საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ლამარა ციბაძე

მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ

13.00.02 - სწავლების და აღზრდის თეორია

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

1. ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა აკადემიური დოქტორი, პედაგოგიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი გიგლა ონიანი
2. განათლების აკადემიური დოქტორი, სრული პროფესორი გიორგი ბერძულიშვილი

ქუთაისი

2010

სარჩევი

I თავი

მიმდევრობათა გარდაქმნების სწავლების მეთოდოლოგიური ასპექტები უმაღლესი მათემატიკის კურსში

II თავი

უწყვეტ ფუნქციათა სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე

შესავა ლი

საზოგადოების განვითარების თანამედროვე ეტაპზე დიდ მნიშვნელობას იძენს განათლების შინაარსის სრულყოფის და მისი რეალიზების გზების ძიება. მეტად აქტუალურია სწავლების მეთოდების, ხერხებისა და ორგანიზაციული ფორმების ახალ საგანმანათლებლო სტანდარტებთან შესაბამისო-ბაში მოყვანა. ეს ეხება როგორც ზოგადსაგანმანათლებლო, ისე უმაღლეს სკოლას. რადგან ზოგადასაგანმანათლებლო სკოლაში მიღებული ცოდნა წარმოადგენს ბაზისს უმაღლესი სკოლისათვის. ამიტომ, მეტად მნიშვნელოვანია ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლებში სწავლების მეთოდებისა და ფორმების ურთიერშეხამება და შეძლებისდაგვარად დაახლოება. ეს პრობლემები საგნის მეთოდოლოგიური საფუძვლების დამუშავების შედეგად უნდა გადაიჭრას.

ალბათ გადაჭარბებული იქნება იამაზე საუბარი, თუ რა მნიშვნელოვანია უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის შესწავლა.

მათემატიკა, ისე როგორც სხვა მეცნიერებანი, შეისწავლის ნამდვილ, მატერიალურ სამყაროს, მის შემადგენელ ობიექტებს, და მათ შორის დამოკიდებულებებს, მაგრამ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებისაგან განსხვავებით, რომლებიც შეისწავლიან მატერიათა სხვადასხვა ფორმებსა და მოძრაობებს, ანდა ინფორმაციის გადაცემის სახეებს, მათემატიკა სწავლობს მატერიალური სამყაროს ზოგიერთ კანონზომიერებებს, მათი შინაარსისაგან დამოუკიდებლად.

მათემატიკის, როგორც მეცნიერების შესწავლის პარალელურად საზოგადოების განვითარების ყოველ ეტაპზე მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენდა, თუ როგორ ვასწავლოთ მათემატიკა, ამან განაპირობა მათემატიკის სწავლების მეთოდოლოგიის, როგორც მეცნიერების ჩამოყალიბება. ამ მეცნიერების ამოცანაა უპასუხოს შემდეგ კითხვებს:

1) რა არის მათემატიკის შესწავლის მიზანი;

2) რა შინაარსით წარვმართოთ სწავლება;

3) რა ფორმებითა და მეთოდებით ვასწავლოთ.

მათემატიკის სწავლება, მრავალმხრივ ეხმარება, თანამედროვე პირობებში ინტელექტუალური პიროვნების ჩამოყალიბებას. ზოგადად მათემატიკის სწავლების

სამ ძირითად მიზანს გამოყოფენ: ა) ზოგადსაგანმანათლებლო მიზანი; ბ) აღმზრდელობითი მიზანი; გ) პრაქტიკული მიზანი.

ის ამოცანები, რომლებიც მათემატიკის მეთოდოლოგიამ უნდა გადაჭრას, ბუნებრივია ვერ მოხერხდება პედაგოგიკის, მათემატიკის, ფსიქოლოგიისა და ფილოსოფიის ურთიერთკავშირის გარეშე.

„მეთოდოლოგიური დირექტივები უნდა შეიცავდეს რჩევებს, რომლებიც მიმართული იქნება სწავლების შეთანხმებასთან, როგორც ფსიქოლოგიისა და მათემატიკის პედაგოგიკასთან, ასევე მათემატიკის ბუნებასა და გამოყენებასთან, თეორიულ მეცნიერებასთან, რომელიც თავისი ფესვებით სინამდვილეშია ჩარგული და ხელს უწყობს მის შეცნობას“ [7].

ჩვენი მიზანია, უმაღლესი მათემატიკის სწავლების ზოგიერთი მეთოდოლოგიური ასპექტის დამუშავება, კერძოდ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე. ცხადია, უმაღლესი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა ბუნებრივია უნდა მოიაზრებოდეს, როგორც მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილი [71], [72].

ყველა დროში აწუხებდათ მათემატიკოსებს კითხვა: არსებობს ერთი მეცნიერება მათემატიკა, თუ არსებობს სხვადასხვა მათემატიკური მეცნიერებანი? ამ კითხვაზე ნათელ პასუხს იძლევა ფრანგ მათემატიკოსთა „ნიკოლა ბურბაკის“ ფსევდონიმით ცნობილი ჯგუფი. მათ შრომებში ნაჩვენებია, რომ მათემატიკა არის ერთიანი მეცნიერება და, რომ მათემატიკის თითქმის მთელი მასალის გადმოცემა შესაძლებელია სიმრავლეთა თეორიის საფუძველზე [41]. მათ მიერ გამოქვეყნებული მრავლტომიანი „მათემატიკის ელემენტების“ ავკარგიანობის გამო აზრთა დიდი სხვადასხვაობაა. ბევრს არ მოსწონს გადმოცემის „ბურბაკისეული“ სტილი. რაც შეეხება მასალის დალაგებას და მეთოდოლოგიურ პრინციპებს, ამასთან დაკავშირებით ა. კოლმოგოროვი აღნიშნავდა, რომ „შეიძლება საყოველთაოდ აღიარებულად ჩაითვალოს ის აზრი, რომ ნიკოლა ბურბაკის „მათემატიკის ელემენტებში“ გადმოცემულმა თანამედროვე წარმოდგენამ მათემატიკური მეცნიერების სტრუქტურაზე სპეციალისტ მათემატიკოსთა საუნივერსიტეტო განათლებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უნდა დაიკავოს“ [52]. ეს წიგნები მართლაც დიდ გავლენას ახდენენ მათემატიკის საუნივერსიტეტო სწავლებაზე. უნივერსიტეტისათვის განკუთვნილი მათემატიკური სახელმძღვანელოს თითქმის ყველა ავტორი ასე თუ ისე ანგარიშს უწევს „მათემატიკის ელემენტებს“ [30], [42].

ბურბაკის შრომების გამოქვეყნებამ დასაბამი მისცა პედაგოგიური ფსიქოლოგიის განვითარებას. შვეიცარიელი ფსიქოლოგის პიაჟეს მიერ დაფუძნდა

ფსიქოლოგთა სკოლა, რომელიც მათემატიკური აზროვნების განვითარების ფსიქოლოგიას შეისწავლის. ექსპერიმენტებმა აჩვენა, რომ მათემატიკის შესწავლის პროცესში ხდება აზროვნების ერთი სტრუქტურიდან მეორეზე გადასვლა, ამის გამო წარმოიშვა აზრი, რომ მათემატიკური განათლების ერთ-ერთი ამოცანაა აზროვნების ამ სტრუქტურების ფორმირება [7], [42].

მათემატიკის, როგორც ერთიანი მეცნიერების როლსა და მნიშვნელობაზე, სპეციალური დადგენილება იქნა მიღებული 1956 წელს ჟენევაში, გაერთიანებული ერების ორგანიზაციის მიერ მოწვეულ საერთაშორისო კონფერენციაზე, კერძოდ მასში აღნიშნულია:

ა) მათემატიკას ყოველთვის ჰქონდა ზოგადკულტურული და პრაქტიკული მნიშვნელობა, ასრულებდა მთავარ როლს სამეცნიერო, ტექნიკურ და ეკონომიკურ პროგრესში და მიაღწია განვითარების არნახულ დონეს.

ბ) მათემატიკური განათლება არის სიკეთე და უფლება თითოეული ადამიანისათვის განურჩევლად რასისა, სქესისა, მდგომარეობისა და საქმიანობისა.

გ) საზოგადოების პროგრესისა და კეთილდღეობისათვის მათემატიკის საერთო განვითარების დონე უნდა იზრდებოდეს ტექნიკისა და მეცნიერების განვითარებასთან ერთად.

დ) მათემატიკის განვითარებაში თავისი წვლილი შეიტანა სხვადასხვა ცივილიზაციამ.

ე) ფსიქოლოგიური მეცნიერება აღიარებს, რომ ადამიანს მათემატიკაში აქვს გარკვეული გონებრივი მუშაობის შესაძლებლობა და არ არსებობს საფუძველი ვიფიქროთ, თითქოს ქალებს ნაკლებად შეუძლიათ მათემატიკის ათვისება, ვიდრე მამაკაცებს.

ვ) მათემატიკის სწავლება უფრო და უფრო მეცნიერული და მიზანმიმართული ხდება [7].

გავაკეთოთ მოკლე ისტორიული ექსკურსი მათემატიკური მეცნიერების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ.

მათემატიკური ცოდნის საწყისებს ვხვდებით დაახლოებით ოთხი ათასი წლის წინათ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე. ამას მოწმობს ჩვენამდე მოღწეული ეგვიპტური პაპირუსები და ლურსმნულწარწერებიანი ბაბილონური ფილები, რომლებზეც ამოხსნილია სხვადასხვა არითმეტიკული, გეომეტრიული და ალგებრული ამოცანები. ძლიერ განვითარდა მათემატიკა ძველ საბერძნეთში. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 300-ზე მეტი წლით ადრე. აქ გამოჩნდა ევკლიდეს ,,საწყისები‘‘, ამ თხზულებაში სისტემატურად იყო გადმოცემული გეომეტრია დაახლოებით იმ

მოცულობით, რომლითაც იგი დღესაც ისწავლება საშუალო სკოლაში. ამის გარდა მასში მოყვანილი იყო ცნობები რიცხვთა გაყოფადობის და კვადრატულ განტოლებათა (გეომეტრიული სახით) ამოხსნის შესახებ. ეს წიგნი წარმოადგენდა მათემატიკური დისციპლინების აქსიომატიკურად აგების პირველ ცდას.

მათემატიკის განვითარებისათვის ბევრი რამ გააკეთეს აღმოსავლეთის ხალხთა მეცნიერებმა. განსაკუთრებით დიდ წარმატებებს მიაღწიეს ინდოელებმა და არაბებმა ალგებრისა და ტრიგონომეტრიის განვითარების საქმეში.

მათემატიკის აყვავება ევროპაში XVII საუკუნეში იწყება. ამ დროს ისახება მათემატიკის ახალი დარგები, რომლებიც ე.წ. უმაღლეს მათემატიკას მიეკუთვნება. უმაღლესი მათემატიკის საფუძველს წარმოადგენს ანალიზური გეომეტრია, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა. ამ დარგების შექმნამ, რაც დაკავშირებულია XVII საუკუნის ისეთ უდიდეს მეცნიერთა სახელებთან, როგორიცაა რ.დეკარტი, პ.ფერმა, ი.ნიუტონი და გ.ლაიბნიცი, საშუალება მოგვცა მათემატიკურად შეგვესწავლა მოძრაობა, სიდიდეებისა და გეომეტრიული ნაკვეთების ცვლილებათა პროცესები. ამასთან ერთად შემოვიდა მათემატიკაში კოორდინატები, ცვლადი სიდიდეები და ფუნქციის ცნება. რომელთაც მოსწავლეები ალგებრისა და ტრიგონომეტრიის სახელმძღვანელოებში ეცნობიან, მაგრამ ისინი მაინც იმ უმაღლესი მათემატიკის მიჯნაზე რჩებიან, რომელმაც უკანასკნელი სამასი წლის განმავლობაში დაგვანახა, რომ ის არის განსაკუთრებული ძალის და სიზუსტის უბადლო იარაღი. ამ იარაღმა საშუალება მისცა ასტრონომებს, ფიზიკოსებს, მექანიკოსებს და სხვა დარგის წარმომადგენელთა მრავალ თაობას გადაეჭრათ ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის ურთულესი პრობლემები.

მათემატიკის განვითარების თანამედროვე პერიოდი მოიცავს XIX-XX საუკუნეებს. ამ პერიოდში მათემატიკა აბსტრაქციის ახალ უფრო მაღალ საფეხურზე ადის. ამ ეპოქის უდიდეს მათემატიკურ მოვლენად ითვლება გაუსის მიერ ალგებრის ძირითადი თეორემის დამტკიცება. მანვე შექმნა რიცხვთა თეორიის საფუძვლები, განავითარა შედარებათა თეორია და კვადრატული ნაშთების თეორია.

1821 წელს ო.კოშიამ განავითარა ზღვართა თეორია, რომლის საფუძველზეც შეიქმნა მოძღვრება ფუნქციებზე, განსაზღვრა მწკრივის ჯამისა და ფუნქციის უწყვეტობის ცნებები. მოგვიანებით მან ეს მოძღვრება საფუძვლად დაუდო მთელი მათემატიკური ანალიზის აგებას. მეცნიერების ამ დარგის გადმოცემისას ჩვენ დღემდე მივყვებით კოშის მიერ დასახულ გზას, იმ გაუმჯობესებით, რომელიც კ. ვაიერშტრასმა შემოგვთავაზა.

პირველი სერიოზული უარყოფა კლასიკური კონცეფციისა მოხდა არაევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენით. კერძოდ გაბათილდა აზრი იმის შესახებ, რომ ევკლიდეს გეომეტრია აბსოლუტური ჭეშმარიტებაა. ასევე უარყოფილი იქნა შეხედულება აქსიომაზე, როგორც ისეთ ჭეშმარიტებაზე, რომლის დამტკიცებაც არ შეიძლება. აღმოჩნდა, რომ აქსიომა მხოლოდ ჰიპოთეზაა და მისი ჭეშმარიტება განისაზღვრება იმ სიზუსტით თუ ამ აქსიომაზე დაყრდნობით აგებული მოდელი რამდენად შესაბამისია მატერიალური სამყაროსათვის. ყოველივე ზემოთ აღნიშნული დასკვნების გაკეთება მოხერხდა 1829-1830 წლებში, რუსი მათემატიკოსის ნ. ლობაჩევსკის არაევკლიდური გეომეტრიის ნაშრომების გამოქვეყნების შედეგად (მისგან დამოუკიდებლად ასეთივე სისტემა ააგეს ი.ბოიაიმ და კ.გაუსმა). ამ უკანასკნელმა ბიძგი მისცა მათემატიკის დაფუძნების საკითხებში კვლევის დაწყებას და აქსიომების თვისებების შესწავლას. შემდეგომში ამან მიგვიყვანა ე.წ. აქსიომატური მეთოდის შექმნამდე, რომელიც დღეს შემეცნების ერთ-ერთი მთავარი მეთოდი გახდა.

1854 წელს ბ.რიმანმა შემოიღო n-განზომილებიანი სივრცის ცნება, განაზოგადა გაუსის იდეები ზედაპირთა შინაგან გეომეტრიაში და მოგვცა ყოველგვარი მეტრული არაევკლიდური გეომეტრიის აგების ხერხი.

1881-1886 წლებში რ.დედეკინდმა, გ.კანტორმა, მერემ და კ.ვაიერშტრასმა სამი სხვადასხვა ხერხით ააგეს ნამდვილ რიცხვთა თეორია. ესეც მნიშვნელოვანი მაგალითია იმისა, რომ ერთი და იგივე თეორია სხვადასხვა გზით შეიძლება იქნეს აგებული. მალე დედეკინდისა და განსაკუთრებით კანტორის ნაშრომებში აღმოცენდა თანამედროვე მათემატიკის უმნიშვნელოვანესი დარგი – სიმრავლეთა თეორია.

1899 წელს დ. ჰილბერტმა „გეომეტრიის საფუძვლებში" ააგო ევკლიდეს გეომეტრიის სრული აქსიომატიკა და ანალიზი გაუკეთა აქსიომათა სხვადასხვა ჯგუფების თანაფარდობას. ამ დროიდან მათემატიკაში ფართოდ განვითარდა აქსიომატური მეთოდი. უკანასკნელ პერიოდში მათემატიკური მოდელების აგების ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდი აქსიომატური მეთოდია. ბურბაკები აქსიომატიკური მეთოდის არსს შემდეგნაირად ხსნიან: „ამა თუ იმ თეორიების აგების დროს ჩამოყალიბებულ მსჯელობაში, აქსიომატიკა ცდილობს მოძებნოს ძირითადი კვანძები და დააშოროს ისინი ერთმანეთს, შემდეგ თითოეული ეს კვანძი იზოლირებულად აიყვანოს ზოგად პრინციპამდე და მათგან მიიღოს შედეგები. ბოლოს ვუბრუნდებით რა შესასწავლ თეორიას, აქსიომატიკა ახდენს წინასწარ გამოყოფილი კვანძების კომბინირებას და სწავლობს თუ როგორ ურთიერთქმედებენ ისინი ერთმანეთთან" [41].

ამ მეთოდის ღირსება მდგომარეობს იმაში, რომ თვისებები და დამოკიდებულებები, რომლებიც გარეგნულად განსხვავებულნი არიან, აღმოჩნდებიან მხოლოდ განსხვავებული ფორმები ერთი და იგივე თვისებებისა და დამოკიდებულებებისა, რომელთაც ადგილი აქვთ აბსტრაქტულ სისტემებში. ეს კი საშუალებას იძლევა ყოველი თეორემებიდან მივიღოთ რიგი თეორემებისა, შესაბამისი აბსტრაქტული სისტემის სხვადასხვა მოდელების შესახებ.

ზემოთ აღნიშნული მათემატიკური მეცნიერების განვითარების რთული და საინტერესო გზის გათვალისწინებით ჩვენი ნაშრომის მიზანია მკითხველს მიაწოდოს მათემატიკური ანალიზის სწავლების გარკვეული მეთოდური რეკომენდაციები.

ყოველგვარი აღზრდა, მით უფრო სწავლა, რომელიც გარკვეული სისტემით წარმოებს, შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ, თუ პედაგოგიურ მეცნიერებას, დიდაქტიკას და მეთოდიკას არ ემყარება. დიდაქტიკასთან ერთად პედაგოგიკური მეცნიერების უმნიშვნელოვანესი დარგია მეთოდიკა, რომელიც ცალკე საგნების უკეთესად სწავლებისათვის გზებსა და საშუალებებს გვიჩვენებს. ერთსაც და მეორესაც ძირითად მიზნად დასახული აქვთ სწავლება აღზრდის პროცესში, ხოლო აღზრდა–სწავლების პროცესში. როგორც ხელოვნება საერთოდ, ხოლო ლიტერატურა, კერძოდ, სინამდვილის მხატვრულ ასახვას წარმოადგენს მისგანვე გამომდინარე სოციალური ფუნქციით, ისე პედაგოგიკა საერთოდ, ხოლო მეთოდიკა, კერძოდ, სწავლებას ემსახურება. აქედან გამომდინარე, აღმზრდელობითი დანიშნულებით, მაგრამ ხელოვნება შეიძლება არსებობდეს ულიტერატუროდ, როგორც იგი იყო მწერლობის გაჩენამდე ქანდაკების, ფერწერის, ცეკვის, სიმღერის სახით; პედაგოგიკურ მეცნიერებას კი მეთოდიკის გარეშე არსებობა არ შეუძლია. აქ ერთმანეთში არ უნდა ავურიოთ პედაგოგიკა, როგორც მეცნიერება და პედაგოგიკა, როგორც აღზრდის გარკვეული წესები, რომლებიც მეცნიერულად არ არიან დამუშავებულნი [1].

პედაგოგიკა ძველთაგანვე თეორიული მეცნიერება იყო, პრაქტიკას რომ ემყარებოდა, მაგრამ თანდათან უფრო პრაქტიკული გახდა თეორიულის წყალობით. მისი უახლოესი ამოცანაა დაიბრუნოს თეორიული სიღრმე ისევ პრაქტიკულზე დაყრდნობით. პედაგოგიკაში ორივე ცალმხრივობა საშიშია: თეორიულმა პრაქტიკული არ უნდა დაჩრდილოს, ხოლო პრაქტიკულმა–თეორიული. ორივე შემთხვევაში აღზრდას, როგორც ძირითად მიზანს, გამოუსწორებელი ზიანი მიადგება. ამიტომ პედაგოგიკა უნდა იყოს თეორიულ-პრაქტიკული მეცნიერება, რომელიც ორივე ფენომენს ჰარმონიულად აერთიანებს.

სწავლა-აღზრდას ესაჭიროება არამარტო პედაგოგიკური პრობლემების თეორიული, არამედ მეთოდიკური დამუშავება. მეთოდიკა მეცნიერების ის დარგია, რომელსაც მოეთხოვება დაამუშაოს თითოეული დისციპლინის სწავლების საკითხები იმ მიმართულებით, რომ შესაძლებლობა მოგვცეს ყოველ საგანს მაქსიმალური ეფექტურობით ვასწავლიდეთ როგორც ზოგადსაგანმანათლებლო, ისე უმაღლეს და სპეციალურ სკოლებში.

მაღალკვალიფიციური სპეციალისტის აღზრდაში დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვეობის მოთხოვნათა გათვალისწინებით შედგენილ სასწავლო გეგმებს, პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებს, საუკეთესო ლექტორ-მასწავლებლების პირობებშიაც კი, თუ არ არის გამართული სახელმძღვანელო, პროგრამა, სასწავლო გეგმა, შეუძლებელია ნამდვილად სრულ წარმატებაზე ვილაპარაკოთ.

სწავლების ცენტრალური ფიგურაა ლექტორი, ისევე როგორც მასწავლებელი ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მათი მუშაობის ფორმები და მეთოდები ერთნაირი არ არის. უმაღლეს სკოლაში, როგორც წესი, უნდა მუშაობდნენ ყველაზე საუკეთესო მეცნიერები, იკითხებოდეს მხოლოდ მეცნიერულად და პედაგოგიურად საუკეთესო ლექციები.

