთულე განსაზღვრული უნდა იქნეს მოსწავლეთა ასაკისა და სწავლების პროფილის შესაბამისად.

მოსწავლეებისათვის განტოლებებისა და გატოლებების სისტემების შედგენის სწავლება მეთოდურად საკმაოდ დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მეტად ზომიერ და ფაქიზ მოპყრობას მოითხოვს. ეს საკითხი მეთოდურ ლიტერატურაში ჯერ კიდევ სათანადოდ არ არის დამუშავებული და გამოუცდელი, ახალგაზრდა მასწავლებლის პირველმა ცდებმა შესაძლოა სასურველი შედეგი ვერ გამოიღოს, მაგრამ მისი მიზანმიმართული სწავლება მოსწავლეთა დაინტერესებას იწვევს და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებას ეხმარება.

მეთოდიკური თვალსაზრისით მეტად მნიშვნელოვანია რომელ ეტაპზე დავიწყოთ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლება, როგორი ტიპის გატოლებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნა და შედგენა ვასწავლოთ და როგორ ვასწავლოთ?

მიზანშეწონილად ვთვლით, რომ წრფივი და წილად-წრფივი განტოლებების შედგენას მოსწავლეები დაწყებით კლასებში უნდა დაეუფლონ, მაგრამ თუ ეს ასე არ მოხდა და მოსწავლეებმა ეს ეტაპი უკვე გაიარეს, მაშინ საბაზო სკოლაში

განტოლებების შედგენა უნდა დავიწყოთ უმარტივესი სახის განტოლებების შედგენით, კერძოდ, საფუძვლიანად უნდა დამუშავდეს სხვადასხვა მოდიფიკაციის მთელკოეფიციენტებიანი, წილადის და ათწილადის შემცველი ერთუცნობიანი წრფივი განტოლებების შედგენის ხერხები, როცა განტოლების ფესვი წინასწარ არის შერჩეული. მიზანშეწონილია სქემის „იგივეობა $\rightarrow$ განტოლება“ გამოყენება.

საზოგადოდ, განტოლებების და განტოლებათა სისტემების შედგენა მოსწავლეებს უნდა დავავალოთ მას შემდეგ, რაც ისინი საფუძვლიანად დაეუფლებიან შესაბამისი სახის განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის ალგორითმულ და სპეციალურ ხერხებს, ამასთან, საკმაოდ რთული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების შედგენა სავალდებულა არ არის, რადგან ზოგჯერ მოსწავლე ყურადღებას არ ამახვმილებს ამა თუ იმ ნიუანსზე, რამაც შეიძლება შედგენილი განტოლების, თუ სისტემის ამუხსნადობა გამოიწვიოს და ეს შეიძლება გახდეს მოსწავლის საკუთარ შესაძლებლობებში დააეჭვების საბაბი და საკითხის შესწავლისადმი გულაცრუება გამოიწვიოს.

პედაგოგიურმა პრაქტიკამ დაადასტურა, რომ მოსწავლეები განტოლებების და განტოლებათა სისტემების შედგენის დროს ადვილად ახორციელებენ გადასვლას იგივეობიდან განტოლებაზე. მაგალითად,

1. ერთუცნობიანი წრფივი განტოლების შედგენა

ა) $(3\cdot 5+4(2\cdot 5-3)=43)\rightarrow(3\cdot x+4(2\cdot x-3)=43).$

ბ) $\left(3+\frac{2\cdot 3-7}{2}-\frac{3\cdot 3+1}{5}=5-\frac{3+6}{2}\right)\rightarrow\left(x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}\right).$

გ) $(3+2{,}25\cdot 4+2{,}6=2\cdot 4+5+0{,}4\cdot 4)\rightarrow(3+2{,}25x+2{,}6=2x+5+0{,}4x).$

2. ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემის შედგენა, რომელიც ორ წრფივ განტოლებას შეიცავს

$$\begin{cases}5+3\cdot 2=11\\ 7\cdot 5-10\cdot 2=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+3y=11\\ 7x-10y=10\end{cases}$$

შედგენილი სისტემის ამოხსნით მივიღებთ წინასწარ შერჩეულ ერთადერთ ამონახსნს $x=5;\quad y=2.$

3. კვადრატული განტოლების შედგენა

$$\left(5^2+3\cdot5-40=0\right)\rightarrow\left(x^2+3\cdot x-40=0\right)$$

შედგენილი განტოლების ერთ-ერთი ფესვია 5, ხოლო მეორე ფესვი ცნობილი გახდება ამ განტოლების ამოხსნის შემდეგ, ან ვიეტის თეორემის გამოყენებით.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სახელმძღვანელოებში ვიეტის თეორემის გამოყენებით გარჩეულია შესაბამისი მაგალითები, რომლის საშუალებითაც მოსწავლეებს შეუძლიათ შეადგინონ სათანადო კვადრატული განტოლები, როცა მისი ფესვები ცნობილია. რადგან ამ საკითხის სწავლებას სათანადო ყურადღება აქვს დათმობილი სკოლაში და მეთოდური თვალსაზრისითაც საკმაოდ დამუშავებულია, ამიტომ აქ აღარ შევჩერდებით.

4. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის შედგენა, რომელთაგან ერთი განტოლება კვადრატულია

$$\begin{cases}5^2+2\cdot3=31\\7\cdot5-10\cdot2=15\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2+3y=31\\7x-10y=15\end{cases}$$

შედგენილი სისტემის ამოხსნით მივიღებთ მის ორ ამონახსნს, რომელთაგან ერთი წინასწარ შერჩეული იყო $x_1=5;\ y_1=2$, ხოლო მეორე წყვილს იპოვიან სისტემის ამოხსნით.

განტოლების შედგენის განხილული ხერხი „იგივეობა$\rightarrow$ განტოლება“ თავისი სიმარტივის მიუხედავად ფსიქოლოგიურად და მეთოდიკურად მეტად ხელსაყრელია, რადგან ამ ხერხის გამოყენებით მისწავლეებს გზა ეხსნებათ მათთვის შეუცნობელ სამყაროში, სადაც ისინი თავს შემოქმედებად გრძნობენ.

სკოლის მესამე საფეხურზე, როცა მოსწავლეები განტოლებების და განტოლებათა სისტემების შედგენის საკმაო გამოცდილება ექნებათ, მიზანშეწონილია ეს პროცესი პარალელურად წარვმართოთ სქემით „განტოლება$\rightarrow$ ფესვები $\rightarrow$ განტოლება“. მაგალითად,

განტოლების ამოხსნა

განტოლება $\rightarrow$ ფესვები

მოვიყვანოთ მაგალითი

ამოვხსნათ ლოგარითმული განტოლება

$$\frac{\lg(2(x+1))}{\lg(x-3)}=2$$

განტოლებას აზრი აქვს, როცა $x>3,\ x\neq 4$

$$\lg(2(x+1))=2\lg(x-3),$$

$$2x+2=(x-3)^2,$$

$$2x+2=x^2-5x+9,$$

$$x^2-8x+7=0,$$

$$x_1=7,\quad x_2=1.$$

$x_1=7$ ფესვის შემოწმება.

$$\frac{\lg(2(7+1))}{\lg(7-3)}\overset{?}{=}2,$$

$$\frac{\lg 16}{\lg 4}\overset{?}{=}2,$$

$$\frac{2\lg 4}{\lg 4}\overset{?}{=}2,$$

$$2=2.$$

$x_2=1<3$ განტოლებას არ აკმაყოფილებს, რადგან ცვლადის ამ მნიშვნელობისათვის განტოლების მნიშვნელი არ არსებობს.

ამრიგად, მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x_1=7$.

განტოლების შედგენა

ფესვები $\rightarrow$ განტოლება

ვთქვათ, მოსწავლეებს შევთავაზეთ ანალოგიური განტოლების შედგენა, რომლის ფესვია $x=5$. მოცემული განტოლების ამოხსნის მსვლელობის ანალიზი და $x_1=7$ ფესვის შემოწმება საშუალებას გვაძლევს განტოლება შევადგინოთ სქემით „იგივეობა $\rightarrow$ განტოლება“.

მაგალითად, $\dfrac{2\lg 6}{\lg 4}=2,$

$$\frac{\lg 36}{\lg 4}=2.$$

შემოვიტანოთ მრიცხველში და მნიშვნელში რიცხვი 5, რომელიც შემდგომში შევცვალოთ x უცნობით.

$$\frac{\lg(4\cdot 5+16)}{\lg(2\cdot 5-4)}=2.$$

რიცხვი 5 შევცვალოთ x-ით.

$$\frac{\lg(4x+16)}{\lg(2x-4)}=2.$$

სურვილის მიხედვით მიღებული განტოლებას შევუცვალოთ ფორმა

$$\frac{\lg 4+\lg(x+4)}{\lg 2+\lg(x-2)}=2.$$

ამოხსნის მოსწავლე თავისივე შედგენილ განტოლებას და მიიღებს წინასწარ ჩაფიქრებულ ფესვს 5.

მოსწავლეები განტოლებათა ამოხსნის დროს ძალზე ხშირად უშვებენ ისეთ შეცდომებს, რომლებსაც ისინი გარეშე ფესვის მიღებამდე მიჰყავს. ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით დადასტურებულია, რომ მოსწავლეები განტოლებათა ამოხსნის დროს ყურადღებას აქცევენ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებითაც მოცემული განტოლება დაიყვანება უფრო მარტივ განტოლებაზე. დაყვანილი განტოლების ამოხსნის შედეგ მოსწავლეები ჩქარობენ მიღებული ფესვების გამოცხადებას და არ ახდენენ ნაპოვნი ფესვების შემოწმებას, რასაც უმთავრესად დროის სიმცირით ხსნიან. ამის მიზეზი ჩვენი აზრით იმაში მდგომარეობს, რომ სასწავლო სახელმძღვანელოები თითქმის არ შეიცავს ისეთ განტოლებებს, რომლებსაც გარეშე ფევები აქვს. ზოგჯერ ასეთი განტოლებები მიიღება ალგებრული ტექსტური ამოცანების ამოხსნის დროს, მაგრამ ამ სახის ამოცანების ამოხსნის შემდეგ გარეშე ფესვების შერჩევა ხდება ამოცანის პირობის მიხედვით. მაგალითად, საძებნი მანძილი არ შეიძლება გამოისახებოდეს უარყოფითი რიცხვით, ტურნირში მონაწილე სპორტსმენების რიცხვი არ შეიძლება იყოს წილადი რიცხვი, ჭურჭლის ტევადობა იყოს უარყოფითი და სხვ. მოსწავლეები განტოლებათა ამოხსნის დროს ყურადღებას არ აქცევენ იმას, თუ რატომ აქვს ამოცანის პირობის შესაბამისად შედგენილ განტოლებას გარეშე ფესვები. პედაგოგიური ექსპერიმენტით დადასტურდა, რომ მეთოდიკური თვალსაზრისით უმჯობესია მოსწავლეებს შევასწავლოთ ზოგიერთი სახის განტოლების გარეშე ფესვების არსებობის პირობები არა მარტო კონკრეტული მაგალითების განხილვით, არამედ ზოგად შემთხვევაში.

ისეთი განტოლებები ან განტოლებათა სისტემები, რომელთაც გარეშე ფესვები ან გარეშე ფესვი აქვს სასკოლო სახელმძღვანელოებში ძალზედ მცირეა. გარეშე ფესვების ან გარეშე ფესვის მქონე კონკრეტული სახის წილად-რაციონალური განტოლებების შედგენა საკმაოდ ძნელია და დიდ დროს მოითხოვს, როცა კოეფიციენტების მოძებნა ალალ-ბედზე ხდება. უმჯობესია თავიდანვე მივმართოთ ზოგად მეთოდს და დავადგინოთ პარამეტრებს შორის არსებული კანაონზომიერებები და მეთოდიკური მოთხოვნები კონკრეტული სახის წილად-რაციონალური განტოლებებისათვის.

განვიხილოთ საშუალო სკოლაში წილად-რაციონალური განტოლებების ყველაზე მეტად გავრცელებული ორი სახე და დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით დავსახოთ პრაქტიკული მოქმედებების გეგმა.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$\frac{x-m}{x-a}+\frac{t}{x^2-a^2}+\frac{x-n}{x+a}=0. \qquad (1)$$

გავარკვიოთ $a, t, m. n$ პარამეტრებს შორის დამოკიდებულება, რომლის დროსაც (1) განტოლება დაიყვანება ისეთ კვადრატულ განტოლებაზე, რომლის ფესვები გარეშეა (1) განტოლებისათვის.

(1) განტოლებაში შემავალი ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს არ ეკუთვნის $x=a$ და $x=-a$ მნიშვნელობები. (1) განტოლების ორთავე მხარე გავამრავლოთ $(x-a)(x+a)$ გამოსახულებაზე. მაშინ ის მიიღებს სახეს:

$$(x-m)(x+a)+t+(x-n)(x-a)=0$$

ანუ

$$2x^2-x(m+n)+t+an-am=0 \qquad (2)$$

ვთქვათ $x=a$, მაშინ მივიღებთ

$$t=2a(m-a).$$

t-ს მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) განტოლებაში, გვექნება

$$x^2-\frac{m+n}{2}\cdot x+a\left(\frac{m+n}{2}-a\right)=0 \qquad (3)$$

(3) განტოლების ერთი ფესვია $x_1=a$, მეორე ფესვს ადვილად ვიპოვით ვიეტის თეორემის შებრუნებული თეორემით

$$x_2=\frac{m+n}{2}-a.$$

ე.ი.

ა) $x_2=a$, თუ $n=4a-m;$

ბ) $x_2=-a$, თუ $n=-m.$

ამრიგად, (1) სახის განტოლებათა შედგენის დროს რეკომენდირიებულია შემდეგი ხერხი:

a და m-თვის ავირჩიოთ 0-ის არატოლი რაიმე მნიშვნელოებები პირობით $a \neq m.$

გამოვთვალოთ t-ს მნიშვნელობა ფორმულიდან $t = 2a(m - a).$

თუ მოითხოვება, რომ შედგენილ განტოლებას ჰქონდეს მხოლოდ ერთი გარეშე ფესვი, მაშინ n-ის არანულოვან მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი გარდა $4a - m$ და $-m$-სა.

თუ მოითხოვება, რომ შედგენილ განტოლებას არ ჰქონდეს არცერთი ფესვი, მაშინ n-ის არანულოვან მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ $4a - m$ ან $-m$. მაშინ ჩვენ მივიღებთ ორ გარეშე ფესვს.

გავარჩიოთ კონკრეტული მაგალითები:

ავირჩიოთ a და m-ის მნიშვნელობები ნებისმიერად $a = 1$ და $m = 3.$ მაშინ $t = -8$. n-ს მივცეთ სამი მნიშვნელობა ა) $n = 4 \cdot 1 + 3 = 7,$ ბ) $n = -m = 3,$ გ) $n = 4$ (n-ნებისმიერია გარდა 7 და 3-სა). შევადგინოთ (1) სახის სამი განტოლება a, m, t და n პარამეტრების შესაბამისი სამი მნიშვნელობისათვის;

ა) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} + \frac{x-7}{x+1} = 0,$

ბ) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} + \frac{x-3}{x+1} = 0,$

გ) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} + \frac{x+4}{x+1} = 0.$

შემოწმებით ადვილად დავადგენთ, რომ ა) და ბ) განტოლებებს ამონხსნი არა აქვს, ხოლო გ) განტოლებას აქვს ერთი ამონახსენი. მართლაც ა) შემთხვევაში $x_{1,2} = 1,$ ბ) შემთხვევაში $x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$ გ) შემთხვევაში $x_1 = 1, \quad x_2 = -4{,}5.$

ცხადია, რომ წილად-რაციონალურ განტოლებათა ყოველი მოდიფიკაცია მოითხოვს ხელახლა ვიპოვოთ დამოკიდებულებები a, m, t და n პარამეტრებს შორის. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი წილადის მნიშვნელი შეიცავს $x^2 - a^2$ ან $(x-a)(x-b)$ გამოსახულებებს, გარდაქმნების ჩატარება უნდა დავიწყოთ განტოლების

ორთავე მხარის გამრავლებით $\left(x^2-a^2\right)$-ზე ან $(x-a)(x-b)$-ზე. ამის შემდეგ t და n პარამეტრები უნდა გამოვსახოთ a და m-ით.

განვიხილოთ

$$\frac{x-m}{x-a}+\frac{t}{x^2-a^2}+n=0 \qquad (4)$$

სახის განტოლება.

ამ განტოლების ორთავე მხარის გამრავლება $\left(x^2-a^2\right)$ გამოსახულებაზე მოგვცემს:

$$x^2(1+n)+x(a-m)+t-am-a^2n=0 \qquad (5)$$

(5) განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ a პარამეტრი, მივიღებთ: $t=2a(m-a)$.

(5) განტოლებაში t პარამეტრი შევცვალოთ $2a(m-a)$ გამოსახულებით, მაშინ გადავალთ განტოლებაზე:

$$x^2-\frac{m-a}{1+n}\cdot x+a\frac{m-a(2+n)}{1+n}=0, \qquad (n\neq 1).$$

რომლის ფესვებია:

$$x_1=a, \quad x_2=\frac{m-a(2+n)}{1+n}, \qquad (6)$$

ე.ი. თუ $t=2a(m-a)$, სადაც $a\neq m$, მაშინ (4) სახის განტოლებას აქვს ერთი გარეშე ფესვი ნებისმიერი n-თვის. თუ ჩვენ გვინდა შევადგინოთ (4) სახის ისეთი განტოლება. რომელსაც აქვს ორთავე გარეშე ფესვი, მაშინ პარამეტრებისათვის უნდა დავადგინოთ დამატებითი პირობები. (6) განტოლებიდან მივიღებთ:

$x_1=a,$ და $x_2=a,$ როცა $n=\dfrac{m-a}{2a}-1, \quad (m\neq a, n\neq 1).$

$x_1=a,$ და $x_2=-a,$ ნებისმიერი n-თვის, მაგრამ როცა $a=m,$ მაშინ $t=0.$

როცა $n=-1$, მაშინ გვაქვს ერთი ფესვი $x=a.$პარამეტრებისათვის მიღებული ზოგადი შედეგები მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს თვითონ შეადგინონ (1) და (4) ტიპის კონკრეტული მაგალითები და შეამოწმონ აქვთ თუ არა შედგენილ განტოლებებს გარეშე ფესვი.

დამოუკიდებელი მუშაობისათვის რეკომენდირებულია მოსწავლეებმა თვითონ დაადგინონ დამოკიდებულებები

$$\frac{x-m}{x-a}+\frac{t}{(x-a)(x-b)}-\frac{x-n}{x-b}=0,$$

$$\frac{x-m}{x-a}+\frac{t}{x^2-a^2}+\frac{x-n}{x+a}=0$$

სახის განტოლებებისათვის, იმ პირობით, რომ განტოლებებს აქვთ ერთი ან ორი გარეშე ფესვი.

ჩვენს მიერ განხილული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების შედგენის უმარტივესი მაგალითები განხილულ უნდა იქნეს მთელ კლასთან, ხოლო შედარებით უფრო რთული განტოლებების და განტოლებათა სისტემების შედგენა უნდა განხორციელდეს შედარებით უფრო ძლიერ მოსწავლეებთან მათემატიკის ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე ან საწრეო მუშაობაზე.

მაგალითად, ამოხსენით პრამეტრის შემცველი განტოლება

$$\left(x^2-a\right)^2-6x^2+4x+2a=0 \qquad (7)$$

ამ განტოლების ამოხსნის ერთ-ერთი ეფექტური ხერხი ასეთია:

(7) განტოლება განვიხილოთ როგორც კვადრატული განტოლება პარამეტრის მიმართ:

$$x^4-2ax^2+a^2-6x^2+4x+2a=0;$$

$$a^2-2\left(x^2-1\right)a+\left(x^4-6x^2+4x\right)=0;$$

$$a_{1,2}=x^2-1\pm\sqrt{x^4-2x^2+1-x^4+6x^2-4x}$$

$$a_{1,2}=x^2-1\pm\sqrt{4x^2-4x+1} \qquad (8)$$

$$a_{1,2}=x^2-1\pm(2x-1) \qquad (9)$$

ამრიგად, (7) განტოლება დაიყვანება x ცვლადის მიმართ ორი კვადრატული განტოლების ამოხსნაზე

$$x^2-2x-a-2=0 \qquad (10)$$

$$x^2-2x-a=0 \qquad (11)$$

(10) და (11) განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ (7) განტოლების ოთხ ფესვს:

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{a+3};$$

$$x_{3,4}=-1\pm\sqrt{a+1}.$$

მაშასადამე, (7) განტოლებას აქვს

ა) ოთხი ნამდვილი x_1, x_2, x_3, x_4 ფესვი, როცა $a > 1$;

ბ) ორი ნამდვილი x_1, x_2 ფესვი, როცა $-3 < a < -1$;

გ) სამი ფესვი, როცა $a = -1$;

დ) ერთი ფესვი, როცა $a = -3$;

ე) არა აქვს ფესვები, როცა $a < 3$.

პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა, რომ მოსწავლეებისათვის საინტერესოა (7) განტოლების მსგავსი განტოლების შედგენა და ამოხსნა იმავე ხერხით. ამ დროს მეთოდიკურად მოსახერხებელია განვიხილოთ (7) განტოლების ამოხსნის ეტაპები ბოლოდან. ადვილი შესამჩნევია, რომ უნდა შევადგინოთ (9) სახის გამოსახულება. მაგალითად,

$$b_{1,2} = x^2 + 2 \pm (3x - 1) \qquad (12)$$

შევადგინოთ ორი კვადრატული განტოლება b პარამეტრით:

$$x^2 + 3x - b + 1 = 0;$$

$$x^2 - 3x - b + 3 = 0.$$

თუ ამ განტოლებების მარცხენა მხარეებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ მეოთხე ხარისხის განტოლებას x ცვლადის მიმართ

$$x^4 - (5 + 2b)x^2 + 6x + b^2 - 4b + 3 = 0,$$

ანუ

$$(x^2 - b)^2 - 5x^2 + 6x - 4b + 3 = 0. \qquad (13)$$

(13) განტოლება თავისი სირთულით ოლიმპიადის სახისაა და მისი ამოხსნა შესაძლებელია (7) განტოლების მსგავსად.

განტოლებათა შედგენის დროს ზოგჯერ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ისეთი მეთოდები და ხერხები, რომლებიც სასკოლო პროგრამას სცილდება, მაგრამ ხელს უწყობს მოსწავლეთა ლოგიკური და შემოქმედებითი აზროვნების განვითარებას. მაგალითისათვის განვიხილოთ განუსაზღვრელ კოეფიციენტთა მეთოდის გამოყენება განტოლებათა შედგენის დროს.

1) შევადგონოთ ირაციონალური განტოლება, რომელიც დაიყვანება კვადრატულ განტოლებაზე, როცა მოცემულია მისი ერთ-ერთი ფესვი, ვთქვათ $x_1 = 5.$ ეს დავალება შეიძლება შევასრულოთ ასე:

$$4 - 3 = 1$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$$

$$\sqrt{3 \cdot 5 + 1} - \sqrt{5 + 4} = 1$$

$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1.$$

ამოვხსნით რა უკანასკნელ ირაციონალურ განტოლებას, მივიღებთ ორ ამონახსნს, რომელთაგან ერთი აუცილებლად იქნება შერჩეული რიცხვი $x_1 = 5.$

2) ვთქვათ, მოითხოვება

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{cx + d} = 6 \qquad (14)$$

სახის ირაციონალური განტოლების შედგენა, რომელსაც აკმაყოფილებს ორი განსხვავებული ფესვი $x_1 = 1$ და $x_2 = 2.$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადები

$$\sqrt{ax + b} = u, \ \sqrt{cx + d} = v\,.$$

მასთან შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{cases} \sqrt{ax_1 + b} = u_1 = 4 \\ \sqrt{ax_2 + b} = u_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{cx_1 + d} = v_1 = 2 \quad (u_1 + v_1 = 6) \\ \sqrt{cx_2 + d} = v_2 = 1 \quad (u_2 + v_2 = 6) \end{cases}$$

შევადგინოთ განტოლებათა ორი სისტემა:

$$\begin{cases} ax_1 + b = 16 = u_1^2 \\ ax_2 + b = 25 = u_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} cx_1 + d = 4 = v_1^2 \\ cx_2 + d = 1 = v_2^2 \end{cases}$$

მოცემულ სისტემაში ჩავსვათ ფესვების $x_1 = 1$ და $x_2 = 2$ მნიშვნელობები, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ორ სისტემას, რომელიც ორ უცნობს შეიცავენ

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 16 \\ a \cdot 2 + b = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} c \cdot 1 + d = 4 \\ c \cdot 2 + d = 1 \end{cases}$$

ამოვხსნით ამ სისტემებს, მივიღებთ ოთხი პარამეტრის საძებნ მნიშვნელობებს:

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -3 \\ d = 7 \end{cases} \qquad (15)$$

ჩავსვათ პარამეტრის მიღებული მნიშვნელობები (15) განტოლებიდან (14) განტოლებაში, მივიღებთ საძებნ ირაციონალურ განტოლებას, რომელსაც აკმაყოფილებს ფესვები $x_1 = 1$ და $x_2 = 2.$

$$\sqrt{9x+7} + \sqrt{-3x+7} = 6 \qquad (16)$$

ვთქვათ, მოითხოვება (14) სახის განტოლების შედგენა, რომელიც დაიყვანება კვადრატული განტოლების ამოხსნაზე და მის ფესვებს არ წარმოადგენს რიცხვები $x_1 = 1$ და $x_2 = 2.$

ამ ამოცანის გადასაწყვეტად მეთოდიკურად მიზანშეწონილია შემდეგნაირად მოვიქცეთ;

1) შევადგინოთ (16) განტოლება, რომლის ფესვებია $x_1 = 1$ და $x_2 = 2.$

2) შევადგინოთ ამ განტოლების შეუღლებული განტოლება:

$$\sqrt{9x+7} - \sqrt{-3x+7} = 6 \quad (17)$$

(17) განტოლებას ამონახსნი არა აქვს, რადგან მისი ამოხსნის შედეგად მიღებული ფესვები $x_1 = 1$ და $x_2 = 2$ არ აკმაყოფილებენ (17) განტოლების შეუღლებულ (16) განტოლებას.

სკოლაში განტოლებათა და განტოლებათა სისტემების შედგენის სწავლება სასარგებლოა იმითაც, რომ მოსწავლეები ითვისებენ არა მარტო განტოლებათა შედგენის ხერხებს, არამედ საფუძვლიანად ეუფლებიან შესაბამისი სახის განტოლებათა ამოხსნის ალგორითმულ და სპეციალურ ხერხებს.

განტოლებათა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის და შედგენის ურთიერკავშირში სწავლების მიზანი, ტრადიციული სწავლებისაგან განსხვავებით იმაში მდგომარეობს, რომ მოსწავლეთა აზროვნება გადააქციოს მართვად პროცესად, ხოლო აზროვნების ძირითადი ხერხები ათვისების ძირითად საგნად. თანამედროვე სწავლება მიზნად ისახავს ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მოცემული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის მოძიება და მოცემულის საფუძველზე ახალი ინფორმაციის შექმნა. ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით მათემატიკის სწავლება უნდა წარვმართოთ მათემატიკური ცოდნის და იმ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების სწავლების შეწყვილებით.

§3. ტექსტური ალგებრული ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურება

მეთოდიკურ ლიტერატურაში ამოცანის ამოხსნის პროცესს ყოფენ ოთხ ეტაპად:

1. დასმული ამოცანის გაგება; 2. ამოცანის ამოხსნის გეგმის შედგენა; 3. შედგენილი გეგმის შესრულება; 4. მიღებული შედეგის შემოწმება [72],[41]..

ძირითადად მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოები შეიცავს ისეთ ტექსტურ ამოცანებს, რომლებიც ამოიხსნებიან განტოლების ან განტოლებათა სისტემის გამოყენებით, სადაც ცვლადთა რაოდენობა ემთხვევა განტოლებათა რაოდენობას და მასში შემავალი ყველა უცნობის გამოთვლა შესაძლებელია ცალსახად. ამის გამო მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის ფსიქოლოგიურად ძნელი აღსაქმელი და გადასაჭრელია ისეთი ტექსტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნის დროს მიღებული განტოლებისა, თუ განტოლებათა სისტემაში ცვლადთა რაოდენობა არ ემთხვევა განტოლებათა რაოდენობას. უნდა შევნიშნოთ, რომ მეთოდურ ლიტერატურაში ჯერ კიდევ საფუძვლიანად არ არის დამუშავებული ტექსტური ამოცანების ამოხსნის გეგმის შედგენის, შედგენილი შედგენილი გეგმის შესრულების და მიღებული შედეგის შემოწმების მეთოდიკური თავისებურებები იმ შემთხვევისათვის, როცა ცვლადთა რაოდენობა არ ემთხვევა სისტემაში შემავალი ცვლადების რაოდენობას.

ისეთი ტექსტური ამოცანები, რომელთა ამოხსნის დროს მიიღება ერთი განტოლება ან განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ცვლადთა რაოდენობა აღემატება განტოლებათა რაოდენობას, ძალიან ბევრია. თუ მხედვე:ლობაში არ მივიღებთ ისეთ ტექსტურ ამოცანებს, რომელთა პირობებს აკლია ესა თუ ის მონაცემი, მაშინ ასეთი ამოცანები შეიძლება ამოვხსნათ სხვადასხვა ხერხით, რომლებიც პირობითად შეიძლება დავყოთ სამ ტიპად:

1. ისეთი ტექსტური ამოცანები, რომლის პირობების ყველა მონაცემის ჩაწერა შეუძლებელია განტოლების სახით.

ასეთი ამოცანების ამოხსნის დროს ყოველთვის მიიღება განტოლება, ან განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ცვლადთა რაოდენობა მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე. ამ ტიპის ტექსტური ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია დამატებითი

პირობით, მაგალითად, ყველა ცვლადი დადებითია, ან ნატურალური რიცხვია. ზოგჯერ დამატებითი პირობა შეიძლება ალტერნატიულიც იყოს.

2. ისეთი ტექსტური ამოცანები, რორმლებშიც ცვლადების არც თუ ისე წარმატებული არჩევით მიიღება სისტემის k განტოლება n უცნობით $(k<n)$.

ამ ტიპის ტექსტური ამოცანები ახალი ცვლადების შემოღებით დაიყვანება ისეთ ტექსტურ ამოცანებზე, რომლებშიც ცვლადთა რაოდენობა განტოლებათა რაოდენობის ტოლია.

3. ისეთი ტექსტური ამოცანები, რომლებშიც ბოლომდეა გამოყენებული ამოცანის პირობის ყველა მონაცემი და მიღებულია განტოლებათა სისტემა, რომელშიც ცვლადთა რაოდენობა მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე, ამასთან ასეთი ტექსტური ამოცანები ახალი ცვლადების არანაირი გონებამახვილური შერჩევით არ დაიყვანება ისეთ ამოცანებზე, რომლებშიც ცვლადთა რაოდენობა განტოლებათა რაოდენობის ტოლია.

ცხადია, ასეთი სისტემის ამოხსნა, ე.ი. ყველა უცნობის პოვნა შეუძლებელია. მაშინ ისმის კითხვა: ხომ არ ნიშნავს ეს იმას, რომ ასეთი ტექსტური ამოცანების ამოხსნა შეუძლებელია? რასაკვირველია არა, რადგან ასეთ ტექსტურ ამოცანებში არ მოითხოვება არა ყველა უცნობის პოვნა, არამედ უცნობთა გარკვეული რაოდენობის გამოთვლა, კერძოდ, მოთხოვნილი სიდიდის პოვნა შესაძლებელია.

განვიხილოთ თითოეული ტიპის ტექსტური ამოცანის ამოხსნა ტიპების შესაბამისი თანმიმდევრობით.

ამოცანა 1. მოჭადრაკეთა ტურნირში მონაწილეობდა მეშვიდე კლასის სამი მოწავლე და მერვე კლასის რამდენიმე მოსწავლე. სამივე მეშვიდეკლასელმა ერთად 7 ქულა დააგროვა, ხოლო თითოეულმა მერვეკლასელმა დააგროვა ქულათა ერთი და იგივე რაოდენობა. რამდენი მერვეკლასელი მონაწილეობდა ტურნირში?