ასეთი ლექციების წაკითხვა შეუძლია მხოლოდ იმ ლექტორს, რომელსაც დიდ ცოდნასთან ერთად, კარგი პედაგოგიური მონაცემები აქვს და მეთოდიკის საკითხებსაც ყურადღებით ეკიდება, ვინაიდან სწავლა-აღზრდა დღეს წარმოუდგენელია მაღალ დონეზე დაყენებული მეთოდური მუშაობის გარეშე. უეჭველია დიდად ცოდავენ ის ადამიანები, რომლებიც ფიქრობენ, რომ მეთოდიკა მეცნიერება კი არ არის, პედაგოგიკის ტექნიკური დარგიაო. თუ მცენარის გაზრდა მეცნიერებაა, ადამიანის აღზრდა მით უფრო დიდი მეცნიერებაა და მეთოდიკა, როგორც პედაგოგიკის ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგი, ისეთივე ზუსტი უნდა გავხადოთ, როგორც ყველა ის დანარჩენი. ამიტომ ყოველთვის მხარი უნდა დავუჭიროთ მეთოდიკური მუშაობის გაფართოებას, მეთოდიკის მტკიცე მეცნიერულ საფუძვლებზე დაყენებას. სახელმძღვანელოდ უნდა გავიხადოთ დებულება, რომ ყველა ლექტორი, რომელიც უმაღლეს სასწავლებელში მუშაობს, თავისი საგნის მეთოდისტიც იყოს [34].

აღზრდა არ არის ეპიზოდური ან სეზონური მოვლენა. არ შეიძლება დღეს აღზარდო და ხვალ დამშვიდებას მიეცე – უკვე გავზარდეო. აღზრდა და სწავლება განუწყვეტელი პროცესია, როგორც განუწყვეტლივ ივსება ჩვენი რიგები ახალგაზრდობის ახალ-ახალი წევრებით. ამიტომ სწავლა-აღზრდაზე ჩვენ ასევე განუწყვეტლივ უნდა ვზრუნავდეთ, ვხვდებოდეთ ერთმანეთს, იდეებს და აზრებს

ვუზიარებდეთ. იდეების ამგვარი გაზიარების მნიშვნელობის შესახებ ბერნარდ შოუმ მოხდენილად სთქვა: თუ შენ გაქვს ერთი ვაშლი, მეც მაქვს ერთი ვაშლი და გავცვალეთ, მაშინ შენ გექნება ისევ ერთი ვაშლი და მეც ერთი დამრჩება. მაგრამ თუ შენ გაქვს ერთი იდეა, მეც მაქვს ერთი იდეა, გაცვლის შემდეგ შენ გექნება ორი იდეა, ხოლო მეც ორი იდეის პატრონი გავხდებიო. ეს იდეური სიმდიდრე – ამავე დროს სულიერი სიმდიდრეა, ხოლო ყოველგვარი იდეა, სწორი და მართალი, ახალგაზრდობის სწავლა-აღზრდაში მატერიალურ ძალას წარმოადგენს [11].

მოწინავე ლექტორი, მოწინავე მასწავლებელი წარმოუდგენელია, თუ გარკვეული აზრით მეცნიერი არ არის, არ ზრუნავს თავის საგანში ახალი მიღწევების როგორც შესწავლას, ისე მეთოდიკური დამუშავებისათვის, მაგრამ როგორც უმაღლესი, ისე ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მასწავლებელი პედაგოგიც უნდა იყოს და მეთოდისტიც თავის სპეციალობაში. პედაგოგი და მეთოდისტი – აი, საერთოდ სკოლის მოწინავე მასწავლებლის პირველი ნიშანი.

ისტორიულად ყველა მეცნიერება თავის უშუალო საგანთან იყო დაკავშირებული, მისგან ამოდიოდა, მისითვე ისაზღვრებოდა. დროის ფაქტორის კვალად საგანი აპირობებდა მეცნიერების გაჩენას, ხოლო მეცნიერება – თვით საგნის ანალიზს. გამონაკლისს არც დღემდე არსებული მეცნიერება წარმოადგენს, არც ჰუმანიტარული, მით უფრო არც ფიზიკა-მათემატიკური. მეცნიერების თავდაპირველი ფორმებიდან მოყოლებული, დაუსრულებელი დიფერენციაცია–ინტეგრაციის პროცესში, სულ უფრო ცხადი ხდება, რომ მეცნიერება უძლურია გაექცეს თავის საგანს, ხოლო საგანი, რაც უფრო ექვემდებარება ანალიზს, მით უფრო მეტად საჭიროებს ახალი კუთხით მიდგომას, მაშასადამე, ახალი მეცნიერების შექმნას. ამიტომ დღეს აღარავის უკვირს, როცა ხედავს ერთი მეცნიერების რამდენიმედ დანაწილებას (დიფერენციაციას). სწორედ ეს არის მეცნიერებათა დიფერენციაცია-ინტეგრაციის პროცესი, რაც უხსოვარი დროიდან მიმდინარეობს და ამჟამადაც ყველაზე ინტენსიურია.

მაგრამ არა მარტო ამ პროცესმა განაპირობა ახალი მეცნიერების შექმნა, რომლის სახელია უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკა. ეს მეცნიერება იქმნება თვით მისი საგნის მხრივ აუცილებელი საჭიროების მიზეზით. თანამედროვე უმაღლესი სკოლა ოპტიმალური გზით ვერ წავა, თუ საკუთარი პედაგოგიკა არ გააფორმა, როგორც მეცნიერება. გარდა ამისა, უმაღლესი სკოლის თითოეული კურსი ისეთი სპეციფიკურობით ხასიათდება, რომ პირდაპირ გვიბიძგებს სპეციალური შესწავლისაკენ თავისი ანალიზისა და სინთეზის სავსებით რეალური შედეგებით [34].

ავიღოთ უმაღლესი სკოლის პირველი კურსი. სრულიად ელემენტარული ჭეშმარიტებაა, რომ პირველ კურსზე როგორც დავაყენებთ სწავლა-აღზრდას თანაბარ პირობებში, შემდეგომ კურსებზეც საქმე დაახლოებით ისევე წარიმართება. ამ მხრივ პირველი კურსი უმაღლესი სკოლისათვის იგივეა, რაც დაწყებითი სკოლა ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლისათვის. აქ დიდი ჭეშმარიტება იმალება და ამიტომ არ უნდა მოვერიდოთ პარალელების შედეგად მიღებულ დასკვნებს. მაგრამ თუ ეს საკითხი დღემდე ღრმად არ დამუშავებულა ნამდვილად მეცნიერულ დონეზე, მხოლოდ იმიტომ, რომ ცოტას ვმუშაობთ უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკის, როგორც მეცნიერების, სპეციფიკურ პრობლემებზე. ვკმაყოფილდებით ზოგად-საგანმანათლებლო საშუალო სკოლის პედაგოგიკით და მის პრინციპებს ზოგჯერ უშუალოდ ვუყენებთ უმაღლეს სკოლას [34], [11], [3].

მაგრამ ახლა სხვა დროა. უმაღლესი სკოლა ისე განვითარდა, ისე ფართო ქსელი აქვს, იმდენად რთული, უთვალავი პრობლემების შემცველია, რომ აუცილებლად იქცა უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკა გაფორმდეს ცალკე დარგად, როგორც მეცნიერება [34], [11], [3]. მარტო ის ფაქტი, რომ უმაღლეს სკოლაში მეცნიერებას, ხოლო საშუალო სკოლაში მეცნიერების საფუძვლებს ასწავლიან, გარკვევით მიუთითებს განსხვავებაზე: პირველის პედაგოგიკამ მეცნიერების დაუფლებით სპეციალისტის სწავლა-აღზრდა უნდა გაიხადოს თავის ძირითად ამოცანად, მეორემ კი ახალგაზრდობისათვის საშუალო განათლების მიცემა.

პირველს საქმე აქვს ადამიანებთან, რომლებიც უკვე მოქალაქენი გახდნენ, მეცნიერების საფუძვლების დაუფლების შემდეგ მეცნიერებას ეჭიდებიან, მეორე მხოლოდ ანბანით იწყებს და მეცნიერების საფუძვლებით ამთავრებს. გარდა გონებრივი, სულიერი, წმინდა ფსიქოლოგიური დიდი სხვაობისა, წინა პლანზე გამოდის ფიზიკური სპეციფიკა, რაც სწავლა-აღზრდის პროცესში გვიკარნახებს იგი უეჭველად გავითვალისწინოთ. პირველი მართავს ლექციას, როგორც სწავლების ძირითად მეთოდს, მეორე _ გაკვეთილს, და მათ შორის მარტო ამ ფაქტორის გახსენება, უამრავ სხვას რომ თავი დავანებოთ, ნათლად მოწმობს, თუ რამდენად საჭიროა უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკა, როგორც საზოგადოებრივი მეცნიერება, რომელიც თავისი სპეციფიკური ობიექტით განსხვავდება დანარჩენ მეცნიერებათაგან. მაშასადამე, არამარტო ცალკე არსებობის უფლება აქვს, არამედ, ვალდებულიცაა ამგვარი სახით ჩამოყალიბდეს [34], [3].

ამიტომ საჭიროა იქედან დავიწყოთ, რომ სპეციალურად დამუშავდეს უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკის მეთოდოლოგიური საფუძვლები, როგორც ცალკე მეცნიერების თეორიული ბაზა. შეუძლებელია აქ ვიხელმძღვანელოთ მექანიკური ან დოგმატური

მიდგომით. ხელოვნურად არაფრის გამოყენება არ ვარგა, შემოქმედებითად დამუშავება კი აუცილებელია. ჩვენ არ შეგვიძლია საშუალო სკოლის პედაგოგიკის მეთოდოლოგია ან სწავლა-აღზრდის პრინციპები ავტომატურად მივუყენოთ უმაღლეს სკოლას, მაგრამ შეგვიძლია საკუთრივ შემოქმედებითი ასპექტებით ყველაფერი ეს ორგანულად გამოვიყენოთ სპეციფიკური სფეროების აბსოლუტური გათვალისწინებით.

მოვიყვანოთ ყოველივე ზემოთ თქმულის საილუსტრაციო მაგალითები:

I. ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სწავლება საშუალო სკოლაში, როგორც ვიცით ნატურალური რიცხვების სწავლება დაწყებით კლასებში არსებითად ეყრდნობა მის აღწერით სწავლებას, ასე მაგალითად რიცხვი „3“-ს მოსწავლეებს ასე შევასწავლით, მოცემულია რამოდენიმე ნახატი, „სამი ბაჭია“, „სამი ბავშვი“, „სამი ჩიტი“ და მათ ქვეშ წერია რიცხვი 3. აქ ფარულად გამოყენებულია სიმრავლის სიმძლავრე, რაც მიუთითებს ეკვივალენტურ სიმრავლეთა საერთო დამახასიათებელ თვისებაზე. ე.ი. ნატურალური რიცხვის გაცნობა არსებითად ეყრდნობა სიმრავლეთა შორის ბიექციურ მიმართებას, მსგავსი წესით სწარმოებს ნატურალურ რიცხვთა შედარება და მოქმედებების გაცნობა. ცხადია, ამას ვერ გამოვიყენებთ უმაღლესი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკაში, აქ მეთოდიკამ უნდა მოიშველიოს ნატურალურ რიცხვთა, როგორც რაოდენობითი, ასევე რიგობითი თეორია და არსებითად უნდა დაეყრდნოს სიმრავლის სიმძლავრის ცნებას და დალაგებული სიმრავლეების თვისებებს. უმაღლესი სკოლის მეთოდიკაში ასევე არ გამოდგება მთელი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების საშუალო სკოლის მეთოდიკით სწავლება. აქ უნდა მივმართოთ ფორმალურ თეორიებს, განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს ირაციონალური რიცხვის ცნების შემოღებას. როგორც ვიცით არსებობს ნამდვილ რიცხვთა დედეკინდის, კანტორ-მერეს და ვაიერშტრასის თეორიები, ასევე მათთან პარალელურად უნდა გავაცნოთ სტუდენტებს ნამდვილ რიცხვთა აქსიომატური თეორია, (რომელიც აგრეთვე არის წყარო მთელი რიგი მათემატიკური სტრუქტურების აგებისა) უწყვეტობის სხვადასხვა (ეკვივალენტური) პრინციპებით.

ვაიერშტრასის, დედეკინდის, კანტორ-მერეს თეორიები ნამდვილი რიცხვების განსაზღვრას სრულიად განსახვავებული ფორმით გადმოცემენ, მაგრამ საბოლოო მიზანი ერთი და იგივეა. ეს მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ განთავისუფლებულიყო ანალიზი გეომეტრიულ თვალსაზრისზე დაყრდნობილი საფუძვლებისაგან, რომელიც მარტივად წყვეტდა საკითხს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობის შესახებ, იმ მარტივი მოსაზრებით, რომ იმდენია ნამდვილი რიცხვი, რამდენი

წერტილიცაა წრფეზე. ამ თეორიებით განხორციელდა არა მარტო ანალიზის, არამედ გეომეტრიის არითმეტიზაციაც.

II. სასკოლო გეომეტრიაში ასევე ემპირიულ (ინტუიციურ) დონეზე ისწავლება სხეულთა მოცულობისა და ზედაპირის ფართობთა გამოსათვლელი ფორმულების დამტკიცება, თუმცა იდეა სწორია. მაგრამ დასკვნები სრული სიმკაცრით არ არის მოცემული. ვინაიდან ფუნქციის ზღვარი არ არის მკაცრად განმარტებული. უმაღლეს სკოლაში ამ ფორმულების მიღება სწარმოებს ინტეგრალური აღრიცხვის მეთოდების გამოყენებით, აქაც სრული სიცხადით მისი მიღება სწარმოებს მოცულობადობასა და ფართობითობის ცნებების შემოღებით, ხოლო მისი შესაბამისი ფორმულების დადგენა სწარმოებს ჯერადი ინტეგრალებით (ეს საკითხი ჟორდანის ზომის კერძო შემთხვევებია, ეს უკანასკნელი განისაზღვრება მართკუთხედის, მართკუთხა პარალელეპიპედის ფართობისა და მოცულობის სასკოლო კურსიდან ცნობილი ფორმულებით). ჯერადი ინტეგრალის ცნების განსაზღვრა (რიმანის ინტეგრალი) არსებითად ეყრდნობა R^n სივრცეში სიმრავლის ჟორდანის ზომის თეორიას.

როგორც აღვნიშნეთ, ჟორდანის ზომის თეორია R^2 სივრცეში აიგება მართკუთხედის ფართობის ცნების გამოყენებით, მაგრამ ამ თეორიის აგებისათვის მთავარია არა მართკუთხედის ფართობის კონკრეტული მნიშვნელობა, არამედ მართკუთხედთა სისტემის საერთო თვისება. კერძოდ მართკუთხა სისტემიდან ბრტყელი სიმრავლის ზომის გაგრძელების ასაგებად მნიშვნელოვანია ის, რომ მართკუთხედის ფართობი ადიციური ფუნქციაა და მათი ერთობლიობა ქმნის ნახევარრგოლს. ანალიზის გეომეტრიული გამოყენებების სწავლების დროს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტებს აუცილებლად უნდა გავაცნოთ შემდეგი თეორემა: R^n სივრცეში შემოსაზღვრული სიმრავლის ჟორდანის აზრით ზომადობისათვის (მოცულობადობისათვის) აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი საზღვრის ჟორდანის ზომა იყოს ნულის ტოლი.

ამ თეორემიდან კერძო შემთხვევაში გამომდინარეობს სასკოლო მათემატიკის კურსში ცნობილი ყველა ბრტყელი, თუ სივრცითი ფიგურების ფართობადობა და მოცულობადობა.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითები ნათლად გვიჩვენებს, თუ რა დიდი განსხვავებაა სასკოლო მათემატიკასა და უმაღლესი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკებს შორის, მაგრამ ბევრი სპეციფიკური პრობლემა მათ, მაინც საერთო აქვს. მათემატიკის სწავლება, როგორც საშუალო ასევე უმაღლეს სკოლაში საზოგადოდ წარმოადგენს ფრიად რთულ ფსიქოლოგიურ პროცესს. მათემატიკის სწავლებისას გამოიყენება აღქმა, როგორც შემეცნებითი პროცესის საფუძველი, სწავლება ემყარება აბსტრაქტულ

და სივრცით წარმოდგენებს, მეხსიერებას. განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება აზროვნებას ფართო გაგებით-აზროვნებას ცნებებით, თეორემებით და სხვადასხვა თეორიებით. მათემატიკის სწავლება იყენებს ცნობიერების მრავალხარისხოვან ფუნქციებს. ტერმინი „მათემატიკის სწავლება“ იგულისხმება არა მხოლოდ რაიმე მათემატიკური მასალის შესწავლა-ეს მისი მხოლოდ ერთი მხარეა. მხოლოდ ეს მიზანი, რომ ჰქონდეს მათემატიკის სწავლებას, იგი აღწერითი სასწავლო საგანი იქნებოდა. იგი ამით არ შემოიფარგლება, მას გაცილებით უფრო დიდი ფუნქცია აკისრია-მოსწავლეში ლოგიკური აზროვნებისა და მათემატიკური მოქმედების უნარის გამომუშავება. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ეს მხოლოდ მეცნიერი მათემატიკოსის საქმეა და არა მოსწავლის (სტუდენტის), მაგრამ როცა მოსწავლე „აღმოაჩენს“ იმას, რაც მეცნიერებაში დიდი ხანია აღმოჩენილია, იგი არ აზროვნებს ისე, როგორც პირველაღმომჩენი? მათემატიკური შრომა მოიცავს შემოქმედების განსაკუთრებულ ელემენტს და ეს ეხება არა მხოლოდ მეცნიერის შემოქმედებით მუშაობას, არამედ ის ყოველგვარ წვრილმანში ვლინდება. იგი ვლინდება ამოცანების ამოხსნაშიც, „განსხვავება შემოქმედებით მუშაობასა და მოსწავლის მუშაობას შორის, როცა ეს უკანასკნელი ხსნის ამოცანას, მხოლოდ დონეთა სხვაობაშია“, გონებრივი შემოქმედება ყველგან ერთნაირია, როგორც მეცნიერების წინა ხაზზე, ისე სკოლის პირველ კლასში. მათემატიკის სწავლების ამოცანა სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ ჩამოაყალიბოს და განავითაროს ადამიანის გონებრივი შემოქმედების ის სტრუქტურები, რომლებიც ხელს უწყობენ მათემატიკურ აღმოჩენებს. სწორედ აქაა მათემატიკის სწავლების თავისებურება, მისი განსხვავება სხვა საგნების სწავლების პროცესებისა და მეთოდებისაგან. ამრიგად, მათემატიკის სწავლება როგორც საშუალო, ასევე უმაღლეს სკოლაში უნდა უპასუხებდეს ორ ამოცანას: 1) ასწავლოს გარკვეული მათემატიკური თეორია; 2) ასწავლოს, შეაჩვიოს მსმენელი (მოსწავლე, სტუდენტი) მათემატიკურ შემოქმედებას, გამოუმუშაოს მას მათემატიკური აზროვნება. ეს უკანასკნელია სწორედ მათემატიკის სწავლების არსებითი ნიშანი [10].

რაც შეეხება პრაქტიკულ მიზნებს, უნდა გამოვყოთ შემდეგი:

1) მივცეთ გარკვეული ცოდნის მარაგი და მისი უშუალოდ ცხოვრებაში გამოყენების უნარი, იმისი შესაძლებლობა, რომ მიღებული ცოდნა გამოიყენონ მათემატიკის მომიჯნავე საგნებში;

2) მივცეთ ჩვევა დამოუკიდებლად ეძიონ მათემატიკის საკითხები სასწავლო, პოპულარულ, თუ სამეცნიერო ლიტერატურაში [52], [35], [65].

მეცნიერული დარგის სწავლების მეთოდიკა დაინტერესებული უნდა იყოს შემეცნების შინაგანი სტრუქტურებით, მაგრამ სტრუქტურები არ არსებობს

იზოლირებულად, ამიტომ აუცილებელი ხდება რაციონალური მიგნება იმ ძირითადი სტრუქტურებისა, რომლებსაც მიეკუთვნება შესასწავლი ობიექტი. მეთოდიკის ერთ-ერთ ძირითად კითხვას „როგორ ვასწავლოთ" არ შეიძლება პასუხი გაეცეს ამ ზოგადი ვერსიის გარეშე. ეს ეხება, როგორც ელემენტარული ასევე უმაღლესი მატემატიკის სწავლების საკითხებსაც. ჭეშმარიტების პრეზენტაცია ადეკვატურ ასახვას შემეცნებადი სუბიექტის აზროვნებაში. ასეთია ზოგადად ჭეშმარიტების ფილოსოფიური მიდგომა.

რა გვესმის მათემატიკური ჭეშმარიტების ქვეშ, რას გულისხმობს მათემატიკური ჭეშმარიტება? დასმულ კითხვაზე პასუხის გაცემა მოითხოვს მათემატიკის მეთოდოლოგიის ურთულეს საკითხებში გარკვევას. მრავალი მეცნიერის აზრია ამ საკითხის მიმართ გამოთქმული (არისტოტელე, დეკარტი, ლაიბნიცი, ჰეგელი, გაუსი, ლობაჩევსკი, კანტორი, პუანკარე, ვეილი, ბრაუერი და სხვა).

მათემატიკის არსი უნდა გამოვლინდეს უპირველესად მათემატიკური ცნებების შემოტანისა და შესწავლის პროცესით. მათემატიკა ერთიანი მთლიანი მეცნიერებაა და არ შეიძლება მკაცრი საზღვრის გავლება წმინდა მათემატიკასა და გამოყენებით მათემატიკას შორის, იქმნება მათემატიკური თეორიები, რომელთა გამოყენება კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისათვის დროის გარკვეულ პერიოდში შეიძლება არ ჩანდეს. როგორ? დროის ამ პერიოდში ის წმინდა მათემატიკა იქნება და შემდეგ, როცა მათემატიკა მოახდენს ამა თუ იმ ამოცანის მოდელირებას, გადაიქცევა გამოყენებით მათემატიკად? საკმარისია გავიხსენოთ ჯგუფთა თეორია, რომელმაც ძალზე დიდი გამოყენება ჰპოვა ფიზიკის მთელ რიგ დარგებში. მაგრამ ამით „წმინდა" ჯგუფთა თეორია სრულიადაც არ გარდაქმნილა „გამოყენებით" ჯგუფთა თეორიად. ლობაჩევსკის გეომეტრია მათემატიკის შენაძენია და სრულიადაც არ გარდაქმნილა ის „გამოყენებით გეომეტრიად" იმის გამო, რომ ამ თეორიამ ნახა გამოყენება ფარდობითობის თეორიაში. ჩვენს მიერ გამოთქმული მოსაზრებები როდი უარყოფს პრაქტიკისა და თეორიის კავშირს? პრაქტიკა ბიძგს აძლევს ახალი თეორიების წარმოშობას, თეორია განამტკიცებს, აზუსტებს და დამაჯერებელს ხდის პრაქტიკაში დასმულ ამოცანას.

სწავლების მეთოდიკა პედაგოგიკის ნაწილია. პედაგოგიკა, ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა მეცნიერება, ფილოსოფიიდან იღებს სათავეს. როგორი სადაოც არ უნდა იყოს გამოთქმული წინადადება, ერთი ცხადია: არ შეიძლება დასკვნების გაკეთება კონკრეტული საგნების (მოვლენების) მიმართ ამ საგნების იზოლირებულად განხილვის საფუძველზე. დამადასტურებელი მაგალითები უამრავია მათემატიკაში: მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა თეორიის დაფუძნება

შესაძლებელი გახდა მხოლოდ სიმრავლეთა თეორიის მეშვეობით, კანტორ-მერეს თეორიას, რომ თავი დავანებოთ, დედეკინდის განკვეთის თეორიაც მთლიანად ეყრდნობა სიმრავლურ აზროვნებას. ირაციონალური რიცხვი განკვეთის თეორიით განსაზღვრულია რაციონალურ რიცხვთა კლასით (სიმრავლით). პირიქით, ირაციონალური რიცხვები აუცილებელი ხდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის წყვეტის ბუნების საბოლოო გამოკვლევისათვის. ამ მსჯელობაში არ არსებობს ლოგიკური წრე: კონკრეტული არ არსებობს ზოგადის გარეშე და პირიქით.

„იმის გაცნობიერებამ, რომ ყოველ მეცნიერებას თავისი საკვლევი საგანი და სპეციფიკური მეთოდები უნდა ჰქონდეს აუცილებლად, იმის სურვილიც გააჩნია, რომ სპეციფიკური მეცნიერებები რაც შეიძლება მკაცრად გამიჯნოდნენ ერთმანეთს. ამგვარმა ტენდენციამ, ნებსით თუ უნებლიეთ, თავი იჩინა ფილოსოფიასთან მიმართებაშიც, რაც ცხადია საბედისწერო გამოდგა სპეციალურ მეცნიერებათათვის, არ იქნა გათვალისწინებული ის უდაო ჭეშმარიტება, რომ სპეციალური მეცნიერებები ვერა და ვერ მოწყდებოდნენ იმ მასაზრდოებელ წყაროს, რომლისგანაც იღებდნენ სათავეს და მათ მეთოდოლოგიურ საფუძველს წამოადგენდა“ [52].

ჩვენ ვიზიარებთ აქ გამოთქმულ აზრს იმ შენიშვნის გათვალისწინებით, რომ კონკრეტულ მეცნიერებებს გარდა ფილოსოფიური საფუძვლებისა ესაჭიროება მისთვის დამახასიათებელი უფრო ვიწრო მეთოდოლოგიური საფუძველი, რომელიც საშუალებას მისცემს ეფექტურად გაერკვეს კონკრეტულ მოვლენებში და მათ ურთიერთთანაფარდობებში. თუ გვინდა საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის აგება მეტნაკლებად დაზღვეული იყოს ილუზიებისაგან და პირად ფსიქოლოგიური განწყობილებისაგან (ეს ეხება სკოლის სახელმძღვანელოებს) საერთო საფუძველი ერთნაირი უნდა იყოს, როგორც უმაღლესი მათემატიკის ასევე სასკოლო მათემატიკის სწავლების მეთოდიკისათვისაც. [67]

სწავლების მეთოდიკა მოითხოვს უმოკლეს რაციონალურ გზას მათემატიკურ ჭეშმარიტებამდე მისვლისათვის. თანამედროვე მათემატიკა ამოუწურავი მასალაა. არავის შესწევს უნარი შეიმეცნოს ეს გრანდიოზული შენობა, და მით უფრო სულ უფრო მეტად საჭირო ხდება მასალის გადაცემის (მონოგრაფიების და სახელმძღვანელოების დაწერის) და სწავლების დახვეწილი მეთოდიკა. ეს ერთ-ერთი უმთავრესი საკითხია, რომელიც თანაბრად ეხება, როგორც უმაღლეს ასევე საშუალო სკოლას. ამ პირობებში გარკვევა შედარებით ადვილია უმაღლესი სკოლისათვის, მაგრამ არც ისე ადვილი, რომ სპეციალისტები თავს დამშვიდებულად გრძნობდნენ.

როცა ვლაპარაკობთ უნივერსიტეტში მათემატიკის სწავლების კავშირის შესახებ საშუალო ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მათემატიკის სწავლებასთან არ

შეიძლება გვერდი აუაროთ დიდი ფრანგი მათემატიკოსის ე. ბორელის მოსაზრებას, რომელიც ნათლად ფიქსირდება მის ერთ-ერთ ცნობილ სტატიაში [40].

ამ სტატიის ძირითადი აზრი სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლება ფეხდაფეხ უნდა მიჰყვებოდეს მათემატიკის, როგორც მეცნიერების პროგრესს. თუ რა გზით, რა მეთოდებითაა ამის განხორციელება შესაძლებელი, ეს უკვე პედაგოგიკისა და მეთოდიკის სპეციალისტების საქმეა, მათ ეკუთვნით ამ საქმეში გადამწყვეტი სიტყვა. ჩვენ მხოლოდ იმას ვიტყვით, რომ რადგანაც თანამედროვე მათემატიკა არის მეცნიერება მათემატიკური სტრუქტურების შესახებ, ამიტომ მათემატიკის სკოლაში სწავლების ძირითადი პრინციპი ამ ფაქტიდან უნდა გამომდინარეობდეს, წინააღმდეგ შემთხვევაში მივალთ სკოლაში მათემატიკის სწავლების უტილიტარულ თვალთახედვასთან, რომელსაც დაკარგული ექნება საგანმანათლებლო მიზნები.

როგორც სასკოლო ასევე საუნივერსიტეტო მათემატიკის კურსის სწავლების ეფექტურობა, დღეს მათემატიკის შინაარსის სიღრმისა და უამრავი ფაქტობრივი მასალის არსებობის პირობებში მოითხოვს სწავლების ეფექტურობისა და რაციონალური გზების შერჩევას იმ შეზღუდული დროის გათვალისწინებით, რომელიც განკუთვნილია სასწავლო პროგრამებით. სწავლების პროცესი (მასთან ერთად სახელმძღვანელოები) უნდა ითვალისწინებდეს მათემატიკოსების აზრს იმის შესახებ, რომ არ არსებობს „წმინდა“ და „გამოყენებითი“ მათემატიკა, რომ მათემატიკა არის ერთი მთლიანი მეცნიერება, რომელიც დაფუძნებულია თვით მათემატიკის არსზე. მათემატიკის ისტორია იცნობს იმ დიდ, თითქმის შეუწყნარებელ დავას, რომელიც არსებობდა მათემატიკურ სკოლებს შორის, რომლებიც აღმოცენდა მეოცე საუკუნის დასაწყისში: ლოგიციზმი, ინტუიციონიზმი, კონსტრუქტივიზმი. თითქმის 30 წელი მიმდინარეობდა დავა ამ მიმართულებებს შორის. ზოგიერთი მათგანი (მაგალითად ინტუიციონიზმი) პრინციპულად უპირისპირდებოდა კლასიკურ მათემატიკას (კანტორის სიმრავლეთა თეორიას), გამოდიოდა, რომ არსებობს არაერთი მათემატიკა, არამედ რამდენიმე განსხვავებული მათემატიკა და განსხვავებულად მოაზროვნე მათემატიკოსები. დავის კულმინაციურ წერტილამდე მისვლის შედეგად გამოირკვა და დადგინდა, რომ ფაქტიურად საქმე გვაქვს არა სხვადასხვა მათემატიკასთან, არამედ-სხვადასხვა მათემატიკოსებთან, რომლებიც სხვადასხვა მეთოდებით იკვლევენ მათემატიკურ ჭეშმარიტებამდე მისვლის გზებს. საბოლოოდ დადგინდა, რომ ისინი ერთ საქმეს ემსახურებიან კვლევის სხვადასხვა მეთოდებით. ეს მიმართულებები ავსებენ ერთმანეთს და მათ შორის სრული ჰარმონიაა. ასეთი წინგადადგმული ნაბიჯი შესაძლებელი გახდა იმის სრული

შეგნებით, რომ მათემატიკა ერთი მთლიანი მეცნიერებაა, მისი განსხვავებული დარგების კონცენტრაციის საფუძველზე. სხვაგვარი მიდგომა მათემატიკის არსისადმი შეაფერხებდა მათემატიკის წინსვლას. გამოთქმულის საილუსტრაციოდ საკმარისია მოვიყვანოთ მაგალითი ევკლიდეს და ლობაჩევსკის პარალელურობის აქსიომაზე. ევკლიდეს, ლობაჩევსკის და რიმანის გეომეტრიები ერთი მთლიანი გეომეტრიული სტრუქტურაა, მცირეოდენი გადახვევებით. ეს გეომეტრია ემსახურება სივრცითი ფორმების გამოკვლევას და შესწავლას. არ შეიძლება იზოლირებულად რომელიმე გეომეტრიის განხილვა. ეს იქნებოდა კანტთან დაბრუნება, რომელიც ფიქრობდა, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი მექანიკა (ნიუტონის მექანიკა) და ერთი გეომეტრია (ევკლიდეს გეომეტრია).

მათემატიკის სწავლების მიზანი არა მხოლოდ ფაქტობრივი მასალის დაგროვებაში უნდა ნახულობდეს განხორციელებას, არამედ ეს პრინციპულად მნიშვნელოვანი მიზანი უნდა ემსახურებოდეს ჰარმონიულად განვითარებული ახალგაზრდის ჩამოყალიბებას, რომელშიც მათემატიკას ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ადგილი უკავია.

აუდიტორიაში წაკითხული ლექციები, სახელმძღვანელოები და სხვა სასწავლო საშუალებები უნდა ემსახურებოდეს სტუდენტების დარწმუნებას იმაში, რომ მათემატიკა, როგორც მეცნიერება, არ არსებობს შინაგანი ლოგიკური წყობის გარეშე. შინაგანი ლოგიკური წყობა წარმოადგენს მათემატიკას, როგორც დედუქციურ მეცნიერებას, რომელიც მთლიანად გამოისახება მათემატიკური სტრუქტურებით. ამაშია მათემატიკის სილამაზე და მშვენიერება.

ამიტომაა, რომ მათემატიკა იძლევა მდიდარ შესაძლებლობებს სილამაზის შეგრძნების აღზრდისათვის, იმისათვის, რომ გააჩნდეს ადამიანს აქტიურობის და მშვენიერების დანახვის ჩვევა და შეაფასოს ის ღირსეულად. მრავალი დამაჯერებელი ფაქტი შეიძლება მოვიყვანოთ იმის შესახებ, თუ რა როლს ასრულებს მათემატიკა ახალგაზრდის ჰარმონიულად აღზრდისათვის, მოსწავლემ (სტუდენტმა) უნდა დაინახოს მათემატიკის ის სილამაზე და საფაქიზე, რისთვისაც ის უნდა ეძებდეს და შეძლებისდაგვარად პოულობდეს იმ კავშირებს, რომლებიც არსებობს მათემატიკის სხვადასხვა დარგებს შორის, დაინახოს, რომ ეს დარგები მკაცრად გამიჯნული კი არ არიან, არამედ მათ შორის გარკვეული ჰარმონიაა. ამ ჰარმონიის შემჩნევა წარმოდგენას იძლევა მათემატიკაზე, როგორც ერთ მთლიან მეცნიერებაზე.

დიდია მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის კავშირი ფსიქოლოგიასთან, განსაკუთრებით პედაგოგიურ ფსიქოლოგიასთან, რომელიც აღმოცენდა ბურბაკის შრომების გამოსვლის შემდეგ. ეს უკანასკნელი შეისწავლის ბავშვის კონკრეტულ

ფსიქოლოგიურ მოქმედებას აღზრდისა და სწავლების პირობებში. პედაგოგიური ფსიქოლოგია იყოფა ორ ნაწილად: აღზრდის ფსიქოლოგია და სწავლების ფსიქოლოგია. პედაგოგიური ფსიქოლოგიის ერთ-ერთ ძირითად პრობლემას წარმოადგენს მოსწავლეთა მიერ ცოდნის შეთვისება და ჩვევათა გამომუშავება სწავლების პროცესში. იგი ექსპერიმენტულ გამოკვლევათა საფუძველზე ადგენს სასწავლო საგნის ამა თუ იმ საკითხის შესწავლის შესაძლო ასაკს. აქედან გამომდინარე პედაგოგიური ფსიქოლოგია მჭიდროდ უკავშირდება მათემატიკის სწავლების მეთოდიკას. მაგრამ თვით ფსოქოლოგიური ექსპერიმენტის ხასიათი ერთგვარად ზღუდავს მისი შედეგების გამოყენებას. აი, რას ამბობს დ. პოლია: „ფსიქოლოგები განსაკუთრებულ ყურადღებას და ნაშრომებს უთმობენ შემეცნების მარტივ და მოკლე აქტებს. ამიტომ ფსიქოლოგიას შეუძლია მოგვცეს საინტერესო მითითებები, მიგნებები, მაგრამ არ შეიძლება ჰქონდეს სწავლების პრობლემების საბოლოო დადგენის პრეტენზია“ [64], [47], [58].

იგივე აზრს ავითარებს ვ. კრუტეცკი: „ჩვენი ნაშრომი წმინდა ფსიქოლოგიურ ხასითს ატარებს, ამიტომ საჭიროდ ვთვლი ხაზი გავუსვა იმას, რომ არც ახლა და არც შემდგომში არავითარ პრეტენზიას არ ვაცხადებთ მათემატიკის სწავლების მეთოდების პედაგოგიურ ანალიზზე და არც მათემატიკის სწავლების ახალი მეთოდების შექმნაზე. ჩვენი ღრმა რწმენით ეს არ არის ფსიქოლოგების საქმე. ეს არის მეცნიერი მათემატიკოსების საქმე, პედაგოგებისა და მეთოდისტების-შესაბამის დარგში კვალიფიციური და ერუდირებული ადამიანების საქმე. ფსიქოლოგს კი შეუძლია და უნდა ითანამშრომლოს მათთან, წარმოადგინოს საჭირო მასალა, ჩაატაროს ამა თუ იმ საკითხის ფსიქოლოგიური გამოკვლევა“ [54].

თანამედროვე მათემატიკაზე წარმოდგენა, მათემატიკის, როგორც მეცნიერების განსაზღვრა, მოითხოვს ღრმა მათემატიკურ განათლებას და ფართო ჰორიზონტს. ამიტომ, ჩვენი აზრით, ამ საქმეში ყველაზე სანდოდ უნდა მივიჩნიოთ ბურბაკის მოსაზრება. შევქმნათ დღეს ზოგადი წარმოდგენა მათემატიკის მეცნიერებაზე-ამბობს ბურბაკი-ნიშნავს შევეჭიდოთ გადაულახავ დაბრკოლებას მათემატიკის მეცნიერების მრავალფეროვნებისა და სიღრმის გამო. მეცნიერებაში ზოგადი ტენდეციების შესაბამისად მე-19 საუკუნის ბოლოდან მათემატიკოსთა რიცხვი და ნაშრომების რაოდენობა მათემატიკაში მნიშვნელოვნად გადიდდა. წმინდა მათემატიკაში გამოქვეყნებული სტატიების მოცულობა მრავალ ათასეულ გვერდს აჭარბებს ყოველწლიურად, მათემატიკა მასიურად მდიდრდება ახალი შედეგებით, ღებულობს სულ უფრო მეტ მრავალფეროვან შინაარსს და მუდმივად განიცდის თეორიულ

განშტოებას, რომლებიც განუწყვეტლივ იცვლიან სახეს, გარდაიქმნებიან, უპირისპირდებიან ერთმანეთს და კვლავ განიცდიან კომბინირებას [41].

მათემატიკა, როგორც მეცნიერება, ერთობ ფართოა, მეტად დიდი მასალაა დაგროვილი მისი მეცნიერებად ფორმირებიდან (VI-V საუკუნეები ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) დაწყებული დღემდე. და რაც მთავარია, ადგილი აქვს ერთ, შეიძლება ითქვას, უცნაურ ფაქტს – კაცობრიობის მიერ დაგროვილ მთელ მათემატიკურ მასალაში ორი მკვეთრად და პრინციპულად განსხვავებული ნაწილები გამოიყოფა. ერთი მათემატიკა XVII საუკუნემდე, მეორე, XVII საუკუნიდან დღემდე. მათ შორის განსხვავება იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ შეიძლება ვთქვათ, გვაქვს ორი, სხვადასხვა საგანი, არც ერთ სხვა მეცნიერებას ასეთი რამ არ ახასიათებს. საქმეს ისიც ართულებს, რომ მეორე ნაწილს ვერ ვასწავლით პირველის სრული იგნორირებით. აუცილებელია იქიდან ძირითად მიმართულებათა, დამოკიდებულებათა აღება, რომლებიც ქმნიან აუცილებელ საფუძველს მეორე ნაწილის შესასწავლად. მეორე მხრივ საგულისხმოა, რომ მათემატიკის გამოყენება სხვადასხვა მეცნიერებებში საჭიროებს სწორედ მათემატიკური მეცნიერების თანამედროვე თვალსაზრისსა და მიმართულებებს. უმეტეს შემთხვევაში მათემატიკური მეცნიერების XX საუკუნის მონაპოვარს. როგორც პრაქტიკით დასტურდება, უმაღლესი სკოლის მათემატიკა უნდა აიგოს ამ ორი ნაწილის გონიერი გაწონასწორების ნიადაგზე. აქ მაშინვე დგება პრობლემათა მთელი წყება. პირველყოვლისა, როგორ შედგეს პროგრამა ამ პრინციპის მიხედვით ისე, რომ პროგრამით ასწავლოს ჩვეულებრივმა მასწავლებელმა ჩვეულებრივ მოსწავლეებს. ასეთი პროგრამების შედგენა მოითხოვს დიდ წინასწარ მუშაობას, დაკვირვებას და ექპერიმენტის ფართოდ წარმოებას, ფსიქოლოგიურ გამოკვლევებს და რაც მთავარია, საგნის ღრმად ცოდნას, ფართო ერუდიციას. ამოცანის გადაჭრა შეუძლებელია დარგის სპეციალისტთა მონაწილეობის გარეშე. საბოლოოდ ჩვენს წინაშეა გადასაწყვეტი ორი საკითხი: პირველი, როგორ ავაგოთ უმაღლესი სკოლის მათემატიკის კურსი, რომ მასში ძირითად როლს ასრულებდეს თანამედროვე მეცნიერების მნიშვნელოვანი მიმართულებები; მეორე, როგორ შევუსაბამოთ მასალის სიძნელის ხარისხი სტუდენტის შემეცნებით შესაძლებლობებს. უფრო მოკლედ-როგორ გადავცეთ მათემატიკური მეცნიერების საფუძვლები უმაღლეს სკოლაში სტუდენტების ინტერესებისა და შემეცნებითი შესაძლებლობების გათვალისწინებით. იქნებ უარი გვეთქვა სასწავლო პროგრამების მეცნიერებათა საფუძვლებზე დაფუძნების პრინციპზე? მაგრამ მეცნიერებათა საფუძვლების შესწავლა მისაწვდომს ხდის საგანს, იგი ყველაზე ძლიერ მოქმედებს ადამიანის მეხსიერებაზე, ხოლო

ყველაზე მნიშვნელოვანი, რაც შეიძლება ითქვას ადამიანის მეხსიერების შესახებ ფსიქოლოგთა მთელი საუკუნეების ინტენსიური გამოკვლევების შედეგად, ეს ისაა, რომ სანამ რაიმე კერძო ფაქტი არ დაუკავშირდება ზოგად სტრუქტურას, მისი დავიწყება სწრაფად ხდება. მაგრამ კარგი თეორია არის არა მხოლოდ მოვლენის გაგების საშუალება, არამედ მისი მეხსიერებაში აღდგენის საშუალებაც. ცოდნა, რომელიც მიღებულია ცალკეულ კონკრეტულ საკითხთან დაკავშირებით მალე ეძლევა დავიწყებას. ერთმანეთთან დაუკავშირებელი ფაქტები ძალიან ცოტა ხანს რჩებიან მეხსიერებაში. ისიც გასათვალისწინებელია, რომ მეცნიერების ძირითადი საფუძვლებისა და პრინციპების შეთავსება უზრუნველყოფს ამ მეცნიერების გამოყენებით ხასიათს. გავიგოთ რაიმე, როგორც ზოგადი კანონზომიერების კერძო შემთხვევა-და სწორედ ესაა მხედველობაში, როცა ვსაუბრობთ მეცნიერების საფუძვლებზე, ძირითად პრინციპებზე, ნიშნავს დავეუფლოთ არა რაიმე კონკრეტულ შინაარსს, არამედ იმ საერთო ხერხების გაგებას, რომელიც მსგავს მოვლენებში ვლინდება. აღნიშნული პრობლემის გამო კარგა ხანია შეშფოთებულია მთელი მსოფლიო, იგი დღესაც გადაუჭრელად შეიძლება ჩაითვალოს, რადგან მათზე მსჯელობა დღის წესრიგიდან არ არის მოხსნილი მსოფლიო მასშტაბით [72], [10], [40].

ვთქვათ, გადავწყვიტეთ პრობლემა - რა ვასწავლოთ? მის პარალელურად ისმის კითხვა - როგორ ვასწავლოთ? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ძირითად შინაარსი – როგორი მეთოდები უნდა იქნას გამოყენებული სწავლებაში ზემოთმოყვანილი მიზნების მისაღწევად? ყოველთვის ითვლებოდა, რომ მათემატიკის სწავლებაში წინასწარ გამომუშავებული მეთოდების – ძირითადად ინდუქციის და დედუქციის სახეების სისტემატიური გამოყენება უზრუნველყოფს მოსწავლის აზროვნების განვითარებას. ამასთან, მათემატიკური კვლევის ჩვევები მოსწავლეში თავისთავად ვითარდება სხვადასხვა მრავალფეროვანი ამოცანებისა და სავარჯიშოთა შესრულებით, თეორემათა დამტკიცების პროცესში და სხვა. მაგრამ მხოლოდ მექანიკურ ვარჯიშს დასაბუთების გაგების გარეშე, თუ როგორ ხდება ამა თუ იმ დამტკიცების აგება, შეიძლება მიგვიყვანოს ლოგიკური აზროვნების განვითარებამდე? ამ მიმართულებით ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა უარყოფითი შედეგი უჩვენა. მოსწავლის ლოგიკური აზროვნების განვითარების გზები სწორედ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკამ უნდა დაამუშაოს.