ამოხსნა. ვთქვათ, ტურნირში მონაწილეობდა x მერვეკლასელი და თითოეულმა დააგროვა t ქულა. მაშინ ყველა მერვეკლასელი დააგროვებდა xt ქულას, ხოლო ტურნირზე გათამაშდებოდა $(xt+7)$ ქულა. ტურნირში მონაწილეობდა $(x+3)$ მონაწილე, ე.ი. სულ გათამაშდებოდა $\frac{(x+3)(x+2)}{2}$ ქულა. ამიტომ ვწერთ განტოლებას:

$$xt + 7 = \frac{(x+3)(x+2)}{2} \qquad (1)$$

მივიღეთ ერთი განტოლება ორი უცნობით., რომლის ამოხსნას ვერ შევძლებთ, მაგრამ ჩვენ ამოცანის პირობა ჯერ სრულად არ გამოგვიყენებია, რადგან x ცვლადი გამოსახავს (1) განტოლებაში შემავალი მერვეკლასელების რაოდენობას, ამიტომ x ნატურალური რიცხვია. ტურნირში მონაწილე მოჭადრაკემ შეიძლება დააგროვოს ქულათა მთელი რაოდენობა ან მთელი რიცხვის ნახევარი, ამიტომ $2t$ რიცხვიც ნატურალურია. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $x = n, \quad 2t = m$. მაშინ (1) განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$m = n + 5 - \frac{8}{n} \qquad (2)$$

ამრიგად, მივიღეთ ორი ცვლადის შემცველი ერთი განტოლება,რომელიც უნდა ამოვხსნათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. ეს დამატებითი პირობა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ამოცანა.

მართლაც, იმისათვის, რომ m ნატურალური რიცხვი იყოს, $\frac{8}{n}$ რიცხვი უნდა იყოს ნატურალური, ე.ი. n უნდა იყოს 8-ის გამყოფი ამიტომ უნდა შევამოწმოთ აკმაყოფილებს თუ არა ამოცანის პირობას რიცხვები $n = 1, n = 2, n = 4, n = 8.$

როცა $n = 1$, მაშინ m უარყოფითია, ხოლო როცა $n = 2, n = 4, n = 8$, მაშინ m რიცხვი დადებითია. ამრიგად, ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს რიცხვები $n = 2, n = 4, n = 8$. ე.ი. ტურნირში მონაწილეობდა ან 2, ან 4, ან 8 მერვეკლასელი.

შევნიშნოთ, რომ განხილული ამოცანის მსგავსად ამ ტიპის ტექსტური ამოცანების პასუხი შესაძლოა ცალსახა არ იყოს. ცალსახა პასუხი რომ მიგვეღო, საჭირო იყო კიდევ ერთი დამატებითი პირობა, რომ ყველა მერვეკლასელმა დააგროვა არა მარტო ერთი და იგივე ქულების რაოდენობა, არამედ დააგროვა ქულათა მთელი რიცხვი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა მოვითხოვოთ, რომ t იყოს მთელი რიცხვი, ხოლო m ლუწი რიცხვი. რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $n = 8$.

შემოწმების დროს დამატებითი პირობის უგულვებელყოფამ შესაძლოა მიგვიყვანოს ამოცანის არასწორ ამოხსნამდე. მაგალითად, ამოცანის პირობა შესაძლოა ისე იყოს ჩამოყალიბებული, რომ მასში მოთხოვნილი სიდიდეების პოვნა

რაიმე სირთულეებთან არ იყოს დაკავშირებული, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ დამატებით პირობას, რომ ყველა ცვლადი ნატურალური რიცხვებია, მაშინ ასეთი ამოცანა ზოგჯერ შესაძლოა კორექტული არც იყოს.

მაგალითად, პირველი ტიპის ერთი ამოცანის ამოხსნის დროს საკმაოდ უხეში შეცდომაა გაპარული ისეთ სოლიდურ ჟურნალში, როგორიცაა Математика в школе. კონკრეტულად [69]:

ამოცანა 2. სამ ყუთში 200 ვაშლი იყო. როდესაც პირველი ყუთიდან ამოიღეს მასში ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{1}{3}$, მეორედან-$\frac{2}{5}$ და მესამედან-$\frac{13}{15}$, სულ ამოღებული აღმოჩნდა 70 ვაშლი. რამდენ ვაშლს ამოიღებენ, თუ მეორე და მესამე ყუთებიდან შესაბამისად ამოიღეს ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{1}{10}$ და $\frac{4}{5}$.

ამოხსნა. ვთქვათ, პირველ, მეორე და მესამე ყუთებში ვაშლების რაოდენობა შესაბამისად იყო x, y, z. მაშინ ამოცანის პირობის ძალით

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ \frac{x}{3}+\frac{2y}{5}+\frac{13z}{15}=70 \end{cases}$$

უნდა ვიპოვოთ $\frac{x}{10}+\frac{4z}{5}$.

სისტემის მეორე განტოლების ორთავე მხარე გავამრავლოთ 3-ზე და გავითვალისწინო პირველი განტოლება

$$x+y+z+\frac{y}{5}+\frac{24}{15}z=210,$$

$$2\left(\frac{y}{10}+\frac{4z}{5}\right)=10.$$

საიდანაც

$$\frac{y}{10}+\frac{4z}{5}=5.$$

მაშასადამე, მეორე და მესამე ყუთებიდან ამოუღიათ 5 ვაშლი.

აქ მათემატიკური თვალსაზრისით ყველაფერი წესრიგშია, საძებნი სიდიდე საკმაოდ მარტივად იქნა მიღებული.

ჩავატაროთ ანალიზი. იგულისხმება, რომ ყუთში ვაშლების რაოდენობა გამოისახება ნატურალური რიცხვებით, მაშინ რადგან მესამე ყუთიდან ამიღეს მასში ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{13}{15}$, ამიტომ ამ ყუთში ვაშლების რაოდენობა უნდა იყოს $15n, \quad 1 \le n \le 13.$ ე.ი. მესამე ყუთში უნდა იყოს არანაკლებ 15 ვაშლისა. მეორედ, მესამე ყუთიდან ამოიღეს მასში ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{4}{5}$ და მეორე ყუთში ჩაწყობილი ვაშლების. $\frac{1}{10}$ ამიტომ, მარტო მესამე ყუთიდან ამოღებული ვაშლების რაოდენობა იქნება

$$\frac{4}{5} \cdot 15n = 12n, \quad 1 \le n \le 13.$$

ე.ი. არანაკლებ 12 (?). ამოცანის ამოხსნით კი ჩანდა, რომ მეორე და მესამე ყუთებიდან სულ ამოღებული იყო 5 ვაშლი, რაც ცხადია შეუძლებელია.

განხილული კონკრეტული მაგალითი ნათელ წარმოდგენას იძლევა მიღებული შედეგის შემოწმების ჩატარების აუცილებლობაზე.

ამოცანა 3. A და B პუნქტებიდან ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტობუსი გამოვიდა და ერთმანეთს დღის 12 საათზე შეხვდა. თუ პირველი ავტობუსის სიჩქარე იქნება 2-ჯერ მეტი, ხოლო პირველი ავტობუსის სიჩქარე დარჩება იგივე, მაშინ შეხვედრა მოხდება 56 წთ-ით ადრე. თუ მეორე ავტობუსის სიჩქარე იქნება 2-ჯერ მეტი, ხოლო პირველი ავტობუსის სიჩქარე დარჩება იგივე, მაშინ შეხვედრა მოხდება 65 წთ-ით ადრე. განსაზღვრეთ ავტობუსების შეხვედრის დრო იმ შემთხვევაში, როცა ორივე ავტობუსის სიჩქარე 2-ჯერ მეტია თავდაპირველ სიჩქარეზე.

ამოხსნა. ვთქვათ, პირველი ავტობუსის სიჩქარეა v_1 კმ/წთ, ხოლო მეორე ავტობუსის სიჩქარეა v_2 კმ/წთ, ხოლო A და B პუნქტებს შორის მანძილია s კმ. ვთქვათ, t წთ არის დრო, რომელიც ავტობუსებს დსჭირდებათ პირველ შეხვედრამდე. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ შეხვედრის ის დრო, როცა ორთავე ავტობუსის სიჩქარე 2-ჯერ მეტია თავდაპირველ სიჩქარეზე. მოძრაობის ეს დრო შეადგენს $\frac{t}{2}$ წთ-

ს. მაგრამ, მაშინ ავტობუსები ერთმანეთს 12 სთ-მდე $\frac{t}{2}$ წთ-ით ადრე შეხვდებიან.

ამრიგად, ამ ამოცანაზე პასუხის მისაღებად უნდა ვიპოვოთ $\dfrac{t}{2}$.

პირველ შეხვედრამდე პირველმა ავტობუსმა გაიარა v_1t კმ, ხოლო მეორე ავტობუსმა v_2t კმ. ჯამში მათ გაიარეს s კმ. ე.ი. მივიღეთ სისტემის პირველი განტოლება

$$s = v_1t + v_2t\,.$$

მეორედ, პირველი ავტობუსის სიჩქარე იყო $2v_1$ კმ/წთ, ხოლო მეორე ავტობუსის იგივე v_2 კმ/წთ. შეხვედრამდე მათ დახარჯეს $(t-56)$წთ, ამიტომ მივიღეთ სისტემის მეორე განტოლება

$$s = 2v_1(t-56) + v_2(t-56)\,.$$

მესამედ, პირველი ავტობუსის სიჩქარე იგივე იყო v_1 კმ/წთ, ხოლო მეორე ავტობუსის სიჩქარე კი- $2v_2$ კმ/წთ. შეხვედრამდე მათ დახარჯეს $(t-65)$წთ, ამიტომ მივიღეთ სისტემის მესამე განტოლება:

$$s = v_1(t-65) + 2v_2(t-65)\,.$$

ე.ი. მივიღეთ განტოლებათა სისტემა, რომლის სამი განტოლება ოთხ უცნობს შეიცავს. ასეთი სისტემის მიღება განაპირობა ცვლადების არც თუ ისე წარმატებულმა შერჩევამ. მიღებულ სისტემაზე ყურადღებით დაკვირვება და მისი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ცვლადები შეგვეძლო ისე შეგვერჩია, რომ მიგვეღო სამუცნობიანი სისტემა სამი განტოლებით. ეს შესაძლებელია მაგალითად ასე:

ჩავთვალოთ AB გზა 1-ის ტოლად. x-ით აღვნიშნოთ ამ გზის ის ნაწილი, რომელსაც პირველი ავტობუსი გადის 1 წთ-ში, ხოლო y-ით გზის ის ნაწილი, რომელსაც მეორე ავტობუსი გადის 1წთ-ში. t-თი აღვნიშნოთ დროის ის შუალედი, რომელიც ავტობუსებმა დახარჯეს პირველ შეხვედრამდე. ამოცანაზე პასუხის მისაღებად უნდა ვიპოვოთ $\dfrac{t}{2}$. ანალოგიური მსჯელობით შევადგენთ სამცვლადიან განტოლებას სამი უცნობით:

$$\begin{cases}(x+y)t=1,\\(2x+y)(t-56)=1,\\(x+2y)(t-65)=1.\end{cases}$$

ამ სისტემიდან გამოვრიცხავთ რა x და y ცვლადებს, მივიღებთ t-ს მიმართ განტოლებას

$$\frac{3}{t}=\frac{1}{t-56}+\frac{1}{t-65}.$$

გამარტივების შემდეგ ეს განტოლება ჩაიწერება სახით: $t^2-242t+10920=0.$

შევნიშნოთ, რომ ეს განტოლება შეგვეძლო მიგვეღო თავდაპირველი სისტემიდანაც, თუ პირველად გამოვრიცხავდით s-ს, ხოლო შემდეგ v_1-ს, რომლის გამორიცხვისთანავე გამოირიცხებოდა v_2-იც.

უკანასკნელი განტოლების ფესვებია $t_1=182$ და $t_2=60$. ამოცანის პირობის თანახმად $t.>65$, ამიტომ განტოლების მეორე ფესვი ამოცანას არ აკმაყოფილებს. ე.ი. $t=182$ და შეხვედრა მოხდებოდა 12 სთ-მდე $\frac{t}{2}=91$ წთ-ით ადრე. ამრიგად, შეხვედრა შედგება 10 სთ და 29 წთ-ზე.

ამოცანა 4. ამანათრბენის დისტანცია დაყოფილია ოთხ ეტაპად. ცნობილია, რომ მესამე ეტაპი ოთხჯერ გრძელია პირველზე. მეორე და მეოთხე ეტაპების ჯამს დამატებული 5 პირველი ეტაპის სიგრძე 1500 მ-ია. იპოვეთ ამანათრბენის დისტანციის სიგრძე.

ამოხსნა. ეტაპების სიგრძეები აღვნიშნოთ შესაბამისად x_1, x_2, x_3 და x_4-ით, ხოლო მთლიანად დისტანციას s-ით (მ). ამოცანის პირობიდან ვწერთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases}x_3=4x_1\\x_2+x_4+5x_1=1500\\x_1+x_2+x_3+x_4=s\end{cases}$$

ამ სისტემის სამი განტოლება ხუთ უცნობს შეიცავს.

ცხადია, რომ ცვლადების გონებამახვილური შერჩევით შეუძლებელია ისეთი სისტემის შედგენა, რომელშიც ცვლადთა რაოდენობა დაემთხვევა განტოლებათა

რაოდენობას. ცხადია აგრეთვე ისიც, რომ მიღებული სისტემიდან შეუძლებელია ყველა ხუთივე უცნობის პოვნა. მიუხედავად ამისა, ამოცანის პირობაზე პასუხის მიღება ძალზედ მარტივია. მართლაც, საკმარისია სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შევკრიბოთ წევრ-წევრად და გავითვალისწინოთ მესამე განტოლება, რომ მივიღოთ

$$s = 1500 \text{ მ.}$$

განვიხილოთ ერთი არსებითი მეთოდიკური ხასიათის შენიშვნა, რომელიც მეორე და მესამე ტიპის ტექსტურ ამოცანებს ეხება. მეორე და მესამე ტიპის კამოცანებს შორის არსებით განსხვავებაზე საუბარი მათი პრაქტიკული გადაწყვეტის დროს მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილი არ არის, რადგან მიღებული არასტანდარტული სისტემიდან ყოველთვის შესაძლებელია საძიებელი სიდიდის პოვნა. საზოგადოდ, ასეთი ტექსტური ამოთანების ამოხსნის დროს ახალი ცვლადების შენმოღება ამოხსნის შემდგომ მსვლელობას არ ამარტივებს, ამიტომ სასურველია ასეთი ტიპის ტექსტური ამოცანების ამოხსნის პროცესი ახალი ცვლადების შემოღების გარეშე ჩავატაროთ.

შედარებით იშვიათად გვხვდება ისეთი სახის ტექსტური ამოცანები, რომელთა ამოსახსნელად შედგენილ სისტემაში განტოლებების რაოდენობა აღემატება ცვლადების რაოდენობას.

სასკოლო პრაქტიკაში არ განიხილება ისეთი ტექსტური ამოცანები, რომელთა ამოსახსნელად შედგენილი სისტემა წინააღმდეგობრივ განტოლებებს შეიცავს, რადგან ისინი მეთოდიკური თვალსაზრისით არაფრის მომცემია, ამიტომ ასეთ ტექსტურ ამოცანებს ჩვენ არ განვიხილავთ.

ამოცანა 5. სამმა მუშამ უნდა დაამზადოს დეტალების განსაზღვრული რაოდენობა. თავიდან სამუშაოს შეუდგა მხოლოდ პირველი მუშა, რომელსაც გარკვეული დროის შემდეგ შეუერთდა მეორე მუშა. როცა შესრულებული იყო მთელი სამუშაოს $\frac{1}{6}$ მათ შეუერთდა მესამე მუშაც. სამუშაო მათ ერთდროულად დაამთავრეს. რამდენი საათი მუშაობდა პირველი მუშა, თუ სამივე მუშამ დეტალების ერთნაირი რაოდენობა დაამზადა, ამასთან მესამე მუშამ 2 სთ-ით ნაკლები იმუშავა, ვიდრე მეორე მუშამ.

აგრეთვე, ცნობილია რომ, პირველ და მეორე მუშებს ერთად მუშაობით საჭირო რაოდენობის დეტალების დამზადება შეუძლიათ 9 სთ-ით უფრო ადრე, ვიდრე მარტო მესამე მუშას.

ამოხსნა. ვთქვათ, მარტო პირველმა მუშამ იმუშავა v საათი, ამოცანის პირობის ძალით პირველმა და მეორე მუშამ ერთად იმუშავა 2 საათი, ხოლო სამივე მუშამ ერთად იმუშავა u საათი. ვთქვათ, პირველ მუშას შეუძლია ერთ საათში შეასრულოს მთელი სამუშაოს $\frac{1}{z}$ ნაწილი, მეორე მუშას $\frac{1}{y}$ ნაწილი, მესამე მუშას კი - $\frac{1}{z}$ ნაწილი.

პირველი მუშა მარტო მუშაობით v საათში შეასრულებდა მთელი სამუშაოს $\frac{v}{x}$ ნაწილს. პირველი და მეორე მუშები ერთად მუშაობით 2-სთ-ის განმავლობაში შეასრულებდენ მთელი სამუშაოს $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ნაწილს. ამოცანის პირობის ძალით, მათ შეასრულეს მთელი სამუშაოს $\frac{1}{6}$ ნაწილი. ე.ი.

$$\frac{v}{x}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{6}. \qquad (3)$$

სამივე მუშამ ერთად u საათის მუშაობით შეასრულა მთელი სამუშაოს $\frac{5}{6}$ ნაწილი. ამიტომ

$$u\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{5}{6}. \qquad (4)$$

რადგან სამივე მუშამ ერთი და იგივე რაოდენობის დეტალი დაამზადა, ამიტომ პირველმა მუშამ $(u+2+v)$ საათის განმავლობაში შეასრულა მთელი სამუშაოს $\frac{1}{3}$ ნაწილი. ამიტომ

$$\frac{u+2+v}{x}=\frac{1}{3} \qquad (5)$$

მეორე მუშამ იმუშავა რა $(u+2)$ საათი, აგრეთვე შეასრულა მთელი სამუშაოს $\frac{1}{3}$ ნაწილი. ამიტომ

$$\frac{u+2}{y}=\frac{1}{3} \qquad (6)$$

მესამე მუშამ იმუშავა u საათი, მანაც შეასრულა მთელი სამუშაოს $\frac{1}{3}$ ნაწილი. ამიტომ

$$\frac{u}{z}=\frac{1}{3} \qquad (7)$$

პირველ და მეორე მუშებს ერთად მუშაობის დროის რაღაც w საათში შეუძლიათ მთელი სამუშაოს შესრულება, ამიტომ

$$w\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1. \qquad (8)$$

აგრეთვე, მესამე მუშა მარტო $(w+9)$ საათის განმავლობაში ასრულებს მთელ სამუშაოს, ამიტომ

$$\frac{w+9}{z}=1. \qquad (9)$$

ამოცანის პირობაში მოთხოვნილია, რამდენ ხანს იმუშავა პირველმა მუშამ. ე.ი. უნდა გამოვთვალოთ

$T=v+2+u$. საბოლოოდ მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{v}{x}+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{6} \\ u\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{u+2+v}{x}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2+u}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{u}{z}=\dfrac{1}{3} \\ w\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \\ \dfrac{w+9}{z}=1 \\ T=v+2+u \end{cases} \qquad (10)$$

რომელიც რვა განტოლებას შეიცავს შვიდი უცნობით. ეს იმიტომ მოხდა, რომ ამოცანის ამოხსნის დასაწყისში ჩვენ დავწერეთ ზედმეტი განტოლება. (10) სისტემის ანალიზი ცხადყოფს, რომ ზედმეტია სისტემის პირველი, მეორე მესამე, მეოთხე და მეხუთე განტოლებებიდან ერთ-ერთი. მართლაც, შევკრიბოთ სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები და წევრ-წევრად გამოვაკლოთ მესამე და მეოთხე განტოლებები, მივიღებთ სისტემის მეხუთე განტოლებას.

ამოვხსნათ მიღებული (10) სისტემა. მხედველობაში არ მივიღოთ, რომ ერთ-ერთი განტოლება ზედმეტია.

(10) სისტემის მეექვსე და მეშვიდე განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ w. მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z-9}. \qquad (11)$$

(10) სისტემის მეხუთე განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$u = \frac{z}{3} \qquad (12)$$

თუ (11) და (12) გავითვალისწინებთ (10) სისტემის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$z = 27.$$

მარტივი გაოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$u = 9. \quad w = 18, \quad y = 33, \quad x = 39\frac{3}{5}, \quad v = 2\frac{1}{5}, \quad T = 13\frac{1}{5}.$$

ცვლადთა მიღებული მნიშვნელობები აკმაყოფილებს (10) სისტემის ყველა განტოლებას.

მაშასადამე, პირველ მუშას სამუშაოს შესასრულებლად დასჭირდებოდა $13\frac{1}{5}$ საათი, ანუ 13 სთ და 12 წთ.

განხილული ამოცანა საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა:

ტექსტური ამოცანის ამოხსნის დროს ზედმეტი განტოლება მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა ამოცანა შეიცავს ზედმეტ პირობას, რომელიც დანარჩენ მონაცემებს არ ეწინააღმდეგება. ასეთი ტექსტური ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია, რადგან მიღებული სისტემა შეიცავს ისეთ განტოლებებს რომელთა საშუალებით შეაძლებელია ამოცანის პირობით მოთხოვნილი ყველა უცნობის გამოთვლა, რომელიც ამავე დროს ზედმეტ განტოლებასაც აკმაყოფილებს.

ამოცანა 6. სამი მგზავრი ერთდროულად გამოდის A პუნქტიდან და ერთდროულად ბრუნდება იმავე პუნქტში. მგზავრები მოძრაობენ ისეთი მარშრუტით, რომელიც AB, BC, CD და AD მონაკვეთების შემცველ ტოლფერდა ABCD ტრაპეციას წარმოადგენს, სადაც AB და CD ფერდებია. თითოეულ მონაკვეთზე ყველა მგზავრის სიჩქარე მუდმივია და ტოლია: პირველი მგზავრისთვის 6, 8, 5 და 8 კმ/სთ. შესაბამისად მეორე მგზავრისათვის -7, 7, 6 და 8 კმ/სთ. მესამე მგზავრის სიჩქარე თითოეულ უბანზე მუდმივია და ტოლია ან 7კმ/სთ ან 8 კმ/სთ-ის. ამასთან ის მთელ გზაზე სიჩქარეს მხოლოდ ერთხელ იცვლის. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძისა და ფერდის შეფარდება.

ამოხსნა. ტოლფერდა ABCD ტრაპეციის გვერდები აღვნიშნოთ x, y, x და z -ით. (ნახ.1). ამოცანის პირობით პირველი და მეორე მგზავრი მთელი გზის გავლის შემდეგ

ერთდროულად დაბრუნდა საწყის პუნქტში, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{x}{6}+\frac{z}{8}.$$

საიდანაც

$$\frac{y}{x}=\frac{16}{5} \qquad (1)$$

მეორე განტოლებას, რომელიც გამოსახავს პირველი და მესამე მგზავრების მთელი გზის გავლის შემდეგ ერთდროულად დაბრუნების ფაქტის მათემატიკურ აღწერას, ჯერჯერობით ვერ დავწერთ, რადგან უცნობია გზის რომელ უბნებზე როგორი სიჩქარით მგზავრობდა მესამე მგზავრი. ჩვენთვის ცნობილია, რომ მესამე მგზავრმა სიჩქარე მგზავრობის მთელი დროის განმავლობაში მხოლოდ ერთხელ შეცვალა, ამიტომ უნდა განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა:

1. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ უბანზე იყო 7 კმ/სთ, მეორე, მესამე და მეოთხე უბნებზე-8 კმ/სთ.

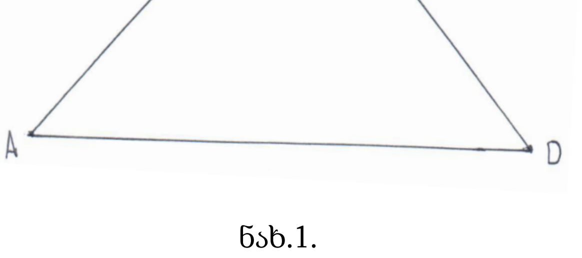
2. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ და მეორე უბნებზე იყო 7 კმ/სთ, მესამე და მეოთხე უბნებზე-8 კმ/სთ.

3. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ, მეორე და მესამე უბნებზე იყო 7 კმ/სთ, მეოთხე უბანზე-8 კმ/სთ.

4. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ უბანზე იყო 8 კმ/სთ, მეორე, მესამე და მეოთხე უბნებზე-7 კმ/სთ.

5. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ და მეორე უბნებზე იყო 8 კმ/სთ, მესამე და მეოთხე უბნებზე-7 კმ/სთ.

6. მესამე მგზავრის სიჩქარე პირველ, მეორე და მესამე უბნებზე იყო 8 კმ/სთ, მეოთხე უბანზე-7 კმ/სთ.



ნახ.1.

მესამე მგზავრის სიჩქარის ცვლილების ყველა შესაძლო 6 ვარიანტს შეესაბამება მეორე განტოლების 6 ვარიანტი. კერძოდ:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{x+y+z}{8};$

2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{7}+\frac{x+z}{8};$

3) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{7}+\frac{z}{8};$

4) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{8}+\frac{x+y+z}{7};$

5) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{8}+\frac{x+z}{7};$

6) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{8}+\frac{z}{7};$

პირველი განტოლება წინააღმდეგობრივია. მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{y}{x}=\frac{83}{15}$$

რაც ეწინააღმდეგება (1) ტოლობას. ასევე (1) ტოლობას ეწინააღმდეგება მესამე განტოლებიდან მიღებული შედეგი

$$\frac{y}{x}=\frac{68}{15}.$$

მეოთხე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{z}{x}=\frac{7}{3} \qquad (2)$$

მეხუთე განტოლებიდან

$$\frac{z}{x}=\frac{83}{15} \qquad (3)$$

მეექვსე განტოლებიდან კი

$$\frac{z}{x}=\frac{98}{15} \qquad (4)$$

მიღებული (2), (3) და (4) დამოკიდებულებები (1) ტოლობას არ ეწინააღმდეგებიან. თუ ამოცანს ამოხსნის პროცესს ამით დავამთავრებთ და არ მოვახდენთ მიღებული ამონახსნების შესწავლას, ამით რასაკვირველია დროს მოვიგებთ, მაგრამ ჯერ ერთი,

დავუშვებთ შეცდომას და მეორეც შევამცირებთ ამოცანის ამოხსნის სწავლების როლს. ამიტომ უნდა მოხდეს მიღებული ამონახსნების შემოწმება, ე.ი. უნდა გაგრძელდეს ამოცანის ამოხსნის პროცესი, რაშიც მოსწავლეებს დაეხმარებათ გეომეტრიიდან მიღებული ცოდნა, კერძოდ, მოსწავლეებს შევახსენებთ, რომ ტეხილის სიგრძე მის ბოლოებს შორის მანძილზე ნაკლები არ არის, ამიტომ ტრაპეციამ რომ იარსებოს უნდა შესრულდეს უტოლობები:

$$x+y+x \ge z \text{ და } x+z+x \ge y$$

ანუ

$$2x+y \ge z \text{ და } 2x+z \ge y .$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ:

$$\left|\frac{z}{x}-\frac{y}{x}\right| \le 2 \qquad (5)$$

(3) და (4) დამოკიდებულებები (5) პირობებს არ აკმაყოფილებენ. მას აკმაყოფილებს მხოლოდ (2) ტოლობა. მართლაც,

$$\frac{y}{x}=\frac{16}{5}>\frac{7}{3}=\frac{z}{x},$$

ამიტომ მცირე ფუძეა z.

ამრიგად, ტრაპეციის მცირე ფუძის შეფარდება ფერდთან $\frac{7}{3}$ -ის ტოლია.

§4. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამონახსნთა შემოწმების მეთოდიკური თავისებურებები

ზოგადად, ამოცანების ამოხსნის პროცესი ითვალისწინებს მიღებული ამონახსნის (ამონახსნების) ანალიზს და ამონახსნის (ამონახსნების) შემოწმებას. განტოლებების, განტოლებების სისტემების და ერთობლიობების შემოწმება მეტად მნიშვნელოვანი პროცესია, რომელსაც სასწავლო პრაქტიკაში დროის სიმცირის გამო ნაკლები ყურადღება ექცევა მასწავლებლების მიერ და ამიტომ მოსწავლეთა უმრავლესობა მიღებული ამონახსნის შემოწმებას აღარ ახდენს, რის გამოც უმრავლეს შემთხვევაში ამოცანების ამოხსნის დროს პასუხებს აკლიათ ფესვები ან შეიცავენ გარეშე ფესვებს.

იმ შემთხვევაშ, როცა საქმე გვაქვს განტოლებებთან ან განტოლებებათა სისტემებთან, რომელთა ამოხსნის დროს არ ხდება განტოლებათა ნაწილების ისეთი მათემატიკური გარდაქმნა, რომელიც არ არღვევს ტოლფასობას, მაშინ ცხადია, რომ გარეშე ფესვი არ გაჩნდება, ხოლო იმ შემთხვევებში, როცა ხდება განტოლებათა ნაწილების ისეთი მათემატიკური გარდაქმნა, რომელიც არღვევს ტოლფასობას, მაშინ საჭიროა და აუცილებელი მიღებული ფესვების შემოწმება. ყველა სახის განტოლების, განტოლებათა სისტემების და ერთობლიობების ამონახსნების შემოწმებას გარდა ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემებისა მარტივად ახორციელებენ მოსწავლეები, ხოლო ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემების შემთხვევაში ეს პროცესი საკმაოდ გაძნელებულია, რის მიზეზადაც საკითხის სირთულეს მივიჩნევთ და მეთოდიკურად მიზანშეწონილად მიგვაჩნია გავაკეთოთ ზოგიერთი სახის შენიშვნა და ვრცლად შევჩერდეთ მასზედ.

ტრიგონომეტრიული განტოლებების ან გატოლებათა სისტემების ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეთა უმრავლესობა ვერ ახერხებს მიღებული ამონახსნების შემოწმებას, რაც უმრავლეს შემთხვევაში იწვევს გარეშე ფესვების გაჩენას, ან უფრო იშვიათად ამონახსნთა დაკარგვას. ეს გამოწვეულია იმით, რომ მეთოდიკურ ლიტერატურაში სათანადოდ არ არის დამუშავებული ტრიგონომეტრიული

განტოლებების ამონახსნთა შემოწმების მეთოდიკური თავისებურებები, ყურადღების მიღმა რჩება ისეთი ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენება, რომელთა განსაზღვრის არეების სხვადასხვაა და ა.შ.

ჩვენ შევეცადეთ სწავლების პროცესი ისე აგვეგო, რომ გარკვეულწილად შეგვევსო ეს ხარვეზი, რისთვისაც გამოვიყენეთ ტრიგონომეტრიული განტოლებების და მათი სისტემების შემოწმების სპეციალური ხერხი, რომელიც დაფუძნებულია ამონახსნთა საბაზისო სერიასა და საბაზისო ნახევარინტერვალის ცნებებთან. სწავლების პროცესში მიზანშეწონილია დავადგინოთ ის კრიტერიუმები, რომელთა შესრულების დროს შესაძლებელია ტრიგონომეტრიული განტოლებების და მათი სისტემების ტრადიციული ხერხის-რიცხვითი წრეწირის გამოყენება. ტრიგონომეტრიული განტოლებების და მათი სისტემების შემოწმების წარმოდგენილი ხერხის უპირატესობა დადასტურებულია პედაგოგიური ექსპერიმენტით, რომელიც ჩატარდა სხვადასხვა პროფილისა და სხვადასხვა აკადემიური მომზადების ჯგუფებში.

$F(x)=0$ სახის ტრიგონომეტრიული განტოლების შემოწმების დროს ყოველთვის მიზანშეწონილი არ არის რიცხვითი წრეწირის გამოყენება. ასეთი შემოწმება შესაძლებელია, როცა $y=F(x)$ ფუნქციის პერიოდია $T=\frac{2\pi}{n}$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, როცა $T\neq\frac{2\pi}{n}$, მაშინ ასეთი მეთოდით შემოწმებამ შეიძლება მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნამდე. მაგალითისათვის განვიხილოთ განტოლება:

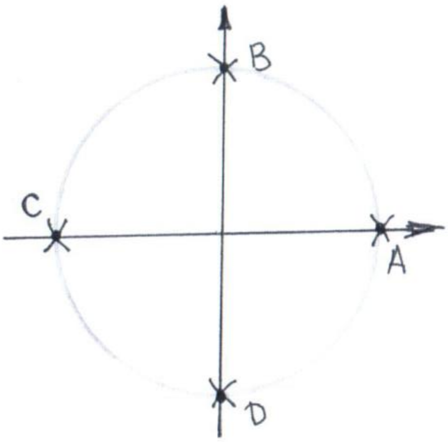
$$\frac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}}=0\,.$$

მრიცხველის ნულთან გატოლების შემდეგ მივიღებთ:

$$x=\frac{\pi}{2}k,\quad \left(k\in Z\right).$$

თუ გამოვსახავთ ამ ამონახსნებს რიცხვით წრეწირზე წერტილები A,B,C და D (ნახ. 2). ხოლო შემდეგ გადავშლით იმ წერტილებს, რომლებზედაც ნულის ტოლი ხდება მნიშვნელი, შეიძლება დავასკვნათ, რომ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს. მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება, როცა $x=-\frac{\pi}{2}$ (წერტილი D), როცა $x=4\pi$

(წერტილი A), როცა $x=\frac{5\pi}{2}$ (წერტილი B), როცა $x=\pi$ (წერტილი C), მაგრამ იმის დაშვება, რომ განტოლებას ამონახსნი არა აქვს არასწორია. მართლაც $x=0$ განტოლების ფესვია.