ლ. კუდრიაცევის აზრით, მათემატიკის სწავლება უმაღლეს სკოლაში, უნდა იყოს შეძლებისდაგვარად მარტივი, ცხადი, ბუნებრივი და ეფუძვნებოდეს კარგად გააზრებული სიმკაცრის დონეს, [55] მისი აზრით, გადაცემის სიმარტივე ნიშნავს, რომ კურსი ერთიანობაში მარტივად უნდა იყოს აგებული, კერძოდ უნდა იყოს ისეთი, რომ

მთავარი აქცენტი მიმართული იყოს პრინციპულ იდეებზე და დროის დიდი ნაწილი დაიხარჯოს იმ ძირითად ფაქტებზე და მეთოდებზე, რომელიც იკითხება მოცემულ კურსში. დამხმარე და მეორეხარისხოვანი საკითხები ცხადი სახით უნდა დაექვემდებაროს მთავარს, მათი სიღრმისეული გადაცემა საჭირო არ არის. ასე მაგალითად, მიუხედავად იმისა, რომ ნამდვილ რიცხვთა თეორია წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზისათვის ბაზისს, ტექნიკური და სხვა არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტთათვის არ არის მიზანშეწონილი მის სწავლებას დაეთმოს დიდი დრო, ვინაიდან ის ამ შემთხვევაში წარმოადგენს მათემატიკის დამხმარე და არა ძირითად ნაწილს.

იქ, სადაც მათემატიკა გამოიყენება, როგორც გამოკვლევის მეთოდი ძირითად ცნებებზე ინტუიციური წარმოდგენა ჩვეულებრივ არასაკმარისია. მით უფრო, ეს ძალიან საჭიროა და მათი ზუსტი გაგების გარეშე შეიძლება ძალიან დიდი შეცდომა იქნეს დაშვებული. ამიტომ, როცა მათემატიკა გამოიყენება, როგორც კვლევის ინსტრუმენტი და აპარატი, შესასწავლი ობიექტის სრული აღწერისათვის, აუცილებელია გვქონდეს ზუსტი წარმოდგენები გამოსაყენებელი მათემატიკური ცნებების მიმართ. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ დროს შესასწავლი ადგილის ფაქტორი გამორიცხულია. ხშირად მათემატიკის შესწავლის სირთულე დაკავშირებულია მისი ინტუიციურ დონეზე, ბუნდოვანი და არაზუსტი სწავლების გამო.

ამიტომ ცხადია, რომ სტუდენტს ვასწავლით არასწორ ფაქტებს, რაც ხშირად ხდება ინტუიციურ დონეზე სწავლების დროს, ეს გამოიმუშავებს მათ არასწორ ინტუიციურ წარმოდგენებს შესასწავლ ფაქტებზე, რომლის სივერაგე აშკარაა.

მოვიყვანოთ დავიდ ჰილბერტის მოსაზრება მათემატიკის სწავლების სიმკაცრის დონის შესახებ. „დიდი შეცდომა იქნება, თუ ვიფიქრებთ, რომ თეორემის დამტკიცების სიმკაცრე არის სიმარტივის მტერი. პირიქით, სხვადასხვა მაგალითები გვარწმუნებს, რომ დამტკიცების მკაცრი მეთოდები უფრო მარტივია და მისაწვდომი. ყოველგვარი გაძლიერება, რომელიც შეეხება სიმკაცრეს, მიმართულია იქეთკენ, რომ ჩვენ მოვძებნოთ დამტკიცების უმარტივესი მეთოდები". უნდა აღვნიშნოთ, რომ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა უპირველეს ყოვლისა მათემატიკოსების საქმეა იმ პირობით, რომ სტუდენტები მიიღებენ მათემატიკური ფაქტების შესახებ ცოდნის აუცილებელ მარაგს [55], [36], [52].

ყოველი მათემატიკური დისციპლინა, როგორც დედუქციური მეცნიერება, ლოგიკური მსჯელობის საშუალებით უნდა იქნას გამოყვანილი საწყისად მიღებული წინადადებიდან (აქსიომებიდან), ამ მხრივ, მათემატიკური ანალიზი არამც თუ გამონაკლისს არ წარმოადგენს, ის ნიმუშად უნდა გამოდგეს. პროფესიონალი

მათემატიკოსისათვის კარგადაა ცნობილი, რომ ანალიზის საფუძვლად შეიძლება მიღებული იქნას პეანო-გრასმანის აქსიომათა დამოუკიდებელი სისტემა, ან წრფივი კონტინუუმის აქსიომათა ჭარბი სისტემა. ეს იმას ნიშნავს, რომ სახელმძღვანელოს ავტორს, ან მასწავლებელს ისე შეუძლია ააგოს ანალიზის კურსი, რომ არსად არ გამოიყენოს ისეთი რამ, რაც მას წინასწარ არ გამოუყვანია ნამდვილ რიცხვთა სისტემის თვისებებიდან. ანალიზის კურსს მაშინ შეგვიძლია ვუწოდოთ „მკაცრი“, თუ ავტორი (მასწავლებელი) მკაცრად იცავს აღნიშნულ აკრძალვას.

საუნივერსიტეტო სწავლება ძირითადად ეყრდნობა საშუალო სკოლის გეგმას, მაგრამ მათემატიკური ანალიზის ათვისებას აძნელებს ის, რომ თუმცა ფორმალური ცოდნის მარაგი უნივერსიტეტში შემსვლელს საკმაო აქვს, მაინც პირველი კურსის სტუდენტი ნაკლებად არის შეჩვეული ზუსტსა და თანმიმდევრულ ლოგიკურ მსჯელობას, რაც აუცილებელია მათემატიკური ანალიზის მტკიცე ნიადაგზე აგებისათვის. სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, ნამდვილი რიცხვის თეორია, ზღვრის ცნება, ზღვართა წესი, უწყვეტ ფუნქციათა მრავალნაირი თავისებურებანი და სხვა ამგვარი საკითხის ათვისება მოითხოვს მკაცრი ლოგიკური მსჯელობის ჩვევებსა და მოსწავლის მათემატიკური კულტურის მაღალ დონეს. ამიტომ მასწავლებელი უნდა ცდილობდეს ყველა რესურსი გამოიყენოს იმისათვის, რომ მოსწავლეს (სტუდენტს) ანალიზის ათვისება გაუადვილოს. ამით აიხსნება ის გარემოება, რომ ჩვეულებრივ თავსუფლად სარგებლობენ იმ მასალით, რომელიც სტუდენტმა იცის საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსიდან. ამ უკანასკნელის სიმკაცრეზე ლაპარაკს საერთოდ აზრი არა აქვს, რადგანაც ის აშკარად არ ატარებს დედუქციურ ხასიათს.

ბუნებრივია, რომ ანალიზის სახელმძღვანელოს შემდგენელთ (ლექტორს) მოეთხოვებათ ერთგვარი ზომიერება დაიცვან და თანამედროვე მათემატიკის მკაცრი მოთხოვნებით გატაცებამ არ დაჩრდილოს ის საღი პედაგოგიური ხერხები, რომელთაც უნდა გაუადვილონ სტუდენტს საგნის ღრმა და საფუძვლიანი ათვისება, იმისათვის, რომ სტუდენტს წარმოდგენა მივცეთ ანალიზის აღნაგობაზე, საჭირო არ არის გეომეტრიის საფუძვლების მსგავსი ცალკე საგნის შემოღება, რომელსაც მიზნად მხოლოდ ანალიზის დაფუძვნება ექნებოდა.

როგორც ყოველ მეცნიერულ დისციპლინას, უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკას უნდა ექნეს თავისი დიდაქტიკა და მეთოდიკა, რომლებიც სპეციფიკური არიან, ვინაიდან სპეციფიკურ მასალას მოიცავენ. არავისათვის სადაო არ არის, რომ უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკა გულისხმობს თავის მეთოდიკას და დიდაქტიკას. გვსურს თუ არ გვსურს, როგორც სპეციფიკურ ორგანიზმს, უმაღლეს სკოლას უეჭველად გააჩნია საკუთარი მეთოდიკა, საკუთარი დიდაქტიკა, მაგრამ თითოეული

მათგანი მოითხოვს სპეციალურ დამუშავებას თანამედროვე სწავლა-აღზრდის ყველაზე აქტუალურ პრობლემათა ასპექტში [34], [11], [3].

1. უმაღლესი სკოლის დიდაქტიკა _ ნაწილია უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკისა და სხვას არაფერს წარმოადგენს, თუ არა იმას, რომ შეისწავლის (ამდენად სხვასაც ასწავლის) უმაღლესი განათლების კანონზომიერებას, შინაარს, ფორმებს, მეთოდებს, კანონებს.

2. უმაღლესი სკოლის მეთოდიკა _ წარმოადგენს უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკის, როგორც მეცნიერების, გარკვეულ დარგს: მისი ამოცანაა, როგორც კერძო დიდაქტიკისა, მოგვცეს მეცნიერულად დასაბუთებული მასალა, თუ რა ვასწავლოთ, როგორ ვასწავლოთ, რა მოცულობით, რა საშუალებებით, რომელ სპეციალობას რა მოთხოვნა წავუყენოთ და რა სასწავლო დისციპლინებით შემოვიფარგლოთ. უმაღლესი სკოლის მეთოდიკა ისევე უნდა ეხმარებოდეს უმაღლესი სკოლის ლექტორს, როგორც საშუალო სკოლის მეთოდიკა საშუალო სკოლის მასწავლებელს. აღარაფერს ვამბობთ, რომ უმაღლეს სკოლის მეთოდიკაში მეტია ცალკეული სასწავლო დისციპლინების მეთოდიკები. თანამედროვე მეცნიერებამ ზემოთ დასმულ კითხვებს დაამატა ისიც, თუ „როდის“, „სად“ და „რატომ“ ვასწავლოთ. ეს შემთხვევითი არ არის. საზოგადოების ისტორიულმა განვითარებამ, მასში განათლების დანიშნულების და განათლებულთა მიმართ წაყენებულმა ახალმა მოთხოვნებმა დასახელებულ კითხვებზე კონკრეტული პასუხი მოითხოვა [72], [34], [3].

მათემატიკაში ელემენტარული ფუნქციების თვისებები ძირითადად დგინდება ემპირიულ (აღწერილობით) დონეზე. აქ გამოიყენება თვალსაჩინო არითმეტიკული და გეომეტრიული მოსაზრებები. მაგალითად, ავიღოთ ლოგარითმული ფუნქცია $f(x)=\log_a x,\ (a>0,\ a\neq 1)$, თუ მას ვასწავლით მათემატიკის სპეციალობაზე საშუალო სკოლის მეთოდიკით, მაშინ ჩვენ აღმოვჩნდებით სერიოზული წინააღმდეგობის წინაშე. ეს გამოწვეულია შემდეგი მოსაზრებებიდან: 1) საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებში ინტუიციურ დონეზეა მოცემული a^x-გამოსახულების განსაზღვრა, როცა x ირაციონალური რიცხვია. 2) ასევე ინტუიციურ დონეზე დაყრდნობით არის წარმოდგენილი მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები, ვინაიდან მათი დამტკიცება არსებითად სცილდება სასკოლო მათემატიკის კურსის ფარგლებს. 3) ლოგარითმული ფუნქცია განისაზღვრება, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, პირდაპირ და შექცეულ ფუნქციებს შორის დამოკიდებულების შესახებ თეორემის მკაცრი დამტკიცება ვერ ხერხდება სასკოლო მათემატიკის კურსში. 4) სასკოლო მათემატიკის კურსი ვერ იძლევა დადებითი რიცხვის ლოგარითმის

არსებობის დამაჯერებელ დამტკიცებას. 5) ყოველივე ზემოთ ნათქვამი, მხოლოდ მათემატიკური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით არის შესაძლებელი. მათემატიკური ანალიზის მეთოდები საშუალებას გვაძლევს მოვიყვანოთ ამ ფუნქციების სრული და მკაცრი განმარტება. ელემენტარული ფუნქციების ყველა თვისება სრულყოფილად შეიძლება შევისწავლოთ ნამდვილი და კომპლექსური ანალიზის მეთოდების შერწყმით. მაგრამ, ვინაიდან, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული და ხარისხოვანი ფუნქციების განმარტებები შეგვიძლია შემოვიღოთ მონოტონური ფუნქციის თვისებების შესწავლის შემდეგ და რადგან ეს უკანასკნელი ისწავლება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე, ამიტომ საშუალება გვეძლევა, ზემოთ ხსენებული ფუნქციების სწავლება მოხდეს პირველ კურსზე. რამდენადმე რთული სიტუაციაა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან დაკავშირებით, ვინაიდან მათი განმარტება ეყრდნობა წრეწირის რკალის სიგრძის ცნებას და ეს უკანასკნელი კი მოითხოვს შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის შესაწავლას, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია პირველ კურსზე მოხდეს ამ საკითხების სწავლება, რადგან კარგ ეფექტს იძლევა, თუ სტუდენტები დაინახავენ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამდვილ ბუნებას. აღნიშნული საკითხების სწავლების დროს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დაეთმოს მეთოდურად გამართულ პრაქიკული ამოცანების სისტემების განხილვას, რომელიც დამუშავებული უნდა იქნეს სპეციალურად თითოეული კონკრეტული თემისათვის.

ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ–ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ არ არსებობს ისეთი უნივერსალური მათემატიკური მეთოდები და ხერხები, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა.

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ისეთი ამოცანებიც, რომელთა ამოხსნას სირთულის გამო ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი. დისერტაციაში განხილულია ზოგიერთი სახის ამოხსნის არასტანდარტული ხერხები, რომელიც უთუოდ საინტერესოა მოსწავლეთა შემოქმედებითი შესაძლებლობების განსავითარებლად. ჩვენ განვიხილავთ სტანდარტულისაგან განსხვავებულ ზოგიერთ ხერხს, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლებათა მიმართ, როცა ტრადიციული მიდგომა შედეგს არ იძლევა, ზოგჯერ კი ამარტივებს ამოხსნის პროცესს ისეთი განტოლებებისათვის, რომელთა ამოხსნა სხვა გზითაც შეიძლება. მათი სწავლება შეიძლება განხორციელდეს როგორც სკოლის საგაკვეთილო პროცესში, ისე

კლასგარეშე მუშობის რეჟიმში. შესაძლებელია მსგავსი ამოცანების შედგენა, რათა მივცეთ მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშობისათვის.

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში ფუნქცის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების განხილვა წარმოებს ელემენტარული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, რაც ზღუდავს განსახილავი ამოცანების კლასს. წარმოებულის სწავლების ამოღებამ საშუალო სკოლის კურსი მეტად „გააღარიბა“ განსახილველი ამოცანებით. მასწავლებელი დგება ალტერნატიული არჩევანის წინაშე: ან საერთოდ არ მოხდეს ექსტრემალური ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში, ეს მიდგომა მიუღებლად მიგვაჩნია, ან საკითხი განხილულ იქნას მხოლოდ უმაღლესი მათემატიკის კურსში, რომელსაც უკვე ისინი უმაღლეს სკოლაში შეისწავლიან. მაგრამ ამ უკანასკნელი არჩევანის განხორციელება ნაკლებ პროდუქტიულია, რადგან ჯერ ერთი ყველა ვინც სკოლაში სწავლობს არ აგრძელებს სწავლას უმაღლეს სასწავლებელში და მეორე, ვინც სტუდენტი ხდება, მათგან ყველა უმაღლეს მათემატიკას არ სწავლობს. ამიტომ დღის წესრიგში დგება ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის არასტანდარტული ხერხების გამოყენების აუცილებლობა.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული საკითხების ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში განხილვა ხელს უწყობს უმაღლეს სკოლაში მათემატიკური ანალიზის საკითხების სწავლებას და მეთოდურად სრულყოფილად ხდება ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების მეთოდების ერთიან სისტემაში მოყვანა და მათი შეძლებისდაგვარად დაახლოება. ეს კი მათემატიკის პედაგოგიკის აქტუალური საკითხია და მოითხოვს უმაღლეს სკოლაში მეთოდოლოგიური ასპექტების დამუშავებას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად ჩვენს მიერ შერჩეული იქნა ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტი, სადაც მთელი სიგრძე-სიგანით წარმოჩინდა პრობლემის არსი და საშუალება მოგვეცა მისი გადაწყვეტისა, რადგან სხვა ფაკულტეტებზე, სადაც შეისწავლება უმაღლესი მათემატიკა, არ განიხილება ან შედარებით ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი მათემატიკური ანალიზის იმ საკითხებს, რომელზეც დისერტაციაშია საუბარი.

საკვლევი პრობლემის მეცნიერულმა აქტუალობამ, მისმა პრაქტიკულმა მნიშვნელობამ და შეუსწავლელობამ განსაზღვრა სადისერტაციო გამოკვლევის თემა: „მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ“.

კვლევის პრობლემა მდგომარეობს მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა სწავლების შესაძლებლობების გამოვლენაში.

კვლევის ობიექტს წარმოადგენს მოსწავლეებისათვის საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ზოგიერთი არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ძიების

სწავლების პროცესი, ხოლო უმაღლეს სკოლაში სტუდენტთა სასწავლო საქმიანობა მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების შესწავლის პროცესში.

კვლევის საგანს შეადგენს უმაღლესი სკოლის მათემატიკური ანალიზის კურსში მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების დადგენა და მათი პრაქტიკული გამოყენება. ასევე ამ თემებზე ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების მიზანმიმართული სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში.

კვლევის პროცესს საფუძვლად დაედო შემდეგი ჰიპოთეზა: აზროვნების განვითარების თეორიიდან გამომდინარე, სტუდენტთა ცოდნის ხარისხზე დადებით გავლენას ახდენს შემუშავებული მეთოდიკით მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა მიზანმიმართული სწავლება, უზრუნველყოფს მათთვის სავალდებულო მათემატიკური მომზადების დონის მიღწევას. ამოცანათა ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების გამოყენება ეხმარება ცოდნის დაუფლებაში და ზოგიერთ შემთხვევაში საშუალებას იძლევა მოხდეს ამოცანის განზოგადება.

კვლევის მიზანია დამუშავდეს უმაღლესი სკოლის მათემატიკური ანალიზის კურსში მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა სწავლების ეფექტური მეთოდიკა, რომელსაც ექნება პრაქტიკაში გამოყენება, რომელიც უზრუნველყოფს სტუდენტთა თეორიული აზროვნების საფუძვლების განვითარებას.

უნდა აღინიშნოს, რომ ამჟამად მოქმედი უმაღლესი სკოლის სასწავლო პროგრამების მიხედვით, მათემატიკური ანალიზის, ფუნქციათა თეორია–1, ტოპოლოგიის საუნივერსიტეტო კურსებში მეორდება მრავალი საკითხი. ასე მაგალითად, ფუნქციათა ზღვარი და უწყვეტობა, უწყვეტობა და ბმულობა, ვარიაციული აღრიცხვის ელემენტები და ა.შ. ნაშრომის მიზანია, დაასაბუთოს, რომ ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი და მათთან დაკავშირებული სხვა საკითხების შესწავლა უნდა მოხდეს, მხოლოდ მათემატიკური ანალიზის კურსში (I კურსზე), რაც გამორიცხავს ზემოთ აღნიშნული საკითხების დუბლირებას. ყოველივე ამის გაკეთება მიზანშეწონილად მიგვაჩნია იმის გამო, რომ ის სხვა ზემოთ ნახსენებ დისციპლინებში, გამოათავისუფლებს საათების გარკვეულ რაოდენობას, რომლებიც მოხმარდება სხვა სპეციფიკური საკითხების უფრო ფართოდ გაშუქებას.

დასმულმა მიზანმა და ჰიპოთეზამ განსაზღვრა კვლევის შემდეგი ამოცანები:

1. ცოდნის ათვისების ფსიქოლოგიურ–პედაგოგიური საფუძვლების გამოკვლევა;

2. უმაღლეს სკოლაში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა

სწავლების რეალიზება, აღნიშნული საკითხების მეთოდური დამუშავება, მათი სწავლების მეთოდიკის შემუშავება და მათზე დაყრდნობით მეთოდიკური რეკომენდაციების მიცემა.

3. უმაღლეს და ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების პრაქტიკული რეალიზების რაოდენობრივი და მეთოდური ანალიზი;

4. შემუშავებული მეთოდიკით სწავლების ეფექტურობის შემოწმება პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებით და მიღებული შედეგების სტატისტიკური შეფასება.

კვლევის მეთოდოლოგიურ საფუძველს შეადგენს ფილოსოფიურ–ფსიქოლოგიური დებულებები პიროვნების ინტელექტუალურ შესაძლებლობათა გახსნისა და განვითარების შესახებ.

კვლევის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

- დასაბუთებულია უმაღლესი სკოლის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე სასწავლო პროცესში მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა მიზანმიმართული, ჩვენს მიერ სპეციალურად შემუშავებული მეთოდიკით სწავლების აუცილებლობა;
- დამუშავებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის გამოთვლის ზოგიერთი არასტანდარტული ხერხის სწავლების მეთოდიკა უმაღლეს სკოლაში. აღნიშნული საკითხები განხილულია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლისთვისაც (შედარებით დაბალი სირთულის მქონე) და დამუშავებულია მისი სწავლების მეთოდიკა;
- დამუშავებულია შტოლცის თეორემის გამოყენებით, ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული და უკუგდების პრინციპით ზღვართა გამოთვლის სწავლების მეთოდიკა ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე.
- დამუშავებულია უმაღლესი და ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების მათემატიკის კურსში კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენების მეთოდური ასპექტები.

კვლევის თეორიული და პრაქტიკული ღირებულება მდგომარეობს იმაში, რომ კვლევის შედეგების გამოყენება როგორც უმაღლესი, ასევე ზოგადსაგანმანათლებლო, სკოლის სასწავლო–აღმზრდელობითი მუშაობის პრაქტიკაში ხელს შეუწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას.

ნაშრომის თეორიული ღირებულებაა უმაღლეს სკოლაში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე სტუდენტთა სასწავლო

პროცესი მათემატიკური ანალიზში წარმართოს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკით მიზანმიმართულად.

უმაღლესი და ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების მათემატიკის სწავლების პროცესში შემუშავებული მეთოდური სიახლეების დანერგვა და მისი ეფექტურად გამოყენება არის ნაშრომის უმთავრესი პრაქტიკული ღირებულება.