ნახ. 2.

მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია ტრიგონომეტრიული განტოლებების შემოწმების დაწყების წინ მოსწავლეებს საფუძვლიანად გავამეორებინოთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობისა და ძირითადი პერიოდების განსაზღვრებები, რისთვისაც გამოვიყენოთ შესაბამისი თვალსაჩინო მასალა, ცხრილები, დიაგრამები და სხვ. ამასთან მოსწავლეებს უნდა განვუმარტოთ, რომ ზოგჯერ $y=F(x)$ ფუნქციის პერიოდის პოვნა დამოკიდებულია რამდენიმე ტრიგონომეტრიული ფუნქციის პერიოდის პოვნაზე, რომლებსაც სხვადასხვა არგუმენტები აქვთ. მაგალითად,

$$F(x)=\sin\frac{3}{2}x+4\sin\frac{4}{3}x+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

ფუნქციის პერიოდის პოვნისათვის საჭიროა თავდაპირველად ვიპოვოთ მასში შემავალი ფუნქციების ძირითადი პერიოდები. ამრიგად, $F(x)$ ფუნქციის პერიოდი დამოკიდებულია $\sin\frac{3}{2}x$, $\sin\frac{4}{3}x$, $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციების ძირითად პერიოდებზე.

ამ ფუნქციათა ძირითადი პერიოდებია:

$$T_1=\frac{4}{3}\pi,\quad T_2=\frac{3}{2}\pi,\quad T_3=4\pi.$$

დავიყვანოთ $T_1, \quad T_2, \quad T_3$ რიცხვები საერთო მნიშვნელზე

$$T_1 = 8 \cdot \frac{\pi}{6}, \quad T_2 = 9 \cdot \frac{\pi}{6}, \quad T_3 = 24\frac{\pi}{6}.$$

ვიპოვოთ რიცხვების 8, 9 და 24-ის უმცირესი საერთო ჯერადი, რომელიც 72-ის ტოლია, მაშინ $F(x)$ ფუნქციის პერიოდია

$$T = 72 \cdot \frac{\pi}{6} = 12\pi.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ ხერხით ყოველთვის შეუძლებელია ძირითადი პერიოდის პოვნა. მაგალითად,

$$y = \frac{\cos 2x}{\sin 6x}$$

ფუნქციისა.

მართლაც, $y = \cos 2x$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi ,$$

ხოლო $y = \sin 6x$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია

$$T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

გვაქვს

$$T_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{3}, \quad T_2 = 1 \cdot \frac{\pi}{3}. \text{ უ.ს.ჯ } (1,3)=3,$$

ე.ი.

$$T = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$

არის $y = \frac{\cos 2x}{\sin 6x}$ ფუნქციის პერიოდი.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ ფუნქციის პერიოდია $\frac{\pi}{2}$, ე.ი. π -ზე ნაკლები, რაც ნიშნავს, რომ π ძირითადი პერიოდი არ არის. მართლაც,

$$\frac{\cos 2\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\sin 6\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(2x \pm \pi\right)}{\sin\left(6x \pm 3\pi\right)} = \frac{-\cos 2x}{-\sin 6x} = \frac{\cos 2x}{\sin 6x}.$$

ტრიგონომეტრიული განტოლებების შემოწმების დროს თავიდან რომ ავიცილოთ ის უხერხულობები, რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი, შემოვიღოთ პერიოდული ფუნქციის საბაზისო ნახევარინტერვალის ცნება, რომლის შესწავლა მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საშუალო სკოლაში მთელ კლასთან.

ვთქვათ, $y = F(x)$ პერიოდული ფუნქციაა და T მისი დადებითი პერიოდია. ნებისმიერი T სიგრძის ნახევარინტერვალს ვუწოდოთ $F(x)$ ფუნქციის T ნახევარინტერვალი. ყოველ T ნახევარინტერვალზე T პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქცია მიიღებს ყველა თავის მნიშვნელობას. შევნიშნოთ, რომ T ნახევარინტერვალის ზოგიერთ წერტილზე ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრული არც იყოს. ვიცით. რა $y = F(x)$ ფუნქციის ფესვები T ნახევარინტერვალზე, ადვილად ვიპოვით ფუნქციის ყველა ფესვს.

მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ არის $y = F(x)$ ფუნქციის ფესვები ერთ-ერთ T ნახევარინტერვალზე. მაშინ $F(x) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნებია:

$$x_1 = \alpha_1 + k_1 T, x_2 = \alpha_2 + k_2 T, \cdots, x_n = \alpha_n + k_n T \,,$$

სადაც $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ნებისმიერი მთელი რიცხვებია.

T პერიოდის მქონე ფუნქციის T ნახევარინტერვალების სიმრვლიდან გამოვყოთ $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ ნახევარინტერვალი. ამ ნახევარინტერვალს ვუწოდოთ მთავარი T ნახევარინტერვალი ან საბაზისო ნახევარინტერვალი. ცხადია. რომ T ნახევარინტერვალად ყველაზე რაციონალურია ავიღოთ ძირითადი პერიოდი, მაგრამ ეს ყოველთვის შესაძლებელი არ არის. ნახევარინტერვალი $\left[-\frac{\pi}{\varpi}, \frac{\pi}{\varpi}\right[$ საბაზისოა $y = \sin(\varpi x + \alpha)$ და $y = \cos(\varpi x + \alpha)$ ფუნქციებისათვის, ხოლო ნახევარინტერვალი $\left[-\frac{\pi}{2\varpi}, \frac{\pi}{2\varpi}\right[$ საბაზისოა $y = tg(\varpi x + \alpha)$ და $y = \mathrm{c}tg(\varpi x + \alpha)$ ფუნქციებისათვის.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $F(x) = 0$ ტრიგონომეტრიული განტოლება, სადაც $F(x)$ არის T პერიოდის მქონე პერიოდული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია. ამ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის $y = F(x)$ ფუნქციის T

ნახევარინტერვალს ვუწოდოთ ამონახსნთა ელემენტარული სერია, ხოლო ელემენტარულ სერიას. რომელიც ეკუთვნის საბაზისო ნახევარინტერვალს, საბაზისო სერია. როდესაც ცნობილია $F(x)=0$ ტრიგონომეტრიული განტოლების კერძო ამონახსენთა სიმრავლე, რომელიც შეადგენს ერთ ელემენტარულ სერიას და ვიცით $y=F(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ მარტივად ჩაიწერება $F(x)=0$ ტრიგონომეტრიული განტოლების ზოგადი ამონახსნები. ამ მიზნისთვის უმჯობესია გამოვიყენოთ საბაზისო სერია. ვაჩვენოთ ნათქვამი მაგალითზე.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{3}+(-1)^k\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi k.$$

k პარამეტრს მივცეთ მნიშვნელობები

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

მივიღებთ კერძო ამონახსნებს:

$$x=\cdots,-9\pi,-8\frac{1}{3}\pi,-5\pi,-4\frac{1}{3}\pi,-\pi,-\frac{\pi}{3},3\pi,3\frac{2}{3}\pi,7\pi,7\frac{2}{3}\pi,\cdots$$

$F(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის საბაზისო ნახევარინტერვალია $[-2\pi,2\pi[$. ამ ნახევარინტერვალს ეკუთვნის კერძო ამონახსენთა სიმრავლე $\left\{-\pi,-\frac{\pi}{3}\right\}$. ეს არის მოცემული განტოლების ამონახსნების საბაზისო სერია.

$F(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ფუნქციის პერიოდია 4π. ამიტომ სხვა ელემენტარული სერიები შედგება იმ კერძო ამონახსნებისაგან, რომლებიც საბაზისო ამონახსნებისაგან განსხვავდებიან $4\pi n$-ით.

როცა $n=-2$, მივიღებთ ელემენტარულ სერიას $\left\{-9\pi,-8\frac{1}{3}\pi\right\}$.

როცა $n=-1$, მივიღებთ ელემენტარულ სერიას $\left\{-5\pi, -4\frac{1}{3}\pi\right\}$.

როცა $n=0$, მივიღებთ ელემენტარულ სერიას, რომელიც საბაზისოა.

როცა $n=-1$, მივიღებთ ელემენტარულ სერიას $\left\{3\pi, 3\frac{2}{3}\pi\right\}$.

როცა $n=2$, მივიღებთ ელემენტარულ სერიას $\left\{7\pi, 7\frac{2}{3}\pi\right\}$.

და ა.შ.

ცნობილია $F(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ფუნქციის პერიოდი და საბაზისო სერია, ჩავწეროთ $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ ტრიგონომეტრიული განტოლების ზოგადი ამონახსნები შემდეგი სახით:

$$x_1=-\pi+4\pi k,\ \ x_2=-\frac{\pi}{3}+4\pi n.$$

ცხადია, ეს ამონახსნები ემთხვევა ზემოთ ნაპოვნ

$$x=\frac{\pi}{3}+(-1)^k\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+2\pi k.$$

ამონახსნებს, მაგრამ ჩანაწერში გამოყენებულია ბაზისური სერია და ზოგად ამონახსნებს აქვს უფრო თვალსაჩინო სახე. განტოლებების შემოწმების ერთ-ერთ ხერხს წარმოადგენს ნაპოვნი ამონახსნების უშუალო ჩასმა მოცემულ განტოლებაში. ტრიგონომეტრიული განტოლებებისათვის ხშირად საკმარისია შევამოწმოთ მხოლოდ საბაზისო ამონახსნები.

განვიხილოთ ასეთი ტრიგონომეტრიული განტოლება.

ამოცანა 2. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$tgx+ctgx=\frac{2}{\sin 4x}.$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin 4x},$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 4x},$$

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x},$$

$$\sin 4x - \sin 2x = 0,$$

$$\sin x \cos 3x = 0.$$

უკანასკნელი განტოლების ამოხსნა დაიყვანება განტოლებათა შემდეგი ერთობლიობათა ამოხსნაზე

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos 3x = 0.\end{array}\right.$$

საიდანაც

$$\left[\begin{array}{l}x_1 = \pi k,\\ x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} n.\end{array}\right.$$

სადაც $k, n \in Z$.

განტოლების ამოხსნის დროს ჩვენს მიერ ჩატარებული იყო ისეთი გარდაქმნები (მნიშვნელისაგან განთავისუფლება, განტოლებათა ერთობლიობაზე გადასვლა), რომლებმაც შეიძლება შეგვძინა გარეშე ფესვები, ამიტომ ნაპოვნი ფესვები აუცილებლად უნდა შევამოწმოთ.

შემოწმების მიზნით ნაპოვნი ზოგადი ამონახსნებიდან გამოვყოთ საბაზისო ამონახსნები.

$y = tgx + ctgx - \dfrac{2}{\sin 4x}$ ფუნქციის ძირითადი პერიოდია π. განვიხილოთ საბაზისო ნახევარინტერვალი $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $x_1 = \pi k$ ამონახსნებიდან საბაზისო ნახევარინტერვალს ეკუთვნის მხოლოდ ერთი $x = 0$ წერტილი, ხოლო $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} n$ ამონახსნებიდან საბაზისო ნახევარინტერვალს ეკუთვნის წერტილები $\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$.

ე.ი. $\left\{0, \dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ სიმრავლე შეიცავს მოცემული განტოლების საბაზისო ამონახსნებს. ჩავსვათ რიგრიგობით ეს ამონახსნები მოცემულ განტოლებაში.

ჩასმის შედეგად დავრწმუნდებით, რომ განტოლებას აკმაყოფილებს მხოლოდ $-\frac{\pi}{6}$ და $\frac{\pi}{6}$.

ამრიგად, საბაზისო სერიაა $\left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$, ხოლო განტოლების ზოგად ამონახსნებს აქვს სახე:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

დავუბრუნდეთ განტოლებას

$$\frac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}} = 0.$$

რადგან $y = \sin 2x$ ფუნქციის პერიოდია $T_1 = \pi$, ხოლო $y = \sin\frac{2x+\pi}{3}$ ფუნქციის პერიოდია $T_2 = 3\pi$. ამიტომ $y = \frac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}}$ ფუნქციის პერიოდია $T = 3\pi.$

განტოლების ამოსახსნელად საკმარისია გამოვიკვლიოთ ყველა კერძო ამონახსნი $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ საბაზისო ნახევარინტერვალში.

$x = \frac{\pi}{2}k$ ამონახსნებიდან ამ ინტერვალში მოთავსებულია ამონახსნები

$$-\frac{3}{2}\pi. -\pi, -\frac{\pi}{2}. 0, \frac{\pi}{2}. \pi .$$

ეს ამონახსნები ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, შემოწმებით დავადგენთ, რომ $x = -\frac{\pi}{2}$ და $x = \pi$ გარეშე ფესვებია. დარჩენილი კერძო ამონახსნები $T = 3\pi$ პერიოდის გათვალისწინებით გვაძლევს ამონახსნთა შემდეგ ერთობლიობას

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{3\pi}{2} + 3\pi k, \\ x_2 = -\pi + 3\pi l, \\ x_3 = 3\pi n, \\ x_4 = \frac{\pi}{2} + 3\pi p. \end{array}\right.$$

სადაც $k,l,n,p\in Z$.

მიღებული ამონახსნებიდან პირველი და მესამე, მეორე და მეოთხე ამონახსნები შეიძლება გავაერთიანოთ და მოცემული განტოლების ამონახსნები ჩავწეროთ სახით:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3\pi}{2}+3\pi k, \\ x_2=\dfrac{\pi}{2}(3l+1). \end{array}\right.,$$

რომლებიც ასევე შეიძლება გავაერთიანოთ და ჩავწეროთ სახით:

$$x=\frac{\pi}{2}m\text{ , სადაც } m\neq 3l-1,\ (l\in Z).$$

განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითი.

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0\,.$$

ამოხსნა. გარდავქმნათ განტოლება შემდეგნაირად

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{2}\cos 3x\,.$$

ავახარისხოთ განტოლების ორთავე მხარე კვადრატში. მივიღებთ:

$$1+\sin 2x=2\sin^2 3x\,,$$

საიდანაც

$$1+\sin 2x=1+\cos 6x\,,$$

$$\sin 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)=0\,,$$

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\,.$$

ამოსახსნელი განტოლება ტოლფასია შემდეგი ერთობლიობისა:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0, \\ \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0. \end{array}\right.$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\left[\begin{array}{l} 4x-\dfrac{\pi}{4}=\pi k, \\ 2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n. \end{array}\right.$$

ანუ

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{4}k, \\ x_2=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n. \end{array}\right.$$

შემოწმება. მიღებული ზოგადი ამონახსნები შესაძლოა შეიცავდეს გარეშე ფესვებსაც, რადგან შესრულებულია არატოლფასი გარდაქმნა-კვადრატში ახარისხება. ვიპოვოთ განტოლებაში შემავალი ფუნქციის ნახევარინტერვალი. რადგან $y=1+\sin 2x$ და $y=\cos 3x$ ფუნქციათა პერიოდებია შესაბამისად $T_1=\pi$ და $T_2=\dfrac{2\pi}{3}$. ამიტომ

$$y=1+\sin 2x-\sqrt{2}\cos 3x$$

ფუნქციის პერიოდია $T=2\pi$. ე.ი. საბაზისო ნახევარინტერვალია $[-\pi,\pi[$.

$x_1=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{4}k$ ამონახსნებიდან შევარჩიოთ ის კერძო ამონახსნები, რომლებიც $[-\pi,\pi[$ საბაზისო ნახევარინტერვალს ეკუთვნიან. ამისათვის k-ს მიმართ ამოვხსნათ უტოლობა

$$-\pi\le\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}<\pi,$$

$$-16\le 1+4k<16,$$

$$-\frac{17}{4}\le k<\frac{15}{4}.$$

გვაქვს

$$k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3.$$

k-ს ამ მნიშვნელობებს $x_1=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{4}k$ ამონახსნებიდან შეესაბამება შემდეგი კერძო ამონახსნები:

$$-\frac{15\pi}{16},\quad -\frac{11\pi}{16},\quad -\frac{7\pi}{16},\quad -\frac{3\pi}{16},\quad \frac{\pi}{16},\quad \frac{5\pi}{16},\quad \frac{9\pi}{16},\quad \frac{13\pi}{16}.$$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ ამონახსნებიდან შევარჩიოთ ის კერძო ამონახსნები, რომლებიც $[-\pi, \pi[$ საბაზისო ნახევარინტერვალს ეკუთვნიან. ამისათვის n-ს მიმართ ამოვხსნათ უტოლობა

$$-\pi \le \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < \pi ,$$

$$-8 \le 3 + 4n < 8 ,$$

$$-\frac{11}{4} \le n < \frac{5}{4} .$$

გვაქვს

$$n = -2, -1, 0, 1 .$$

n-ის ამ მნიშვნელობებს $x_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ ამონახსნებიდან შეესაბამება შემდეგი კერძო ამონახსნები:

$$-\frac{5\pi}{8}, \quad -\frac{\pi}{8}, \quad \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{7\pi}{8} .$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ მოცემულ განტოლებათა საბაზისო ნახევარინტერვალში აქვს 12 კერძო ამონახსნი

$$A = \left\{ -\frac{15\pi}{16}, \quad -\frac{11\pi}{16}, \quad -\frac{7\pi}{16}, \quad -\frac{3\pi}{16}, \quad \frac{\pi}{16}, \quad \frac{5\pi}{16}, \quad \frac{9\pi}{16}, \quad \frac{13\pi}{16}, -\frac{5\pi}{8}, \quad -\frac{\pi}{8}, \quad \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{7\pi}{8} \right\} .$$

A სიმრავლე შეიცავს მოცემული განტოლების ამონახსნთა საბაზისო სერიას. რომ ვიპოვოთ ეს სერია A სიმრავლიდან უნდა გამოვყოთ ის ამონახსნები, რომლებიც მოცემულ განტოლებას არ აკმაყოფილებენ. რისთვისაც გამოვიყენოთ უტოლობათა სისტემა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ რომელი ამონახსნები მდებარეობს ამონახსნთა შესაძლო არეში, კერძოდ, აკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას

$$\begin{cases} 1 + \sin 2x \ge 0, \\ \cos 3x \ge 0. \end{cases}$$

ამ პირობების გათვალისწინების შემდეგ კვადრატში ახარისხება ტოლფასი გარდაქმნაა, რადგან ნებისმიერი x-თვის $1 + \sin 2x \ge 0$, ამიტომ საკმარისია A

სიმრავლიდან ამოვარჩიოთ ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $\cos 3x \geq 0$.

$\alpha_1 = -\frac{15\pi}{16}$ მნიშვნელობისათვის

$$\cos 3\left(-\frac{15\pi}{16}\right) = \cos\frac{45\pi}{16} = \cos\left(\frac{13\pi}{16} + 2\pi\right) = \cos\frac{13\pi}{16} < 0.$$

ამრიგად, $\alpha_1 = -\frac{15\pi}{16}$ არ აკმაყოფილებს უტოლობას $\cos 3x \geq 0$. ამიტომ ეს მნიშვნელობა არ ეკუთვნის საბაზისო სერიას. ანალოგიურად დავადგენთ, რომ საბაზისო სერიას არ ეკუთვნის მნიშვნელოები:

$$-\frac{7\pi}{16}, \quad -\frac{3\pi}{16}, \quad \frac{5\pi}{16}, \quad \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{7\pi}{8}.$$

საბოლოოდ საბაზისო სერია შეიცავს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\left\{-\frac{11\pi}{16}, \quad -\frac{5\pi}{8}, \quad -\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{16}, \quad \frac{9\pi}{16}, \quad \frac{13\pi}{16}\right\}.$$

საბაზისო სერიის გამოყენებით მოცემული განტოლების ამონახსნები ჩაიწერება ასე:

$$x_1 = -\frac{11\pi}{16} + 2\pi k, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi l, \quad x_3 = -\frac{\pi}{8} + 2\pi m,$$
$$x_4 = \frac{\pi}{16} + 2\pi n, \quad x_5 = \frac{9\pi}{16} + 2\pi p, \quad x_6 = \frac{13\pi}{16} + 2\pi q,$$

ამოცანა 4. ამოხსენით ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 9^{2tgx + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{tgx} = 2. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემა გარდავქმნათ ასე:

$$\begin{cases} 9^{2tgx} \cdot 9^{\cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{tgx} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81^{tgx} \cdot 9^{\cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{tgx} = 2. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $9^{\cos y} = u, \quad 81^{tgx} = v.$

მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} uv = 3, \\ u - v = 2. \end{cases}$$

რომლის ფესვებია $v_1=1, u_1=3$ და $v_2=-3, u_2=-1$. ცხადია, რომ $u>0$ და $v>0$, ამიტომ $v_2=-3, u_2=-1$ ფესვები არ გამოდგება. დაგვრჩა

$$\begin{cases} 9^{\cos y}=3 \\ 81^{tgx}=1 \end{cases}.$$

საიდანაც

$$\begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \\ tgx=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi n, \\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k. \end{cases} \qquad (n,k\in Z).$$

ამ შემთხვევაში ჩასმით უშუალოდ დავადგენთ, რომ ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია $\left(\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, სადაც $(n,k\in Z)$.

ამოცანა 5. ამოხსენით ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები წევრ-წევრად შევკრიბოთ და მიღებული გამოსახულების ორთავე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2}$-ზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

მიღებული სისტემის პირველ განტოლებაში გავითვალისწინოთ

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

და სისტემა ჩავწეროთ სახით:

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\sin\frac{\pi}{6}\sin y+\cos\frac{\pi}{6}\cos y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლების მარცხენა და მარჯვენა მხარეები წარმოადგენენ სინუსების არგუმენტების ჯამს, კერძოდ, გვაქვს:

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+y\right), \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+\frac{\pi}{4}+y+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\dfrac{x+\frac{\pi}{4}-y-\frac{\pi}{3}}{2}=0, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

მიღებული სისტემა ტოლფასია შემდეგი ერთობლიობებისა

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x+y+\frac{7\pi}{12}}{2}=0, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\dfrac{x-y-\frac{\pi}{12}}{2}=0, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+y+\frac{7\pi}{12}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x-y-\frac{\pi}{12}}{2}=\pi n, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{12}+2\pi n, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases} \end{array}\right.$$

სადაც $k,n\in Z$.

ერთობლიობის პირველი სისტემის პირველი განტოლებიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ x და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, გვექნება

$$\begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{12}-y+2\pi k, \\ \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}-y+2\pi k\right)=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}-y\right)=\sqrt{3}\cos y.$$

ანუ

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\cos y+\sin\frac{5\pi}{12}\sin y\right)=\sqrt{3}\cos y,$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right),$$

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right),$$

ჩავსვამთ სისტემის მეორე განტოლებაში და მოვახდენთ მარტივ მათემატიკურ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$tgy=1,$$

საიდანაც

$$y=\frac{\pi}{4}+\pi m,\quad m\in Z.$$

შესაბამისად,

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi\left(2k+m\right),\ k,n\in Z.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2k+m$ გამოსახულება გაირბენს ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, როცა $k\in Z$ და $n\in Z$ ნებისმერი მთელი რიხვებია, ამიტომ გვექნება:

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k_1,\ k_1\in Z.$$

ანალოგიურად, ერთობლიობის მეორე სისტემის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ

$$y=-\frac{\pi}{4}+\pi q,\quad q\in Z.$$

შესაბამისად,

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi\left(2n+q\right),\ q,n\in Z.$$

თუ ჩავატარებთ იგივე მსჯელობას, რაც ზემოთ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n_1,\ n_1\in Z.$$

თუ ვისარგებლებთ ამონახსნთა გაერთიანებით, მარტივად მივიღებთ, რომ

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi l,\quad y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi r,\quad \left(l,r\in Z\right).$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნების შემოწმებისათვის გავთვალისწინებული უნდა იქნეს x-ისა და y-ის სერიების შერჩევა, კერძოდ ეს სერიები ისე შევარჩიოთ, რომ ერთდროულად $\sin x$ და $\sin y$-ს, $\cos x$ და $\cos y$-ს ერთნაირი ნიშნები ჰქონდეთ.

I თავის დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები

1. საქართველოში განათლების რეფორმის წარმატებით განხორციელება დიდად არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორი ლოგიკური აზროვნების და მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარებით აღჭურვილი დაამთავრებს ახალგაზრდა სკოლას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია მოსწავლე დაეუფლოს ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს და საძიებო ხერხებს, რომელიც შემდგომში მას საშუალებას მისცემს თვითონვე შეადგინოს იმავე ტიპის ამოცანები. მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ამოცანის ამოხსნა, ჩამოყალიბება, შედგენა, რისთვისაც შეიძლება გამოიყენოს მათემატიკური თვისებები, დამოკიდებულებები, გამოთვლები, გაზომვები, აგებები, გარდაქმნები და სხვ.

2. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოები ფუნქციური დანიშნულებით შეესაბამება სქემას „თეორია → ამოცანები“. ჩვენ ვთვლით, რომ უმჯობესია სწავლებაში დამკვიდრდეს სქემა „ამოცანები → თეორია → ამოცანები“, რომელიც აუცილებელია საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში განმავითარებელი სწავლების პრინციპების დასამკვიდრებლად და საშუალებას იძლევა განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, მისი გამოყენების საშუალებით, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვებაში.

3. მოსწავლეებისათვის განტოლებებისა და გატოლებების სისტემების შედგენის სწავლება მეთოდურად საკმაოდ დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მეტად ზომიერ და ფაქიზ მოპყრობას მოითხოვს. მისი მიზანმიმართული სწავლება მოსწავლეთა დაინტერესებას იწვევს და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებას ეხმარება. მიზანშეწონილია სქემის „იგივეობა → განტოლება“ გამოყენება. მოსწავლეები ითვისებენ არა მარტო ამოცანათა შედგენის ხერხებს, არამედ საფუძვლიანად ეუფლებიან შესაბამისი სახის ამოცანების ამოხსნის ალგორითმულ და სპეციალურ ხერხებს.

4. განტოლებათა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის და შედგენის ურთიერკავშირში სწავლების მიზანი, ტრადიციული სწავლებისაგან განსხვავებით იმაში მდგომარეობს, რომ მოსწავლეთა აზროვნება გადააქციოს მართვად პროცესად, ხოლო აზროვნების ძირითადი ხერხები ათვისების ძირითად საგნად. თანამედროვე სწავლება მიზნად ისახავს ისეთი უნარების განვითარებას, როგორიცაა მოცემული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის მოძიება და მოცემულის საფუძველზე ახალი ინფორმაციის შექმნა. ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით მათემატიკის სწავლება უნდა წარვმართოთ მათემატიკური ცოდნის და იმ ცოდნის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების სწავლების შეწყვილებით.

5. სასწავლო პროცესში მიზანშეწონილად ვთვლით ტექსტური ალგებრული ამოცანების ჩართვას, რომლის ამოხსნის დროს მიღებულ განტოლებასა თუ განტოლებათა სისტემაში ცვლადთა რაოდენობა არ ემთხვევა განტოლებათა რაოდენობას. ასეთი ამოცანების ამოხსნა მოითხოვს მასწავლებლის მიერ სპეციალურად შედგენილ მეთოდურ გეგმას. გეგმის შესრულების შემდგომ მეტად მნიშვნელოვანია მიღებული ამონახსნის შემოწმება და გამოყენებული ამოხსნის სპეციალური ხერხის მეთოდური ანალიზი.

6. მასწავლებლის პრაოფესიული ცოდნა-ჩვევების უმნიშვნელოვანეს მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ამოხსნის სპეციალური, კერძო ხერხების ცოდნა, არამედ რამდენად გააზრებულად და გაცნობიერებულად ფლობს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების თეორიულ საფუძვლებს. ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების თეორიული საფუძვლების ცოდნა სწვლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანა, მისი ერთ-ერთი დიდაქტიკური პრინციპია. ვთვლით, რომ ამოცანების ამოხსნის თეორიულ საფუძვლებს მათემატიკის ყველა მასწავლებელი უნდა ფლობდეს.

II თავი

განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება მათემატიკის სასკოლო კურსში

§1. ტრიგონომეტრიულ განტოლებებზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება მათემატიკის სასკოლო კურსში

ზოგჯერ განტოლება ან განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია ჩვეულებრივი ტრადიციული სტანდარტული ფორმით, მაგრამ მისი ამოხსნა საკმაოდ რთულია, მოითხოვს რთული მათემატიკური გარდაქმნების ჩატარებას და სასწავლო დროის ისედაც მცირე ბიუჯეტს საგრძნობლად ამცირებს. მაშინ, როცა შესაძლებელია გამოივიყენოთ მეთოდურად გამართლებული ამოხსნის ძიების სპეციალური ხერხები, რომლებიც ამოხსნის პროცესს საგრძნობლად ამარტივებს და სასკოლო პრაქტიკაში მისი დანერგვა კარგ ეფექტს იძლევა, რაც დაადასტურა ჩვენს მიერ ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

ზოგიერთი ირაციონალური განტოლების ამოსახსნელად შესაძლებელია დამხმარე ცვლადი ისე შევარჩიოთ, რომ მისი დაყვანა მოხდეს ისეთ ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე, რომლის ამოხსნა გაცილებით მარტივია. ამ დროს განტოლებაში შემავალი ირაციონალობისათვის მოსახერხებელია უცნობის შეცვლა მოხდეს შემდეგნაირად:

1. თუ განტოლება შეიცავს $\sqrt{a^2-x^2}$ რადიკალს, მაშინ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ჩასმა $x=a\cos t$ ან $x=a\sin t$;

2. თუ განტოლება შეიცავს $\sqrt{a^2+x^2}$ რადიკალს, მაშინ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ჩასმა $x=atgt$;

3. თუ განტოლება შეიცავს $\sqrt{x^2 - a^2}$ რადიკალს, მაშინ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ჩასმა $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{x^2+16} - x = \frac{10}{\sqrt{x^2+16}}. \qquad (1)$$

ამოხსნა. განტოლების დასაშვები მნიშვნელობებია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $x = 4tgt$. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. მაშინ (1) განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$\frac{4}{\cos t} - 4tgt = \frac{5\cos t}{2} \qquad (2)$$

რადგან ყველა განსახილავი t-თვის $\cos t \neq 0$, ამიტომ როცა $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, (2) განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$8(1-\cos t) = 5(1-\sin^2 t)$$

საიდანაც $\sin t = 1$ ან $\sin t = \dfrac{3}{5}$. ამ ამონახსნებიდან $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ შუალედს ეკუთვნის მხოლოდ $t = \arcsin\dfrac{3}{5}$. საიდანაც $tgt = \dfrac{3}{4}$. ამიტომ $x = 3$.

ამოცანა 2. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{25-x^2} - \frac{x}{3} = \frac{12}{\sqrt{25-x^2}}. \qquad (3)$$

ამოხსნა. განიტოლების დასაშვები მნიშვნელობათა სიმრავლეა $|x| < 5$. შემოვიღოთ დამხმარე ცვლადი $x = 5\sin t$, სადაც $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, მაშინ (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$5\cos t - \frac{5}{3}\sin t = \frac{12}{5\cos t} \qquad (4)$$

რადგან $\cos t \neq 0$, ამიტომ (4) განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$75\cos^2 t - 25\sin t\cos t - 36 = 0. \quad (5)$$

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობის გამოყენებით (5) განტოლებიდან მივიღებთ

$$36\sin^2 t+25\sin t\cos t-39\cos^2 t=0$$

ერთგვაროვან განტოლებას. რადგან $\cos t\neq 0$, ამიტომ თუ განტოლების ორთავე მხარეს გავყოფთ $\cos^2 t$ -ზე, მივიღებთ

$$36tg^2 t+25tgt-39=0,$$

საიდანაც $tgt=-\frac{13}{9}$ ან $tgt=\frac{3}{4}$.

რადგან $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, ამიტომ პირველ შემთხვევაში $\sin t=-\frac{13}{5\sqrt{10}}$, მეორეში კი $\sin t=\frac{3}{5}$.

საიდანაც $x_1=-\frac{13}{\sqrt{10}}$ და $x_2=3$.

ჩასმით ადვილად შევამოწმებთ, რომ x_1 და x_2 რიცხვები (3) განტოლების ამონახსნებია.

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12} \qquad (5)$$

ამოხსნა. ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა $|x|>1$. ცხადია, რომ (5) განტოლების ამონახსენი არ შეიძლება უარყოფითი რიცხვი იყოს. ამიტომ (5) განტოლების ყველა ამონახსენი მოთავსებულია შუალედში $1<x<\infty$. შემოვიღოთ დამხმარე ცვლადი $x=\frac{1}{\sin t}$. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $0<t<\frac{\pi}{2}$. ჩასმის შემდეგ (5) განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}=\frac{35}{12},$$

საიდანაც

$$12(\sin t+\cos t)=35\sin t\cos t$$

რომელიც ეკვივალენტური გარდაქმნით მიიღებს სახეს:

$$24(\sin t+\cos t)=35\left[(\sin t+\cos t)^2-1\right],$$

$\sin t+\cos t=u$ აღნიშვნის შემოღების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$35u^2-2424u-35=0$$

საიდანაც $u_1=-\dfrac{5}{7}$ ან $u_2=\dfrac{7}{5}$.

t-ს მიმართ მივიღეთ ორი განტოლების შემცველი ერთობლიობა

$$\left[\begin{array}{l}\sin t+\cos t=-\dfrac{5}{7}\\ \sin t+\cos t=\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$$

ამ ერთობლიობის პირველ განტოლებას $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ შუალედში ამონახსნი არა აქვს. მეორე განტოლების ამოსახსნელად დავუბრუნდეთ დამხმარე ცვლადს, რომელშიც $\sin t=\dfrac{1}{x}$ და $\cos t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$,

ამიტომ

$$\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\frac{7}{5},$$

ანუ

$$7x-5=5\sqrt{x^2-1}.$$

საიდანაც

$$x=\frac{5}{3} \text{ ან } x=\frac{5}{4}.$$

ამოცანა 4. რამდენი ფესვი აქვს $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$ (7) განტოლებას $[0,1]$ სეგმენტზე?

ამოხსნა. რადგან საძებნი ფესვები აკმაყოფილებენ პირობას $0\le x\le 1$, ამიტომ ეს გვიბიძგებს იმისკენ, რომ შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\cos t$. მაშინ ყოველ $x_0\in[0,1]$ ფესვს შეესაბამება $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ ფესვი, სადაც $x_0=\cos t_0$.

$$8\cos t(2\cos^2 t-1)(8\cos^4 t-8\cos^2 t+1)=1 \qquad (8)$$

განტოლების ყველა $t_i \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ ფესვს შეესაბამება (7) განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვი $x_i \in [0,1]$ სეგმენტიდან. ამრიგად, ამოცანის ჩამოყალიბება შეიძლება შემდეგნაირად: (8) განტოლების რამდენი ფესვია $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ინტერვალში?

მოსწავლეთათვის ცნობილია ტრიგონომეტრიული იგივეობები:

$$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t; \qquad 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = \cos 4t.$$

ამიტომ, (8) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1 \qquad (9)$$

რადგან $t = 0$ განტოლების ფესვი არ არის, ამიტომ $t \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე (9) განტოლება ტოლფასია განტოლებისა

$$\sin t = \sin 8t\,.$$

საიდანაც

$$t = \frac{2}{7}\pi n, \quad n \in Z, \qquad t = \frac{2}{7}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right), \quad m \in Z.$$

ამ ამონახსნებიდან $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ სამი რიცხვი:

$$t_1 = \frac{2\pi}{7}, \quad t_2 = \frac{\pi}{9}, \quad t_3 = \frac{\pi}{3}.$$

მაშასადამე, [0,1] სეგმენტზე მოთავსებულია (7) განტოლების მხოლოდ სამი ფესვი.

სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურების მათემატიკის სასკოლო კურსი არ ითვალისწინებს მაღალი ხარისხის განტოლებების ამოხსნის სწავლებას, მაგრამ სასკოლო პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებიც ორზე მაღალი ხარისხის განტოლებაზე დაიყვანება. მათი ამოხსნა უმთავრესად ფესვის შერჩევის მეთოდით ხორციელდება, რაც მოსწავლეებში გარკვეული დაუკმაყოფილებლობის გრძნობას იწვევს. ისინი ხშირად კითხულობენ: შესაძლებელია თუ არა მაღალი ხარისხის განტოლებების რადიკალებში ამოხსნა, როგორ ჩაიწერება ეს ამონახსნები და სხვა. რადგან უმრავლეს შემთხვევაში მესამე და უფრო მაღალი ხარისხის განტოლებების ამოხსნის სწავლების შესაძლებლობა სკოლაში არა გვაქვს, ამიტომ არ უნდა დავკარგოთ ის შესაძლებლობა, რომ ზოგიერთი კერძო სახის განტოლების ამოხსნა შევასწავლოთ მოსწავლეებს.

კერძოდ, არასრული $x^3 - px + q = 0$ $(p > 0)$ (11) სახის კუბური განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია განვახორციელოთ ტრიგონომეტრიული იგივეობისა და სპეციალური ჩასმის გამოყენებით, რაც მათემატიკის შიგასაგნობრივი კავშირების გამოყენების თვალსაჩინო მაგალითია.

მეთოდურად მიზანშეწონილია, რომ (11) სახის განტოლების ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში განვახორციელოთ საკლასო მეცადინეობაზე, რითაც თავიდან ავიცილებთ იმ უზუსტობებს, რაც მოსწავლეებმა შეიძლება დაუშვან დამოუკიდებლად ამოხსნის დროს. საშინაო დავალებად კი მივცეთ იმავე სახის კონკრეტული განტოლებები.

განვიხილოთ (11) განტოლების ტოლფასი განტოლება

$$q = px - x^3 \qquad (12)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული იგივეობა:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad (13)$$

ვისარგებლოთ ჩასმით: $x = kz$, მაშინ (12) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$q = kpz - k^3 z^3.$$

უცნობი k რიცხვი ვიპოვოთ თანაფარდობიდან

$$\frac{kp}{k^3} = \frac{3}{4}$$

საიდანაც

$$k = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

(11) განტოლება მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = 3z - 4z^3.$$

ვთქვათ, $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$, მაშინ $\left|\frac{q}{2} : \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right| \le 1$, ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ

$$\sin 3\alpha = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

მიღებული $\sin 3\alpha = 3z - 4z^3$ განტოლების შედარება (13) გივეობასთან საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა: $\sin\alpha$ არის ამ განტოლების ამონახსნი.

3α-ს პოვნის შემდეგ გამოვთვლით α-ს, ხოლო შემდეგ $\sin\alpha$-ს და მოცემული განტოლების ფესვს

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha .$$

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

ამოცანა 6. ამოხსენით განტოლება $x^3 - 3x + 1 = 0.$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $k = 2$, ჩასმის $x = 2z$ შედეგად მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{1}{2} = 3z - 4z^3 .$$

ჩავთვალოთ, $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$. საიდანაც $\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, \quad (k \in Z).$

როცა $n = 0, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{18}$, როცა $n = 1, \quad \alpha_1 = \frac{5\pi}{18}$, როცა $n = -1, \quad \alpha_{-1} = -\frac{7\pi}{18}.$

მიაშასადამე განტოლების ამონახსნებია:

$$x_1 = 2\sin\frac{\pi}{18}, \quad x_1 = 2\sin\frac{5\pi}{18}, \quad x_1 = -2\sin\frac{7\pi}{18}.$$

კუბური განტოლების ამოხსნის განხილული ხერხი გვეხმარება ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული იგივეობის შედგენაშიც. ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში ვიეტის თეორემის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$8\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = 1;$$
$$\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{7\pi}{18} = 0;$$
$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = -\frac{3}{4}.$$

ამოცანა 7. იპოვეთ სისტემის ნამდვილი ამონახსნები

$$\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 = c^2 \\ xy = d \end{cases} \qquad (14)$$

სადაც, a, b, c, d რიცხვები ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია.

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლება გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\left(\frac{ax}{c}\right)^2+\left(\frac{by}{c}\right)^2=1. \quad (15)$$

შემოვიღოთ დამხმარე ცვლადები:

$$\frac{ax}{c}=\sin\alpha, \qquad \frac{by}{c}=\cos\alpha.$$

სადაც α -რაიმე კუთხეა.

სისტემის მეორე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$xy=\frac{c^2}{2ab}\cdot\sin 2\alpha=d.$$

საიდანაც $\sin 2\alpha=\dfrac{2abd}{c^2}$.

თუ შესრულებულია პირობა $\left|\dfrac{2abd}{c^2}\right|\le 1,$ მაშინ (14) სისტემას ნამდვილი ამონახსნები აქვს და ჩვენ მას ვიპოვით გამოვთვლით რა α -ს.

შევნიშნოთ, რომ (15) ჩანაწერი მოსწავლეებს გამოადგებათ ისეთი სახის მაჩვენებლიანი განტოლებების ამოხსნისას, როგორიცაა $A^x+B^x=C^x$ (16), თუ შესრულებულია დამატებითი პირობა: $A^2+B^2=C^2$. (16) განტოლება C^x -ზე გაყოფის შედეგად დაიყვანება $\left(\dfrac{A}{C}\right)^x+\left(\dfrac{B}{C}\right)^x=1$ სახეზე. საიდანაც $x=2$.

განვიხილოთ (14) სისტემის მსგავსი სისტემის ამოხსნის კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 8. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ნამდვილი ამონახსნები

$$\begin{cases}4x^2+9y^2=25\\ xy=2\end{cases} \qquad (17)$$

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $a=2, b=3, c=5, d=2$, $\sin 2\alpha=\dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{25}=\dfrac{24}{25}$, საიდანაც

$\cos 2\alpha=\dfrac{7}{25}$ -ს ან. $\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$

პირველ შემთხვევაში

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\pm\frac{3}{5}, \quad \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\pm\frac{4}{5}.$$

რადგან $\sin 2\alpha>0$, ამიტომ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ -თვის უნდა ავიღოთ ერთნაირი ნიშნები:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}, \quad \cos\alpha=\frac{4}{5} \text{ და } \sin\alpha=-\frac{3}{5}, \quad \cos\alpha=-\frac{4}{5}.$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x_1=\frac{c}{a}\sin\alpha=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{2},\ \ y_1=\frac{c}{b}\cos\alpha=\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{3};$$

$$x_2=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{2},\ \ y_2=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{4}{3}.$$

მეორე შემთხვევაში ანალოგიურად გამოვთვლით, რომ

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\pm\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\pm\frac{3}{5}.$$

აქაც $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$-თვის უნდა ავიღოთ ერთნაირი ნიშნები:

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{3}{5}\ \text{და}\ \sin\alpha=-\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=-\frac{3}{5}.$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x_3=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=2,\quad y_3=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=1;$$

$$x_3=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-2,\quad y_3=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-1.$$

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ (17) სისტემის ამონახსნებია:

$$\left(\frac{3}{2},\frac{4}{3}\right),\ \left(-\frac{3}{2},-\frac{4}{3}\right),\ (1,2),\ (-1,-2).$$

ტრიგონომეტრიულ განტოლებებზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სწავლება განეკუთვნება სწავლების კომპლექსურ მეთოდს, სასკოლო პრაქტიკაში მეტად ეფექტურია და საკმაოდ კარგ შედეგს იძლევა. ამ დროს ერთდროულად ხდება ახალი ცოდნის შეძენა და უკვე ათვისებულის განმტკიცება. ეს სასწავლო დროის გამოთავისუფლების საშუალებას იძლევა, რომელსაც შემდგომში მასწავლებელი საჭიროებისამებრ გამოიყენებს.

ტრიგონომეტრიულ განტოლებებზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის განხილვა მეტად საინტერესოა ფსიქოლოგიური თვალსაზრისითაც. მოსწავლეებში დიდ დაინტერესებას იწვევს ის, რომ ამ დროს იცვლება განტოლების ტიპი. ასეთი მიდგომები კი მათემატიკის შიგასაგნობრივი კავშირების განხორციელების კარგი მაგალითებია.

§2. განტოლებები და განტოლებათა სისტემები ფუნქციათა სუპერპოზიციით და მათი ამოხსნის სპეციალური ხერხების მეთოდიკური თავისებურებები

ზოგადად ამოცანათა ამოხსნის ძიების სწავლების მეთოდიკის ცენტრალური ელემენტია თითოეული ამოცანის პირობაში მოთავსებული ევრისტიკული ინფორმაციის გამოვლენა და გამოყენება, ე.ი. ისეთი ინფორმაციისა, რომელიც ხელს უწყობს ამოხსნის გზის აღმოჩენას. სტანდარტული ამოცანებისაგან განსხვავებით, არასტანდარტულ ამოცანათა თავისებურებები განსაზღვრავენ ამოხსნის განსხვავებულ კერძო სახეებს. [41].

ზოგჯერ განტოლების ფესვის პოვნა შესაძლებელია, თუ შევნიშნავთ, რომ განტოლების ერთ-ერთ მხარეში მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს უფრო მარტივი ფუნქციების სუპერპოზიციას. მაგალითად,

ამოხსენით განტოლება

$$\left(x^2-x+1\right)^2-\left(x^2-x+1\right)+1=x \qquad (1)$$

სანამ მოსწავლეებს გავაცნობდეთ ფუნქციათა სუპერპოზიციის გამოყენებით განტოლებების ამოხსნას, მიზანშეწონილია მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ (1) განტოლების ჩანაწერზე, რომელიც მათთვის რამდენადმე უცნაურია, რაც თავის მხრივ იწვევს მოსწავლეებში ამოცანის ამოხსნის გზის მოძებნისადმი დაინტერესებას.

თუ ჩავატარებთ (1) განტოლებაში მათემატიკურ გარდაქმნებს, მივიღებთ სრული სახის მეოთხე ხარისხის განტოლებას

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0 \qquad (2)$$

თუ ამის შემდეგ კლასის წინაშე დავსვამთ შეკითხვას, როგორი ხერხებით შეუძლიათ მათ (2) განტოლების ამოხსნა. შესაძლებელია რამდენიმე ვარიანტის არსებობა. ერთნი შენიშნავენ, რომ (2) განტოლებაში კოეფიციენტების ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი. მისი ერთ-ერთი ფესვია $x=1$.

წარმოადგენენ (2) განტოლების მარცხენა მხარეში მოთავსებულ მრავალწევრს შემდეგი ნამრავლის სახით:

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)\left(x^3-x^2+x-1\right).$$

ანალოგიურად, განიხილავენ რა x^3-x^2+x-1 მრავალწევრს, აქაც დაასკვნიან, რომ მისი კოეფიციენტების ჯამი ნულის ტლია, ე.ი. $x^3-x^2+x-1=0$ განტოლების ფესვია $x=1$. საბოლოოდ წერენ:

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2\left(x^2+1\right).$$

ე.ი. (2) განტოლების ფესვია $x=1$. მას სხვა ფესვი არა აქვს.

მეორენი შენიშნავენ, რომ (2) განტოლება წარმოადგენს მეოთხე ხარისხის სიმეტრიულ განტოლებას. რადგან მისი ფესვი არ არის $x=0$, ამიტომ x^2-ზე გაყოფის შემდეგ მიღებულ

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0,$$

განტოლებაში შემოღებული $t=x+\dfrac{1}{x}$ აღნიშვნით მარტივად დაადგენენ, რომ (2) განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x=1$.

ამის შემდეგ, როცა მოსწავლეებისათვის ცნობილია (1) განტოლების ამოხსნის ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული სხვადასხვა ხერხი, მიზანშეწონილია ამოხსნის ახალი სპეციალური ხერხის შესწავლა. უმჯობესია მოსწავლეებს გავაცნოთ ფუნქციათა სუპერპოზიცია და მისი თვისებები, რის შემდეგაც გადავალთ (1) განტოლების ამოხსნაზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x)=x^2-x+1.$$

(1) განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x.$$

მოსწავლეებს ფაკულტატიური ან მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე შეიძლება დავუმტკიცოთ, რომ თუ $f\left(x\right)=x$ განტოლების ფესვია x_0, მაშინ ის არის $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლების ფესვიც. მოსწავლეებს კონტრმაგალითის მოყვანით უნდა ვუჩვენოთ, რომ შებრუნებული დასკვნა საზოგადოდ სამართლიანი არ არის.

რადგან

$$x^2-x+1=x$$

განტოლების ორჯერადი ფესვია $x=1$, ამიტომ ის (1) განტოლების ფესვიცაა. თუ (1) განტოლებას გადავწერთ (2) სახით, ხოლო შემდეგ მის მარცხენა მხარეს გავყოფთ

x^2-2x+1 მრავალწევრზე, მიღებული (3) წარმოდგენიდან დავასკვნით, რომ (1) განტოლებას $x=1$ ფესვის გარდა სხვა ფესვი არა აქვს.

ამ მაგალითი განხილვის შემდეგ შესაძლოა მოსწავლეებს გაუჩნდეთ შეკითხვები: რა საჭიროა ამოხსნის სპეციალური ხერხის გამოყენება (1) განტოლების ამოსახსნელად, როცა მისი ამოხსნა შეიძლება ცნობილი რამდენიმე ხერხით? აქვს თუ არა რაიმე უპირატესობა განტოლებათა ამოხსნის ტრადიციულ ხერხებთან შედარებით ფუნქციათა სუპერპოზიციის გამოყენების სპეციალურ ხერხს?

ამ შეკითხვაზე ამაომწურავი პასუხის გაცემის მიზნით მოსწავლეებს ვთავაზობთ (1) სახის ისეთ განტოლება, რომლის (2) ფორმაზე დაყვანის შემდეგ მისი ფესვების პოვნა ზეპირად და შერჩევის მეთოდით შეუძლებელია. მაგალითად,

ამოხსენით განტოლება [62]

$$\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x \qquad (4)$$

მოსწავლეები შეასრულბენ კვადრატში ახარისხებას, გახსნიან ფრჩხილებს, შეაერთებენ მსგავს წევრებს და მიიღებენ განტოლებას:

$$x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0 \qquad (5)$$

რომელსაც (1) განტოლებისაგან განსხვავებით მთელი ფესვები არა აქვს. რადგან მეოთხე ხარისხის ზოგადი სახის განტოლების რადიკალებში ამოხსნა საშუალო სკოლაში არ შეისწავლება, ხოლო (5) განტოლების ამოხსნის რაიმე კერძო ხერხი მათ არ იციან, ამიტომ მოსწავლეები (5) განტოლებას ვერ ამოხსნიან. მაშასადამე ამოცანის ამოხსნის ამ გზას ჩიხში შევყავართ. ამით მოსწავლეები დარწმუნდებიან, რომ საჭიროა ახალი ხერხის მოძებნა.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო პროგრამები არ ითვალისწინებს მესამე და მეოთხე ხარისხის ზოგადი სახის განტოლებების რადიკალებში ამოხსნას, ამიტომ მოსწავლეებისათვის ცხადია, რომ (4) განტოლების ამოხსნისას უნდა გამოვიყენოთ ხელოვნური, სპეციალური ხერხი.

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x)=x^2+2x-5.$$

მაშინ (4) განტოლება ჩაიწერება სახით:

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x.$$

რადგან

$$x^2+2x-5=x$$

განტოლების ამონახსენი (4) განტოლების ამონახსენიცაა, ამიტომ (5) განტოლების შემცველი $x^4+4x^3-4x^2-17x+10$ მრავალწევრის x^2+2x-5 მრავალწევრზე გაყოფის შესრულების შემდეგ (4) განტოლების ტოლფას განტოლებას ექნება სახე:

$$\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+3x-2\right)=0.$$

საიდანაც მარტივად დავადგენთ, რომ (4) განტოლების ფესვებია:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\quad x_3=\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\quad x_4=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

რადგან (5) განტოლების ფესვების პოვნა მოსწავლეებისათვის ტრადიციული ხერხებით არ მოხერხდა, ამიტომ მოსწავლეები დარწმუნდებიან, რომ საჭიროა ფუნქციათა სუპერპოზიციის სპეციალური ხერხის გამოყენება. ე.ი. მოსწავლეთა მიერ გამოთქმული ჰიპოთეზა ჭეშმარიტი აღმოჩნდა.

ამოცანის ამოხსნის დამთავრების შემდეგ მოსწავლეებს უნდა განვუმარტოთ, რომ ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნის პროცესში შეიძლება გამოიყოს ორი მომენტი: ამოცანის წარმოდგენა და ამოხსნის გზის ძიება. ერთი და იგივე ამოცანა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით ჩავწეროთ, მაგალითად, ისე როგორც (1) განტოლება. ამ წარმოდგენაზეა დამოკიდებული როგორც ძიების მოცულობა, ასევე ძიების პერსპექტიული მიმართულების პოვნა.

ფუნქციათა სუპერპოზიციის გამოყენება ხშირად ამარტივებს განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გზის ძიებას. მაგალითად, განვიხილოთ ორცვლადიან განტოლებათა სისტემა, რომლის ჩაწერა შესაძლებელია შემდეგი ზოგადი სახით:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases} \qquad (6)$$

ჩავსვათ სისტემის პირველი განტოლებიდან y მეორე განტოლებაში. (6) სისტემის ამოხსნა დაიყვანება $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ განტოლების ამოხსნაზე. ამ განტოლების ამოხსნაზე ზემოთ უკვე გვქონდა საუბარი და აქ აღარ შევჩერდებით.

ცხადია, (6) სისტემის ამოანხსნებია ერთობლიობით შედგენილი წყვილები:

$$\left[\begin{array}{l} x=f\left(f\left(x\right)\right) \\ y=x \end{array}\right.$$

განვიხილოთ კონკრეტული

მაგალითი. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა [85]

$$\begin{cases} 2y = 5 - x^2, \\ 2x = 5 - y^2. \end{cases} \qquad (7)$$

ამოხსნა. ტრადიციული ხერხით ამოხსნის შემთხვევაში უნდა განვსაზღვროთ სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან რომელიმე უცნობი და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მაგალითად, განვსაზღვროთ სისტემის პირველი განტოლებიდან y

$$y = \frac{5}{2} - \frac{x^2}{2},$$

და ჩავსვათ მეორე განიტოლებაში. მივიღებთ მეოთხე ხარისხის განტოლებას

$$x^4 - 10x^3 + 8x + 5 = 0 \qquad (8)$$

რომელსაც რაციონალური ფესვები არა აქვს და მოსწავლეებს ტრადიციული ხერხებით მისი ამოხსნა საკმაო სირთულეებს შეუქმნის. შევეცადოთ (7) სისტემის ამოხსნა ფუნქციათა სუპერპოზიცის გამოყენებით.

მართლაც, რადგან (7) სისტემა (6) სისტემის კერძო სახეა, სადაც

$$f(y) = \frac{5}{2} - \frac{x^2}{2}, \qquad f(x) = \frac{5}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

ამიტომ

$$x = \frac{5}{2} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$$

განტოლების ფესვები (8) განტოლების ფესვებიცაა.

რადგან

$$x^4 - 10x^3 + 8x + 5 = \left(x^2 + 2x - 5\right)\left(x^2 - 2x - 1\right).$$

ამიტომ (8) განტოლების ფესვებია

$$x_1 = -1 + \sqrt{6}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{6}, \quad x_3 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{2}.$$

მაშასადამე, (7) სისტემის ამონახსნებია რიცხვთა შემდეგი ოთხი წყვილი:

$$\left(-1+\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\right) \ \left(-1-\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}\right) \ \left(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right) \ \left(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right).$$

პედაგოგიურმა ექსერიმენტმა დაადასატურა, რომ ფუნქციათა სუპერპოზიციით განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ძიების პროცესის წარმართვამ გადმოცემული სახით მოსწავლეთა დაინტერესება გამოიწვია და ხელი შეუწყო ამოხსნის განხილული სპეციალური ხერხის პრაქტიკაში დანერგვასა და გამოყენებას.

§3. უტოლობათა გამოყენება ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას

განტოლებათა ამოხსნა უტოლობების გამოყენებით უმრავლეს შემთხვევაში ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას მოითხოვს. ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას კი სათანადო ყურადღება არ ექცევა მათემატიკის სასკოლო კურსში. უტოლობების გამოყენებით შესაძლებელია მხოლოდ ზოგიერთი სახის განტოლების ამოხსნა, ამიტომ სწავლებაში უტოლობების გამოყენებით განტოლებების და მათი სისტემების ამოხსნის სწავლებას დიდი საგანმანათლებლო და პრაქტიკულ-განმავითარებელი მიზანი აქვს და სწავლების პროცესში მეტად ზომიერ და ფაქიზ მოპყრობას მოითხოვს.

მასწავლებელს დროის რაციონალურად გამოყენების შემთხვევაში შეუძლია მოსწავლეებს აჩვენოს ისეთი უმარტივესი სახის უტოლობების დამტკიცება, რომელებიც სასურველ შედეგს იძლევიან განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნის დროა.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი უტოლობების კონკრეტული სახეების სწავლებას და შემოიფარგლება უტოლობების მცირე კლასით. ჩვენ პრაქტიკული მოღვაწეობის პროცესში ვიხილავთ ისეთი სახის უტოლობებს, რომლებიც მათემატიკის სასკოლო კურსში არ განიხილება, მაგრამ პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას მეტად დიდი გამოყენება აქვს და მათი დამტკიცება რთულ მათემატიკურ გარდაქმნებსა და პროცედურებს არ საჭიროებს, ამასთან არ სცილდება მათემატიკის სასკოლო კურსის ფარგლებს.

განვიხილოთ ერთი ასეთი პრაქტიკული საკითხი. დავამტკიცოთ უტოლობა, რომელსაც ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ განტოლებათა ერთი კლასის ამოხსნის დროს.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ რიცხვები ისეთია, რომ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$, მაშინ

$$b_1 b_2 + b_1 b_3 + \cdots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \cdots + b_{n-1} b_n \le \frac{n(n-1)}{2},$$

ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

ადვილი შესამოწმებელი შემდეგი ტოლობა:

$$2\left(b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_n+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n\right)=\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2-$$

$$-\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)=n^2-\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right).$$

მოსწავლეებისათვის ცნობილია დამოკიდებულება არითმეტიკულ საშუალოსა და კვადრატულ საშუალოს შორის, კერძოდ $b_1,b_2,\cdots,b_n$ რიცხვების არითმეტიკული საშუალო არ აღემატება ამავე რიცხვების კვადრატულ საშუალოს, ამიტომ

$$\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}{n}}\geq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

საიდანაც

$$\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)n\geq\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2 \qquad (1)$$

ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$. (1) ტოლობის მიღება შესაძლებელია კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან $b_1,b_2,\cdots,b_n$ და $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ რიცხვებისათვის.

(1)-დან გვაქვს:

$$-\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\leq-\frac{1}{n}\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2 \qquad (2)$$

უტოლობის ორთავე მხარეს დავამატოთ n^2, გვექნება:

$$n^2-\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\leq n^2-\frac{1}{n}\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)^2=n^2-n=n(n-1).$$

საიდანაც

$$b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_1b_n+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n\leq\frac{n(n-1)}{2} \qquad (3)$$

უკანასკნელი ტოლობაპ გამოვიყენოთ შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად.

ამოცანა 1. ცნობილია, რომ

$$x^4-4x^3+6x^2+ax+b=0$$

განტოლებას ოთხი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a და b კოეფიციენტები.

ამოხსნა. ვთქვათ, x_1, x_2, x_3 და x_4 მოცემული განტოლების ფესვებია (შესაძლოა ფესვები ჯერადიც იყოს). ვიეტის თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=4 \\ &x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=6 \end{aligned} \qquad (4)$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ შესრულებულია (4) პირობა, მაშინ

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 \le 6$$

ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1.$$

(3) ტოლობაში $n=4$, ამიტომ

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 \le \frac{4\cdot 3}{2}=6.$$

ე.ი. $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. ამრიგად $x=1$ მოცემული განტოლების ოთხჯერადი ფესვია, ამიტომ

$$x^4-4x^3+6x^2+ax+b=\left(x-1\right)^4.$$

საიდანაც $a=-4,\quad b=1.$

ამოცანა 2. ცნობილია, რომ

$$x^3-6x^2+bx+8=0$$

განტოლებას სამი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და b კოეფიციენტი.

ამოხსნა. ვიეტის თეორემის თანახმად, თუ x_1, x_2 და x_3 მოცემული განტოლების ფესვებია, მაშინ

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=6 \\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8 \end{aligned}$$

არითმეტიკული საშუალოსა და გეომეტრიულ საშუალოს შორის კავშირიდან გამომდინარეობს, რომ

$$2=\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \le \frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

ე.ი.

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \le \frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2.$$

მოსწავლეებისათვის ცნობილია, რომ x_1, x_2, x_3 რიცხვების არითმეტიკული საშუალო და გეომეტრიული საშუალო ერთმანეთის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს რიცხვები ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2.$$

ე.ი. $x = 2$ მოცემული განტოლების სამჯერადი ფესვია, ამიტომ

$$x^3 - 6x^2 + bx + 8 = (x-2)^3.$$

საიდანაც მარტივად დავადგენთ, რომ $b = 12.$

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$x^2 + x^2y^4 + x^6y^4 + y^2 + 1 = 5x^2y^2.$$

ამოხსნა. არითმეტიკულ საშუალოსა და გეომეტრიულ საშუალოს შორის კავშირის ძალით გვაქვს

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \ge \sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5},$$

სადაც x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 არაუარყოფითი რიცხვებია. ამ უტოლობის გამოყენებით გვაქვს:

$$x^2 + x^2y^4 + x^6y^4 + y^2 + 1 \ge 5\sqrt[5]{x^2 \cdot x^2y^4 \cdot x^6y^4 \cdot y^2 \cdot 1} = 5x^2y^2$$

ტოლობას ადგილი აქვს, როცა

$$x^2 = x^2y^4 = x^6y^4 = y^2 = 1.$$

მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს უცნობის მნიშვნელობები, როცა $x = \pm 1. \quad y = \pm 1$. ე.ი. განტოლების ამონახსნებია $(-1;-1), \quad (1;-1), \quad (-1;1), \quad (1;1).$

ამოცანა 4. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} xy^2 + x^5y + 1 = 3x^2y \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

დადებითი ამონახსნები.

ამოხსნა. რადგან

$$\frac{xy^2 + x^5y + 1}{3} \ge \sqrt[3]{xy^2 \cdot x^5y \cdot 1} = x^2y.$$

ე.ი.

$$xy^2 + x^5y + 1 \ge 3x^2y.$$

ხოლო, სისტემის პირველი ტოლობიდან

$$xy^2 + x^5y + 1 = 3x^2y.$$

ამიტომ მივიღებთ: $xy^2 = x^5y = 1$. საიდანაც $x = 1, \quad y = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ სისტემის ამონახსნია $(1,1,1)$.

ამოცანა 5. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)=64\\ x^4+y^4+z^4=12\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$$

ამოხსნა. ცხადია, რომ თუ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია სამეული (a,b,c), მაშინ მისი ამონახსნები იქნება სამეულები:

$$(\pm a,\pm b,\pm c),\quad (\pm a,\pm c,\pm b),\quad (\pm b,\pm a,\pm c),$$
$$(\pm b,\pm c,\pm a),\quad (\pm c,\pm a,\pm b),\quad (\pm c,\pm b,\pm a).$$

სადაც ნიშნები შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერად. აქედან გამომდინარეობს, რომ საკმარისია ვიპოვოთ ყველა დადებითი ამონსხსენი.

რადგან ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2}{3}\geq\sqrt[3]{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}=4.$$

საიდანაც

$$x^2+y^2+z^2\geq 6.$$

რადგან სისტემის მესამე განტოლების ძალით

$$x^2+y^2+z^2=6,$$

ამიტომ

$$x^2=y^2=z^2=2.$$

ე.ი. სისტემის ამონახსენია $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

გავითვალისწინებთ, რა ზემოთ მიღებულ შენიშვნას, მივიღებთ სისტემის ყველა ამონახსნს.

ამ ამოცანების განხილვის შემდეგ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მოსწავლეებს დამოუკიდებლად განსახილველად მივცეთ ანალოგიური მაგალითები. ნიმუშად მოვიყვანოთ რამდენიმე მათგანი:

1. ცნობილია, რომ

$$x^4-4x^3+ax^2+bx+1=0$$

განტოლებას ოთხი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a და b კოეფიციენტები.

2. ცნობილია, რომ

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

განტოლებას ექვსი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a, b და c კოეფიციენტები.

აქვე შევნიშნოთ, რომ მასწავლებელს შეუძლია მოსწავლეთა მომზადების დონის მიხედვით საშინაო დავალებად მისცეს იმავე სახის შედარებით რთული ან მარტივი ამოცანები.