მეცნიერული კვლევის შედეგების სანდოობა-მიღებული თეორიული დასკვნებისა და პრაქტიკული რეკომენდაციების სანდოობა დადასტურებულია პედაგოგიური ექსპერიმენტით და განმტკიცებულია ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

1. უმაღლესი სკოლის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე მათემატიკური ანალიზის კურსში მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა მიზანმიმართული სწავლება სპეციალურად შემუშავებული მეთოდიკით;

2. უმაღლეს სკოლის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე მათემატიკური ანალიზის კურსში მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის გამოთვლის არასტანდარტული ხერხები და მათი სწავლების მეთოდიკა.

3. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მათემატიკის კურსში ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხები და მათი სწავლების მეთოდიკა;

3. ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული და უკუგდების პრინციპით ზღვართა გამოთვლა შტოლცის თეორემის გამოყენებით და მისი სწავლების მეთოდიკა;

4. უმაღლესი და ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების მათემატიკის კურსში კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენების მეთოდური ასპექტები.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე, აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ახალგაზრდა მეცნიერთა და ასპირანტთა სამეცნიერო კონფერენციებსა და ამავე უნივერსიტეტის პროფესორ-მასწავლებელთა სამეცნიერო კონფერენციებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატიურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის

სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს. დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები მოხსენდა ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო სემინარს.

დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. Integral Representations and Continuous Projectors in Some Spaces of Analytic and Pluriharmonic Functions. Georgian Math. J. 15(2008), No. 4, 753-758.
2. Integral Representations of Analytic and Pluriharmonic Functions of the Bergman Class in the Unit Ball. 2007 Bull. Georg. Nati. Acad.Sci. vol. 175, no 2. pp. 27-30
3. ანალიზურ ფუნქციათა ინტეგრალური წარმოდგენები, ბერგმანის ტიპის პროექტორები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. ქუთაისი 2007. გვ. 115-118.
4. ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის ერთი არასტანდარტული ხერხი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(33). თბილისი. 2009 წ. გვ. 371-373.
5. განტოლებათა ამოხსნის ერთი არასტანდარტული ხერხი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №2(34). თბილისი. 2009 წ. გვ. 268-270.
6. მიმდევრობათა გარდაქმნები და მათი სწავლება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(36). თბილისი. 2010 წ. გვ. 202-205.
7. ზღვრის გამოთვლა უკუგდების პრინციპით და ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრები. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(36). თბილისი. 2010 წ. გვ. 206-209.

8. B^p სივრცის ფუნქციათა ზოგიერთი თვისების შესახებ. საქრთველოს მათემატიკოსთა კავშირის I საერთაშორისო კონფერენცია, მოხსენებათა თეზისები, ბათუმი, 2010 წ. გვ. 31.
9. ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობის სწავლება უმაღლესი სკოლის მათემატიკის კურსში. საქრთველოს მათემატიკოსთა კავშირის I საერთაშორისო კონფერენცია, მოხსენებათა თეზისები, ბათუმი, 2010 წ. გვ. 60.
10. On Poisson type integral representations in a unit Ball. 2010 Bull. Georg. Nati. Acad.Sci. vol. 4, no 2. pp. 13-19.

თავი I

მიმდევრობათა გარდაქმნების სწავლების მეთოდოლოგიური ასპექტები უმაღლესი მათემატიკის კურსში

ამ თავში ჩვენ შემოვიღებთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის ცნებას, დავამტკიცებთ მასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ მნიშვნელოვან დებულებას და მათი გამოყენებით განვიხილავთ მაგალითების ამოხსნას.

მიმდევრობათა გარდაქმნები, მიმდევრობის და ფუნქციის ზღვართა თეორია მოცემულია „კალკულუსის" კურსში, რომელიც ისწავლება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე, საათების საკმარისი რაოდენობის გამო შესაძლებელია ამ საკითხების სწავლება მოხდეს სიღრმისეულად, კერძოდ იმ მეთოდით, როგორც ეს ამ თავში არის მოცემული. ვინაიდან, იგივე საკითხები ზოგადად ისწავლება სხვა სპეციალობებზე, ამიტომ უპრიანი იქნება მივცეთ მათ დებულებები დაუმტკიცებლად.

§1. მიმდევრობათა გარდაქმნები უმაღლესი მათემატიკის კურსში

განვიხილოთ ზოგიერთი განმარტებები და თეორემები მიმდევრობაზე.

განმარტება 1. ფუნქციას $f: N \to X$, რომლის განსაზღვრის არეა ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე, ეწოდება X სიმრავლის ელემენტთა მიმდევრობა.

f ფუნქციის $f(n)$ მნიშვნელობებს მიმდევრობის წევრები ეწოდებათ. $x_1 = f(1)$-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, $x_2 = f(2)$ - მეორე წევრი და ა.შ. $x_n = f(n)$-ს მიმდევრობის n-ური წევრი. x_n-ს უწოდებენ აგრეთვე მოცემული მიმდევრობის ზოგად წევრს. მიმდევრობას მოკლედ ასე აღნიშნავენ $(x_n)_{n\geq 1}$ ან (x_n), ან თუ აღრევა არ არის მოსალოდნელი x_n-ით. თუ $X = R$, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ $f: N \to R$ მიმდევრობას რიცხვითი მიმდევრობა ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობებს. ამრიგად, თუ რაიმე წესით ყოველ n ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული x_n ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა (x_n) მიმდევრობა.

რა წესით შეიძლება მოცემული იქნას მიმდევრობა? არსებობს მიმდევრობის მოცემის ანალიზური წესი, რომელიც ცხადად გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ n -ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის ზოგადი x_n წევრი.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n = n^2$. ეს ფორმულა (ფუნქცია) განსაზღვრავს მიმდევრობას

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

2. $x_n = (-1)^n$ განსაზღვრავს მიმდევრობას, -1, 1, -1, 1, ...

3. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ ფორმულა გვაძლევს მიმდევრობას, 0, 1, 0, 1, ...

მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იყოს ე.წ. რეკურენტული წესით, ეს წესი გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებებია საჭირო მიმდევრობის გამოთვლილ $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ წევრებზე, რომ მივიღოთ შემდგომი x_{n+1} წევრი. გარდა ამისა მოცემული უნდა იყოს რამდენიმე პირველი წევრი – საწყისი მონაცემები.

მაგალითად, თუ $x_1 = 1$, ხოლო $x_{n+1} = (n+1)x_n$, მაშინ გვაქვს მიმდევრობა 1, 2, 6, 24, ... ეს მიმდევრობა შეიძლება წარმოვადგინოთ ცნობილი ფორმულით $n!$. მართლაც $1!=1$, $2!=1\cdot 2=2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, და ა.შ.

ზოგიერთი რეკურენტული თანაფარდობისათვის შეიძლება ადვილად დავადგინოთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. ვიპოვოთ მიმდევრობის ზოგადი წევრი, თუ $x_1 = a$, და $\forall n \geq 1$, $x_{n+1} = x_n + d$, სადაც d -რაიმე მოცემული რიცხვია. ცხადია საქმე გვაქვს არითმეტიკულ პროგრესიასთან, ვინაიდან $x_2 = a+d$, $x_3 = a+2d$, ... , $x_n = a + d(n-1)$, ... , ე.ი. ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $x_n = a + d(n-1)$.

მიმდევრობის მოცემის წესი შეიძლება არც ანალიზური იყოს და არც რეკურენტული. მაგალითად, x_n იყოს n -ური მარტივი რიცხვი ნატურალურ რიცხვთა მწკრივში. გვაქვს მარტივ რიცხვთა სრულად გარკვეული მიმდევრობა; 2, 3, 5, 7, 11, ... ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგრამ x_n -ის განსაზღვრის არც ანალიზური წესია ცნობილი და არც რეკურენტული. ეს მიმდევრობა მოცემულია სიტყვიერად. სიტყვიერადაა მოცემული მიმდევრობაც; 1, 1,4; 1,41; 1,414; ... რომლის წევრებიც გამოსახავენ $\sqrt{2}$ რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობებს.

შემოვიტანოთ არითმეტიკული ოპერაციები რიცხვით მიმდევრობათა სიმრავლეში. ავიღოთ ორი მიმდევრობა $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$, აღვნიშნოთ $(x_n)_{n\geq1}+(y_n)_{n\geq1}$ სიმბოლოთი ახალი მიმდევრობა, რომლის წევრებს შეადგენენ x_1+y_1, x_2+y_2, ... , x_n+y_n, ... რიცხვები. ამგვარად, განმარტებით გვაქვს:

$$(x_n)_{n\geq1}+(y_n)_{n\geq1}=(x_n+y_n)_{n\geq1}.$$

სხვაობა განიმარტება, როგორც მიმდევრობა, რომლის წევრები x_1-y_1, x_2-y_2, $\cdots$, x_n-y_n, $\cdots$ რიცხვებია; ამგვარად

$$(x_n)_{n\geq1}-(y_n)_{n\geq1}=(x_n-y_n)_{n\geq1}.$$

ვთქვათ, α რაიმე ნამდვილი რიცხვია; ასეთ შემთხვევაში α რიცხვისა და $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობის ნამრავლი, რომელიც $\alpha\,(x_n)_{n\geq1}$-ით აღინიშნება ეწოდება მიმდევრობას, რომლის წევრებსაც αx_1, αx_2, ... , αx_n, ... რიცხვები წარმოადგენენ. ამრიგად, განმარტებით გვაქვს:

$$\alpha(x_n)_{n\geq1}=(\alpha x_n)_{n\geq1}.$$

ახლა ცხადია, რომ $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ ორი მიმდევრობაა, ხოლო α და β რაიმე რიცხვებია, შეიძლება გავიგოთ, თუ რას ნიშნავს $\alpha\,(x_n)_{n\geq1}+\beta\,(y_n)_{n\geq1}$. უკანასკნელის განსაზღვრება იქნება

$$\alpha\,(x_n)_{n\geq1}+\beta\,(y_n)_{n\geq1}=(\alpha x_n+\beta y_n)_{n\geq1};$$

მას ჩვეულებრივ, (x_n) და (y_n) მიმდევრობის წრფივი კომბინაცია ეწოდება α და β კოეფიციენტებით.

ვთქვათ $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ ორი მიმდევრობაა. ამ ორი მიმდევრობის ნამრავლი, რომელიც $(x_n)_{n\geq1}\cdot(y_n)_{n\geq1}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, განმარტებულია, როგორც მიმდევრობა, რომლის წევრებსაც წარმოადგენენ x_1y_1, x_2y_2, ... , x_ny_n, .. რიცხვები, ე.ი.

$$(x_n)_{n\geq1}\cdot(y_n)_{n\geq1}=(x_ny_n)_{n\geq1}.$$

სავსაბით ასევე, თუ $\forall n\in N$, $y_n\neq0$, მაშინ $(x_n)_{n\geq1}$ და $(y_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობების ფარდობა, ეს ისეთი მიმდევრობაა, რომლის წევრები $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$, ... , $\frac{x_n}{y_n}$, ... რიცხვებია. ამრიგად, თუ $y_n\neq0$ ($\forall n\in N$), განმარტებით გვაქვს

$$\frac{(x_n)_{n\geq1}}{(y_n)_{n\geq1}}=\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq1}.$$

განმარტება 2. რიცხვთა $(x_n)_{n\geq1}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი b რიცხვი, რომ $\forall n\in N$, $x_n\leq b$. ასეთ შემთხვევაში

b რიცხვი წარმოადგენს $\{x_n\}_{n\geq 1} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ სიმრავლის მაჟორანტს. რამდენადაც $\{x_n\}$ ნამდვილ რიცხვთა არაცარიელი და ზემოდან შემოსაზღვეული სიმრავლეა, მას გააჩნია ზუსტი მაჟორანტი (ზედა საზღვარი) $\sup\{x_n\}_{n\geq 1}$, რომელსაც $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზუსტი ზედა საზღვარი (მაჟორანტი) ეწოდება და აღინიშნება $\sup(x_n)_{n\geq 1}$-ით ან $\sup x_n$-ით.

თუ $b = \sup(x_n)_{n\geq 1}$, მაშინ b-ს გააჩნია შემდეგი ორი თვისება:

1) $\forall n \in N$, გვაქვს: $x_n \leq b$,

2) $\forall b' \in R$, თუ $b' < b$, მოიძებნება ერთი მაინც $n' \in N$, რომ $x_{n'} > b'$.

განმარტება 3. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება ქვემოდან შემოსაზღვრული თუ არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომ $\forall n \in N$, $x_n \geq a$. ასეთ შემთხვევაში a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის მინორანტი. ყოველ ქვემოდან შემოსაზღვრულ მიმდევრობას გააჩნია ზუსტი (ქვედა საზღვარი) მინორანტი, რომელიც $\inf(x_n)_{n\geq 1}$ ან $\inf\limits_{n\in N} x_n$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

$a = \inf(x_n)_{n\geq 1}$ რიცხვს გააჩნია შემდეგი, მისთვის დამახასიათებელი თვისებები:

1) $\forall n \in N$, გვაქვს: $x_n \geq a$,

2) $\forall a' \in R$ რიცხვისათვის, თუ $a' > a$, არსებობს $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ერთი მაინც $x_{n''}$ წევრი, რომ $x_{n''} < a'$.

ნამდვილი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შემოსაზღვრულია როგორც ქვემოდან, ისე ზემოდან. ასეთ შემთხვევაში არსებობს ორივე ზუსტი საზღვარი და

$$\inf(x_n)_{n\geq 1} \leq \sup(x_n)_{n\geq 1}.$$

როცა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა არ არის ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული, დავწერთ $\sup(x_n)_{n\geq 1} = +\infty$ (სათანადოდ $\inf(x_n)_{n\geq 1} = -\infty$). ეს იმას ნიშნავს, რომ $\forall A \in R$ რიცხვისათვის მოიძებნება მიმდევრობის ისეთი x_n წევრი, რომ $x_n > A$ (სათანადოდ $x_n < A$).

განმარტება 4. (x_n) მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი (კლებადი) თუ $\forall n \in N$, $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$), ხოლო ეწოდება მკაცრად ზრდადი (მკაცრად კლებადი) თუ $\forall n \in N$, $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$).

ყოველ ზრდად (მკაცრად ზრდად), ან კლებად (მკაცრად კლებად) მიმდევრობას მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება. x_n მიმდევრობას, სადაც $x_n = a$, $\forall n \in N$, ეწოდება მუდმივი (სტაციონალური) მიმდევრობა.

ნამდვილ რიცხვთა $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას უდიდესი (უმცირესი) წევრი ეს მიმდევრობის ისეთი x_p წევრია, რომელსაც გააჩნია თვისება: $\forall n \in N,\ \ x_n \leq x_p$ (სათანადოდ $x_n \geq x_p$). ნამდვილი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის უდიდესი (უმცირესი) წევრი $\max\limits_{n\in N} x_n$ ($\min\limits_{n\in N} x_n$) სიმბოლოთი აღინიშნება.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას უდიდესი (უმცირესი) წევრი გააჩნია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს მიმდევრობა ზემოდან (სათანადოდ, ქვემოდან) შემოსაზღ-ვრულია და $\sup(x_n)_{n\geq 1}$ ($\inf(x_n)_{n\geq 1}$) ამ მიმდევრობის ერთერთი წევრია.

შევნიშნოთ, რომ თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ არსებობს a და b $(a<b)$ რიცხვები, ისეთი, რომ $\forall n \in N,\ a \leq x_n \leq b$. დავუშვათ $A=\max(|a|,|b|)$, მაშინ ცხადია, რომ $\forall n \in N,$ გვაქვს $|x_n| \leq A$. ამგვარად $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს დადებითი A რიცხვი, ისეთი, რომ $\forall n \in N,\ |x_n| \leq A$.

$(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება შემოუსაზღვრელი, თუ ყოველი დადებით $A \in R_+$ რიცხვისათვის არსებობს $n' \in N$ ისეთი, რომ $|x_{n'}| > A$. ამ განმარტების თვალსაზრისით ყოველი მიმდევრობა, რომელიც შემოსაზღვრულია, მხოლოდ ერთი მხრიდან წარმოადგენს შემოუსაზღვრელ მიმდევრობას.

ასე მაგალითად, მიმდევრობა 1, 2, 1, 4, ... , 1, $2n$, ... შემოსაზღვრულია მხოლოდ ქვემოდან, ამიტომ ის შემოუსაზღვრელია.

ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n = \dfrac{1}{n}$. დავაკვირდეთ ამ მიმდევრობაში მონაწილე რიცხვების სათანადო წერტილებს რიცხვით ღერძზე. მანძილი $x_n = \dfrac{1}{n}$ წერტილიდან ღერძის სათავემდე $d(0,x_n)=|x_n - 0| = \dfrac{1}{n}$. ამგვარად, რაც უფრო მეტია n, ეს მანძილი მით უფრო მცირეა. n-ის უსასრულოდ ზრდისას, ეს მანძილი უსასრულოდ კლებულობს. ეს ნიშნავს, რომ როგორი მცირეც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური k რიცხვი, რომ $\dfrac{1}{k}$ წერტილი და ყველა დანარჩენი წერტილები: $\dfrac{1}{k+1}$, $\dfrac{1}{k+2}$ და ა.შ. ε-ზე უფრო ნაკლები მანძილით იქნებიან დაშორებული 0-დან.

მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი. განვიხილოთ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = n$. ამ შემთხვევაში რიცხვით ღერძზე ვერ ვიპოვით ისეთ წერტილს, რომელსაც მოცემული მიმდევრობის წევრები დაუსრულებლად უახლოვდებოდეს.

მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს a წერტილი, ჩვენ ყოველთ-ვის შეგვიძლია n ნატურალური რიცხვი იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ მანძილი $d(a,n)=|n-a|$ რაგინდ დიდი იყოს.

ზემომოყვანილი ორი მაგალითიდან ნათლად ჩანს: თუ გვაქვს რაიმე $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა, მაშინ შეიძლება წარმოგვიდგეს ორი შემთხვევა: ან არსებობს ისეთი a რიცხვი, რომ მანძილი $d(a,x_n)=|x_n-a|$ n-ის ზრდასთან ერთად დაუსრულებლად მცირდება, ან ასეთი a რიცხვი არ არსებობს. შემოვიღოთ

განმარტება 5. a რიცხვს ეწოდება $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოვე-ლი ε დადებითი რიცხვისათვის მოიძებნება k ნატურალური რიცხვი, ისეთი, რომ როცა $n \geq k$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x_n-a|<\varepsilon . \qquad (1)$$

და ამ გარემოებას ასე ჩაწერენ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{, ან } \lim x_n = a . \qquad (2)$$

და იკითხება `ზღვარი x_n-ისა, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, არის a~. აღნიშვნა lim წარმოდგება ლათინური სიტყვისაგან, რაც ზღვარს ნიშნავს.

მიმდევრობას, რომელსაც აქვს ზღვარი, ვთქვათ a რიცხვის ტოლი, კრება-დი ვუწოდოთ. თუ მიმდევრობას ზღვარი არ აქვს, მაშინ მას განშლადი მიმდევრობა ეწოდება.

მიღებული განმარტების ძალით, თუ ადგილი აქვს (2) ტოლობას, ეს იმას ნიშნავს, რომ მანძილი x_n წერტილებსა და a წერტილს შორის დაუსრულებლად მცირდება n-ის ზრდასთან ერთად. მაშასადამე ზემოთმოყვანილი პირველი მიმდევრობა $\left(x_n=\dfrac{1}{n}\right)$ კრებადია და მისი ზღვარი ტოლია ნულის, ხოლო მეორე მიმდევრობა $(x_n=n)$ კი განშლადია.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ზღვრის განმარტებაში მონაწილე k ნატურა-ლური რიცხვის შერჩევა საზოგადოდ დამოკიდებულია ε რიცხვზე. მართლაც $x_n=\dfrac{1}{n}$ მიმდევრობის შემთხვევაში $a=0$, ამიტომ (1) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \qquad (3)$$

ამგვარად, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი $k\in N$ რიცხვი, რომ როცა $n\geq k$, მაშინ ადგილი ჰქონდეს (3) უტოლობას. რადგან $n\geq k$, $\dfrac{1}{k}\geq\dfrac{1}{n}$. აქედან, ცხადია (3) უტოლობას ექნება

ადგილი, თუ $\frac{1}{k} < \varepsilon$, ე.ი. თუ $k > \frac{1}{\varepsilon}$. მაგალითად k ნატურალურ რიცხვად გამოდგება $k = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. ε რიცხვის შემცირება საზოგადოდ იწვევს შესაბამისი k რიცხვის გაზრდას.

იმისათვის, რომ ხაზი გაესვას k რიცხვის ε-ზე დამოკიდებულების ფაქტს, ჩვენ ε-ის შესაბამის k რიცხვს, ზოგჯერ $k(\varepsilon)$-ით ან კიდევ k_ε-ით აღვნიშნავთ. $x_n = \frac{1}{n}$ მიმდევრობისათვის

$$k_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

გამონაკლის შემთხვევაში შესაძლებელია k რიცხვი არ იყოს ε-ზე დამოკიდებული. მართლაც განვიხილოთ მუდმივი მიმდევრობა $x_n = a$, $\forall n \in N$, ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს n,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \text{, ე.ი. } \lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

ამასთან, ამ შემთხვევაში k რიცხვად გამოდგება ყოველი ნატურალური რიცხვი. გარდა ამისა, ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ მუდმივის ზღვარი თვითონ ამ მუდმივის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ მიმდევრობის ზღვრის განმარტებაში მონაწილე უტო-ლობა $|x_n - a| < \varepsilon$, ნამდვილი რიცხვის მოდულის ერთ-ერთი თვისების ძალით, ტოლფასია შემდეგი უტოლობისა:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ან, რაც იგივეა $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

ამგვარად, თუ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, მაშინ როგორიც არ უნდაიყოს $\varepsilon > 0$, მოიძებნება ისეთი $k = k(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი, რომ $\forall n \geq k$ გვაქვს $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$. სხვა სიტყვებით, $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ყველა წევრი, დაწყე-ბული x_k-დან მოთავსდება a წერტილის $U(a, \varepsilon)$ მიდამოში. ამ მიდამოს გარეთ სულ დიდი შეიძლება აღმოჩნდეს მიმდევრობის $k-1$ წევრი: x_1, x_2, ... , x_{k-1}. აქედან ცხადია, რომ მიმდევრობის ზღვრის განმარტება შეიძლება მოცემულ იქნას ასეთნაირად:

განმარტება 6. a რიცხვი არის $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ როგორიც არ უნდა იყოს a წერტილის $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ მიდამო, არსებობს $k \in N$ რიცხვი, ისეთი რომ

$$\forall n \geq k, \quad x_n \in U(a, \varepsilon).$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ასეთი k რიცხვი ცალსახად არაა განსაზღვრული $U(a,\varepsilon)$ მიდამოს საშუალებით: თუ k ამ თვისების ერთ-ერთი რიცხვია, ყოველი m რიცხვი, რომელიც მეტია k-ზე, აგრეთვე გამოდგება k-ს როლში. მართლაც თუ $m \geq k$ და $n \geq m$, გვექნება $x_n \in U(a,\varepsilon)$.

სასარგებლოა გავიაზროთ რას ნიშნავს, რომ a რიცხვი არ არის $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარი. ამ შემთხვევაში დარღვეული უნდა იყოს ზღვრის განმარტებაში აღწერილი სურათი. ამისათვის კი a წერტილის ერთი მაინც ისეთი მიდამო უნდა არსებობდეს, რომელსაც არ მოეძებნება ზღვრის განმარტებაში აღნიშნული თვისებების k რიცხვი. უფრო დაწვრილებით, a არ არის (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, იმას ნიშნავს, რომ მოიძებნება a წერტილის ერთი მაინც $U(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ მიდამო, რომ ყოველი k ნატურალური რიცხვისათვის იარსებებს $n_k > k \quad (n_k \in N)$ რიცხვი ისეთი, რომ $x_{n_k} \notin U(a,\varepsilon) \quad \forall k \in N$, ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \;\Leftrightarrow\; \exists U(a,\varepsilon)\ \forall k \in N \quad \exists n_k \geq k \quad \left(x_{n_k} \notin U(a,\varepsilon)\right).$$

განმარტება 7. რიცხვთა $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას უსასრულოდ მცირე ეწოდება, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია. ამგვარად, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა უსასრულოდ მცირეა ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 .$$

განმარტება 8. $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა ანუ უბრალოდ უსასრულოდ დიდი, თუ ყოველი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $k \in N$ რიცხვი ისეთი, რომ $\forall n \geq k$ გვაქვს $|x_n| > M$. ამის გამო ვწერთ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{ან} \quad x_n \to \infty, \tag{4}$$

მოკლედ ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$\forall M > 0 \quad \exists k = k(M) \in N$ ისეთი, რომ $\forall n \geq k$ გვაქვს $|x_n| > M$.

მიმდევრობები $(x_n = n)$ და $(y_n = -n)$ _ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობებია.

თუ უსასრულოდ დიდი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ყოველი წევრი დაწყებული გარკვეული ადგილიდან დადებითია ან უარყოფითია, მაშინ ვწერთ:

$$\lim x_n = +\infty, \text{ ან } \quad x_n \to +\infty, \tag{5}$$

შესაბამისად

$$\lim x_n = -\infty, \text{ ან } \quad x_n \to -\infty. \tag{6}$$

(5) და (6) შემთხვევაში ვამბობთ შესაბამისად, რომ x_n არის დადებითი, უარყოფითი უსასრულოდ დიდი. ცხადია, რომ თუ x_n დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ

დიდია, მაშინ ის უსასრულოდ დიდია, მაგრამ $x_n = (-1)^n n$ მიმდევრობა გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დასკვნა საზოგადოდ ჭეშმარიტი არ არის. ე.ი. მიმდევრობა შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდი, მაგრამ ის არ იყოს არც დადებითი და არც უარყოფითი უსასრულოდ დიდი.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდ მიმდევრობათა ცნებებს შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა უსასრულოდ დიდია და მისი მნიშვნელობები ნულისაგან განსხვავებულია, ე.ი. $\forall n \in N$, $x_n \neq 0$, მაშინ შებრუნებული მიმდევრობა $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ იქნება უსასრულოდ მცირე.

განვიხილოთ ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ.

თეორემა 2. ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

საჭიროა წესიერად წარმოვიდგინოთ თეორემის შინაარსი. იგი იმას კი არ ამტკიცებს, რომ ყოველ მიმდევრობას აქვს ერთი ზღვარი, არამედ, თუ მიმდევრობა კრებადია, და, მაშასადამე მას ზღვარი აქვს, იგი აუცილებლად ერთადერთია. სხვა სიტყვებით, კრებადი მიმდევრობა ცალსახად განსაზღვრავს ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს – თავის ზღვარს.

მიმდევრობის ზღვრის ცნებასთან დაკავშირებით გავაკეთოთ რამდენიმე შენიშვნა, რომელნიც საჭიროა რომ მივიღოთ მხედველობაში.

განვიხილოთ რაიმე მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ ,\cdots \qquad (7)$$

და მოვაშოროთ მას პირველი m წევრი, ე.ი. შევცვალოთ ეს მიმდევრობა ახალი მიმდევრობით $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots,\ x_{m+n}\ ,\cdots$. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს უკანასკნელი მიმდევრობა კრებადია ან განშლადია, აღებულ მიმდევრობასთან ერთად. ამგვარად, კრებადი (ან განშლადი) მიმდევრობის რამდენიმე წევრის ჩამოშორებით, ამ მიმდევრობის კრებადობა (ან განშლადობა) არ დაირღვევა. და მასთან არც მიმდევრობის ზღვარი არ შეიცვლება.

ასევე არ შეიცვლის მიმდევრობა კრებადობის ხასიათს და არც მის ზღვარს თუ მას სასრული რაოდენობის წევრებს დავუმატებთ.

აღნიშნული თვისების გამოყენებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ რაიმე მიმდევრობაში გარკვეული m ნომრიდან დაწყებული ყველა წევრი ერთმანეთის ტოლია, მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი ამ ერთმანეთის ტოლი წევრების საერთო რიცხვით მნიშვნელობას უდრის.

მართლაც, თუ ამ მიმდევრობას ჩამოვაშორებთ პირველ m-1 წევრს, მუდმივ მიმდევრობას მივიღებთ, რომელიც სწორედ, აღნიშნული რიცხვითი მნიშვნელობისაკენ იკრიბება.

თეორემა 3. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მიმდევრობის კრებადობისათვის, აუცილებელია მისი შემოსაზღვრულობა, მაგრამ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა. ასე მაგალითად $x_n = (-1)^n$ მიმდევრობა არ არის კრებადი, მაგრამ ის შემოსაზღვრულია, ვინაიდან $\forall n \in N$, $|x_n| = 1$.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე ობიექტთა მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\ ,\cdots \qquad (8)$$

და განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots \qquad (9)$$

მიმდევრობას

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots,\ x_{n_k}\ ,\cdots$$

ეწოდება (8) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ცხადია, რომ $n_k \geq k$.

თეორემა 4. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია $(x_n \in R)$ a რიცხვისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია იმავე a რიცხვისაკენ.

თეორემა 5. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ კრებადი მიმდევრობებია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, მაშინ ყოველი α და β რიცხვებისათვის კრებადია მათი წრფივი კომბინაცია $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\geq 1}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b .$$

თეორემა 6. თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ კრებადი მიმდევრობებია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, მაშინ კრებადია მათი $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ ნამრავლი და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = a \cdot b .$$

თეორემა 7. ვთქვათ $(x_n)_{n\geq 1}$ და $(y_n)_{n\geq 1}$ ისეთი კრებადი მიმდევრობებია, რომ $\forall n \in N,\ \ y_n \neq 0,$ ამასთან $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$ მაშინ კრებადია $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ მიმდევრობა და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}.$$

თეორემა 8. ვთქვათ $(x_n)_{n\ge1}$ და $(y_n)_{n\ge1}$ ორი კრებადი მიმდევრობაა და ყოველი $n\in N-$ სათვის შესრულებულია $x_n \le y_n$ (ან $x_n < y_n$) უტოლობა, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n .$$

§2. მიმდევრობათა გარდაქმნების პრაქტიკული რეალიზება უმაღლესი მათემატიკის კურსში

ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მაგრამ შებრუნებული წინადადება საზოგადოდ ჭეშმარიტი არ არის. ასე მაგალითად მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრი $x_n=(-1)^n$ შემოსაზღვრულია, ვინაიდან $|x_n|=1$, მაგრამ ის კრებადი არ არის. ამ მაგალითიდან სჩანს, რომ საკმაოდ მარტივი შემოსაზღვრული მიმდევრობებიც კი არ არიან კრებადი. ამიტომ ბუნებრივია ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება განვაზოგადოთ კრებადობის ცნება ისეთნაირად, რომ შემოსაზღვრული მიმდევრობათა რაც შეიძლება ფართე კლასს მიენიჭოს გარკვეული ზღვარი.

ვთქვათ სამკუთხა სქემაში

$$\begin{gathered} P_{00} \\ P_{10},\ P_{11} \\ P_{20},\ P_{21},\ P_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

ყველა რიცხვი არაუარყოფითია და ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთეულის ტოლია

$$\left(P_{n\nu}\ge 0,\qquad P_{n0}+P_{n1}+P_{n2}+\cdots+P_{nn}=1;\ \ \nu=0,1,\cdots,n,\quad n=0,1,\cdots\right).$$

მოცემული

$$S_0,\quad S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

მიმდევრობიდან შევადგინოთ ახალი მიმდევრობა

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots\ ,\ t_n,\ \cdots$$

შემდეგი წესის მიხედვით, დავუშვათ

$$t_n = P_{n0}S_0 + P_{n1}S_1 + \cdots + P_{nn}S_n$$

მაშინ t_n მოთავსებულია უმცირესსა და უდიდესს შორის

$$S_0,\ S_1,\ S_2, \cdots\ ,\ S_n$$

რიცხვებს შორის.

მართლაც გარკვეულობისათვის $S_0,\ S_1,\ S_2, \cdots\ ,\ S_n$ რიცხვებს შორის უმცირესია S_0, ხოლო უდიდესია S_n. მაშინ გვექნება

$$t_n \geq P_{n0}S_0 + P_{n1}S_0 + \cdots + P_{nn}S_0 = S_0\left(P_{n0} + P_{n1} + \cdots + P_{nn}\right) = S_0 \cdot 1 = S_0$$
$$t_n \leq P_{n0}S_n + P_{n1}S_n + \cdots + P_{nn}S_n = S_n\left(P_{n0} + P_{n1} + \cdots + P_{nn}\right) = S_n \cdot 1 = S_n$$

ე.ი. $S_0 \leq t_n \leq S_n$.

პრაქტიკაში გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია შემდეგი

თეორემა 1 (ტეპლიცის). იმისათვის რომ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ზღვარის არსებობიდან გამომდინარეობდეს

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_{n0}S_0 + P_{n1}S_1 + \cdots + P_{nn}S_n\right) = S$$

ზღვრის ტოლობა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული ν – თვის

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\nu} = 0\ .$$

მოყვანილი პირობა შეიძლება ჩამოყალიბებული იქნას შემდეგნაირად: რიცხვითი სქემა $P_{n\nu}$ ინარჩუნებს კრებადობას.

დამტკიცება. ვთქვათ $S_n = 0$ $n \neq \nu$ და $S_\nu = 1$, მაშინ $t_n = P_{n\nu}$ $n \geq \nu$ –თვის. მართლაც

$$t_n = P_{n0}S_0 + P_{n1}S_1 + \cdots + P_{n\nu}S_\nu + P_{n\nu+1}S_{\nu+1} + \cdots + P_{nn}S_n =$$

$$= P_{n0}\cdot 0 + P_{n1}\cdot 0 + \cdots + P_{n\nu}S_\nu + P_{n\nu+1}\cdot 0 + \cdots + P_{nn}\cdot 0 = P_{n\nu}\cdot S_\nu = P_{n\nu}\cdot 1 = P_{n\nu}\ .$$

ვთქვათ მეორეს მხრივ შესრულებულია პირობა

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\nu} = 0\ ,$$

ყოველი ν რიცხვისათვის და პირობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ ,$$

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ

$$\lim_{n\to\infty} t_n = S\ .$$

რადგანაც $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, ამიტომ ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისათვის მოიძებნება ნატურალური რიცხვი N, დამოკიდებული ε–ზე ისეთი, რომ როცა $n \ge N$ შესრულდება უტოლობა

$$\left|S_n - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

რადგანაც ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ S_n მიმდევრობის კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $M > 0$ რიცხვი, ისეთი რომ

$$\left|S_n\right| \le M \quad \text{და} \quad \left|S_n - S\right| \le 2M \tag{2}$$

(ამისათვის M უნდა შევარჩიოთ ისეთი, რომ $M > \left|S_n\right|$) ყოველი n ნატურალური როცხვისათვის.

იმის გამო, რომ

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\nu} = 0 \text{ ყოველი } \nu\text{–თვის,}$$

ამიტომ მოცემული ε დადებითი რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი k ნატურალური რიცხვი, $k > N$ ისეთი, რომ

$$P_{n\nu} < \frac{\varepsilon}{4M\left(N+1\right)} \qquad \left(\nu = 1,\, 2,\, \cdots,\, N\right) \tag{3}$$

ყოველი $n > k$–თვის.

ახლა ვისარგებლოთ (1), (2), (3) უტოლობებით და იმ პირობით, რომელსაც აკმაყოფილებენ $P_{n\nu}$ რიცხვები, გვექნება

$$\begin{aligned}
\left|t_n - S\right| &= \left|\left(P_{n0}S_0 + P_{n1}S_1 + \cdots + P_{nn}S_n\right) - S\left(P_{n0} + P_{n1} + \cdots + P_{nn}\right)\right| = \\
&= \left|P_{n0}S_0 - SP_{n0} + P_{n1}S_1 - SP_{n1} + \cdots + P_{nn}S_n - SP_{nn}\right| = \\
&= \left|P_{n0}\left(S_0 - S\right) + P_{n1}\left(S_1 - S\right) + \cdots + P_{nn}\left(S_n - S\right)\right| \le \\
&\le \left|P_{n0}\right|\left|S_0 - S\right| + \left|P_{n1}\right|\left|S_1 - S\right| + \left|P_{nn}\right|\left|S_n - S\right| = \\
&= P_{n0}\left|S_0 - S\right| + P_{n1}\left|S_1 - S\right| + \cdots + P_{nn}\left|S_n - S\right| = P_{n0}\left|S_0 - S\right| + P_{n1}\left|S_1 - S\right| + \\
&+ \cdots + P_{nN}\left|S_N - S\right| + P_{n\,N+1}\left|S_{N+1} - S\right| + \cdots + P_{nn}\left|S_n - S\right|.
\end{aligned} \tag{4}$$

ვისარგებლოთ (2) და (3) უტოლობებით, გვექნება

$$\left|S_0 - S\right| \le 2M, \quad \left|S_1 - S\right| \le 2M, \ \cdots, \ \left|S_N - S\right| \le 2M, \tag{5}$$

$$P_{n0} < \frac{\varepsilon}{4M\left(N+1\right)}, \quad P_{n1} < \frac{\varepsilon}{4M\left(N+1\right)}, \ \cdots, \ P_{nN} < \frac{\varepsilon}{4M\left(N+1\right)}, \tag{6}$$

აგრეთვე გამოვიყენოთ უტოლობა

$$\left|S_n - S\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{როცა}\quad n > N\ ,$$

აქედან გამომდინარე გვექნება უტოლობები

$$\left|S_{N+1} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2},\quad \left|S_{N+2} - S\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \cdots\ ,\ \left|S_n - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{7}$$

თუ გავითვალისწინებთ (4) უტოლობაში (5), (6), (7) უტოლობებს და აგრეთვე იმას, რომ

$$P_{n\,N+1} + P_{n\,N+2} + \cdots + P_{nn} \le P_{n0} + P_{n1} + \cdots + P_{nn} = 1$$

მივიღებთ

$$\left|t_n - S\right| \le \frac{2\varepsilon M}{4M\left(N+1\right)} + \frac{2\varepsilon M}{4M\left(N+1\right)} + \cdots + \frac{2\varepsilon M}{4M\left(N+1\right)} + \frac{\varepsilon}{2}P_{n\,N+1} + \cdots +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}P_{nn} = \left(N+1\right)\frac{2\varepsilon M}{4M\left(N+1\right)} + \frac{\varepsilon}{2}\left(P_{n\,N+1} + P_{n\,N+2} + \cdots + P_{nn}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon\ ,$$

როცა $n \ge k \ge N$. აქედან გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty} t_n = S\ .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი საყურადღებო შედეგები:

შედეგი I. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ საშუალო არითმეტიკულების მიმდევრობა

$$\xi_n = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \qquad \left(n = 1,\ 2, \cdots\right)$$

აგრეთვე კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n\ .$$

დამტკიცება. თუ დავუშვებთ

$$P_{nk} = \frac{1}{n} \qquad \left(k = 1, 2, \cdots, n;\quad n = 1, 2, \cdots\right)$$

მაშინ P_{nk} და x_n–თვის შესრულებული იქნება ყველა პირობა ტეპლიცის თეორემისა, (რაც შემდეგში მდგომარეობს

1) $P_{nk} \ge 0$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

ნებისმიერი ფიქსირებული k –თვის, მაშინ მიმდევრობა

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

კრებადია და $\lim_{n\to\infty} t_n = a$), რისთვისაც

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \xi_n ,$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

ვაჩვენოთ რომ საშუალო არითმეტიკულების ზემოთ მოყვანილი მიმდევრობებიდან $x_n = (-1)^n$, მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი არის 0. მართლაც,

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1-1+1+\cdots+(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{როცა } n \text{ ლუწია,} \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{როცა } n \text{ კენტია,} \end{cases}$$

საიდანაც გვექნება, რომ $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$. მაშასადამე, ნაჩვენებია, მიუხედავად იმისა, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა განშლადია, მისგან შედგენილი საშუალო არითმეტიკულობის მიმდევრობა კრებადია. ე.ი. შეგვიძლია განშლადი მიმდევრობა ისე გარდავქმნათ, რომ მიღებული მიმდევრობა აღმოჩნდეს კრებადი. იმისათვის, რომ მათემათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებს ნათელი წარმოდგენა შეექმნათ განშლად და კრებად მიმდევრობებზე, უმჯობესია მოხდეს ამ მეთოდის სწავლება.

შედეგი II. თუ $\{y_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და $y_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$, მაშინ საშუალო ჰარმონიულების მიმდევრობა

$$f_n = \frac{n}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_n}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

აგრეთვე კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} y_n .$$

დამტკიცება. დავუშვათ

$$P_{nk} = \frac{\dfrac{1}{y_k}}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_n}} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \ x_n = y_n;\ n = 1,\ 2,\ \cdots),$$

მაშინ ზემოთ მოცემული თეორემის ყველა პირობა შესრულებული იქნება, რისთვისაც $t_n = f_n$. აქედან კი გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} y_n .$$

შედეგი III. თუ $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, მაშინ

$$1) \ \lim_{n\to\infty} f_n = +\infty \ \text{ და } \ 2) \ \lim_{n\to\infty} \xi_n = +\infty ,$$

სადაც f_n –საშუალო ჰარმონიულია, ხოლო ξ_n –საშუალო არითმეტიკული $y_1, y_2, \cdots, y_n$ რიცხვებიდან.

დამტკიცება. 1) ვაჩვენოთ, რომ თუ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$, მაშინ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f_n} = 0$, ეს კი იმის ეკვივალენტურია, რომ $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$. გამოვიყენებთ რა ზემოთ მოცემულ თეორემას და გავითვალისწინებთ რომ

$$P_{nk} = \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$x_n = \frac{1}{y_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

ვღებულობთ, რომ

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \frac{1}{f_n} \ \text{ და } \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0 .$$

2) მტკიცება იმისა, რომ $\lim_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$ გამომდინარეობს უტოლობიდან $f_n \le \xi_n$ და იქედან, რომ $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

შედეგი IV. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და $x_n > 0$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$f_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \xi_n .$$

შედეგი I და შედეგი II–ის თანახმად $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

შედეგი V. თუ $x_n > 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} ,$$

თუ დავუშვებთ, რომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი ზღვარი არსებობს.

დამტკიცება გამომდინარეობს იქედან, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

შედეგი VI. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e,$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n},$$

სადაც $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$. რამდენადაც

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e,$$

მაშინ წინა ამოცანის საფუძველზე ვღებულობთ მტკიცებას.

თეორემა 2. ვთქვათ მოცემულია ორი უსასრულო მიმდევრობა

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$$

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\cdots,\ b_n,\cdots.$$

მაშინ შემდეგი სამი პირობიდან

1) $b_n>0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

2) $b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$ (მწკრივი განშლადია)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=S$

გამომდინარეობს რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}=S.$$

დამტკიცება. ვისარგებლოთ თეორემა 1–ით და დავუშვათ, რომ მასში

$$S_n=\frac{a_n}{b_n};\qquad P_{n\nu}=\frac{b_\nu}{b_0+b_1+\cdots+b_n}$$

$$t_n=\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\nu} = 0\,,$$

რადგანაც $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to \infty$, როცა $n \to \infty$, ვინაიდან მეორე დადებითი მწკრივი არის განშლადი (მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა არის შემოსაზღვრული ზემოდან).

თეორემა 3. ვთქვათ დადებით რიცხვთა ორი მიმდევრობა

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$$
$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \cdots$$

აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_0 + q_1 + \cdots + q_n} = 0.$$

დავუშვათ $r_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_n q_0 \quad (n = 0, 1, \cdots)$, მაშინ მიმდევრობა $r_0,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$ დააკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_0 + r_1 + \cdots + r_n} = 0\,.$$

დამტკიცება. ეს თეორემა 1–ის კერძო შემთხვევაა. ვთქვათ

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = P_n$$
$$q_0 + q_1 + \cdots + q_n = Q_n$$
$$r_0 + r_1 + \cdots + r_n = R_n$$

მაშინ

$$\frac{r_n}{R_n} = \frac{p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_n q_0}{P_0 Q_n + P_1 Q_{n-1} + \cdots + P_n Q_0} =$$
$$= P_{n0}\frac{q_0}{Q_0} + P_{n1}\frac{q_1}{Q_1} + \cdots + P_{nn}\frac{q_n}{Q_n}\,,$$

სადაც

$$P_{n\nu} = \frac{P_{n-\nu} Q_n}{P_0 Q_n + P_1 Q_{n-1} + \cdots + P_n Q_0} \le \frac{P_{n-\nu}}{P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-\nu}} \to 0\,.$$

თეორემა 4. ვთქვათ

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$$
$$q_0,\ q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \cdots$$

დადებითი მიმდევრობებია და

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots$$

ნებისმიერი მიმდევრობაა. მაშინ არსებობს ორივე ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + s_2 p_{n-2} + \cdots + s_n p_0}{p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0 q_n + s_1 q_{n-1} + s_2 q_{n-2} + \cdots + s_n q_0}{q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_n}$$

და ისინი ერთმანეთის ტოლია. (ეს თეორემა საინტერესოა იმ შემთხვევაში, როცა $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ არ არსებობს).