უტოლობათა გამოყენება ზოგჯერ კარგ შედეგს იძლევა ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის დროსაც. მაგალითად,

ამოცანა 6. ამოხსენით განტოლება

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 32\left(\sin^{18} x + \cos^{18} x\right).$$

ამოხსნა. განტოლებაში შემავალი ხარისხების მაჩვენებლები საკმაოდ დიდია. ამიტომ ტრადიციული ხერხებით ხარისხების დაწევა დიდ დროს მოითხოვს, ამასთან ჩასატარებული გარდაქმნების განხორციელება საკმაოდ რთულია და ამოცანის ამოხსნის პროცესს წინ არ წაწევს. ამიტომ ვეძებოთ ამოხსნის რაციონალური გზა. პირველ რიგში გავარკვიოთ რა ევრისტიკულ ინფორმაციას შეიცავს თვითონ განტოლება.

განტოლების მარცხენა მხარეში სინუსისა და კოსინუსის ხარისხის მაჩვენებლები 8-ის ტოლია, მარჯვენა მხარეში კი-18-ის, ხოლო მარჯვენა მხარეში ფრჩხილების წინ მდგომი კოეფიციენტია 32, რომელიც 2^5-ის ტოლია. რადგან $(18-8):2=5$, ამიტომ ეს გვიბიძგებს კოეფიციენტებისა და ხარისხის მაჩვენებლებს შორის რაღაც კავშირზე. რა შეიძლება იყოს ეს? ამისათვის გამოვთვალოთ განტოლებაში შემავალი გამოსახულებების მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების რამდენიმე შესაბამისი მნიშვნელობა, მაგალითად, როცა

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

ამის შემდეგ გამოვთქვათ ჰიპოთეზა, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\sin^8 x + \cos^8 x \le 32\left(\sin^{18} x + \cos^{18} x\right) \qquad (5)$$

სადაც ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\sin^2 x = \cos^2 x$.

ამ უტოლობის დამტკიცება მოვახდინოთ რამდენიმე ეტაპად. ჯერ შევეცადოთ დავამტკიცოთ ასეთი უტოლობა:

$$\sin^8 x+\cos^8 x\le 2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right) \qquad (6)$$

მართლაც, განვიხილოთ სხვაობა:

$$2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)-\left(\sin^8 x+\cos^8 x\right)=2\sin^{10} x+2\cos^{10} x-$$

$$-\left(\sin^8 x+\cos^8 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)^2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\ge 0$$

ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\sin^2 x=\cos^2 x$. ამ დროს მეთოდიკურად გამართლებულია და კარგ შედეგს იძლევა პრობლემური სიტუაციის შექმნა, რის შედეგადაც მოსწავლეები „აღმოაჩენენ“ და ანალოგიური მეთოდით დაამტკიცებენ, რომ სამართლიანია უტოლობა

$$\sin^{10} x+\cos^{10} x\le 2\left(\sin^{12} x+\cos^{12} x\right).$$

მიღებული ტოლობის შედარება (6) უტოლობასთან მოგვცემს:

$$\sin^8 x+\cos^8 x\le 4\left(\sin^{12} x+\cos^{12} x\right) \qquad (7)$$

თუ გავაგრძელებთ უტოლობათა ამ ჯაჭვს, მივიღებთ დასამტკიცებელ (5) უტოლობას.

მოცემული განტოლებისა და (7) უტოლობის შედარებით დავასკვნით, რომ ამოსახსნელი განტოლება ტოლფასია $\sin^2 x=\cos^2 x$ განტოლებისა, რომლის ამონახსნებია

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad \left(k\in Z\right).$$

თუ განტოლებათა ამოხსნის დამთავრების შემდეგ ისევ შევქმნით პრობლემურ სიტუაციას, მოსწავლეთა ყურადღებას გავამახვილებთ (5), (6) და (7) უტოლობებზე, ისინი შენიშნავენ, რომ სამართლიანია უფრო ზოგადი კანონზომიერება, კერძოდ

$$\sin^{2n} x+\cos^{2n} x\le 2^n\left(\sin^{2n+2k} x+\cos^{2n+2k} x\right).$$

ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\sin^2 x=\cos^2 x$.

ამ უტოლობის დამტკიცება საკმაოდ რთულია და შესაძლოა მოსწავლეებს გარკვეული სიძნელეები შეუქმნას. ამიტომ მეთოდიკურად მიზანშეწონილია დამტკიცება განხორციელდეს გაკვეთილზე, მთელ კლასთან ერთად მასწავლებლის

უშუალო ზედამხედველობით, ხოლო საშინაო დავალებად მოსწავლეებს სათანადო მითითების შემდეგ მივცეთ ასეთი

ამოცანა 7. ამოხსენით განტოლება

$$1-3\sin^2 x\cos^2 x=8\left(\sin^{12} x+\cos^{12} x\right).$$

რომელიც ეკვივალენტური გარდაქმნებით დაიყვანება განხილული განტოლების სახეზე, კერძოდ კი

$$\sin^6 x+\cos^6 x=8\left(\sin^{12} x+\cos^{12} x\right)$$

განტოლებაზე.

ამოცანა 8. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{|ctgxy|}{\cos^2 xy}-2=\log_{\frac{1}{3}}\left(9y^2-18y+10\right).$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ფუნქციათა შემოსაზღვრულობა. ერთის მხრივ

$$\frac{|ctgxy|}{\cos^2 xy}-2=\left|\frac{ctgxy}{\cos^2 xy}\right|-2=\left|\frac{2}{\sin 2xy}\right|-2\geq 0.$$

მეორეს მხრივ

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(9y^2-18y+10\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(9(y-1)^2+1\right)\leq 0.$$

რადგან განტოლების მარცხენა მხარე ნებისმიერი ნამდვილი $x.y$ რიცხვებისათვის არაუარყოფითია, ხოლო მარჯვენა მხარე დადებითი არ არის, ამიტომ განტოლებას ამონახსნი რომ ქონდეს უნდა შესრულდეს შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2}{\sin 2xy}\right|=2\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(9y^2-18y+10\right)=0\end{cases}$$

ცხადია,

$$\begin{cases}|\sin 2xy|=1\\ 9y^2-18y+10=1\end{cases}$$

რომლის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\;\; y=1, k\in Z.$$

ამოცანა 9. ამოხსენით განტოლება

$$2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}=0\,.$$

ამოხსნა. რადგან $y-x^2-1\geq 0$, ამიტომ $y\geq x^2+1$, ცხადია $2^y\geq 2$. რადგან $\cos x\leq 1$, ამიტომ $-2\cos x\geq -2$. შევკრიბოთ ერთი და იმავე აზრის უტოლობები:

$$2^y\geq 2,\quad -2\cos x\geq -2,\quad \sqrt{y-x^2-1}\geq 0\,.$$

მივიღებთ:

$$2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\geq 0\,.$$

ამ უტოლობის შედარება მოცემულ განტოლებასთან საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ამოცანის პირობას დააკმაყოფილებს მხოლოდ ისეთი x,y რიცხვები, რომლის დროსაც შესრულებულია პირობა

$$\begin{cases}2^y=2\\ \cos x=1\\ \sqrt{y-x^2-1}=0\end{cases}$$

ამ სისტემის ამონსხსენია $x=0,\ y=1.$

ამოცანა 10. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}tg^2x+ctg^2x=2\sin^2 y\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1\end{cases}.$$

ამოხსნა. რადგან $tg^2x+ctg^2x\geq 2$, ხოლო $2\sin^2 y\leq 2$, ამიტომ სისტემის პირველი განტოლება რომ დაკმაყოფილდეს უნდა შესრულდეს სისტემა

$$\begin{cases}tg^2x+ctg^2x=2\\ 2\sin^2 y=2\end{cases}.$$

მიღებული სისტემის მეორე განტოლების შედარება მოცემულ სისტემასთან გვაძლევს

$$\cos^2 z=0\,.$$

საიდანაც

$$z=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad m\in Z.$$

მიღებული სისტემის ამოხსნით მივიღებთ:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad (n,k\in Z).$$

ამოცანა 11. ამოხსენით განტოლება

$$2^{4^x}+2^{9^x}=2^{6^x+1}.$$

ამოხსნა. როგორც ცნობილია

$$\frac{2^{4^x}+2^{9^x}}{2}\geq\sqrt{2^{4^x+9^x}}=2^{\frac{4^x+9^x}{2}}\geq 2^{\sqrt{36^x}}=2^{6^x}.$$

ე.ი.

$$2^{4^x}+2^{9^x}\geq 2\cdot 2^{6^x}$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ, რომ $x=0$.

ამოცანა 12. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^{\lg y}+y^{\lg x}=20 \\ 2^x+2^y=2^z \\ x+y+2=2z \end{cases}$$

ამოხსნა. ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{2^x+2^y}{2}\geq 2^{\frac{x+y}{2}}.$$

ე.ი.

$$2^x+2^y\geq 2^{\frac{x+y+2}{2}}=2^z.$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $x=y$. ამიტომ სისტემაში შემავალი პირველი განტოლება მიიღებს სახეს

$$2x^{\lg x}=20.$$

საიდანაც $x_1=10,\quad x_2=\frac{1}{10}$. რადგან $x=y$, ამიტომ $y_1=10,\quad y_2=\frac{1}{10}$. რაც შეეხება z უცნობს, ის მიიღებს მნიშვნელობებს:

$$z_1=11,\quad z_2=\frac{11}{10}.$$

ამოცანა 13. აქვს თუ არა განტოლებათა სისტემას ამონახსენი?

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=6 \\ 3^x+3^y+3^z=12 \end{cases}$$

ამოხსნა. ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{2^x+2^y+2^z}{3}\ge\sqrt[3]{2^{x+y+z}}=\sqrt[3]{2^3}=2,$$

ე.ი.

$$2^x+2^y+2^z\ge 6.$$

სისტემის მეორე განტოლების გამოყენებით მივიღებთ, რომ $x=y=z=2$, რადგან $x+y+z=3$, ამიტომ $x=y=z=1$. მიღებული მნიშვნელობა არ აკმაყოფილებს სისტემის მესამე განტოლებას, ამიტომ სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

ამოცანა 14. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}2^{2^x}+2^{2^y}+2^{2^z}=12\\ x+y+z=3\end{cases}.$$

ამოხსნა. ადგილი აქვს უტოლობას

$$2^{2^x}+2^{2^y}+2^{2^z}\ge 3\sqrt[3]{2^{2^x+2^y+2^z}}=3\cdot 2^{\frac{2^x+2^y+2^z}{3}}\ge 3\cdot 2\sqrt[3]{2^{x+y+z}}=12.$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ, რომ $x=y=z=1$.

ამოცანა 15. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\log_x z\log_z y+\log_y x\log_z y+\log_y x\log_x z=3\\ \log_y x+\log_x z+\log_z y=3\\ x+y+z=6\end{cases}$$

ამოხსნა. სისტემაში შემავალი პირველი განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\log_z y+\log_z y+\log_x z=3.$$

მიღებული განტოლება შევკრიბოთ სისტემის მეორე განტოლებასთან, მივიღებთ:

$$\left(\log_x y+\log_y x\right)+\left(\log_y z+\log_z y\right)+\left(\log_z x+\log_x z\right)=6.$$

რადგან

$$\log_x y+\log_y x\ge 2,\quad \log_y z+\log_z y\ge 2,\quad \log_z x+\log_x z\ge 2.$$

ამიტომ

$$x=y=z=2.$$

ამოცანა 16. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვებში

$$\left(x_1^2+1^2\right)\left(x_2^2+2^2\right)\ldots\left(x_n^2+n^2\right)=2^n\cdot n!x_1x_2\cdots x_n$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია.

ამოხსნა. რადგან ორი რიცხვის გეომეტრიული საშუალო არ აღემატება ამოვე რიცხვების არითმეტიკულ საშუალოს, ამიტომ

$$\begin{aligned}&x_1^2+1^2\geq 2x_1\\&x_2^2+2^2\geq 2\cdot 2x_2\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&x_n^2+n^2\geq 2nx_n\end{aligned}$$

ეს უტოლობები შესაბამის ტოლობებად გადაიქცევა, როცა

$$x_1=1,\ x_2=2,\cdots x_n=n.$$

მიღებული ტოლობები წევრ-წევრად გადავამრავლოთ

$$\left(x_1^2+1^2\right)\left(x_2^2+2^2\right)\dots\left(x_n^2+n^2\right)\geq 2^n\cdot 1\cdot 2\cdots n\left(x_1x_2\cdots x_n\right)=2^n\cdot n!x_1x_2\cdots x_n$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x_1=1,\ x_2=2,\cdots x_n=n.$$

ამრიგად, მოცემულ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $\left(1,2,\cdots,n\right)$.

ამოცანა 17. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

ამოხსნა. განხილული მაგალითებიდან განსხვავებით ამ განტოლების ამოხსნის დროს უტოლობის გამოყენების შესაძლებლობა უშუალოდ არ ჩანს და მოსწავლემ შესაძლოა ეს ვერც შეამჩნიოს, მაგრამ თუ განტოლების ორთავე მხარეს ავიყვანთ კვადრატში, მივიღებთ:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=x+3.$$

განტოლების ასეთი სახით ჩანაწერიც არ გვიბიძგებს უტოლობის გამოყენებისაკენ. შევაერთოთ მსგავსი წევრები და განტოლება ჩავწეროთ სახით:.

$$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

ასეთი ფორმით ჩანაწერი კი მოსწავლეს საშუალებას აძლევს გააკეთოს დასკვნა: რადგან $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$ და განტოლების მარხვენა მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ $x^2+\frac{1}{x^2}=2$. რაც შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x^2=1$. საიდანაც $x_1=1,\quad x_2=-1.$ შემოწმებით დავადგენთ, რომ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი $x=-1.$

დაბოლოს, უტოლობათა გამოყენებით განვიხილოთ ისეთი განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, რომლის გადაწყვეტა ტრადიციული მეთოდებით შეუძლებელია.

ამოცანა 18. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3} \\ x^{x-y}=2x-1 \end{cases}$$

ამოხსნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ სრულდება ტოლობები:

$$\left(x^2+5x+2y-3\right)-\left(x^2+4x+3y-2\right)=\left(x-y-1\right)$$

$$\left(x^2+x+y+2\right)-\left(x^2+2y+3\right)=\left(x-y-1\right)$$

გვაქვს

$$\sqrt{\left(x^2+4x+3y-2\right)+\left(x-y-1\right)}+\sqrt{\left(x^2+2y+3\right)+\left(x-y-1\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3} \qquad (8)$$

ფესვქვეშა გამოსახულება ცხადია არაუარყოფითი უნდა იყოს.

ვთქვათ, $x-y-1>0$, მაშინ

$$\sqrt{\left(x^2+4x+3y-2\right)+\left(x-y-1\right)}>\sqrt{x^2+4x+3y-2}$$

$$\sqrt{\left(x^2+2y+3\right)+\left(x-y-1\right)}>\sqrt{x^2+2y+3}$$

და (8) ტოლობას ადგილი არ ექნება.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ (8) ტოლობა არ შესრულდება არც მაშინ, როცა $x-y-1<0$. მაშასადამე, თუ (8) განტოლებას ამონახსენი აქვს, მაშინ $x-y-1=0$ ანუ $x-y=1$ და სისტემის მეორე განტოლებიდან მივიღებთ $x=2y-1$.

ამრიგად, თუ მოცემულ განტოლებათა სისტემას ამონახსენი აქვს, მაშინ ეს ამონახსენი ემთხვევა

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამონახსენს. საიდანაც $x=3, \quad y=2$.

შემოწმებით დავადგენთ, რომ მიღებული წყვილი მოცემული სისტემის ამონახსენია.

უტოლობათა გამოყენება ხშირად გვეხმარება გამოსახულების მნიშვნელობების შეფასებაში და ამცირებს ჩასატარებელ სამუშაოებს. მაგალითად,

ამოცანა 19. ამოხსენით

$$x^3+91=y^3$$

განტოლება მთელ რიცხვებში.

ამოხსნა. მოცემული გატოლება გადავწეროთ სახით:

$$(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right)=91.$$

რადგან, განტოლების ამონახსნებს ვეძებთ მთელ რიცხვებში, ამიტომ 91 უნდა წარმოვადგინოთ ორი მთელი რიცხვის ნამრავლის სახით და განტოლების მარცხენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულებები გავუტოლოთ მათ.

გვაქვს 91-ის ორი მთელი რიცხვის ნამრავლის სახით წარმოდგენის ყველა შესაძლო 8 შემთხვა:

$$91=1\cdot 91=7\cdot 13=13\cdot 7=91\cdot 1=(-1)\cdot(-91)=(-7)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-7)=(-91)\cdot(-1).$$

ე.ი. მივიღებთ ამოსახსნელ 8 სისტემას:

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y^2+xy+x^2=91 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=7 \\ y^2+xy+x^2=13 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=13 \\ y^2+xy+x^2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=91 \\ y^2+xy+x^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x=-1 \\ y^2+xy+x^2=-91 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=-7 \\ y^2+xy+x^2=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=-13 \\ y^2+xy+x^2=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=-91 \\ y^2+xy+x^2=-1 \end{cases}$$

მაგრამ, თუ შევნიშნავთ, რომ

$$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\geq 0.$$

ამის საფუძველზე დავასკვნით, რომ 8 სისტემიდან უკანასკნელი 4 სისტემის განხილვა საჭირო არ არის და ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო დრო ორჯერ შემცირდება.

მარტივი მათემატიკური გარდაქმნების შედეგად დავადგენთ, რომ დარჩენილი 4 სისტემიდან ბოლო ორს ამონახსნი არა აქვს, პირველი სისტემის ამონახსნებია

$$x_1=5,\quad y_1=6 \text{ და } x_2=-6,\quad y_2=-5,$$

მეორე სისტემის კი

$$x_3=-3,\quad y_3=4 \text{ და } x_4=-4,\quad y_4=3.$$

საშუალო სკოლაში უტოლობების სიტემატიური ტრადიციული კურსის შესწავლა განტოლებების შესწავლას უკავშირდება და მათ პარალელურად განიხილება, ამიტომ უტოლობების გამოყენებით განხილული ზოგიერთი სახის განტოლებების ამოხსნის სწავლების სპეციალური ხერხი ეხმარება მოსწავლეებს პრაქტიკულ მუშაობაში და გარკვეულად ავსებს განტოლებებისა და უტოლობების ურთიერთკავშირში სწავლებას შორის არსებულ ხარვეზს.

§4. მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში განიხილება უმარტივესი სახის მოდულის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და მათი სისტემები, რომელთა ამოხსნა დაფუძნებულია მოდულის განსაზღვრებაზე და ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებაზე. განმავითარებელი სწავლებისას მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მოდულის შემცველი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნა არა მარტო ინტერვალთა მეთოდით, არამედ სპეციალური ხერხების გამოყენებითაც, რომელიც მოდულის ძირითად თვისებებზე იქნება დაფუძნებული. რისთვისაც აუცილებელია მოსწავლეების ყურადღება გავამახვილოთ მოდულის თვისებების არა უბრალოდ ფორმულირების დასწავლაზე, არამედ მისი შინაარსის საფუძვლიან გაგებაზე, რაც მასწავლებლის მაღალ პროფესიონალიზმსა და პედაგოგიურ ტაქტს მოითხოვს, ამავე დროს მოსწავლეებს უნდა ვაჩვენოთ ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენების უპირატესობაც. ეს უნდა განხორციელდეს ისეთ მაგალითებზე, რომელთა ტრადიციული (ალგორითმული) გადაწყვეტა მოითხოვს საკმაოდ ბევრ და მოსაწყენ მათემატიკურ გარდაქმნებს და ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებასთან შედარებით მეტ დროს საჭიროებს. ასეთი მაგალითები მოსწავლეებს უნდა მივცეთ საშინაო დავალებად სათანადო მითითებების შემდეგ, რათა სკოლაში მუშაობისათვის დავზოგოთ ისედაც მცირე სასწავლო დრო, ხოლო იმავე მაგალითის ამოხსნა სპეციალური ხერხების გამოყენებით უნდა მოხდეს საგაკვეთილო მუშაობაზე უშუალოდ მასწავლებლის ხელმძღვანელობით. ამოცანის ამოხსნის დამთავრექისთანავე მასწავლებელმა უნდა მოახდინოს შედარებითი ანალიზი და გამოყოს ის მეთოდიკური თავისებურებანი, რომელსაც ამოხსნის თითოეული ხერხი შეიცავს.

ასეთი მიდგომით მოსწავლეები თვალნათლივ ხედავენ მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების

შესწავლის აუცილებლობას, რაც მძლავრი ფსიქოლოგიური ბიძგია იმისათვის, რომ მოსწავლეები მეტი ყურადღებით მოეკიდებიან განსახილავ საკითხებს.

განვიხილოთ ზოგიერთი სახის მოდულის შემცველი განტოლება, უტოლობა და მათი სისტემები, რომელთა ამოხსნა სპეციალური ხერხების გამოყენებაზეა დაფუძნებული.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება

$$|7-2x|=|5-3x|+|x+2|$$

ამოხსნა. რადგან $7-2x=(5-3x)+(x+2)$ და შესრულებულია პირობა

$$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geq 0,$$

ამიტომ გვაქვს

$$(5-3x)(x+2)\geq 0$$

საიდანაც

$$-2\leq x\leq \frac{5}{3}.$$

ამოცანა 2. ამოხსენით უტოლობა

$$|9-2x|<|4-3x|+|x+5|$$

ამოხსნა. რადგან $9-2x=(4-3x)+(x+5)$ და შესრულებულია პირობა

$$|a+b|<|a|+|b|\Leftrightarrow ab<0.$$

ამიტომ გვაქვს

$$(4-3x)(x+5)<0$$

საიდანაც

$$x<-5 \text{ და } x>\frac{4}{3}.$$

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$\left|\sqrt{x^2-x}-x\right|+\left|x+\sqrt{x}\right|=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x} \qquad (1)$$

ამოხსნა. მოსწავლეებმა თავიდან შესაძლოა ვერ შენიშნონ, მაგრამ თუ მათ ყურადღებას გადავიტანთ მოდულების ჯამის თვისებაზე, შენიშნავენ, რომ განტოლების მარცხენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულების ჯამი მოდულების გარეშე ტოლია განტოლების მარჯვენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულებისა.

ამის შემდეგ მოსწავლეებს შევთავაზებთ, რომ შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\left|\sqrt{x^2-x}-x\right|=a \text{ და } \left|x+\sqrt{x}\right|=b\,.$$

მაშინ (1) განტოლება ჩაიწერება სახით

$$|a|+|b|=a+b\,. \qquad (2)$$

მოდულის თვისებიდან გამომდინარე (2) ტოლობის შესრულება შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად $a\geq 0$ და $b\geq 0$. ამიტომ (1) ტოლობა ეკვივალენტურია უტოლობათა სისტემისა

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-x}-x\geq 0\\ x+\sqrt{x}\geq 0\end{cases}$$

უტოლობათა ამ სისტემის ამონსხსნია $x=0$, რომელიც (1) განტოლების ამონახსნიცაა.

ამოცანა 4. ამოხსენით განტოლება

$$\left|\frac{\log_2 x}{1-\log_2 x}\right|+\left|\log_2 x\right|=\frac{\log_2^2 x}{\left|\log_2 x-1\right|} \qquad (3)$$

ამოხსნა. (3) განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა ყველა $x>0$ და $x\neq 2$. რადგან დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის ნებისმიერი x-თვის

$$\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x-1}=\frac{\log_2 x}{\log_2 x-1}+\log_2 x;$$

$$\frac{\log_2^2 x}{\left|\log_2 x-1\right|}=\left|\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x-1}\right|.$$

ამიტომ (3) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\left|\frac{\log_2 x}{\log_2 x-1}\right|+\left|\log_2 x\right|=\left|\frac{\log_2 x}{\log_2 x-1}+\log_2 x\right|. \qquad (4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 x-1}=a, \quad \log_2 x=b.$$

მაშინ (4) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$|a|+|b|=|a+b|\,. \qquad (5)$$

აბსოლუტური მნიშვნელობის თვისებიდან გამომდინარე (5) ტოლობის შესრულება შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $ab \geq 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ (2) განტოლების ამონახსნები ემთხვევა

$$\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x - 1} \geq 0 \qquad (6)$$

უტოლობის ამონახსნებს.

საიდანაც გვაქვს:

$$x = 1 \text{ და } 2 < x < +\infty .$$

ამოცანა 5. ამოხსენით უტოლობა

$$|x| + |7 - x| + 2|x - 2| < 4 \qquad (7)$$

ამოხსნა. როცა $x \leq 2$, მაშინ $7 - x \geq 5$, ამიტომ

$$|x| + |7 - x| + 2|x - 2| \geq 5 .$$

ამიტომ ამ შუალედში უტოლობას ამონახსნი არა აქვს.

როცა $x \geq 4$, გვაქვს $|x| \geq 4$, ამიტომ

$$|x| + |7 - x| + 2|x - 2| \geq 4 .$$

ასევე ამ შუალედის არცერთი წერტილი არ წარმოადგენს (7) უტოლობის ამონახსენს.

როცა $2 < x < 4$, მაშინ $3 < 7 - x < 5$, ამიტომ

$$|7 - x| > 3 \text{ და } |x| > 2 .$$

ე.ი.

$$|x| + |7 - x| + 2|x - 2| > 5 .$$

რაც ნიშნავს, რომ არც ამ შუალედში არ აქვს (7) უტოლობას ამონახსნენი.

ამრიგად, (7) უტოლობას ამონახსენი არა აქვს.

ამოცანა 6. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \sqrt{5x(x+2)} + \sqrt{5y(x+2)} = 2\sqrt{2(x+y)(x+2)} \\ xy = 9 \end{cases} \qquad (8)$$

ამოხსნა. (8) სისტემა შევცვალოთ სისტემით:

$$\begin{cases} \sqrt{5|x|}\sqrt{|x+2|} + \sqrt{5|y|}\sqrt{|x+2|} = 2\sqrt{2|x+y|}\sqrt{|x+2|} \\ xy = 9 \end{cases} \qquad (9)$$

რომელიც წარმოადგენს (8) სისტემის შედეგს. (9) სისტემა ტოლფასია ორი სისტემის ერთობლიობისა

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x+2|=0\\ xy=9\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{5|x|}+\sqrt{5|y|}=2\sqrt{2|x+y|}\\ xy=9\end{cases}\end{array}\right. \qquad (10)$$

(10) ერთობლიობის პირველი სისტემა ტოლფასია სისტემის

$$\begin{cases}x=-2\\ y=-\dfrac{9}{2}\end{cases}.$$

ერთობლიობის მეორე სისტემა კი ტოლფასია სისტემისა

$$\begin{cases}5|x|+5|y|+10\sqrt{xy}=8|x+y|\\ xy=9\end{cases} \qquad (11)$$

პირობიდან $xy=9$, გამომდინარეობს, რომ x და y-ს ერთნაირი ნიშნები აქვთ. ამიტომ სამართლიანია ტოლობები

$$|x||y|=|xy|=xy=9;$$
$$|x+y|=|x|+|y|.$$

ამიტომ (11) სისტემა ტოლფასია სისტემისა

$$\begin{cases}5|x|+5|y|+10\cdot 3=8\left(|x|+|y|\right)\\ |x||y|=9\\ xy>0\end{cases}$$

საიდანაც მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\begin{cases}|x|+|y|=10\\ |x||y|=9\\ xy>0\end{cases}$$

ვიეტის თეორემის გამოყენებით მარტივად დავადგენთ, რომ

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|=1\\ |y|=9\\ xy>0\end{cases}\\ \begin{cases}|x|=9\\ |y|=1\\ xy>0\end{cases}\end{array}\right.$$

რომელიც თავის მხრივ ტოლფასია ოთხი სისტემის ერთობლიობისა:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\ y=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=9\end{cases}\\ \begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-9\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

ამრიგად (8) სისტემის ყველა ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება შედგებოდეს დალაგებულ წყვილთა შემდეგი სიმრავლისაგან:

$$\left\{(-1,-9);(-9,-1);(1,9);(9,1);\left(-2,-\frac{9}{2}\right)\right\}.$$

ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ (-1,-9) წყვილი არ აკმაყოფილებს (8) სისტემას. ყველა დანარჩენი წყვილი (8) სისტემის ამონახსენია.

ე.ი. (8) სისტემის ამონახსენია წყვილები:

$$\left\{(-9,-1);(1,9);(9,1);\left(-2,-\frac{9}{2}\right)\right\}.$$

ამოცანა 7. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}|x+y-4|=5\\ |x-3|+|y-1|=5\end{cases}\qquad(12)$$

ამოხსნა. მოცემული სისტემა ტოლფასია სისტემისა

$$\begin{cases}|x+y-4|=5\\ |x-3|+|y-1|=5\\ |x+y-4|=|x-3|+|y-1|\end{cases}\qquad(13)$$

რადგან მიღებულ სისტემაში სრულდება პირობა $|a|+|b|=|a+b|$, ამიტომ სამართლიანია უტოლობა $ab\geq 0$, რომლის საფუძველზეც (13) სისტემა ტოლფასია შემდეგი შერეული სისტემისა

$$\begin{cases}|x+y-4|=5\\ |x-3|+|y-1|=5\\ (x-3)(y-1)\geq 0\end{cases}$$

რომელიც თავის მხრივ ტოლფასია სისტემათა ერთობლიობისა

$$
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases}
|x+y-4|=5 \\
|x-3|+|y-1|=5 \\
x-3\ge 0 \\
y-1\ge 0
\end{cases} \\
\begin{cases}
|x+y-4|=5 \\
|x-3|+|y-1|=5 \\
x-3\le 0 \\
y-1\le 0
\end{cases}
\end{array}
\right.
$$

ამ ერთობლიობის პირველი სისტემა ტოლფასია სისტემისა

$$
\begin{cases}
x+y-4=5 \\
(x-3)+(y-1)=5 \\
x-3\ge 0 \\
y-1\ge 0
\end{cases}
$$

საიდანაც

$$
\begin{cases}
x+y=9 \\
x\ge 3 \\
y\ge 1
\end{cases}
$$

რომლის ამონახსნები შეიძლება ჩავწეროთ სახით $(t, 9-t)$, სადაც t ნებისმიერად აღებული რიცხვია $[3,8]$ ინტერვალიდან.

ერთობლიდბის მეორე სისტემა ტოლფასია სისტემისა

$$
\begin{cases}
x+1=-1 \\
x\le 3 \\
y\le 1
\end{cases}
$$

რომლის ამონახსნები შეიძლება ჩავწეროთ სახით $(a, -1-a)$, სადაც a ნებისმიერად აღებული რიცხვია $[-2,3]$ ინტერვალიდან.

ამრიგად, (12) სისტემის ამონახსნებია ყველა შესაძლო წყვილები $(t, 9-t)$, სადაც $t\in[3,8]$ და $(a, -1-a)$, სადაც $a\in[-2,3]$.

ამოცანა 8. ამოხსენით განტოლება

$$
-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\ge 1. \qquad (14)
$$

ამოხსნა. (14) უტოლობის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე განისაზღვრება უტოლობით

$$x^2+y^2-1\ge 0.$$

(14) უტოლობა გადავწეროთ სახით:

$$x-|y|\ge 1+\sqrt{x^2+y^2-1} \qquad (15)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$x-|y|\ge 0.$$

ამ პირობის შესრულების შედეგად (15) უტოლობის ორთავე მხარე დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეზე არაუარყოფითია.

(15) უტოლობის კვადრატში ახარიხების გედეგად მივიღებთ მის ტოლფას უტოლობას:

$$\begin{cases}-x|y|\ge\sqrt{x^2+y^2-1}\\ x\ge|y|\end{cases} \qquad (16)$$

რადგან $x\ge|y|\ge 0$. ამიტომ (16) სისტემის პირველი უტოლობის მარცხენა მხარე არადადებითია, ხოლო მარჯვენა მხარე არაუარყოფითი. ამიტომ (16) სისტემა დაკმაყოფილდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ორთავე მხარე ნულის ტოლია, ე.ი. (14) ტოლობა ტოლფასია სისტემისა

$$\begin{cases}x|y|=0\\ x^2+y^2-1=0\\ x\ge|y|\end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან ან $x=0$ ან $y=0$.

თუ $x=0$, მაშინ $x\ge|y|$ უტოლობიდან ვიპოვით, რომ მაგრამ $(0,0)$ წყვილი არ ეკუთვნის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

თუ $y=0$, მაშინ მეორე განტოლებიდან $x^2=1$, მესამე უტოლობიდან, რადგან $x\ge 0$, ამიტომ $x=1$. წყვილი $(1,0)$ აკმაყოფილებს (14) უტოლობას და მისი ერთადერთი ამონახსენია.