მოყვანილი თეორემების დამტკიცება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე შეიძლება განხორციელდეს სალექციო მუშაობაზე, სხვა ფაკულტეტებზე კი მიეცეთ დამტკიცების გარეშე და მოვახდინოთ მისი პრაქტიკული რეალიზება.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}.$$

ამოხსნა. ამ ზღვრის გამოთვლა სტანდარტული გზით ხდება შემდეგნაირად: წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი არის არითმეტიკული პროგრესია, ჯერ უნდა ვიპოვოთ მათი კერძო ჯამები და შემდეგ მოვახდინოთ გარდაქმნა, გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+(3n-2)}{2}n}{\frac{1+(4n-3)}{2}n}=\frac{3}{4}.$$

მაგრამ, როგორც ვხედავთ წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელისათვის სრულდება თეორემა 2–ის ყველა პირობა, კერძოდ

1) $b_n = 4n-3>0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$,

2) $1+5+9+\cdots+(4n-3)+\cdots$ მწკრივი განშლადია

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n-3}=\frac{3}{4}$,

ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}=\frac{3}{4}$.

მაგალითი 2. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}}.$$

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ, წილადის მნიშვნელისათვის ჯამის ფორმულის დაწერა არც თუ ისე ადვილია, მაგრამ თეორემა 2–ის გამოყენებით მისი გამოთვლა არანაირ სირთულეს არ წარმოადგენს. ვაჩვენოთ, რომ სრულდება თეორემის ყველა პირობა:

1) $b_n = \frac{1+n}{1+n^2} > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$,

2) $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$ მწკრივი განშლადია,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n}{1+n^2}}$ არსებობს.

მართლაც 1) ცხადია. რაც შეეხება 2)–ს, ის გამომდინარეობს მწკრივთა შედარების პირველი ნიშნიდან, რადგან $\frac{1}{n} < \frac{1+n}{1+n^2}$ და ჰარმონიული მწკრივი განშლადია. ვაჩვენოთ 3)–ს სამართლიანობა, გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n}{1+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{(n+1)(n+1)} = 1.$$

მაშასადამე, თეორემა 2–ის ყველა მოთხოვნა სრულდება და ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n}{1+n^2}} = 1.$$

§3. მიმდევრობა და მიმდევრობის ზღვრის გამოთვლის სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკა უმაღლესი მათემატიკის კურსში

ზღვრის ცნება მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებაა, რომელსაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო მათემატიკური ანალიზისათვის, არამედ ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგისათვის.

ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 300 წლით ადრე ცნობილი მეცნიერები: ევკლიდე, არისტოტელე და არქიმედე _ ფართობებისა და მოცულობების

გამოთვლაზე ამოცანების ამოხსნისას იყენებდნენ ზღვარის ცნების ინტუიციურ წარმოდგენას.

ზღვარის ცნების განსაზღვრის პირველი ცდა მოცემული იყო მე-17 საუკუნის ინგლისელი მათემატიკოსის ვალისის (1616-1703) შრომებში. ზღვართა თეორიის საკითხებით დაინტერესებული იყვნენ ნიუტონი და ლაიბნიცი. ნიუტონი ზღვარს განიხილავდა, როგორც „ცვლადის უკანასკნელ მნიშვნელობას“, ტერმინი „limes“ შემოღებული იქნა მის მიერ (1686). ზღვარის ცნების სრულყოფილ განსაზღვრას გვაძლევს პეტერბურგის აკადემიის წევრი ეილერი. მაგრამ მათ შემდეგ კიდევ დაახლოებით ნახევარი საუკუნე დასჭირდა ზღვართა თეორიას, რომ გამხდარიყო მათემატიკური ანალიზის თეორიის ახსნის ნამდვილი იარაღი.

გასული საუკუნის დაახლოებით 20 წლის მანძილზე ზღვართა თეორიისა და საერთოდ ანალიზის საკითხებზე მუშაობდა ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი კოში (1789-1857). მან თავის შრომებში „ანალიზის კურსი“ (1821) და „ლექციები ფუნქციონალურ აღრიცხვაში“ (1829) მოგვცა ზღვარის განსაზღვრა, რომელიც დაედო საფუძვლად მათემატიკური ანალიზის კურსს.

ზღვართა თეორიის განვითარების საქმეში გარკვეული წვლილი მიუძღვის ბოლცანოს.

ცვლადი სიდიდის ზღვარის ცნების ერთ-ერთი მოხერხებული განსაზღვრა მოგვცა ფრანგმა მათემატიკოსმა დალამბერმა (1717-1783).

განვიხილოთ ზღვრის გამოთვლის ზოგიერთი კერძო ხერხი.

3.1. ზღვართა გამოთვლა შტოლცის თეორემის გამოყენებით და მისი სწავლების მეთოდიკა

ტეპლიცის თეორემიდან, როგორც შედეგი გამომდინარეობს შტოლცის შემდეგი თეორემა, რომელსაც მათემატიკური ანალიზის მრავალ საკითხში დიდი გამოყენება აქვს. დავამტკიცებთ მას რამდენადმე დამოუკიდებელი მიდგომით, კერძოდ ტეპლიცის თეორემის გამოყენებით.

თეორემა. თუ

ა) $y_{n+1} > y_n \quad (n = 1,\ 2, \cdots)$,

ბ) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

გ) არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$,

მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (a –სასრულია), მაშინ, თუ ჩავთვლით რომ $y_0 = 0,\ x_0 = 0$ და

$$P_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n)$$

$$X_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\ )$$

მაშინ ჩვენ მივიღებთ, რომ სრულდება ტეპლიცის თეორემის პირობები P_{nk} –სა და X_n –თვის, რისთვისაც $t_n = \dfrac{x_n}{y_n}$, აქედან გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a .$$

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, მაშინ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას ვიმეორებთ $\left\{ \dfrac{y_n}{x_n} \right\}$ მიმდევრობისათვის, თუ წინასწარ დავრწმუნდებით, რომ

$$x_{n+1} > x_n \quad (n = 1,\ 2, 3, \cdots) \text{ და}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty .$$

განვიხილოთ შტოლცის თეორემის გამოყენება კონკრეტული ამოცანებისათვის.

მაგალითი 1. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4 + 5{,}5 + 7 + \cdots + \dfrac{3n-1}{2}}{3 + 6 + 9 + \cdots + 3(n-4)} .$$

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ მრიცხველი და მნიშვნელი, ორივე არითმეტიკული პროგრესიაა. ამ ზღვარის გამოსათვლელად უნდა გამოვთვალოთ წევრთა რიცხვები და გამოვიყენოთ წევრთა ჯამის ფორმულები.

მრიცხველისათვის $\qquad a_1 = 4;\ \ d = 1{,}5;\ \ a_m = \dfrac{3n-1}{2}$,

$$a_m = a_1 + d(n-1) = 4 + 1{,}5(m-1)$$

$$\frac{3n-1}{2}=4+1{,}5m-1{,}5$$

$$3n=6+3m$$

$$m=n-2$$

$$S_m=\frac{(a_1+a_m)m}{2}=\frac{\left(4+\frac{3n-1}{2}\right)(n-2)}{2}=\frac{(3n+7)(n-2)}{4}.$$

მნიშვნელისათვის $a_1=3;\ \ d=3;\ \ a_p=3(n-4)$

$$a_p=a_1+d(p-1)=3+3p-3$$

$$3p=3(n-4)$$

$$p=n-4$$

$$S_p=\frac{(a_1+a_p)p}{2}=\frac{(3+3n-12)(n-4)}{2}=\frac{(3n-9)(n-4)}{2},$$

მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+5{,}5+7+\cdots+\frac{3n-1}{2}}{3+6+9+\cdots+3(n-4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(3n+7)(n-2)}{4}}{\frac{(3n-9)(n-4)}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{7}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\left(3-\frac{9}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{2}$$

და ეს გაცილებით იოლად გამოითვლება შტოლცის თეორემის საშუალებით. დავუშვათ

$$x_n=4+5{,}5+7+\cdots+\frac{3n-1}{2},$$
$$y_n=3+6+9+\cdots+3(n-4),$$

მაშინ

$$x_{n-1}=x_n-\frac{3n-1}{2},$$
$$y_{n-1}=y_n-3(n-4)$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+5{,}5+7+\cdots+\frac{3n-1}{2}}{3+6+9+\cdots+3(n-4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n-1}{2}}{3(n-4)}=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 2. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}.$$

ამოხსნა. იმისათვის რომ გამოვთვალოთ ეს ზღვარი, საჭიროა მრიცხველი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots n\cdot(n+1)=1+1^2+2+2^2+\cdots+n+n^2=$$
$$=(1+2+3+\cdots+n)+\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right),$$

ამის შემდეგ სტუდენტებს უნდა დავუმტკიცოთ, რომ

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3}+\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^3}=0+\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

მაგრამ მისი გამოთვლა გამარტივდება შტოლცის თეორემის გამოყენებით. დავუშვათ

$$x_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1),$$
$$y_n=n^3,$$

მაშინ

$$x_{n-1}=x_n-n(n+1),$$
$$y_{n-1}=(n-1)^3,$$

შტოლცის თეორემის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_n+n(n+1)}{n^3-(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3n^2-3n+1}=\frac{1}{3}.$$

მაგალითი 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}$ ზღვარის გამოთვლა დაიყვანება $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}$ ზღვარის გამოთვლამდე.

მართლაც, ვთქვათ

$$x_n=1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1},$$
$$y_n=n^\alpha,$$

მაშინ

$$x_{n+1} = 1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1} + \left(n+1\right)^{\alpha-1},$$

$$y_{n+1} = \left(n+1\right)^{\alpha}.$$

შტოლცის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^{\alpha-1}}{\left(n+1\right)^{\alpha} - n^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}{n^{\alpha}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\alpha}.$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^{\alpha-1}}{\left(n+1\right)^{\alpha} - n^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}.$$

მაგალითი 4. დაამტკიცეთ, რომ თუ p ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შტოლცის თეორემა.

შემოვიღოთ

$$x_n = \left(p+1\right)\left(1^p + 2^p + \cdots + n^p\right) - n^{p+1},$$

$$y_n = \left(p+1\right) n^p,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(p+1\right)\left(n+1\right)^p - \left(n+1\right)^{p+1} - n^{p+1}}{\left(p+1\right)\left[\left(n+1\right)^p - n^p\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\left(p+1\right)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p\left(p-1\right)}{2} n^{p-2} + \cdots + 1\right]}{\left(p+1\right)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p\left(p-1\right)}{2} n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right]} + \right.$$

$$\left. + \frac{-n^{p+1} - \left(p+1\right) n^p - \frac{\left(p-1\right)p}{2} n^{p-1} - \cdots - 1 + n^{p+1}}{\left(p+1\right)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{\left(p-1\right)p}{2} n^{p-2} + \cdots + 1 - n^p\right]} \right\},$$

დავაჯგუფოთ ერთი და იმავე ხარისხის მქონე წევრები, შემდეგ გავყოთ მნიშვნელი და მრიცხველი n^{p-1}–ზე და აღვნიშნოთ $o\left(\frac{1}{n}\right)$–ით ყველა იმ წევრის ჯამი, რომელთა ხარისხი 1–ზე მეტია. ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p(p+1)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1)+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 5. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta}$, როცა $\alpha>0,\ \beta>0$.

ამოხსნა. შტოლცის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^\beta\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta-1\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^\beta\left[1+\frac{\beta}{n}-1\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-\alpha}}{n^{\beta-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta+\alpha-1}}=\begin{cases}0, & \alpha+\beta>1,\\ \infty, & \alpha+\beta<1.\end{cases}.$$

ჩვენს მიერ განხილული მაგალითები მოცემულია ბერმანის, დემიდოვიჩის, გ. ონიანის, ნ. ნუცუბიძის, ე. ჯაფარიძის, ტ. ქემოკლიძისდა ზ. სოხაძის მათემატიკური ანალიზის ამოცანათა კრებულებში. მე–3 და მე–4 მაგალითების მსგავსი მაგალითები მათი ამოხსნის სირთულის გამო მათემატიკის პირველ კურსზე არ შეისწავლება, მაგრამ შტოლცის თეორემის გამოყენებით ვაჩვენეთ, რომ მიმდევრობის ზღვართა გამოთვლა გაცილებით ადვილია და უფრო ნაკლებ დროს მოითხოვს, ამიტომ დღის წესრიგში დგება მიმდევრობის ზღვართა გამოთვლის არასტანდარტული ხერხების გამოყენების აუცილებლობა.

3.2. ზღვართა გამოთვლა უკუგდების პრინციპით და მისი სწავლების მეთოდიკა

ვთქვათ $E \subset R$ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. განვიხილოთ ფუნქცია $f : E \to R$. ზოგ შემთხვევაში, როცა E სიმრავლიდან აღებული წერტილი x „უსაზღვროდ უახლოვდება“ რაიმე a მნიშვნელობას, x წერტილის f სახე, ე.ი. $f(x)$ რიცხვი ამის შედეგად „უსაზღვროდ უახლოვდება“ გარკვეულ A რიცხვს. ამ დროს ამბობენ, რომ A წარმოადგენს f ფუნქციის ზღვარს a წერტილში E სიმრავლის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ x წერტილის „უსაზღვრო დაახლოება“ a რიცხვთან, როცა $x \in E$, შესაძლებელი იქნება მაშინ, როდესაც a წერტილის ნებისმიერ „მცირე მიდამოში“ იმყოფება E სიმრავლის წერტილები. ასეთი, რამ მაშინ გვექნება, როცა a წერტილი არის E სიმრავლის ზღვარითი წერტილი. ამრიგად, f ფუნქციის ზღვარზე ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა a არის E სიმრავლის ზღვარითი წერტილი. ამავე დროს „x ახლოა a-სთან“ (ან სათანადოდ „$f(x)$ ახლოა A რიცხვთან“) ცხადია იმას უნდა მოასწავებდეს, რომ მანძილი x და a წერტილებს (ან სათანადოდ მანძილი $f(x)$ და A რიცხვებს) შორის „ნებისმიერად მცირეა“. ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზღვრის განმარტება a წერტილში.

ვთქვათ $E \subset R$ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა და a მისი ზღვარითი წერტილია, ხოლო $f : E \to R$ რაიმე ფუნქციაა.

განმარტება 1. A რიცხვს ეწოდება $f : E \to R$ ფუნქციის ზღვარი $x = a$ წერტილში (ანუ როცა $x \to a$ და $x \in E$) კოშის აზრით, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როდესაც $x \in E$ და $0 < |x - a| < \delta$ სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

თუ A - არის f ფუნქციის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის E სიმრავლის გასწვრივ a წერტილისაკენ, მაშინ ამ ფაქტს ასე წერენ: $f(x) \to A$, როცა $x \to a$, $x \in E$, ან $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x) = A$. ნაცვლად სიმბოლოსი $x \to a, x \in E$, ჩვენ როგორც წესი გამოვიყენებთ უფრო შემოკლებულ აღნიშვნას $E \ni x \to a$ და ნაცვლად $\lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$ დავწერთ $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$.

a წერტილის „δ - მიდამო“ ანუ სიმეტრიული (წრიული) მიდამო ეწოდება სიმრავლეს $U(a, \delta) = \{x \in R : |x - a| < \delta\}$, სადაც $\delta > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. ხოლო როგორც ვიცით a წერტილის გაჩხვლეტილი მიდამო ეწოდება სიმრავლეს

$$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x\in R:0<|x-a|<\delta\}=\overset{0}{U}(a).$$

სიმრავლეებს:

$$U_E(a)=E\cap U(a,\delta)=E\cap U(a),$$

$$\overset{0}{U}_E(a)=E\cap\overset{0}{U}(a)$$

შესაბამისად ეწოდებათ a წერტილის მიდამო და გაჩხვლეტილი მიდამო E სიმრავ-ლეში.

სიმრავლე $V(A,\varepsilon)=V(A)=\{y\in R:|y-A|<\varepsilon\}$ არის $A\in R$ წერტილის ε -მიდამო ანუ მიდამო.

ამ შენიშვნების შემდეგ, ფუნქციის ზღვრის კოშის აზრით განმარტება, წერ-ტილის მიდამოს ცნების გამოყენებით შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ.

განმარტება 2. A რიცხვს ეწოდება $f:E\to R$ ფუნქციის ზღვარი როცა $E\ni x\to a$ კოშის აზრით, თუ A წერტილის ყოველი $V(A,\varepsilon)=V(A)$ მიდამოსათვის არსებობს E სიმრავლეში a წერტილის გაჩხვლეტილი $\overset{o}{U}_E(a)=E\cap\overset{o}{U}(a,\delta)$ მიდამო ისეთი, რომ

$$\forall x\in\overset{o}{U}_E(a),\quad f(x)\in V(A)=V(A,\varepsilon),$$

ანუ რაც იგივეა

$$f\left[E\cap\overset{o}{U}(a,\delta)\right]\subset V(A,\varepsilon).$$

ჩვენ ზემოთ მოვიყვანეთ რიცხვითი ფუნქციის ზღვრის ორი ერთმანეთის ეკვივალენტური განმარტება, როცა $a,A\in R$. ამასთანავე სხვადასხვა მიზნებისათვის ხელსაყრელია ან პირველი განმარტება, ან მეორე განმარტება. ასე მაგალითად რიცხვითი შეფასებების დროს მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ პირველი განმარტებით, ხოლო მეორე განმარტება გამოიყენება არა მარტო რიცხვითი ფუნქციებისათვის არამედ ისეთი ფუნქციებისათვის (ასახვებისათვის), რომლებიც ახორციელებენ ტოპოლოგიური სივრცის ტოპოლოგიურ სივრცეში ასახვას.

ახლა ჩვენ ვნახავთ, რომ რიცხვითი $f:E\to R$ $(E\subset R)$ ფუნქციის ზღვრის განმარტება შეიძლება აღიწეროს რიცხვთა კრებადი მიმდევრობების ტერმინებში. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ, თუ a წერტილი წარმოადგენს E სიმრავლის ზღვარით წერტილს, მაშინ მოიძებნება უამრავი ისეთი $(x_k)_{k\geq 1}$ მიმდევრობა, რომ $x_k\in E$, $x_k\neq a$, $\forall k\in N$ და $x_k\to a$. ყველა ასეთი მიმდევრობა, თუ E არის f ფუნქციის განსაზღვრის არე, ბუნებრივად აჩენს ამ მიმდევრობის f სახეების $(f(x_k))_{k\geq 1}$ მიმდევრობას. თურმე ფუნქციის ზღვარს a წერტილში შეიძლება მივცეთ ასეთი დახასიათება.

განმარტება 3. A რიცხვს ეწოდება $f:E\to R$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ჰაინეს აზრით, თუ როგორიც არ უნდა იყოს a წერტილისაკენ კრებადი $(x_n)_{n\geq 1}\subset E$ $(x_n\neq a,\forall n\in N)$ მიმდევრობა, ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა $(f(x_n))_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

თეორემა 1. $f:E\to R$ რიცხვითი ფუნქციის ზღვრის განმარტებები კოშის და ჰაინეს აზრით, ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

შევეხოთ ახლა ზღვრის კიდევ ერთ ახალ ცნებას, რომელიც ჩვენს მიერ განხილული შემთხვევისაგან იმით განსხვავდება, რომ განიხილება x-ის „უსაზღვრო დაშორება“ R სივრცის ნებისმიერი წერტილისაგან. თუ ამის შედეგად $f(x)$ მნიშვნელობანი „უსაზღვროდ უახლოვდებიან“ რაიმე A რიცხვს, ამბობენ რომ A არის f ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში და წერენ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

იმისათვის, რომ ეს განსაზღვრა აზრიანი იყოს, E სიმრავლე უნდა შეიცავდეს R სივრცის „რაგინდ შორეულ“ წერტილებს, რაც მაშინ მოხდება, როცა E არ არის შემოსაზღვრული სიმრავლე, R სივრცეში (ასეთ დროს ხშირად ამბობენ, რომ უსასრულობა წარმოადგენს E სიმრავლის ზღვარით წერტილს). ახლა მოვიყვანოთ შესაბამისი განმარტება.

განმარტება 4. ვთქვათ $E\subset R$ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე შემოსაზღვრული სიმრავლეა, ხოლო $f:E\to R$ რიცხვითი ფუნქციაა. A რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში ანუ როცა $x\to\infty$, თუ A რიცხვის ნებისმიერი $U(A)$ მიდამოსათვის (ან $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის) არსებობს $M>0$ რიცხვი, რომ, როცა $x\in E$ და $|x|>M$, გვექნება $f(x)\in U(A)$ (ან სათანადოდ $|f(x)-A|<\varepsilon$) და ვწერთ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

იგივე განმარტება შესაძლებელია ჩამოყალიბებულ იქნეს „მიმდევრობათა“ საშუალებით.

განმარტება 5. A რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის ზღვარი უსასრულობაში, თუ E სიმრავლიდან აღებული წერტილთა ნებისმიერი უსასრულოდ დიდი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობისათვის (ე.ი. მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც გვაქვს $x_n\to\infty$, როცა $n\to\infty$), გვექნება: $f(x_n)\to A$,

ცხადია, რომ ეს ორი განმარტება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

თეორემა 2. თუ მოცემულია რამდენიმე ფუნქცია $f_k : E \to R$, $k = \overline{1,n}$ და თითოეულ მათგანს გააჩნია ზღვარი $x = a$ წერტილზე, მაშინ მათ ჯამსაც აქვს ზღვარი და ჯამის ზღვარი ზღვართა ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

თეორემა 3. თუ მოცემულია რამდენიმე ფუნქცია $f_k : E \to R$, $k = \overline{1,n}$ და თითოეულ მათგანს გააჩნია ზღვარი $x = a$ წერტილზე, მაშინ მათ ნამრავლსაც აქვს ზღვარი და ნამრავლის ზღვარი ზღვართა ნამრავლის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x\to a}\prod_{k=1}^{n} f(x) = \prod_{k=1}^{n}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

თეორემა 4. თუ $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$ და $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = B$ და $B \neq 0$, მაშინ არსებობს $\dfrac{f_1}{f_2}$ ფარდობის ზღვარი და ფარდობის ზღვარი ზღვართა ფარდობის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}.$$

განმარტება 6. $f : E \to R$ ფუნქციას, ეწოდება უსასრულოდ დიდი $x = a$ წერტილზე (ან როცა $x \to a$) თუ ნებისმიერი M დადებითი (კერძოდ რაგინდ დიდი) რიცხვისათვის არსებობს E სიმრავლეში a წერტილის გაჩხვლეტილი $\overset{o}{U}_a$ მიდამო ისეთი, რომ

$$|f(x)| > M, \text{ როცა } x \in \overset{o}{U}_a.$$

$\overset{o}{U}_a$ მიდამო დამოკიდებულია M რიცხვზე, კერძოდ M-ის გაზრდა იწვევს, საზოგადოდ $\overset{o}{U}_a$ მიდამოს შევიწროებას.