ამოცანა 9. ამოხსენით უტოლებათა სისტემა

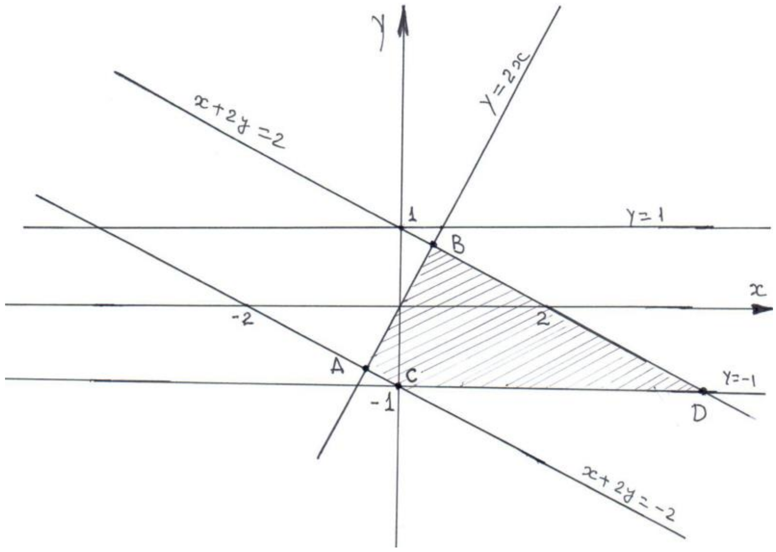
$$\begin{cases}|x+2y|\le 2\\ |y|\le 1\\ 2x-y\ge 0\end{cases} \qquad (17)$$

ამოხსნა. ვისარგებლოთ გეომეტრიული მეთოდით. ავაგოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

მოდულის თვისებიდან გამომდინარე (17) სისტემა ეკვივალენტურია სისტემისა

$$\begin{cases} -2 \le x + 2y \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \\ 2x - y \ge 0 \end{cases}$$

სისტემის პირველი და მეორე უტოლობები წარმოადგენენ პარალელური წრფეებისაგან შედგენილ ზოლებს, ხოლო მესამე უტოლობის ამონახსენი არის კოორდინატთა სათავეზე გამავალი $y = 2x$ წრფის მარჯვნივ მდებარე არე ნახაზი 3.



ნახ.3.

უტოლობათა სისტემის ამონახსნი ჩავწეროთ ანალიზური ფორმით.

ვიპოვოთ მიღებული $ABCD$ ფიგურის A, B, C და D წვეროების აბსცისები, რისთვისაც ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემები:

A წვეროსათვის:

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x - y = 0 \end{cases};$$

B წვეროსათვის:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases};$$

C წვეროსათვის:

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ y = -1 \end{cases};$$

D წვეროსათვის:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ A წერტილის აბსცისაა $-\frac{2}{5}$, B წერტილისა $\frac{2}{5}$, C წერტილისა - 0 და D წერტილის - 4.

განვიხილოთ შუალედები

$$-\frac{2}{5} \le x < 0, \quad 0 \le x < \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{5} \le x \le 4.$$

$-\frac{2}{5} \le x < 0$ შუალედში (17) სისტემის ამონახსნები ქვემოდან შემოსაზღვრულია

$$2x + y = 0$$

წრფით და ზემოდან

$$2x - y = 0$$

წრფით. ამიტომ შეგვიძლია ჩვწეროთ:

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} \le x < 0 \\ -\frac{x}{2} - 1 \le y \le 2x \end{cases}$$

ანალოგიურად ჩავწერთ ამონახსნებს დანარჩენი შუალედებისთვისაც. გვექნება:

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} \le x < 0 \\ -\frac{x}{2} - 1 \le y \le 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le x < \frac{2}{5} \\ -1 \le y \le 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{2}{5} \le x \le 4 \\ -1 \le y \le -\frac{x}{2} + 1 \end{cases}.$$

მოდულის შემცველი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენება სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის პრაქტიკაში ხელს უწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას, მოსწავლეთა მიერ მტკიცე ცოდნის და უფლებას და მათ დაინტერესებას მათემატიკის საფუძვლიანი შესწავლისათვის.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების სრულყოფის ერთ-ერთ პერსპექტიულ გზას წარმოადგენს მათემატიკის გაღრმავებული სისტემის შექმნა, რომელიც დაფუძნებულია ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებაზე, ოაც მნიშვნელოვგად ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მოსწავლეთა ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კერძოდ, კონსტრუქციული და კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის უნარის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას.

§5. განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების გრაფიკული ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში

მოსწავლეები განტოლებათა ამოხსნის გრაფიკულ ხერხს ეცნობიან მეექვსე კლასში, სადაც განიხილება წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. შემდგომ ამ საკითხის გაღრმავებული სწავლება ხდება მეცხრე კლასში, სადაც უკვე განიხილება ისეთი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი, რომელიც შეიცავს არაწრფივ განტოლებებსაც. საშუალო სკოლის მეთერთმეტე და მეთორმეტე კლასებში ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა უტოლობების ამოხსნის დროს გამოიყენება გრაფიკული მეთოდი, როგორც თვალსაჩინოების ხერხი. ე.ი. საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის გრაფიკული ხერხის სწავლებას ფრაგმენტული ხასიათი აქვს. საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში არ განიხილება მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლებების გრაფიკული ამოხსნა, ისეთი განტოლებები, რომლებიც შეიცავენ რამდენიმე ცვლადს, მოდულის შემცველი განტოლებები და უტოლობები, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული გამოსახულებების შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სხვ.

განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული სახის განტოლება, უტოლობა და მათი სისტემა, რომელთა გრაფიკული მეთოდით ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური ხერხების გამოყენებას. იმისდა მიხედვით, თუ როგორი მომზადების ჯგუფთან გვაქვს საქმე, ეს მაგალითები შეიძლება განხილულ იქნეს ჩვეულებრივი პროგრამით მომუშავე სკოლების მაღალი კლასის მოსწავლეებთან ინდივიდუალური მუშაობის დროს ან მთელ კლასთან. ძირითადად კი, მათი განხილვა მიზანშეწონილია ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე, მათემატიკის საგნობრივი წრის სხორმებზე და მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების ჯგუფებთან.

ამოცანა 1. იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$x+|x|=y+|y|. \qquad (1)$$

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნის დაწყებამდე მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია, რომ მოსწავლეებს შევახსენოთ მოდულის განსაზღვრება და მისი თვისებები. მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ იმაზე, რომ (1) განტოლების მარცხენა და მარჯვენა მხარეებში მოთავსებული გამოსახულებები ტოლია შესაბამისად:

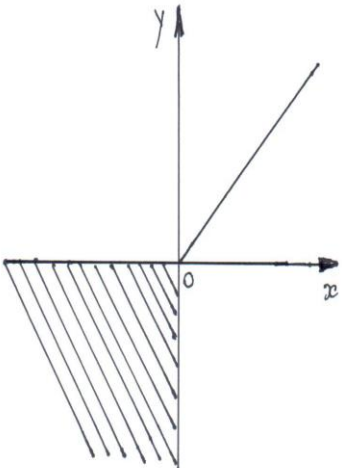
$$x+|x|=\begin{cases}0, & \text{როცა } x<0\\ 2x, & \text{როცა } x>0,\end{cases} \qquad y+|y|=\begin{cases}0, & \text{როცა } y<0\\ 2y, & \text{როცა } y>0.\end{cases}$$

უნდა შევეცადოთ, რომ მოსწავლეები დამოუკიდებლად მივიდნენ იმ დასკვნამდე, რომ (1) განტოლებას ამონახსენი არა აქვს, როცა x-ს და y-ს მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ. მაშასადამე დაგვრჩება განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

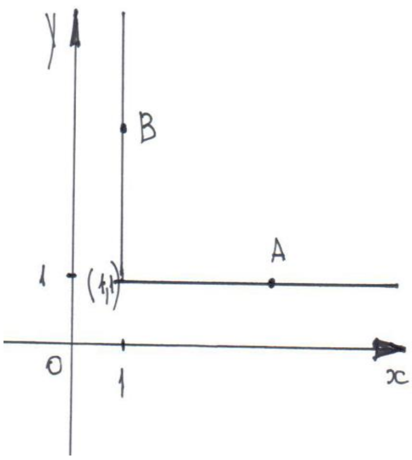
1) $x\ge 0, y\ge 0$, მაშინ $x=y$.

ე.ი. (1) განტოლებას აკმაყოფილებს საკოორდინატო სიბრტყის პირველი კვადრანტის ბისექტრისის ყველა წერტილი.

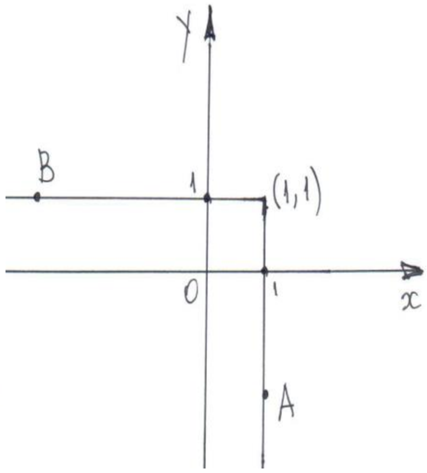
2) $x\le 0, y\le 0$. რადგან ამ დროს (1) განტოლების ორთავე მხარე იგივურად ნულის ტოლის, ამიტომ (1) განტოლებას აკმაყოფილებს საკოორდინატო სიბრტყის მესამე კვადრანტის ყველა წერტილი საკოორდინატო ღერძებთან ერთად. (ნახ. 4).



ნახ. 4.



ნახ. 5.



ნახ. 6.

ამოცანა 2. იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\min(x,y)=1.$$

ამოხსნა. საძიებელი (x, y) წერტილები შედგება ორი ურთიერთგადამკვეთი სხივისაგან, რომლის სათავეა (1,1) წერტილი. ეს სხივები საკოორდინატო ღერძების თანამიმართული და პარალელურია (ნახ.5)

მართლაც, მაგალითად, A წერტილის ორდინატი 1-ის ტოლია, ხოლო აბსცისა 1-ზე მეტია, B წერტილის აბსცისაა-1, ხოლო ორდინატი 1-ზე მეტია. ადვილი საჩვენებელია, რომ წერტილი, რომელიც ამ სხივებზე არ მდებარეობს, არ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

განხილული ამოცანების საფუძვლიანი დამუშავების შემდეგ მეთოდიკურად მიწანშეწონილია მსგავსი ამოცანების საშინაო დავალებად მიცემა. მაგალითად:

1. იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\max(x, y) = 1.$$

2. მე-6 ნახაზზე გამოსახულია (1,1) წერტილიდან გამომავალი ორი საერთო სათავის მქონე სხივი, რომლებიც საკოორდინატო ღერძების პრალელურია და მათ საწინააღმდეგოდაა მიმართული. შეადგინეთ ამოცანა, რომლის ამონახსნებსაც წარმოადგენს ნახაზზე გამოსახული სხივების წყვილი.

რადგან მოსწავლეებისათვის ცნობილია ამოცანა 2-ის ამოხსნა, ამიტომ მათ უნდა მოვთხოვოთ საშინაო დავალებად მიცემული ამოცანების ამოხსნის დაწვრილებითი აღწერა და გრაფიკული გამოსახვა, რაც დაეხმარება მოსწავლეებს მათი ნააზრევი გადმოცენ წერილობითი ფორმით და უკეთ დაეუფლონ ამოცანათა ამოხსნის გაფორმების წესებს, რომელსაც მოსწავლეთა აბსოლუტური უმრავლესობა ვერ ფლობს, რასაც ცხადყოფს გამოსაშვები კლასების მოსწავლეთა საკონტროლო წერების და გამოცდების ნაშრომთა ანალიზი.

განტოლებების. უტოლობების და მათი სისტემების გრაფიკული ხერხის უკეთ ილუსტრირებისათვის მიზანშეწონილად მიგვაჩნია ისეთი განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების განხილვის შემდეგ. რომელთა ამოხსნა ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკების აგებით ხდება, განვიხილოთ ისეთი განტოლებები, უტოლობები და მათი სისტემები, რომელთა ჩანაწერები უშუალოდ

არ შეიცავენ ელემენტარულ ფუნქციებს, მაგრამ სპეციალური, კერძო ხერხების გამოყენებით დაიყვანება ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკების აგებაზე.

მაგალითად, საკლასო მეცადინეობაზე გავარჩიოთ

$$\log_3 x = \frac{3}{x} \qquad (2)$$

განტოლების ამოხსნა გრაფიკული ხერხით, რადგან მოცემული განტოლება განსაზღვრულია $x > 0$ მნიშვნელობისათვის, ამიტომ ავაგებთ $y = \log_3 x$ და $y = \frac{3}{x}$ ფუნქციათა გრაფიკებს, ვიპოვით მათი გადაკვეთის $x = 3$ წერტილს. (ნახ. 7). მოსწავლეები დარწმუნდებიან, რომ (2) განტოლებას სხვა ამონახსნი არა აქვს.

ამის შემდეგ მოსწავლეებს განსახილველად მივცეთ ასეთი

ამოცანა 3. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლება

$$x^x = 256 \qquad (3)$$

სადაც $x > 0$.

ამოხსნა. ჩვენს მიერ ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა, რომელშიც მონაწილეობდა ხუთი სხვადასხვა საშუალო სკოლის მეთერთმეტე კლასის 89 მოსწავლე მხოლოდ 12 მოსწავლემ შეძლო (3) განტოლების დაყვანა (2) სახეზე და შემდეგ უშეცდომოდ ამოხსნა. მოსწავლეთა უმრავლესობამ ვერ გაითვალისწინა, რომ როცა $x > 0$ პირობა საშუალებას იძლევა (3) განტოლების მიმართ გამოვიყენოთ გალოგარითმების ოპერაცია 2-ის ფუძით, საიდანაც მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას

$$x \log_2 x = 8.$$

რადგან $x > 0$, ამიტომ მიღებული განტოლების ორთავე მხარის x-ზე გაყოფით მივიღებთ:

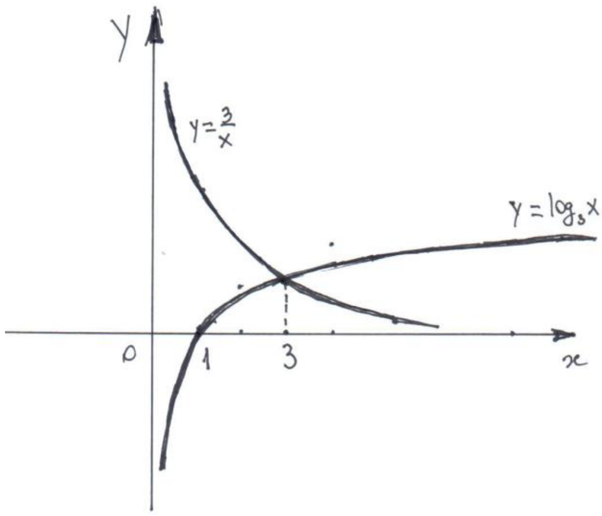
$$\log_2 x = \frac{8}{x}.$$

რომლის გრაფიკული ამოხსნა მოსწავლებისათვის სირთულეს არ წარმოადგენს, რადგან მათ შეუძლიათ

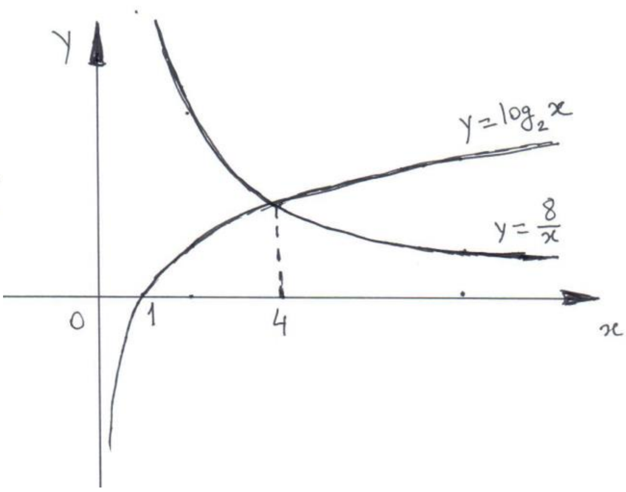
$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნა, რომლის ამონახსნია $x = 4$. (ნახ.8).

ხშირად განტოლება, უტოლობა ან მათი სისტემები ისეთი სახით არის ჩაწერილი, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობა ფიქრობს საერთოდ შეუძლებელია ამ განტოლების გრაფიკული ამოხსნა, რადგან უმრავლეს შემთხვევაში განტოლების ჩანაწერით მოცემული ფუნქციების გრაფიკუბის აგება ელემენტარული ხერხების გამოყენებით გეუძლებელია.



ნახ. 7.



ნახ.8.

ზოგჯერ უმჯობესია ჩავატაროთ ტოლფასი გარდაქმნები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს მოცემული განტოლება წარმოვადგინოთ უფრო მარტივი ფორმით, რომლის გამოსახვა შეიცავს მოსწავლეთათვის ცნობილ ელემენტარულ ფუნქციებს. ყოველი კონკრეტული მაგალითიდან გამომდინარე ჩატარებული მათემატიკური გარდაქმნები შეიძლება სხვადასხვა იყოს, მაგალითად, ახარისხების, ამოფესვის, გალოგარითმების, პოტენცირების და სხვ. ამასთან მოსწავლეებს უნდა განვუმარტოთ, რომ გარდაქმნების შესრულების დროს არ უნდა მოვახდინოთ განტოლებაში შემავალი ცვლადის ან ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა არეების ან შემცირება ან გადიდება, რადგან ამან შეიძლება დამატებითი პრობლემები წარმოშვას. მაგალითად,

ამოცანა 4. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლება

$$x \cdot 2^{3^x} = 1.$$

ამოხსნა. საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის პროგრამა საშუალებას არ იძლევა მოსწავლემ ელემენტარული მეთოდების გამოყენებით ააგოს $y = x \cdot 2^{3^x}$ ფუნქციის გრაფიკი. ამან შეიძლება მოსწავლეებში დაბნეულობაც კი გამოიწვიოს.

შევეცადოთ (4) განტოლება დავიყვანოთ იმ სახეზე, რომელიც შეიცავს ელემენტარულ ფუნქციებს, რომლებიც შეისწავლება საშუალო სკოლაში და მოსწავლეებისათვის ცნობილია.

(4) განტოლების ამონახსნები, თუ ასეთი არსებობს, უნდა ვეძებოთ დადებით რიცხვთა სიმრავლეში.

მართლაც, ნებისმიერი x-თვის $3^x > 0$,ამიტომ $2^{3^x} > 1$. რადგან (4) განტოლების მარჯვენა მხარე 1-ის ტოლია, ამიტომ x დადებითი უნდა იყოს და აკმაყოფილებდეს პირობას

$$0 < x < 1.$$

(4) განტოლება გადავწეროთ ასე:

$$x = \frac{1}{2^{3^x}} \qquad (5)$$

(5) განტოლება გავალოგარითმოთ $\frac{1}{2}$-ის ფუძით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 3^x .$$

ავაგოთ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ და $y = 3^x$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.9). ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა მოცემული განტოლების ამონახსენია. ნახაზიდან ჩანს, რომ (4) განტოლების ამონახსენის მიახლოებითი მნიშვნელობა $\frac{1}{3}$-ის ტოლია.

მოსწავლეები ინტერესით განიხილავენ მაღალი ხარისხის განტოლებების ამოხსნის გრაფიკულ ხერხს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ კუბური განტოლების ამოხსნა გრაფიკული ხერხით.

მოცემული განტოლება გადავწეროთ სახით

$$x\left(x^2 - 3x - 1\right) = -3,$$

ანუ

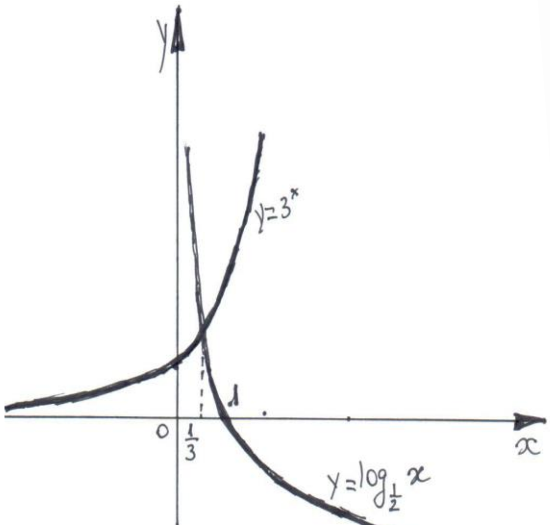
$$x^2-3x-1=-\frac{3}{x}.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების გრაფიკული ამოხსნა დაიყვანება

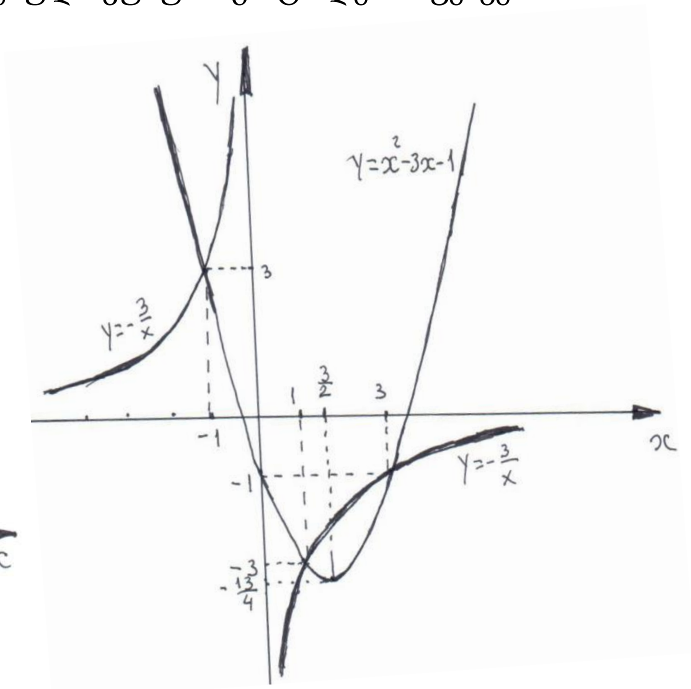
$$\begin{cases} y=x^2-3x-1 \\ y=-\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

სისტემის გრაფიკულ ამოხსნაზე.

მოსწავლეებისათვის ცნობილია, რომ სისტემის პირველი განტოლების გრაფიკული გამოსახულება წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის წვერო მოთავსებულია $\left(\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$ წერტილში, მისი სიმეტრიის ღერძია $x=\frac{3}{2}$ წრფე, ორდინატთა ღერძს კვეთს $(0,1)$ წერტილში და შტოები მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ, ხოლო სისტემის მეორე განტოლების გრაფიკული გამოსახულება წარმოადგენს ჰიპერბოლას, რომლის შტოები მოთავსებულია საკოორდინატო სიბრტყის მეორე და მეოთხე კვადრანტებში. (ნახ. 10). პარაბოლისა და ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები წარმოადგენენ მოცემული განტოლების ამონახსნებს. ნახაზიდან ჩანს, რომ ისინი სამ წერტილში გადაიკვეთებიან, რომელთა აბსცისებია -1, 1 და 3. შემოწმებით მარტივად დავადგენთ, რომ სამივე რიცხვი მოცემული კუბური განტოლების ფესვებია.



ნახ. 9.



ნახ.10.

განტოლებების და მათი სისტემების გარფიკული ამოხსნის დროს ზოგჯერ დამხმარე ცვლადის შემოღება ამოხსნის პროცესს საგრძნობლად ამარტივებს და მოსწავლეთა დაინტერესებას იწვევს. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

ამოცანა 5. ამოხსენით განტოლება გრაფიკულად

$$x^4-7x^2+6x=0 \qquad (6)$$

ამოხსნა. (6) განტოლება გადავწეროთ სახით

$$x^4-8x^2+\left(x^2+6x+9\right)-9=0,$$

$$\left(x^4-8x^2+16\right)+\left(x^2+6x+9\right)-25=0,$$

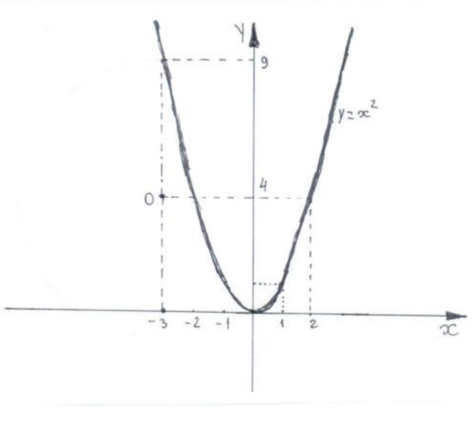
$$\left(x^2-4\right)^2+\left(x+3\right)^2=25.$$

შემოვიღოთ დამხმარე ცვლადი $y=x^2$. მაშინ (6) განტოლების გრაფიკული ამოხსნა დაიყვანება

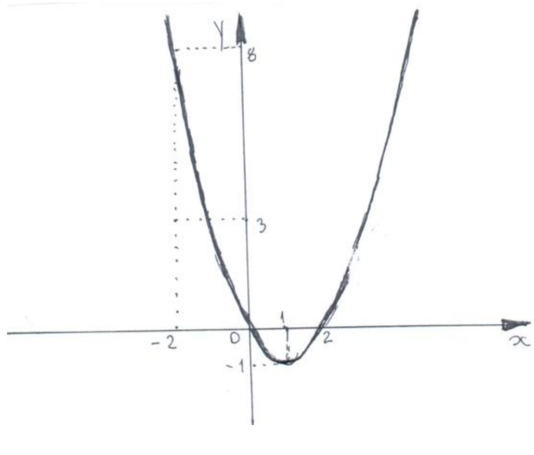
$$\begin{cases}\left(x^2-4\right)^2+\left(x+3\right)^2=25\\ y=x^2\end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის გრაფიკულ ამოხსნაზე.

სისტემის პირველი განტოლება გამოსახავს წრეწირს, რომლის ცენტრი მოთავსებულია (3,4) წერტილში, ხოლო რადიუსია 5. მეორე განტოლება კი გამოსახავს პარაბოლას, რომლის შტოები მიმართულია ზევით და გადის კოორდინატთა სათავეზე (ნახ.11). ნახაზიდან ჩანს, რომ წრეწირი და პარაბოლა გადაიკვეთება წერტილებში (-3, 9), (0, 0), (1, 1), (2, 4). შემოწმებით დავადგენთ, რომ რიცხვები -3, 0, 1, 2 წარმოადგენენ (6) განტოლების ამონახსნებს.



ნახ. 11.



ნახ.12.

(6) განტოლების გრაფიკული ამოხნის შემდეგ შესაძლოა მოსწავლეებს გაუჩნდეთ გრაფიკული ხერხის გამოყენების საწინააღმდეგო აზრი, რადგან მისი ანალიზური ამოხსნა გაცილებით ადვილია, ამიტომ მასწავლებელს მზად უნდა ჰქონდეს ისეთი მაგალითები,რომელთა განხილვა დაარწმუნებს მოსწავლეებს გრაფიკული ხერხის შესწავლის აუცილებლობასა და საჭიროებაში.

მაგალითად, $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$ განტოლების გრაფიკული ამოხსნის დროს თუ ვიმოქმედებთ იგივე ხერხით, რითაც (6) განტოლების ამოხსნის დროს, მივიღებთ განტოლებას

$$\left(x^2-2x-3\right)^2+\left(x+2\right)^2=25.$$

რომელიც ახალი დამხმარე $y=x^2-2x$ ცვლადის შემოღებით დაიყვანება

$$\begin{cases}\left(y-3\right)^2+\left(x+2\right)^2=25\\ y=x^2-2x\end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის გრაფიკულ ამოხსნაზე (ნახ.12). აქაც ისე, როგორც წინა შემთხვევაში მივიღებთ თანაკვეთის ოთხ წერტილს (1, -1), (2, 0), (3, 3), (-2. 8). ხოლო შემოწმებით დავადგენთ, რომ -2, 1, 2 და 3 მოცემული განტოლების ამონახსნებია.

განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების გრაფიკული ხერხის ამოხსნის დროს ფუნქციის ლუწობის, კენტობის, პერიოდულობის და სხვა თვისებების გათვალისწინება ხშირად ამარტივებს ამოხსნის პროცესს. განვიხილოთ ერთი მაგალითი, რომლის ამოხსნის დროს ერთდროულად გამოიყენება ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებებიდან რამდენიმე.

მაგალითი 6. ამოხსენით გრაფიკულად განტოლება

$$|y|=\cos x \qquad (7)$$

ამოხსნა. რადგან $y=\cos x$ ფუნქცია პერიოდულია პერიოდით 2π, ამიტომ (7) განტოლების ამოსახსნელად საკმარისია განვიხილოთ რომელიმე 2π სიგრძის ტოლ შუალედში მოთავსებული ამონახსნები, ხოლო ყველა ამონახსნის მისაღებად საკმარისია ეს ამონახსნები პარალელურად გადავიტანოთ $2\pi k,\ k\in Z$ მონაკვეთებით. მეორეს მხრივ $|-y|=|y|$, ამიტომ საძებნი წერტილთა სიმრავლე

სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ, რადგან $|y| \geq 0$, ამიტომ უნდა შესრულდეს პირობა $\cos x \geq 0$, საიდანაც $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. ე.ი. (7) განტოლების ამონახსნებია

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

გრაფიკი გამოსახულია მე-13 ნახაზზე.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გავამახვილოთ განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების ამოხსნის გრაფიკულ ხერხზე იმ შემთხვევაში, როცა ამოცანაში შემავალი ფუნქციები არაცხადი სახით არის წარმოდგენილი. ასეთი ამოცანების ამოხსნის სპციალური ხერხების გამოყენებას მოითხოვს, რადგან არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება უმრავლეს შემთხვევაში დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და ზოგჯერ გრაფიკის აგება შეუძლებელიც კია, ამიტომ პირველ რიგში რაც უნდა გავაკეთოთ ის არის, რომ თუ შესაძლებელია ამოვხსნათ რომელიმე ცვლადი მოცემული განტოლებიდან, რის შემდეგაც საჭიროებისამებრ ჩავატაროთ მათზე ეკვივალენტური გარდაქმნები, რომლებზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი. განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 7. გრაფიკულად ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{y-1}{y+1} = 0 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}.$$

ამოხსნა. სისტემის პირველი განტოლება მოცემულია არაცხადი სახით. ცხადია $y \neq -1$. მასში შემავალი ფუნქცია ლუწია, ამიტომ გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას y -ის მიმართ,მივიღებთ

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

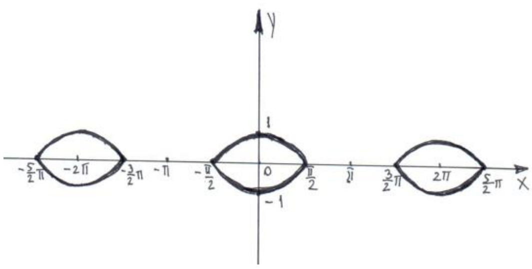
გამოვყოთ მიღებული გამოსახულებიდან მთელი ნაწილი, მივიღებთ:

$$y = -1 - \frac{2}{x^2 - 1}.$$

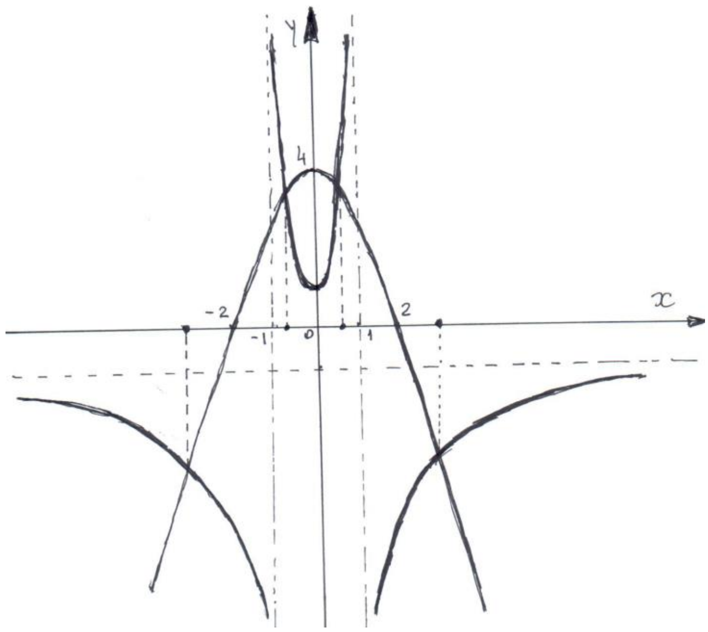
ეს ფუნქცია განსაზღვრული არ არის $x = \pm 1$ წერტილებზე. ამ ფუნქციის გამოკვლევასა და გრაფიკის აგებაზე აქ აღარ შევჩერდებით, მისი გრაფიკი

მოცემულია მე-14 ნახაზზე (გარდა იმ პარაბოლისა, რომლის შტოებიც მიმართულია ქვემოთ).

რაც შეეხება სისტემის მეორე განტოლებას, მისი გრაფიკის აგება მოსწავლეებისათვის სირთულეს არ წარმოადგენს. რის შედეგადაც გრაფიკის საშუალებით მარტივად იპოვნიან თანაკვეთის წერტილებს, რომელთა აბსცისები მოცემული განტოლების ამონახსნებია.



ნახ. 13.



ნახ.14.

ამოცანა 8. საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხეთ

$$\log_2\left(y-1\right)\geq\log_2\left(x^2-2\right) \qquad (8)$$

უტოლობის ამონახსენები.

ამოხსნა. აქაც ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით. (8) უტოლობაში შემავალი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა

$$\left[\begin{array}{l} y-1>0 \\ x^2-2>0. \end{array}\right.$$

ამ პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$y-1\geq x^2-2,$$

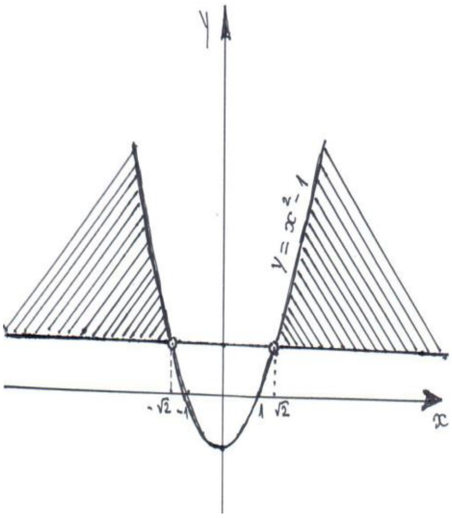
ანუ

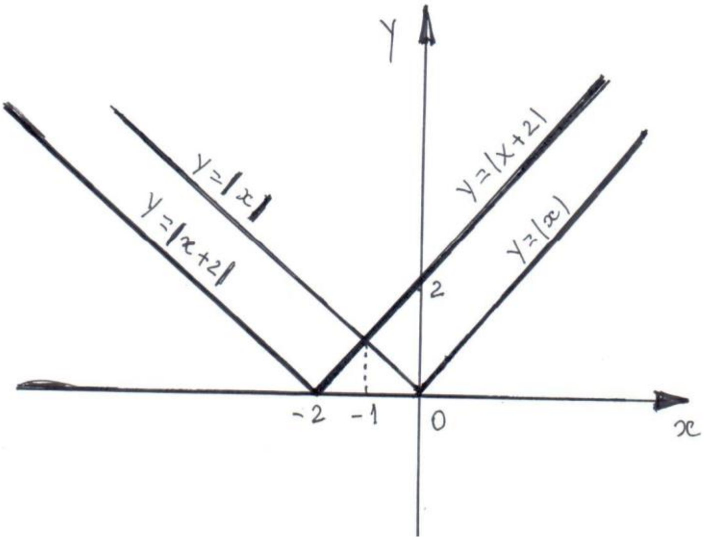
$$y\geq x^2-1.$$

(8) უტოლობის ამონახსნებს წარმოადგენს

$$\left[\begin{array}{l} y-1>0 \\ x^2-2>0 \\ y\ge x^2-1 \end{array}\right.$$

უტოლობათა ერთობლიობის ამონახსენი, რომელიც დაშტრიხულია მე-15 ნახაზზე. ამონახსნებს არ ეკუთვნის $y=1$ წრფის წერტილები.





ნახ. 15. ნახ.16.

მოსწავლეები საშუალო სკოლაში განიხილავენ $y=|x|$ ფუნქციის თვისებებს და მისი გრაფიკის აგებას, ამიტომ მათთვის ინტერესმოკლებული არ არის გრაფიკული ხერხით ისეთი უტოლობების ამოხსნა, რომლებიც დაიყვანება $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკზე ჩატარებული ზოგიერთი კომპოზიციის აგების განხორციელებაზე. განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 9. ამოხსენით უტოლობა გრაფიკულად

$$|x+2|>|x|.$$

ამოხსნა. ავაგოთ $y=|x|$ და $y=|x+2|$ ფუნქციათა გრაფიკები. მეორე ფუნქციის გრაფიკი მიიღება პირველი ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით 2 ერთეულით მარჯვნივ (ნახ. 16). ნახაზიდან ჩანს, რომ როცა $x>-1$, მაშინ $y=|x+2|$ ფუნქციის გრაფიკის ორდინატები მეტია $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამის ორდინატებზე, ამიტომ, მოცემული უტოლობის ამონახსნებს წარმოადგენს $x>-1$ რიცხვები.

ამოცანა 10. ამოხსენით უტოლობა გრაფიკულად

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right|>1 \qquad (10)$$

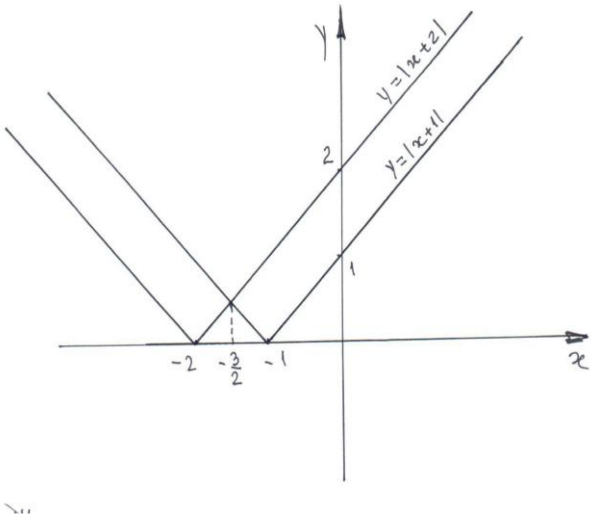
ამოხსნა. უტოლობაგანსაზღვრული არ არის $x=-1$ წერტილზე.როცა $x\neq-1$, მაშინ $|x+1|>0$, ამიტომ (10) უტოლობა შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$|x+2|>|x+1|.$$

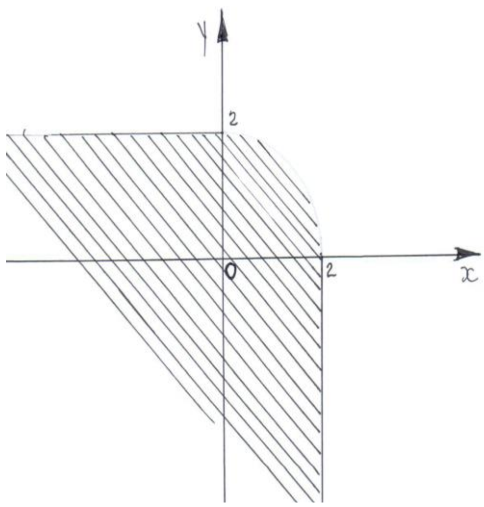
ე.ი. (10) სახის უტოლობის ამოხსნა დავიყვანეთ (9) სახის უტოლობის ამოხსნაზე.

მოსწავლეები ააგებენ $y=|x+2|$ და $y=|x+1|$ ფუნქციათა გრაფიკებს (ნახ. 17), შენიშნავენ, რომ $x=-1,5$ წერტილის მარჯვნივ $y=|x+2|$ ფუნქციის ყველა წერტილის ორდინატი მეტია $y=|x+1|$ ფუნქციის შესაბამისი წერტილების ორდინატებზე. ამრიგად, $|x+2|>|x+1|$, თუ $x>-1,5$. მაგრამ, რადგან $x\neq-1$, ამიტომ უტოლობის ამონახსნებია:

$$-1,5<x<-1,\ x>-1.$$



ნახ. 17.



ნახ.18.

ამოცანა 11. ამოხსნეით უტოლობა გრაფიკულად

$$\left(x+|x|\right)^2+\left(y+|y|\right)^2\leq16 \qquad (11)$$

ამოხსნა. განვიხილოთ შემთხვევები:

ა) თუ $x\geq0,\ y\geq0,$ მაშინ (11) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$x^2+y^2\leq4.$$

ე.ი. უტოლობას აკმაყოფილებს იმ წრეწირის მეოთხედი, რომლის რადიუსია 2, ცენტრი მოთავსებულია კოორდნატთა სათავეშიდა მოთავსებულია საკოორდინატო სიბრტყის პირველ კვადრანტში.

ბ) თუ $x \geq 0, y \leq 0,$ მაშინ (11) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$y \leq 2.$$

ე.ი. უტოლობას აკმაყოფილებს ox ღერძისა და მის პარალელურ $y = 2$ წრფეს შირის მდებარე ზოლის ყველა წერტილი, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყის მეოთხე კვადრანტშია მოთავსებული.

გ) თუ $x \leq 0, y \geq 0,$ მაშინ (11) უტოლობა მიიღებს სახეს: $x \leq 2$.

ე.ი. უტოლობას აკმაყოფილებს oy ღერძისა და მის პარალელურ $x = 2$ წრფეს შირის მდებარე ზოლის ყველა წერტილი, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყის მეორე კვადრანტშია მოთავსებული.

დ) თუ $x < 0, y < 0,$ მაშინ (11) უტოლობიდან მივიღებთ ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობას $0 < 16$. ე.ი. უტოლობას აკმაყოფილებს მთლიანად საკოორდინატო სიბრტყის მესამე კვადრანტი.

(11) უტოლობის ამონახსენს წარმოადგენს მე-18 ნახაზზე დაშტრიხული არე.

მათემატიკის საგნობრივი წრის მოსწავლეთა განსაკუთრებული დაინტერესება გამოიწვია

$$y = |y| \sin x \qquad (12)$$

განტოლების გრაფიკული ხერხით ამოხსნამ.

მოსწავლეებს შევთავაზეთ ამოხსნის ისეთი გზა, რომელიც დაფუძნებული იყო $z = \frac{y}{|y|}$ ფუნქციის გამოყენებაზე. შევნიშნოთ, რომ თუ $y = 0$. მაშინ (12) განტოლებას აკმაყოფილებს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობა, ე.ი. ამონახსენია მთელი აბსცისათა ღერძი.

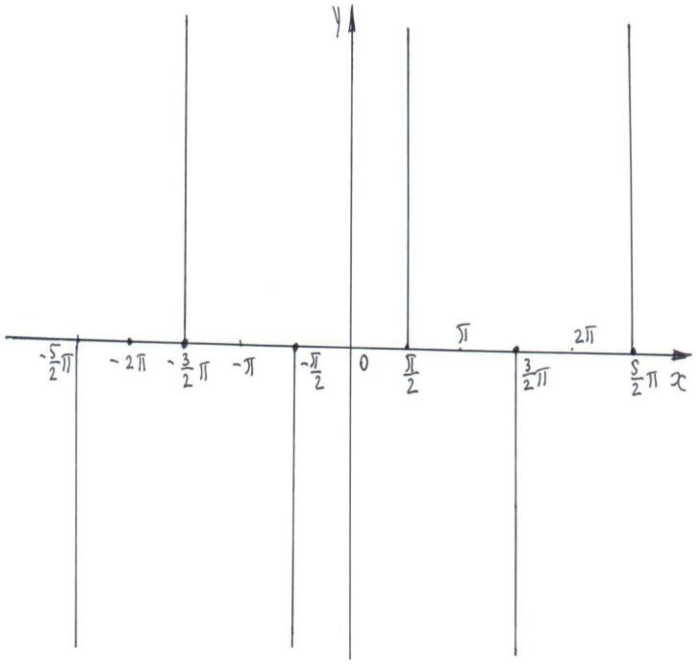
რადგან

$$\frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1, \text{ თუ } y > 0, \\ -1, \text{ თუ } y < 0. \end{cases}$$

ამიტომ (12) განტოლების ამონახსნები გრაფიკულად იქნება შემდეგი ორი სისტემისგან შემდგარი ერთობლიობა:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y > 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y < o \\ \sin x = -1 \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y > 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} y < o \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \end{cases}\end{array}\right.$$

გრაფიკული ამოხსნა მოცემულია მე-19 ნახაზზე.



ნახ.19.

მეთოდიკური თვალსაზრისით განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების გრაფიკული ამოხსნის სწავლება გარკვეულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული, რაც პირველ რიგში იმაში ვლინდება, რომ მოსწავლეებმა საფუძვლიანად არ იციან სკოლაში განხილული ელემენტარული ფუნქციების თვისებები. რადგან განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების გრაფიკული ამოხსნის მეთოდების გამოყენება დაფუძნებულია ელემენტარული ფუნქციების თვისებებზე, მათი გრაფიკების აგებაზე და ხშირად მოითხოვს ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას, ამიტომ ეს მეთოდი მოსწავლეებს ეხმარება მიღებული ცოდნის განახლებაში, ახალი ცოდნის შეძენაში, ხდება მოსწავლეთა ცოდნის გამოყენების სფეროს გაფართოება და გრაფიკული კულტურის ჩამოყალიბება, რის ნაკლებობასაც ჩვენი სკოლის კურსდამთავრებულები განიცდიან.

§6. განტოლებათა სისტემების გამოყენება კუბური ფუნქციის მაქსიმუმებისა და მინიმუმების პოვნისას

მათემატიკის სწავლების უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ყველა მოსწავლის მათემატიკური მომზადების აუცილებელი მინიმუმის მიღწევის უზრუნველყოფა მათი მომავალი პროფესიული არჩევანისაგან დამოუკიდებლად. საზოგადოების კომპიუტერიზაცია, თანამედროვე ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა მოითხოვს მუშაკის მათემატიკურ განათლებულობას თითქმის ყველა სამუშაო ადგილზე. მათემატიკურ განათლებულობაში ვგულისხმობთ კონკრეტულ მათემატიკურ ცოდნას და მათემატიკის მეშვეობით გამომუშავებული აზროვნების სტილს, კონკრეტული მათემატიკური ცოდნის გარეშე გაძნელებულია თანამედროვე ტექნიკის პრინციპების გაგება, მისი პრაქტიკაში გამოყენება და მეცნიერული ცოდნის აღქმა. საბაზისო მათემატიკური მომზადების გარეშე შეუძლებელია აიგოს თანამედროვე ადამიანის განათლება, რაც საფუძველს ქმნის, გადაისინჯოს ტრადიციული შეხედულება მათემატიკის სასწავლო შინაარსზე, მის როლზე და ადგილზე ზოგად განათლებაში.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის სასწავლო პროგრამა არ ითვალისწინებს წარმოებულის და მისი გამოყენების შესწავლას, რამაც გარკვეულ წილად შეამცირა ისეთი ამოცანების განხილვა, რომლებშიც მოითხოვება ფუნქციათა მაქსიმუმებისა და მინიმუმების პოვნა. ამან დღის წესრიგში დააყენა ზოგიერთი სახის ფუნქციის გამოკვლევა არასტანდარტული ხერხით.

განვიხილოთ წარმოებულის გამოყენების გარეშე კუბური ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის ერთი არასტანდარტული ხერხი, კერძოდ ზოგად შემთხვევაში კუბური ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი ვიპოვოთ განტოლებათა სისტემის გამოყენებით.

ვთქვათ, მოცემულია

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (1)$$

კუბური ფუნქცია, სადაც a, b, c, d ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან $a \neq 0$. (1) ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{f(x)}{a} = ax^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{f(x)}{a} = z(x), \quad \frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q, \quad \frac{d}{a} = r.$$

გვექნება:

$$z(x) = x^3 + px^2 + qx + r \qquad (2)$$

ნაცვლად (1) ფუნქციისა, გამოვიკვლიოთ (2) ფუნქცია, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)^2(x-\beta) + \gamma.$$

გავხსნათ ფრჩხილები ტოლობის მარჯვენა მხარეში და ვისარგებლოთ ორი მრავალწევრის იგივური ტოლობით, მაშინ α, β და γ-ს მიმართ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას, რომელიც სამ განტოლებას შეიცავს:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -p \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = q \\ -\alpha^2\beta + \gamma = r \end{cases}$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა α-ს მიმართ, რისთვისაც სისტემის პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ β და ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\alpha_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}; \qquad \alpha_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}. \qquad (3)$$

როცა $p^2 - 3q > 0$, მაშინ ვიპოვით შესაბამის α_1, β_1 და α_2, β_2-ს. მასასადამე მივიღებთ:

$$z(x) = (x-\alpha_1)^2(x-\beta_1) + \gamma_1,$$
$$z(x) = (x-\alpha_2)^2(x-\beta_2) + \gamma_2.$$

ვთქვათ, $\alpha_1 < \alpha_2$. დავამტკიცოთ, რომ როცა $p^2 - 3q > 0$ (2) ფუნქციას $x = \alpha_1$ წერტილზე აქვს γ_1-ის ტოლი მაქსიმუმი, ხოლო $x = \alpha_2$ წერტილზე აქვს γ_2-ის ტოლი მინიმუმი.

რადგან (2) ფუნქცია განსაზღვრულია R რიცხვით ღერძზე, იმისათვის, რომ (2) ფუნქციას $x = \alpha_1$ წერტილზე ჰქონდეს მაქსიმუმი, ნებისმიერი α^* რიცხვისათვის, როცა $-\infty < \alpha^* < \alpha_1$ უნდა შესრულდეს პირობა

$$z(\alpha^*) < z(\alpha_1).$$

ვთქვათ, $\alpha^* = \alpha_1 - A,$ სადაც $A > 0$ რაიმე ნამდვილი რიცხვია. მაშინ

$$z(\alpha_1) - z(\alpha^*) = a_1^3 + p\alpha_1^2 + q\alpha_1 + r - (\alpha_1 - A)^3 - p(\alpha_1 - A)^2 - q(\alpha_1 - A) - r =$$
$$= A\left((3\alpha_1^2 + 2p\alpha_1 + q) - (3\alpha_1 + p)A + A^2\right)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $3\alpha_1^2 + 2p\alpha_1 + q = 0$, ამიტომ $z(\alpha_1) - z(\alpha *) = A^2(A - (3\alpha_1 + p))$

მიღებულ ტოლობაში ჩავსვათ α_1-ის მნიშნელობა (3) ტოლობიდან, გვექნება:

$$z(\alpha_1) - z(\alpha *) = A^2\left(A + \sqrt{p^2 - 3q}\right) > 0.$$

მაშასადამე, როცა $p^2 - 3q > 0$ (2) ფუნქციას $x = \alpha_1$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი, რომელიც γ_1-ის ტოლია.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ როცა $p^2 - 3q > 0$ (2) ფუნქციას $x = \alpha_2$ წერტილზე აქვს მინიმუმი, რომელიც γ_2-ის ტოლია.

მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილად ვთვლით, რომ მოსწავლეებმა დამოუკიდებლად დაამტკიცონ შემდეგი დებულებები:

1. როცა $p^2 - 3q < 0$, მაშინ (2) ფუნქცია ზრდადია R რიცხვით ღერძზე.

2. როცა $p^2 - 3q = 0$, მაშინ (2) ფუნქციას არც მაქსიმუმი აქვს და არც მინიმუმი.

დავუბრუნდეთ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ფუნქციას და შევადაროთ ის $z(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ ფუნქციას.

ცხადია, როცა $a > 0$, მაშინ $f(x)$ და $z(x)$ ფუნქციებს მაქსიმუმი და მინიმუმი ერთსა და იმავე წერტილებში აქვთ, ხოლო როცა $a < 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს იმ წერტილში, რომელშიც $z(x)$ ფუნქციას აქვს მინიმუმი და $f(x)$ ფუნქციას მინიმუმი აქვს იმ წერტილში, რომელშიც $z(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. იპოვეთ $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ (4) ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

ამოხსნა. განვიხილოთ $z(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 5$ ფუნქცია, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 5 = (x - \alpha_1)^2(x - \beta) + \gamma \qquad (5)$$

ფრჩხილების გახსნის შემდეგ გვექნება სისტემა:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 7{,}5 \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = 18 \\ -\alpha^2\beta + \gamma = -5 \end{cases}$$

საიდანაც სათანადო ჩასმების შემდეგ მივიღებთ:

$$\alpha_1 = 2; \quad \alpha_2 = 3; \quad \beta_1 = 3{,}5; \quad \beta_2 = 1{,}5; \quad \gamma_1 = 19; \quad \gamma_2 = 18{,}5.$$

მაშასადამე, $z(x)$ ფუნქციისათვის მივიღეთ შემდეგი წარმოდგენები:

$$x^3-7{,}5x^2+18x+5=(x-2)^2(x-3{,}5)+19. \quad x^3-7{,}5x^2+18x+5=(x-3)^2(x-1{,}5)+18{,}5.$$

რადგან (4) ფუნქციის უფროსი კოეფიციენტი დადებითია, ამიტომ (4) ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს $x=2$ წერტილში, რომელიც $f(2)=38$-ის ტოლია, ხოლო მინიმუმი აქვს $x=3$ წერტილში, რომელიც $f(3)=37$-ის ტოლია.

მაგალითი 2. იპოვეთ

$$f(x)=-2x^3-15x^2+36x-30 \qquad (6)$$

ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

ამოხსნა. განვიხილოთ

$$z(x)=x^3+7{,}5x^2-18x+15 \qquad (7)$$

ფუნქცია, რომელიც სათანადო სისტემის ამოხსნის შემდეგ წარმოდგება შემდეგნაირად:

$$x^3+7{,}5x^2-18x+15=(x+6)^2(x-4{,}5)+177.$$
$$x^3+7{,}5x^2-18x+15=(x-1)^2(x+9{,}5)+5{,}5.$$

რადგან (6) ფუნქციის უფროსი კოეფიციენტი უარყოფითია, ამიტომ (6) ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს იმ წერტილში, რომელსიც (7) ფუნქციას აქვს მინიმუმი, ე.ი. $x=1$ წერტილში რომელიც $f(1)=-11$-ის ტოლია, ხოლო მინიმუმი აქვს იმ წერტილში, რომელშიც (7) ფუნქციას აქვს მახიმუმი, ე.ი. $x=-6$ წერტილში, რომელიც $f(-6)=-354$-ის ტოლია.

კუბური ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის განხილული ხერხის სწავლება გარკვეულწილად ავსებს იმ ვაკუუმს, რაც სასკოლო პროგრამიდან წარმოებულის ამოღების შედეგად გაჩნდა.

§7. პედაგოგიური ექსპერიმენტი.

განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკამ საშუალო სკოლაში, რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული იყო დისერტაციის I და II თავებში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა ექვსი წლის (2007-2013 წლებში) განმავლობაში პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №40 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს რაიონის სოფელ ჟონეთის საშუალო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის რაიონის სოფელ ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში. ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო წერებისა და დამოუკიდებელი სასმუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც შეეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2009-2011 წლები) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის დროს ზოგიერთი ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2011-2013 წლები) დადასტურდა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა. სულ პედაგოგიურ ექსპერიმენტში მონაწილეობდა 262 სტუდენტი.

ანალიზმა ცხადყო, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმო-ადგენს ისეთი მაგალითების ამოხსნა რომელიც ეხება განტოლებების, უტოლობების მათი სისტემებისა და ერთობლიობების ამოხსნას, რომლებიც მოითხოვს სპეციალური, არასტანდარტული ხერხების ცოდნას, რომელთა გამოყენებით დასმული ამოცანები ამოიხსნება მარტივად, ზედემეტი სირთულეების გარეშე.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის კურსი ისეა აგებული, რომ მათში დისერტაციაში განხილული კონკრეტული საკითხების გადაწყვეტისათვის საჭირო თეორიული საკითხები ნაკლებად არის შეტანილი, ამიტომ ჩვენს მიერ ძირითადი ყურადღება გადატანილი იყო განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის მეთოდურ თავისებურებეზე. ამოცანები სირთულის მიხედვით განსხვავდებოდა მათემატიკის სპეციალიზირებულ და სტაციონარული სკოლების მოსწავლეებისათვის.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის დროს ბუნებრივად ვიყენებდით მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში და დამხმარე ლიტერატურიდან აღებულ ამოცანებს და ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილ ამოცანებს.

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ ის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია საშუალო სკოლაში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებასთან ან სულ არ განიხილება, ან განიხილება მცირე რაოდენობით. მეორეს მხრივ, სადაც განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნა არასტანდარტული ხერხის გამოყენებით ხორციელდება, არ ხდება ამოხსნის პროცესში გამოყენებული საძიებო ხერხის სრულფასოვანი მეცნიერული ახსნა.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

ˆ ეტაპი-მოსამზადებელი ექსპერიმენტი - რომელიც ძირითადად ტარდებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. გაკვეთილებზე იხილებოდა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე შედარებით რთულ ამოცანებს, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე კი ვიხილავდით საოლიმპიადო სირთულის მქონე განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ, არასტანდარტულ ხერხებს.

ˆˆ ეტაპი-სასწავლო ექსპერიმენტი რომელიც ძირითადად ტარდებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა მოსწავლეთა საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმება. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის ხერხებს.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა ორი წლის (2009-2011 წლები) განმავლობაში და მასში მონაწილეობა მიიღო ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლის, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლის, ქუთაისის №40 საჯარო სკოლის, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმის, წყალტუბოს რაიონის სოფელ ჟონეთის საშუალო სკოლის, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლის, თერჯოლის რაიონის სოფელ ჩხარის №2 საჯარო სკოლის მოსწავლეებმა.

მოსწავლეებთან მუშაობის ძირითადი ფორმა იყო გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახილავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

მოსწავლეებს ეძლეოდათ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველი ამოცანები [15],[16],[17],[18],[19],[20],[21],[22],[23],[24],31],[32],[33],[34],[35],[36],[48],[49],[61],[62],[63],[67],[68],[76],[80],[81],[82],[85], [86], [87], [88], [89].[92],[96],[97],[98] სასკოლო სახელმძღვანელოებიდან და კრებულებიდან, აგრეთვე ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილი ამოცანები.

განსაკუთრებული სიძნელე წარმოშვა ისეთმა ამოცანებმა, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური საკითხების ცოდნას.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. იპოვეთ

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$$

ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

2. იპოვეთ

$$f(x) = -2x^3 - 15x^2 + 36x - 30$$

ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

3. მოჭადრაკეთა ტურნირში მონაწილეობდა მეშვიდე კლასის სამი მოწავლე და მერვე კლასის რამდენიმე მოსწავლე. სამივე მეშვიდეკლასელმა ერთად 7 ქულა დააგროვა, ხოლო თითოეულმა მერვეკლასელმა დააგროვა ქულათა ერთი და იგივე რაოდენობა. რამდენი მერვეკლასელი მონაწილეობდა ტურნირში?

4. სამ ყუთში 200 ვაშლი იყო. როდესაც პირველი ყუთიდან ამოიღეს მასში ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{1}{3}$, მეორედან-$\frac{2}{5}$ და მესამედან-$\frac{13}{15}$, სულ ამოღებული აღმოჩნდა 70 ვაშლი. რამდენ ვაშლს ამოიღებენ, თუ მეორე და მესამე ყუთებიდან შესაბამისად ამოიღეს ჩაწყობილი ვაშლების $\frac{1}{10}$ და $\frac{4}{5}$.

5. A და B პუნქტებიდან ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტობუსი გამოვიდა და ერთმანეთს დღის 12 საათზე შეხვდა. თუ პირველი ავტობუსის სიჩქარე იქნება 2-ჯერ მეტი, ხოლო პირველი ავტობუსის სიჩქარე დარჩება იგივე, მაშინ შეხვედრა მოხდება 56 წთ-ით ადრე. თუ მეორე ავტობუსის სიჩქარე იქნება 2-ჯერ მეტი, ხოლო პირველი ავტობუსის სიჩქარე დარჩება იგივე, მაშინ შეხვედრა მოხდება 65 წთ-ით ადრე. განსაზღვრეთ ავტობუსების შეხვედრის დრო იმ შემთხვევაში, როცა ორივე ავტობუსის სიჩქარე 2-ჯერ მეტია თავდაპირველ სიჩქარეზე.

6. ამანათრბენის დისტანცია დაყოფილია ოთხ ეტაპად. ცნობილია, რომ მესამე ეტაპი ოთხჯერ გრძელია პირველზე. მეორე და მეოთხე ეტაპების ჯამს დამატებული 5 პირველი ეტაპის სიგრძე 1500 მ-ია. იპოვეთ ამანათრბენის დისტანციის სიგრძე.

7. სამმა მუშამ უნდა დაამზადოს დეტალების განსაზღვრული რაოდენობა. თავიდან სამუშაოს შეუდგა მხოლოდ პირველი მუშა, რომელსაც გარკვეული დროის შემდეგ შეუერთდა მეორე მუშა. როცა შესრულებული იყო მთელი სამუშაოს $\frac{1}{6}$ მათ

შეუერთდა მესამე მუშაც. სამუშაო მათ ერთდროულად დაამთავრეს. რამდენი საათი მუშაობდა პირველი მუშა, თუ სამივე მუშამ დეტალების ერთნაირი რაოდენობა დაამზადა, ამასთან მესამე მუშამ 2 სთ-ით ნაკლები იმუშავა, ვიდრე მეორე მუშამ.

აგრეთვე, ცნობილია რომ, პირველ და მეორე მუშებს ერთად მუშაობით საჭირო რაოდენობის დეტალების დამზადება შეუძლიათ 9 სთ-ით უფრო ადრე, ვიდრე მარტო მესამე მუშას.

8. სამი მგზავრი ერთდროულად გამოდის A პუნქტიდან და ერთდროულად ბრუნდება იმავე პუნქტში. მგზავრები მოძრაობენ ისეთი მარშრუტით, რომელიც AB, BC, CD და AD მონაკვეთების შემცველ ტოლფერდა ABCD ტრაპეციას წარმოადგენს, სადაც AB და CD ფერდებია. თითოეულ მონაკვეთზე ყველა მგზავრის სიჩქარე მუდმივია და ტოლია: პირველი მგზავრისთვის 6, 8, 5 და 8 კმ/სთ. შესაბამისად მეორე მგზავრისათვის -7, 7, 6 და 8 კმ/სთ. მესამე მგზავრის სიჩქარე თითოეულ უბანზე მუდმივია და ტოლია ან 7კმ/სთ ან 8 კმ/სთ-ის. ამასთან ის მთელ გზაზე სიჩქარეს მხოლოდ ერთხელ იცვლის. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძისა და ფერდის შეფარდება.

9. ამოხსენით პრამეტრის შემცველი განტოლება

$$\left(x^2-a\right)^2-6x^2+4x+2a=0$$

10. შეადგინეთ

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=6$$

სახის ირაციონალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს ორი განსხვავებული ფესვი $x_1=1$ და $x_2=2$.

11. შეადგინეთ

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=6$$

სახის ირაციონალური განტოლება, რომელიც დაიყვანება კვადრატული განტოლების ამოხსნაზე და მის ფესვებს არ წარმოადგენს რიცხვები $x_1=1$ და $x_2=2$.

12. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{x^2+16}-x=\frac{10}{\sqrt{x^2+16}}.$$

13. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{25-x^2}-\frac{x}{3}=\frac{12}{\sqrt{25-x^2}}.$$

14. ამოხსენით განტოლება

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

15. რამდენი ფესვი აქვს

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$$

განტოლებას [0,1] სეგმენტზე?

16. ამოხსენით განტოლება

$$x^3-3x+1=0.$$

17. იპოვეთ სისტემის ნამდვილი ამონახსნები

$$\begin{cases} a^2x^2+b^2y^2=c^2 \\ xy=d \end{cases}$$

სადაც, a, b, c, d რიცხვები ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია.

18. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ნამდვილი ამონახსნები

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2=25 \\ xy=2 \end{cases}$$

19. ცნობილია, რომ

$$x^4-4x^3+6x^2+ax+b=0$$

განტოლებას ოთხი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a და b კოეფიციენტები.

20. ცნობილია, რომ

$$x^3-6x^2+bx+8=0$$

განტოლებას სამი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და b კოეფიციენტი.

21. ამოხსენით განტოლება

$$x^2+x^2y^4+x^6y^4+y^2+1=5x^2y^2.$$

22. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} xy^2 + x^5 y + 1 = 3x^2 y \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

დადებითი ამონახსნები.

23. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + z^2\right)\left(y^2 + z^2\right) = 64 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

24. ცნობილია, რომ

$$x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

განტოლებას ოთხი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a და b კოეფიციენტები.

25. ცნობილია, რომ

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

განტოლებას ექვსი ნამდვილი ფესვი აქვს. იპოვეთ განტოლების ფესვები და a, b და c კოეფიციენტები.

26. ამოხსენით განტოლება

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 32\left(\sin^{18} x + \cos^{18} x\right).$$

27. ამოხსენით განტოლება

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 8\left(\sin^{12} x + \cos^{12} x\right).$$

28. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{|ctgxy|}{\cos^2 xy} - 2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(9y^2 - 18y + 10\right).$$

29. ამოხსენით განტოლება

$$2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} = 0\,.$$

30. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2\sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}.$$

31. ამოხსენით განტოლება

$$2^{4^x}+2^{9^x}=2^{6^x+1}.$$

32. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^{\lg y}+y^{\lg x}=20 \\ 2^x+2^y=2^z \\ x+y+2=2z \end{cases}$$

33. აქვს თუ არა განტოლებათა სისტემას ამონახსენი?

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=6 \\ 3^x+3^y+3^z=12 \end{cases}$$

34. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2^{2^x}+2^{2^y}+2^{2^z}=12 \\ x+y+z=3 \end{cases}.$$

35. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \log_x z\log_z y+\log_y x\log_z y+\log_y x\log_x z=3 \\ \log_y x+\log_x z+\log_z y=3 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

36. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვებში

$$\left(x_1^2+1^2\right)\left(x_2^2+2^2\right)\ldots\left(x_n^2+n^2\right)=2^n\cdot n!x_1x_2\cdots x_n$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია.

37. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

38. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3} \\ x^{x-y}=2x-1 \end{cases}$$

39. ამოხსენით განტოლება

$$|7-2x|=|5-3x|+|x+2|$$

40. ამოხსენით უტოლობა

$$|9-2x|<|4-3x|+|x+5|$$

41. ამოხსენით განტოლება

$$\left|\sqrt{x^2-x}-x\right|+\left|x+\sqrt{x}\right|=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x}$$

42. ამოხსენით განტოლება

$$\left|\frac{\log_2 x}{1-\log_2 x}\right|+\left|\log_2 x\right|=\frac{\log_2^2 x}{\left|\log_2 x-1\right|}$$

43. ამოხსენით უტოლობა

$$|x|+|7-x|+2|x-2|<4$$

44. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\sqrt{5x(x+2)}+\sqrt{5y(x+2)}=2\sqrt{2(x+y)(x+2)}\\ xy=9\end{cases}$$

45. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}|x+y-4|=5\\ |x-3|+|y-1|=5\end{cases}$$

46. ამოხსენით განტოლება

$$-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geq 1.$$

47. ამოხსენით უტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}|x+2y|\leq 2\\ |y|\leq 1\\ 2x-y\geq 0\end{cases}$$

48. ამოხსენით განტოლება

$$\left(x^2-x+1\right)^2-\left(x^2-x+1\right)+1=x$$

49. ამოხსენით განტოლება

$$\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)5=x$$

50. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}2y=5-x^2,\\ 2x=5-y^2.\end{cases}$$

51. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}}=0.$$

52. ამოხსენით განტოლება

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

53. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$tgx+ctgx=\frac{2}{\sin 4x}.$$

54. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0.$$

55. ამოხსენით ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}9^{2tgx+\cos y}=3,\\ 9^{\cos y}-81^{tgx}=2.\end{cases}$$

56. ამოხსენით ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y.\end{cases}$$

57. იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$x+|x|=y+|y|.$$

58. იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\min(x,y)=1.$$

59 იპოვეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$\max(x,y)=1.$$

60. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლება

$$\log_3 x = \frac{3}{x}$$

62. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლება

$$x^x = 256$$

სადაც $x > 0$.

63. ამოხსენით გრაფიკული ხერხით განტოლება

$$x \cdot 2^{3^x} = 1.$$

64. ამოხსენით განტოლება გრაფიკულად

$$x^4 - 7x^2 + 6x = 0 \qquad .$$

65. ამოხსენით განტოლება გრაფიკულად

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0.$$

66. ამოხსენით გრაფიკულად განტოლება

$$|y| = \cos x$$

67. გრაფიკულად ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{y-1}{y+1} = 0 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}.$$

68. საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხეთ

$$\log_2 (y-1) \geq \log_2 \left(x^2 - 2\right)$$

უტოლობის ამონახსენები.

69. ამოხსენით უტოლობა გრაფიკულად

$$|x+2| > |x|.$$

70. ამოხსენით უტოლობა გრაფიკულად

$$\left|\frac{x+2}{x+1}\right| > 1$$

71. ამოხსნეით უტოლობა გრაფიკულად

$$\left(x + |x|\right)^2 + \left(y + |y|\right)^2 \leq 16$$

მოსამზადებელმა ექსპერიმენტმა საშუალება მოგვცა გაგვეკეთებინა შემდეგი დასკვნები:

1. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას საკმარისი ყურადღება არ ექცევა;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო მოსწავლეთა უმრავლესობა ვერ ფლობს განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის იმ სპეციალურ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ბევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. მოსწავლეთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხები, მარტივად ახერხებენ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების კონკრეტული ამოცანების ამოხსნას.

4. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის რომელი სპეციალური ხერხების სწავლებაა აუცილებელი?

ბ) სწავლების პროცესში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე რომელი პრაქტიკული ამოცანების განხილვაა მიზანშეწონილი?

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების შესახებ არსებული მეთოდიკური ლიტერატურა, რომელიც არსებობს. შევარჩიეთ ჩვენთვის მისაღები მიდგომები და ის ამოცანები, რომელებიც ამოიხსნებიან ჩვეულებრივი ტრადიციული მიდგომებით, მაგრამ მოითხოვს დიდი მოცულობის მათემატიკურ გარდაქმნებს და ამავე დროს მათი ამოხსნა მარტივად და ეფექტურად შეიძლება სპეციალური ხერხების გამოყენებით, რაც გვაძლევს დროში

საგრძნობ ეფექტს და მოსწავლეებს უვითარებს ლოგიკურ აზროვნებასა და მიხვედრილობის უნარს. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ ის საკითხები, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მათემატიკის სასკოლო კურსში მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგვეხილა შემდეგი საკითხები:

1. ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში. ამოცანათა კლასიფიკაცია

2. ამოცანების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში

3. ტექსტური ალგებრული ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურება

4. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამონახსნთა შემოწმების მეთოდიკური თავისებურებები

5. ტრიგონომეტრიულ განტოლებებზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება მათემატიკის სასკოლო კურსში

6. განტოლებები ფუნქციათა სუპერპოზიციით და მათი ამოხსნის სპეციალური ხერხების მეთოდიკური თავისებურებები

7. უტოლობათა გამოყენება ზოგიერთი სახის განტოლების და განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას

8. განტოლებების, განტოლებათა სისტემების და ერთობლიობების გრაფიკული ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხი და მათი სწავლების მეთოდიკა

აღნიშნული საკითხები ექსპერიმენტის მსვლელობის პროცესში განიხილებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე .

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის I და II თავებში შემოთავაზებული მეთოდიკა .

აღნიშნული მეთოდიკა შემოწმებას გადიოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. რამდენჯერმე მოგვიხდა სწავლების მეთოდიკისა და დასმული ამოცანების

კორექტირება მათი დახვეწის მიზნით. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების შემცველი ყველა ამოცანის პრაქტიკული ამოხსნა რა თქმა უნდა არ ხერხდებოდა, მაგრამ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სემესტრის მანძილზე. ერთ გაკვეთილზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე განიხილებოდა არაუმეტეს ერთი საკითხისა, ხოლო მოსწავლეებს დავალების სახით ეძლეოდათ შედარებით მარტივი სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ ამოცანით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში, მათგან ზოგიერთი მათგანი განვიხილეთ გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე. დანარჩენი მოსწავლეებს მივეცით დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. გარდა ამისა ვსარგებლობდით სხვადასხვა სახელმძღვანელოებითა და კრებულებით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს.

სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება.

სასწავლო ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა ორი სასწავლო წლის (2009-2011 წლები) განმავლობაში ქუთაისის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №19 საჯარო სკოლაში, ქუთაისის №40 საჯარო სკოლაში, ჩაღლარის საგანმანათლებლო კომპლექსის ნიკო ნიკოლაძის სახელობის ქუთაისის სკოლა-ლიცეუმში, წყალტუბოს რაიონის სოფელ ჟონეთის საშუალო სკოლაში, ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, თერჯოლის რაიონის სოფელ ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში.

ექსპერიმენტის დაწყების ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს მოსწავლეებს უნდა ამოეხსნათ განტოლებების, უტოლობების. მათი სისტემებისა და ერთობლიობების შემცველი ამოცანები, დაახლოებით იმ სახის, რაც მოცემული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა

მოსწავლეთა 38-40%. მთელი სემესტრის განმავლობაში მიმდინარეობდა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა სემესტრის ბოლოს. მოსწავლეთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად სტუდენტთა 90 %-მდე ასრულებდა.

ზემოთ თქმული ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა ექსპერიმენტში მონაწილე ჯგუფებისა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებსაც.

საკონტროლო და ექსპერიმენტული ჯგუფების მოსწავლეთა ცოდნის დონე მათემატიკაში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,6 და 7,4.

ექსპერიმენტული ჯგუფებისათვის სწავლება მიმდინარეობდა ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით სემესტრის ბოლოს ფინალურ გამოცდაზე მიცემული ამოცანების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემებისა და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნას სპეციალური ხერხის (ხერხების) გამოყენებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია სხვა ხერხითაც, ოღონდ საჭიროა რთული გამოთვლების ჩატარება.

მოვიყვანოთ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მიერ ექსპერიმენტის სამი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწმების შედეგები. პირველი შემოწმება ითვალისწინებდა მოსწავლეთა საერთო დონის დადგენას, ხოლო დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებზე სტატისტიკურ შეფასებას ვახდენდით ორი ნიშნით:

1. რამდენი მოსწავლე შეეცადა ამოეხსნა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანა სპეციალური ხერხით;

2. ამ მოსწავლეებიდან რამდენმა ამოხსნა ამოცანა სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1.

ჯგუფები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
სტუდენტთა რაოდენობა	142	142	142	142	142	120	120	120	120	120
ამოხსნა ˆ	101	102	103	100	99	62	54	59	61	59
ვერ ამოხსნა	41	40	39	42	43	58	56	61	59	61
ამოხსნა ˆˆ	90	88	89	90	88	45	46	43	46	45
ვერ ამოხსნა	11	14	14	10	11	17	18	16	15	14

იმის გამო, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე.

შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [64]. კრიტერიუმის სტატისტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან [64] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68.

T_o ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის სტუდენტთა შორის შემთხვევითია.

ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის.

ცხრილი 2.

ჯგუფები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
სტუდენტთა რაოდენობა	142	120
ამოხსნა	101	61
ვერ ამოხსნა	41	59
ამოხსნა	89	45
ვერ ამოხსნა	12	16

ჩატარებული ექსპერიმენტის *Tნ* კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_{ნ} = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2 \left(O_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \quad [64]$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3.

ˆ ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 101$	$O_{21} = 61$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 41$	$O_{22} = 59$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 142$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 120$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 262$

ცხრილი 4.

ˆ ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11} = 89$	$O'_{21} = 45$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12} = 12$	$O'_{22} = 16$
	$O'_{11} + O'_{12} = n'_1 = 70$	$O'_{21} + O'_{22} = n'_2 = 48$

სადაც $n'_1 + n'_2 = N' = 162.$

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: $T_{ნ}$=21,76;

მეორე ნიშნისათვის: $T_{ნ}$=10,98;

რადგან ორთავე მნიშვნელობა აღემატება $T_{კრ}$, ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების T_0 ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მოსწავლეები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ზემოთ მოყვანილი პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. სწავლების მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში, როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

2. განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ განხილული ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეებში მათემატიკური კულტურის ჩამოყალიბებას, ეხმარება მათ განათლების მიღებაში, ამაღლებს ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია საშუალო სკოლაში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების მქონე ამოცანები დავყოთ მსგავსებისა და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები მოსწავლეებს მივცეთ საშინაო დავალებად ან დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია მოსწავლეებისათვის სწავლების პროცესში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება მოსწავლეთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა, რომელიც საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთ საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოცანათა ამოხსნის სპეციალური ხერხების ქმედითუნარიანობა, მოსწავლეებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს. ამის დასტური იყო ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტი.

ზოგადი დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები

1. საქართველოში განათლების სიტემაში მიმდინარე რეფორმა მოითხოვს სკოლაში მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარ-ჩვევების ფორმირებას. მათემატიკის შესწავლაში ეს მიიღწევა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებით და პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნით. სწავლების დროს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გადავიტანოთ გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების განხილვაზე.

2. მათემატიკის სწავლების უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ყველა მოსწავლის მათემატიკური მომზადების გარკვეული, გარანტირებული დონის უზრუნველყოფა მათი მომავალი პროფესიული არჩევანისაგან დამოუკიდებლად. საზოგადოების კომპიუტერიზაცია, თანამედროვე ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვა მოითხოვს მუშაკის მათემატიკურად განათლებულობას ყოველ სამუშაო ადგილზე. მათემატიკურ განათლებულობაში იგულისხმება მათემატიკის კონკრეტული ცოდნაც და მათემატიკის მეშვეობით გამომუშავებული აზროვნების სტილიც, რომლის ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება.

3. ცოდნა-ჩვევების სრულფასოვნების უმნიშვნელოვანეს მაჩვენებლად მიგვაჩნია არა მარტო ის, თუ რამდენად გააზრებული და გაცნობიერებულია ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნა მოსწავლეთა მიერ, არამედ ისიც, თუ რამდენად ღრმად, საფუძვლიანად და მტკიცედ აქვს ათვისებული ის მოსწავლეს. ამიტომ, ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნის მტკიცედ დაუფლება სწავლების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა და ამავე დროს სწავლების ზოგადმეთოდოლოგიური დიდაქტიკური პრინციპის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია, რომელიც გულისხმობს სასწავლო მასალის ისე მიწოდებას, რომ მოსწავლე

მტკიცედ იმახსოვრებდეს და ამის საფუძვკელზე უნარი შესწევდეს თავისუფლად აღადგინოს თავის მეხსიერებაში ის, რაც მან ადრე სწავლების პროცესში აღიქვა და აითვისა.

4. ცოდნა-ჩვევების განმტკიცება მჭიდროდაა დაკავშირებული გავლილი და ახალი მასალის თანმიმდევრულ ურთიერთკავშირზე, ამისათვის კი აუცილებელია დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვა, კერძოდ მასწავლებელმა ამოცანის ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება არ უნდა განახორციელოს მანამდე, ვიდრე მოსწავლეები საფთუძვლიანად არ შეისწავლიან ამოცანათა ამოხსნის ალგორითმულ ხერხებს, ამავე დროს უნდა დაიცვას გავლილი მასალიდან ახალ მასალაზე გადასვლის დიდაქტიკური მოთხოვნები, რომელთა შორის მთავარია ამოცანების ამოხსნის ადგორითმული ხერხების სისტემაში მოყვანა და უმთავრესის გამოყოფა მეორეხარისხოვნისაგან, ახალი ამოცანის დასმა და ახალი საკითხის ფაბულის ისეთი მოხაზვა, რომ მოსწავლე ნათლად ხედავდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების აუცილებლობას. ყოველივე ამით მასწავლებელი მოსწავლეებში შექმნის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების ადვილად დაძლევის განწყობას.

5. ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების მტკიცედ დაუფლება მოითხოვს აგრეთვე მოსწავლისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, თითოეული მოსწავლის თავისებურებების გათვალისწინებას, დავალებათა ინდივიდუალიზაციას და სხვ. მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის დროს სწავლების ყველა ეტაპზე საჭიროა იმის გათვალისწინება, რომ თითოეული მოსწავლე წარმოადგენს განუმეორებელ ინდუვიდუალობას. მასწავლებელმა ყურადღების ცენტრში უნდა მოიქციოს თითოეული მოსწავლის ყოველმხრივი შესწავლა, მოსწავლის ხასიათი, ტემპერამენტი, ნებისყოფა, ყურადღებიანობა, ურნარ-ჩვევები, აკადემიური მომზადების დონე, შრომისმოყვარეობა და სხვ. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების პროცესი მრავალფეროვანი შინაარსით, ორგანიზაციით და მეთოდებით. ასევე მრავალმხრივია მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომის გზები და ფორმები,

რომელიც მასწავლებელმა ყველა კონკრეტულ შემთხვევაში უნდა გადაწყვიტოს ინდივიდუალურად.

6. მასწავლებელმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მთელი პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ, გაცნობიერებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან მოსწავლისაგან ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

7. მასწავლებლის მიერ ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების პრაქტიკული რეალიზება დამოკიდებულია არა მარტო გამოცდილებაზე, არამედ ამოხსნის სპეციალური ხერხების ფორმებსა და მეთოდიკურ თავისებურებებზე. ამოცანების ამოხსნის კერძო ხერხები მოითხოვს სპეციალურ შესწავლას. ჩვენი აზრით ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ ხერხებს უნდა ფლობდეს მათემატიკის ყველა მასწავლებელი.

8. სწავლების პროცესში მოსწავლეებს საფუძვლიანად უნდა გავაცნოთ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხები. მიზანშეწონილია ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ სხვადასხვა ხერხი, ამასთან მეთოდურად უნდა დავასაბუთოთ გამოყენებული ხერხის უპირატესობა.

9. საკუთარმა პედაგოგიურმა გამოცდილებამ, კოლეგებთან კონსულტაციებმა და პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაასაბუთა, რომ განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

- განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;
- მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება ამოხსნის პერსპექტიული გზის მოძებნაში;

- განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომლის მიზანია ამოცანის პირობაში ჩადებული ინფორმაციის სრული აღქმა და მის საფუძველზე ამოხსნის გზის მიგნება;
- ამოცანის ამოხსნის ახალი სპეციალური ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ ეს შესაძლებელია მოვახდინოთ მისი განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან დამოუკიდეელი მუშაობისათვის მივცეთ ანალოგიური ამოცანა.

10. პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკის ეფექტურობა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ბაკურაძე ბ. - სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საშუალო საფეხურზე. ავტორეფერატი განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად. ქუთაისი. 2010წ.
2. ბაკურაძე ბ., ონიანი საღინაძე ნ., ბერძულიშვილი გ.-კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 141-144.
3. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლო-ბების და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2013 წელი. №2 (46). თბილისი.
4. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-მოდულის შეცველი გატოლებების, უტოლობე-ბის და მათი სისტემების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2013 წელი. №2 (46). თბილისი.
5.ბერძულიშვილი გ.-საგანთშორისი კავშირები ელემენტარული გეომეტრიის სპეცკურსებსა და სპეცსემინარებზე და მათი როლი მათემატიკის მომავალი

მასწავლებლის მომზადებაში. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1998 წელი.

6.ბერძულიშვილი გ., ონიანი-საღინაძე ნ., ბაკურაძე ზ.-კომბინატორული და ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის ეტაპები მათემატიკის კურსში. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი", თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 145-147.

7. ბერძულიშვილი გ., ხუჯაძე ი.-უტოლობათა გამოყენება ზოგიერთი სახის განტოლების ამოხსნისას. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი" №2(5), თბილისი, 1999 წელი, გვ.163-166.

8. ბრეგაძე გ., ბერძულიშვილი გ.-ზოგიერთი ხასიათის შენიშვნა არასტანდარტუ-ლი ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, თბილისის ღია სასწავლო უნივერსიტეტის, შავი ზღვის უნივერსიტეტის, აზერბაიჯანის განჯის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, კამბოჯის ზამან უნივერსიტეტის ერთობლივი მეორე საერთაშორისო–სამეცნიერო კონფერენცია. ბათუმი. 2012 წ.

9. ბრეგაძე გ.-განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა (I ნაწილი). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ქუთაისის უნივერსიტეტის და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი საერთაშორისი სამეცნიერო–პრაქტიკული კონფერენცია მიძღვნილი აკადემიკოს ვარლამ ქელბაქიანის დაბადები-დან 80 წლისთავისადმი. ქუთაისი. 2013 წელი. გვ.–.

10. ბრეგაძე გ.-განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნისა და შედგენის ურთიერთკავშირში სწავლების მეთოდიკა (II ნაწილი). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ქუთაისის უნივერსიტეტის და

საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი საერთაშორისო სამეცნიერო–პრაქტიკული კონფერენცია მიძღვნილი აკადემიკოს ვარლამ ქელბაქიანის დაბადები-დან 80 წლისთავისადმი. ქუთაისი. 2013 წელი. გვ.–.

11. ბრეგაძე გ.,ბერძულიშვილი გ.-ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებანი საშუალო სკოლაში (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი. გვ. -.
12. ბრეგაძე გ.,ბერძულიშვილი გ.-ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე დაყვანადი ზოგიერთი სახის განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებანი საშუალო სკოლაში (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი.
13. ბრეგაძე გ.,ბერძულიშვილი გ.-ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურებების შესახებ (I ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი. გვ.-.
14. ბრეგაძე გ.,ბერძულიშვილი გ.-ტექსტური ამოცანების ამოხსნის სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურებების შესახებ (II ნაწილი). საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშო-რისო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი". 2011 წელი. №3 (41). თბილისი. გვ.-.
15. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა V კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი", თბილისი 2009 წელი.

16. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა VI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
17. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა VII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
18. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა VIII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
19. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა IX კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
20. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა X კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
21. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა XI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
22. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-მათემატიკა XII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
23. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, I ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
24. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, II ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2009 წელი.
25. დოგრაშვილი ა.-ალბათობის ამოცანების ამოხსნა კომბინატორიკის გამოყენებით. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1973 წ. №3..
26. დოგრაშვილი ა.-ალბათობის და კომბინატორიკის საწყისი ცნებების გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის დროს რვაწლიანი სკოლაში. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, თბილისი, 1974 წ. №3.
27. დოგრაშვილი ა.-დაწყებითი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი. 1998 წელი.

28. ეროვნული სასწავლო გეგმა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებისათვის. თბილისი, 2004 წელი.
29. ეროვნული სასწავლო გეგმა, საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში VII-XII კლასები. თბილისი, 2004 წელი.
30. ვახანია ზ.-სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1999წ. 36 გვ.
31. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 1. „ჯისიაი“, თბილისი, 2002 წ.
32. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 2. „ჯისიაი“, თბილისი, 2001 წ.
33. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 3. „ჯისიაი“, თბილისი, 2005 წ.
34. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 4. „ჯისიაი“, თბილისი, 2007 წ.
35. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 5. „ჯისიაი“, თბილისი, 2008 წ.
36. ვახანია ზ.-საყმაწვილო მათემატიკა 6. „ჯისიაი“, თბილისი, 2007 წ.
37. Натадзе Р. К.-К онтогенезису формирования понятия. Тбилиси. Изд. „Мецниереба“, 1976. 264 стр.
38. ნადირაშვილი შ.-განზოგადების განვითარება სასკოლო ასაკის ბავშვებში. თბილისი. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია. 2009 წელი. 284 გვ.
39. კოტეტიშვილი ი.-ექსპერიმენტული სწავლების ფსიქოლოგიური შინაარსი დაწყებით კლასებში. თბილისი. გამომცემლობა „მეცნიერება“. 1987 წელი. 171 გვ.
40. იმერლიშვილი ე.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა, ზოგადი მეთოდიკა. თსუ გამომცემლობა. თბილისი, 2001 წ.
41. მორალიშვილი თ.-ამოცანათა ამოხსნის ძიების სწავლება საშუალო სკოლაში. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი. 1991 წ. 128 გვ.
42. მორალიშვილი თ. სასკოლო მათემატიკის ამოცანების ამოხსნის ძიების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები. პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია. თბილისი, 2003.– 292 გვ.
43. მორალიშვილი თ., ჯინჯიხაძე გ.-არასტანდარტული ამოცანების მნიშვნელობა მათემატიკის კურსის სწავლების პრაქტიკაში. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის

პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“, №19, თბილისი, 2005, გვ. 46-54.

44. მორალიშვილი თ., ონიანი გ., ჯინჯიხაძე გ.-სასწავლო საქმიანობის სუბიექტის ფორმირება დაწყებით და საბაზო სკოლაში არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეშვეობით. თბილისი, გამომცემლობა „უნივერსალი“, თბილისი, 2008 წელი.
45. მორალიშვილი თ., ადეიშვილი ვ., ბაკურაძე ბ., ბერძულიშვილი გ.-ამოცანის ამოხსნის პროცესი და ამოხსნის ძიების პროცესი. საერთაშორისო პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, თბილისი, №1 (24), 2006 წელი, გვ.238-23.
46. ნახუცრიშვილი ნ.-პრობლემურ-განმავითარებელი სწავლების საკითხები დაწყებითი სკოლის საფეხურზე თელავის ი.გოგებაშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო შრომების კრებული № 2 (20) . 2006 წ. გვ.237-239.
47. ნოზაძე გ., ოჩხიკიძე მ.-მათემატიკის სახელმძღვანელოებისათვის სავარჯი-შოთა შერჩევის კრიტერიუმები. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, №117, გვ. 59-62.
48. ნურკი ე., ტელგმაა ა.-მათემატიკა V კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 2006 წ.
49. ნურკი ე., ტელგმაა ა.-მათემატიკა VI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „საქართველოს მაცნე“, თბილისი, 2008 წ.
50. ონიანი-საღინაძე ნ.-კომბინატორული და ალბათური შინაარსის ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი დაწყებითი კლასების მათემატიკის კურსში. ავტორეფერატი განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად. ქუთაისი. 2010 წ.
51. ონიანი-საღინაძე ნ., ბაკურაძე ბ., ბერძულიშვილი გ,- კომბინატორული და ალბათური შინაარსის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში. (II ნაწილი) საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი. საერთაშორისო

სამეცნიერო პერიოდული ჟურნალი „ინტელექტი“,თბილისი, №1(36), 2010 წელი, გვ. 172-175.

52. სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი მათემატიკაში. სქართველოს საკანონმდებლო მაცნე. თბილისი. 2002 წელი.
53. უზნაძე დ. შრომები. ზოგადი ფსიქოლოგია. ტ. III-IV. გამომცემლობა „აღმაშენებელი“, თბილისი, 1998.–637 გვ.
54. ქელბაქიანი ვ.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ქუთაისი, 2001 წ.
55. ქელბაქიანი ვ., ბერძულიშვილი გ.-საშუალო მნიშვნელობის ცნების გამოყენება. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“, №2, თბილისი, 1998 წელი, გვ.112-118.
56. ჩხიკვაძე ი.-განმავითარებელი სწავლების სისტემაში დაწყებითი კლასებისათვის ტექსტური ამოცანების შედგენისა და გამოყენების დიდაქტიკური ასპექტები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი, 2009 წელი.
57. ჯინჯიხაძე გ.-არასატანდარტული ამოცანა, როგორც მათემატიკის კურსის ამოცანათა სისტემის ელემენტი. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიკურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“, №19. თბილისი,. 2005, გვ. 54-58.
58. ჯინჯიხაძე გ.-ცნებები „ამოცანა“ და „არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანა“ თანამედროვე მეცნიერულ გამოკვლევებში: იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“ №18, თბილისი. 2005, გვ. 51-55.
59. ჯინჯიხაძე ჯ.-მათემატიკის დაწყებითი კურსის სწავლების მეთოდიკა და ტექნოლოგია. გამომცემლობა „უნივერსალი“, თბილისი 2011 წელი. 853 გვ.
60. Брунер Дж.-Психология понятия. Москва. Изд. „Просвещение“. 1977 г
61. Быковских А.М.-Нестандартные задачи. Красноярский Государственный университет. Заочная естественно научная школа про КрасГУ. Красноярск. 2006.

62. Васильев Н., Гуттенмахер В., Раббот Ж., Тоом А.-Заочные математические олимпиады Москва. Наука. 1987 г.
63. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра. Челябинск. Взгляд. 448 с. 2004 г.
64. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непарамстрические методы /М. И. Грабарь, К. А. Красняпская М.: Педагогика, 1977.-136 с.
65. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Москва. Просвещение. 1990 г.
66. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения.-Москва. Интор, 1996.-544с.
67. Канель-Белов А.Я., Ковалджи А.К.-Как решают нестандартные задачи. под ред. В.Д. Бугалина. Изд. четвертое. Москва. Изд.юательство МЦНМО. 2008 г.
68. Левитас Г.Г.-Нестандартные задачи по математике в 7-11 классах. Москва. изд. ИЛЕКСА. 2009 г.
69. Математика в школе №4 1974 г. стр. 79. задача 1410.
70. Методика преподования математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для ст-ов физ.-мат. фак-ов пед. инст. /В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др.-2-е изд.-Москва. Просвещение, 1980. – 368с.
71. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Пер. с англ. / Под ред. С. А. Яновской.- Москва. Наука, 1976.-448 с.
72. Пойа Д. Как решать задачу .Пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; Под ред. Ю. М. Гайдука.- Москва. Учпедгиз, 1959.-207 с.
73. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. И. А. Вайпштейпа; Под ред. С. А. Яновской. 2-е изд., испр. Москва. Наука, 1975.-463 с.
74. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Москва. Изд. „Просвещение“. 1969. 659 стр.
75. Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия. Ж. Вопросы психологии. 1966 г. №4. стр. 121-126.

76. Развивающие задачи для математического досуга /Сост. Э. А. Кремнев, З. С. Сухотина. Москва. Школа-пресс, 1993. - 95 с.
77. Рахимов А. З. Формирование творческого мышления школьников. Автореф. дисс. . докт. пед. наук.- Москва. 1993.31 с.
78. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. Т. 1. /С.Л. Рубинштейн.-Москва. Педагогика, 1989.-485 с.
79. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии /С.Л. Рубинштейн. Москва. Педагогика, 1 976.- 417 с.
80. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. Сканави М.И.Москва. 2013 г. 608 стр.
81. Сивашинский И.Х.-Неравкнства в задачах. Москва. Наука. 2007 г. 303 стр.
82. Сивашинский И.Х.-Теоремы и задачи по алгебре и элементарными функциями. Москва. Наука. 2007 г.
83. Столяр А. А. Методы обучения математике: Учебное пособие для пединститутов / А. А. Столяр. -Минск: Народная асвета, 1981. 191 с.
84. Столяр А. А. Педагогика математики /А. А. Столяр.-3-е изд.-Минск: Вышэйшая школа, 1986.-158 с.
85. Цыпкин А., Пинский А. -Справочник по методам решения задач по математике. Москва. Наука. 1989 г.
86. Чаплыгин В. Ф.-Нестандартные задачи. Некоторые методические аспекты. Ярославский педагогический вестник. 1998 №3 (15). стр. 96-104.
87. Шарыгип, И. Ф. Математика: задами па смекалку. Учеб. пособие для 5-6 кл. / И. Ф. Шарыгип, А. В. Шевкин. Москва. Просвещение, 1995.
88. Шарыгип И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб.пособие для 10 кл.сред.шк. / И. Ф. Шарыгип. Москва. Просвещение, 1989.-252 с.
89. Шарыгип, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред.шк. /И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.-Москва. Просвещение, 1991.-384 с.

90. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды /Д. Б. Элькопин / Под ред. В. В. Давыдова. Москва. Педагогика, 1989. -554 с.
91. Эльконин Д.Б. Психология обучения младшего школьника. Москва. Знание, 1974. – 64с.
92. Якиманская И. С. Развивающее обучение /И. С. Якиманская.-Москва. Педагогика, 1979.-144 с.- (Б-ка учителя.-Воспитание и обучение).
93. Якуба Э.Г.-Из опита преподавания математики в VII-VIII классах. Москва., "Педагогика", 2006 г.
94. Ingrid Bohm, Jens Schneider. Productive Learning — An Educational Opportunity for Young People in Europe. Berlin, 2009.
95. Productive Learning in the Learning Workshops: Pilot Projects in Pecs, St. Petersburg, and Berlin Present Their Work. Berlin, 2011.
96. Learning mathematics. Q.E.Lapointe, N.A.Mead, J.M.Askew.-The International Assessment of Educational Progress, Educational Testing service, — 2009. — 158 p.
97. Mathematics. Cole W.L., Haubher M.A., Sparks J.M., W.G.Quast / Coordinating Author E.R.Duncan. — Boston: Houghton Mifflin Company, 2010. —486 p.
98. Ross Honsberger. More mathematical morsels. — The Mathematical association of America, 2011. — 237 p.
99. Assessment Standards for Scool mathematics. Working Draft. — Nationai Council of teachers of mathematics, 2008. — 244 p.
100. Eisenmann, B. (2009) Curriculum vision and coherence Adapting curriculum to focus on authentic mathematics Mathematics Teacher, 103 (1), 70 -75.
101. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics Reston, VA: Author.Nowlin, D. 2007). Precision: The neglected part of the measurement standard. Mathematics Teacher, 100 (5), 356-360.