ამგვარად $f : E \to R$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია a წერტილზე, თუ როცა $x \to a$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცვალებადობის კანონი ისეთია, რომ მისი მოდული განუსაზღვრელად იზრდება. მაგალითად ფუნქცია $f(x) = \dfrac{1}{x}$ უსასრულოდ დიდია $x = 0$ წერტილზე.

თუ $f : E \to R$ ფუნქცია უსასრულოდ დიდია $x = a$ წერტილზე, მაშინ ამ გარემოებას მოკლედ ასე ავღნიშნავთ:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

განმარტება 7. $\alpha : E \to R$ ფუნქციას ეწოდება a წერტილზე უსასრულოდ მცირე, თუ ამ წერტილზე მისი ზღვარი ნულის ტოლია.

ამგვარად, თუ $\alpha : E \to R$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $x \to a$, ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 .$$

თუ გავიხსენებთ ფუნქციის ზღვრის განმარტებას კოშის აზრით, მაშინ უსასრულოდ მცირე, შეიძლება ასე განვსაზღვროთ

განმარტება 8. $\alpha : E \to R$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე, როცა $x \to a$, თუ $\forall \varepsilon > 0$, რიცხვისათვის არსებობს a წერტილის $\overset{o}{U}_a$ მიდამო, ისეთი, რომ

$$|\alpha(x)| < \varepsilon , \text{ როცა } x \in \overset{o}{U}_a .$$

აღვნიშნოთ, რომ უსასრულოდ მცირეს და უსასრულოდ დიდს შორის არსებობს მჭიდრო კავშირი. სახელდობრ, ანალოგიურად მიმდევრობათა შემთხვევისა ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 5. თუ $f : E \to R$ უსასრულოდ დიდია $x = a$ წერტილში და $\forall x \in E$ $f(x) \neq 0$, მაშინ $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა $x = a$ წერტილში.

თეორემა 6. თუ $\alpha : E \to R$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $x \to a$, მაშინ $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ უსასრულოდ დიდია, როცა $x \to a$.

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ წარმოადგენენ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებს, როცა $x \to a$, ე.ი. $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$.

1. თუ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, მაშინ $\alpha(x)$ ეწოდება მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე $\beta(x)$-ის მიმართ წერტილში.

2. თუ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, მაშინ ამბობენ, რომ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ წარმოადგენენ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებს.

3. თუ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, მაშინ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებს უწოდებენ ეკვივალენტურ ანუ ტოლფას უსასრულოდ მცირეებს.

4. თუ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A \neq 0$, მაშინ $\alpha(x)$ ეწოდება k რიგის უსასრულოდ მცირე $\beta(x)$-ის მიმართ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 7. ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვარი არ შეიცვლება თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით.

თეორემა 8. თუ $\alpha(x),\ \beta_1(x),\ \beta_2(x),\cdots,\beta_m(x)$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to a$ და $\alpha(x)$ წარმოადგენს დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეს $\beta_1(x),\ \beta_2(x),\cdots,\beta_m(x)$ უსასრულოდ მცირეთა მიმართ, მაშინ $\alpha(x)+\beta_1(x)+\beta_2(x)+\cdots+\beta_m(x)$ ეკვივალენტურია $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირისა.

თეორემა 9. ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები: $f_1:E\to R$, $f_2:E\to R$ და $\varphi:E\to R$. თუ $f_1(x)\approx f_2(x)$, როცა $x\to a$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f_2(x)\varphi(x)\right].$$

ეს ტოლობა ასე უნდა გავიგოთ, რომ თუ არსებობს მისი მარცხენა ნაწილის ზღვარი, მაშინ არსებობს მარჯვენა ნაწილის ზღვარიც და პირიქით.

აქედან გამომდინარეობს, რომ, თუ ამ ზღვრებიდან ერთერთი არ არსებობს, მაშინ არ არსებობს მეორეც.

სასარგებლოა შემდეგი **განმარტება 9**. თუ $\varphi:E\to R$ ფუნქციისათვის შეიძლება შევარჩიოთ α და m რიცხვები, სადაც $\alpha\neq 0$, ისე, რომ $\varphi(x)\approx\alpha x^m$, როცა $x\to 0$, მაშინ ამბობენ, რომ αx^m ფუნქცია არის φ ფუნქციის მთავარი ხარისხოვანი წევრი. ცხადია, რომ α და m რიცხვები ცალსახად განისაზღვრებიან φ ფუნქციით

თუ αx^m და βx^n $(\alpha,\beta\neq 0)$ არიან შესაბამისად φ და g ფუნქციების მთავარი ხარისხოვანი წევრები, მაშინ <u>მე-9 თეორემის</u> თანახმად

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta}, \text{ როცა } m=n,\\ 0, \text{ როცა } m>n,\\ \infty, \text{ როცა } m<n.\end{cases}$$

განვიხილოთ მაგალითები ზღვართა გამოთვლაზე უკუგდების პრინციპით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$.

ტრადიციული გზით ეს ზღვარი შემდეგნაირად გამოითვლება : აქ მრიცხველი, როგორც ორი დადებითი მიმდევრობის სხვაობა, $\left(x^2+2\right)-3x$ განუსაზღვრელობაა. წინასწარი გარდაქმნის გარეშე ამ ფარდობის ბუნება გაურკვეველია. გავყოთ მრიცხველი და მნიშვნელი x^2-ზე, მივიღებთ :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}.$$

$\frac{3}{x}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^2}$ წარმოადგენენ უსასრულოდ მცირეებს, ე.ი. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$. ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემებს ფარდობისა და ჯამის ზღვრის შესახებ, საბოლოოდ მივიღებთ $\frac{1}{2}$. ამრიგად,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად, $\frac{1}{2}$-ია ის რიცხვი, რომლისკენაც მიისწრაფვის $\left(\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $x\to\infty$.

ახლა განვიხილოთ ამ ზღვრის გამოთვლის შედარებით უფრო მოკლე გზა: **განმარტება 9**-ის თანახმად მრიცხველის მთავარი ხარისხოვანი წევრია x^2, ხოლო მნიშვნელის _ $2x^2$. თუ გავითვალისწინებთ **თეორემა 9**-ს, მივიღებთ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

შემდეგ მაგალითებში მოვერიდებით სიტყვიერი ახსნით გადატვირთვას, თვით გამოთვლის პროცესის ჩვენებით ცხადი გახდება, თუ რა სახის გარდაქმნებს ვაწარმოებთ ამა თუ იმ სახის განუსაზღვრელობის გახსნისათვის და იქვე განვიხილავთ მათ ამოხსნას ზემოთ განხილული მეთოდით.

მაგალითი 2. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3\cdot4^x}{2\cdot4^{x+1}-5^x}$.

ამოხსნა. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3\cdot4^x}{2\cdot4^{x+1}-5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot5^x-3\cdot4^x}{8\cdot4^x-5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\cdot\left(5-3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)}{5^x\cdot\left(8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x}{8\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^x-1}=\frac{5-3\cdot0}{8\cdot0-1}=-5.$$

როგორც ვხედავთ, რამდენიმე ოპერაციის ჩატარება მოგვიხდა პასუხის მისაღებად, რაც სრულებით არ არის საჭირო თუ მას ამოვხსნით შემდეგნაირად : $5^{x+1}-3\cdot 4^x \approx 5^{x+1}$ და $2\cdot 4^{x+1}-5^x \approx 5^x$, ამიტომ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3\cdot 4^x}{2\cdot 4^{x+1}-5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 5^x}{-5^x}=-5 .$$

მაგალითი 3. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ ამ ზღვრის გამოთვლა ტრადიციული გზით კიდევ უფრო რთულია, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}\approx\sqrt[3]{x^4}$ და $\sqrt[3]{x^7+1}\approx\sqrt[3]{x^7}$, მაშინ მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}}=0 .$$

მაშასადამე, ზემოთ განხილული მაგალითებიდან შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მიუხედავად იმისა, ზღვრების გამოთვლა ტრადიციული გზით არანაირ სირთულეს არ წარმოადდგენს, მაინც უპრიანი იქნება მათი გამოთვლა უკუგდების პრინციპით, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში შეგვეძლება გაცილებით უამრავი ამოცანა ამოვხსნათ

3.3. ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრების სწავლების მეთოდიკა

უმაღლეს მათემატიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ერთ განსაკუთრებულ რიცხვს, რომელსაც ნეპერის რიცხვი ეწოდება (შოტლანდიელი მათემატიკოსი, 1550-1617 წ.). საჭიროა ყურადღება გავამახვილოთ დიფერენციალური აღრიცხვისათვის ერთ მეტად საჭირო და მნიშვნელოვან ზღვარზე. ეს არის ისეთი რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი, რომლის ზოგადი წევრია $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ამ ზღვარს ეწოდება ნეპერის რიცხვი და ის აღინიშნება e ასოთი, ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e .$$

ახლა მოვახდინოთ e რიცხვის შეფასება. ბერნულის უტოლობის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $(x_n)_{n\ge 1}$ მიმდევრობა მკაცრად ზრდადია, ამავე დროს $\forall n\in N$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\frac{1}{n} = 2 .$$

აშკარაა, რომ $\forall n \in N$, $x_n < y_n$. რადგან $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა მკაცრად კლება-დია, ამიტომ $\forall n \in N$

$$x_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 < 3 .$$

მაშასადამე $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია $\left(1+\frac{1}{5}\right)^6$ რიცხვით, ამიტომ 2< e <3. მტკიცდება, რომ e ირაციონალური რიცხვია, ე.ი. უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი და e =2,7182818284...

სასკოლო მათემატიკის კურსიდან ჩვენ ვიცნობთ ე.წ. ათობით ლოგარითმს, ე.ი. დადებითი რიცხვის ლოგარითმს 10-ის ფუძით. მათემატიკაში განსაკუთრებით გამოიყენება ისეთი ლოგარითმები, სადაც ფუძედ აღებულია e რიცხვი. მოცემული $A>0$ რიცხვის ლოგარითმი e ფუძით აღინიშნება სიმბოლოთი $\ln A$ და ეწოდება A რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი.

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$\alpha(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x ,$$

სადაც $x \in R$. მტკიცდება, რომ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (1)$$

და

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

თეორემა 1. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომლებისთვისაც $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$. მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\left[f(x)-1\right]} . \qquad (2)$$

დამტკიცება. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებისა და ზღვართა შესახებ თეორემების გამოყენებით გვაქვს

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln\left[1+f(x)-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\left(f(x)-1\right)} .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

უმაღლესი მათემატიკის კურსში, ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრები გამოითვლება შემეგნაირად

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left\{\left[1+\left(f(x)-1\right)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\varphi(x)\cdot\left[f(x)-1\right]}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to x_0}\left[1+\left(f(x)-1\right)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\left[f(x)-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\left[f(x)-1\right]}.$$

მაშასადამე, იმისათვის რომ ამოვხსნათ ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრები, საჭიროა მას მივცეთ (1) სახე, რისთვისაც ზღვარქვეშა ფუნქციას უნდა დაუმატოთ და გამოვაკლოთ ერთი და მოვახდინოთ შესაბამისი გარდაქმნები.

ასე მაგალითად: იპოვეთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$.

ამოხსნა.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x-1}-1\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)\cdot\frac{x}{x-1}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}}=e^{1}=e.$$

სტუდენტებისათვის სირთულეს არ წარმოადგენს

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\left[f(x)-1\right]}$$

ფორმულის დამახსოვრება, რომლის გამოყენებით ზემოთ განხილული და მისი მსგავსი ზღვრების გამოთვლა ნაკლებად შრომატევადია. ამიტომ, უპრიანი იქნება მათ დაუმტკიცოთ თეორემა 1, ამოვხსნათ ერთი მაგალითი ტრადიციული გზით, შემდეგ კი (2) ტოლობით და ამის შემდეგ შევთავაზოთ მაგალითები.

ამოვხსნათ ზემოთ მოცემული ზღვარი (2) ფორმულის გამოყენებით. გვაქვს

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-x)\cdot\left(1-\frac{1}{x}-1\right)}=e^{1}=e.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

ამოხსნა. ეს ზღვარი გამოვთვალოთ ჯერ ტრადიციული გზით. მოვახდინოთ შემედგი გარდაქმნა

$$\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\left[\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}},$$

მივიღებთ

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e.$$

ახლა იგივე ზღვარი გამოვთვალოთ (2) ფორმულის გამოყენებით. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(1+\sin x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e.$$

ასევე მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებს დავუმტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2. თუ $f(x)\sim f_1(x)$ და $\varphi(x)\sim\varphi_1(x)$, ამასთანავე $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\right]^{\varphi_1(x)}. \qquad (3)$$

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ 3.2.8 თეორემას, მივიღებთ

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f_1(x)}{\frac{1}{\varphi_1(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi_1(x)\ln f_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\right]^{\varphi_1(x)},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2–ი სამართლიანია და ანალოგიურად მტკიცდება მაშინაც, როცა $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, ან $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ და $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$.

მაგალითი 2. გამოთვალეთ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

ამოხსნა. თუ ვისარგებლებთ თეორემა 2–ით და თეორემა 1–ით, გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\ln a+1+x\ln b}{1+x\ln c+1+x\ln d}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x\ln ab}{2+x\ln cd}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x\ln ab-x\ln cd}{2+x\ln dc}\right)}=e^{\frac{\ln\frac{ab}{cd}}{2}}=e^{\ln\sqrt{\frac{ab}{cd}}}=\sqrt{\frac{ab}{cd}}\,.$$

ტრადიციული გზით ამ მაგალითის ამოხსნა, როგორც ქვემოთ დავინახავთ შედარებით დიდ დროს მოითხოვს და აქვე აღვნიშნოთ, რომ, სტუდენტებს გაუჭირდათ მისი დაყვანა (1) სახეზე, ხოლო ზემოთ მოცემული ხერხი მათთვის გაცილებით ადვილი აღმოჩნდა. მაშასადამე

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-c^x-d^x}{c^x+d^x}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{c^x+d^x}{a^x+b^x-c^x-d^x}}\right)^{\frac{c^x+d^x}{a^x+b^x-c^x-d^x}\cdot\frac{a^x+b^x-c^x-d^x}{c^x+d^x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x+b^x-c^x-d^x}{c^x+d^x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+x\ln a+1+x\ln b-1-x\ln c-1-x\ln d}{1+x\ln c+1+x\ln d}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{ab}{cd}}{2+x\ln cd}}=e^{\frac{\ln\frac{ab}{cd}}{2}}=\sqrt{\frac{ab}{cd}}\,.$$

§4. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა და მისი ზოგიერთი გამოყენება მათემატიკის შესწავლაში

განტოლებათა ამოხსნის გზების ძიებამ დიდად შეუწყო მათემატიკის განვითარებას. მრავალი მათგანისათვის შემუშავებული იქნა ამოხსნის კერძო ხერხები. მაგალითად, წრფივი, კვადრატული, კუბური, ბიკვადრატული განტოლებებისათვს. მაგრამ, როგორც ზოგადსაგანმანათლებლო, ისე უმაღლეს სკოლებში განხილული განტოლებების კლასი მხოლოდ წრფივი, კვადრატული, კუბური და ბიკვადრატული განტოლებებით არ ამოიწურება, რადგან არსებობს მრავალი სახის ამოცანა, რომლებიც მათზე განსხვავებულ სახეებზე დაიყვანება.

პრაქტიკული გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მოსწავლეები ხშირად ვერ ართმევენ თავს სხვადასხვა სახის განტოლებების ამოხსნას. ამის მიზეზი ბევრი რამ

შეიძლება იყოს, მაგრამ მათ შორის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანია მოსწავლეთა მიერ ასეთი განტოლებების გარდაქმნების უნარ-ჩვევების სუსტად ფლობა, ზოგჯერ ამოცანის პირობა ისეთი ფორმით არის ჩამოყალიბებული, რომ განსხვავდება ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანის პირობიდან და სხვა.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამოცანების, განტოლებების, უტოლობების, მათი სისტემების გარდაქმნის საბოლოო მიზანია იმ უმარტივესი განტოლების, ან განტოლების სისტემის, უტოლობის მიღება, რომლის ამოხსნის ალგორითმი მოსწავლეთათვის ცნობილია.

თანამედროვე ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო და უმაღლესი სკოლის რეფორმა მიზნად ისახავს სკოლის საქმიანობის გარდაქმნას. დღევანდელ სკოლაში სწავლების ეფექტურობასა და ხარისხს მოსწავლეთა შემოქმედებითი განვითარების დონე განსაზღვრავს. განვითარების დონე მნიშვნელოვანწილად დამოუკიდებელია შემოქმედებით აქტივობაზე, რომელიც აყალიბებს ისეთ პიროვნულ მახასიათებელს, როგორიცაა: ინიციატივა; ჯანმრთელი სულიერი მდგომარეობა; მზადყოფნა რაღაც ახლის, არასტანდარტულის შესქმნელად და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში მოსწავლეთა ძირითად საქმიანობას წარმოადგენს შემდეგი დივერგენტული პროცესები: მრავალგვარი მოსაზრების წამოყენება; არასტანდარტული, ორიგინალური და იშვიათი გადაწყვეტილების მიღება; გამომგონებლობა; აზროვნების სისხარტე; ცოდნის დამოუკიდებლად დაუფლებისა და სხვადასხვა სიტუაციებში მისი გამოყენებისაკენ სწრაფვა და სხვა.

სასკოლო მათემატიკის საამოცანო მასალა შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად:

1) ამოცანები, რომლებიც ორიენტირებულია კონკრეტული სასწავლო მასალის ათვისებაზე;

2) ამოცანები, რომლებიც მოსწავლეებში უზრუნველყოფს შემეცნებით საქმიანობის ხერხების ფორმირებას.

პირველი ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის სწავლების მიზანია მოსწავლეთა შეიარაღება ცოდნის განსაზღვრული სისტემით. აღნიშნული ჯგუფის ამოცანები ცნობილი ალგორითმების საშუალებით ამოიხსნება და მეთოდიკურ ლიტერატურაში სტანდარტული ამოცანების სახელწოდებით მოიხსენიება. მოსწავლეთათვის ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლების სტრატეგია ორი სახის სასწავლო სიტუაციით ხორციელდება:

ა) სტანდარტული ამოცანების ამოხსნა, რომელთა ამოხსნის საერთო მეთოდი მოსწავლეებისათვის ჯერ კიდევ არ არის ცნობილი. ასეთ შემთხვევაში ხდება რიგი ტიპიური ამოცანების ამოხსნის წინასწარი ორგანიზება, რომლის დროსაც სწავლების

სტრატეგია ორიენტირებულია მასწავლებლის ხელმძღვანელობლით მოსწავლეთა მიერ განსახილველი კლასის ყველა ამოცანის ამოხსნის საერთო მეთოდის ერთობლივ აღმოჩენაზე;

ბ) სტანდარტული ამოცანების ამოხსნა, რომელთა ამოხსნის საერთო მეთოდი მოსწავლეებისატვის უკვე ცნობილია, ასეთ სიტუაციაში საქმე გვაქვს ამოხსნის ცნობილ ალგორითმების გამოყენებადობის გარკვევასთან, ე.ი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სტანდარტული ამოცანის ამოსნისათვის საჭიროა გავარკვიოთ ერთნაირი ტიპის სტანდარტული ამოცანების ის კლასი, რომელსაც მიეკუთვნება მოცემული ამოცანა; ავარჩიოთ ჩვენთვის ცნობილი ალგორითმებიდან სახელდობრ ის, რომელიც განკუთვნილია ამოცანათა ამ კლასისათვის და შემდეგ სწორად გამოვიყენოთ ეს ალგორითმი მოცემული კერძო ამოცანის ამოსახსნელად. როგორც ვხედავთ, ასეთი ქმედება არ ითვალისწინებს ამოხსნის გზის ძიებას, რადგან იგი მიიღება გამზადებული, უკვე ათვისებული „რეცეპტით“.

მათემატიკის სასკოლო კურსი მდიდარია სტანდარტული ამოცანების სხვადასხვა კლასებით. თუ სწავლება შემოიფარგლება მხოლოდ სტანდარტული ამოცანების განხილვით, იგი სასურველ გავლენას ვერ მოახდენს მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების განვითარებაზე. მაგრამ, ყოველივე ეს სრულებით არ ნიშნავს იმას, რომ ჩვენ განსაკუთრებული ყურადღება არ უნდა დავუთმოთ ალგორუთმულად ამოხსნადი ამოცანების სწავლებას. სტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ჩვევების კარგად დაუფლების გარეშე შეუძლებელია არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნა, რადგან ხშირ შემთხვევაში, არასტანდარტული ამოცანები ამოხსნის ძიების პროცესში დაიყვანება სტანდარტულ ამოცანებზე.

მეორე ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის, და საერთოდ, მოსწავლეთათვის ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნის სწავლება ერთ-ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს იმით აიხსნება, რომ ასეთი ამოცანების ამოხსნა ევრისტიკული საქმიანობასთანაა დაკავშირებული. ევრისტიკული ქმედების სწავლება კი შედარებით რთულია, ვიდრე ალგორითმული ქმედების. არასტანდარტული ამოცანა არ შეიძლება უშუალოდ ამოიხსნას რომელიმე ცნობილი ალგორითმის გამოყენებით. ასეთი ამოცანის ამოხსნისას წარმოიქმნება ამოხსნის ძიების აუცილებლობა, რაც აზროვნების დაძაბულ მუშაობას მოითხოვს. ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლებას განსაკუთრებული ადგილი უნდა დაეთმოს სასკოლო მატემატიკის კურსში. ასეთი ამოცანების იწვევს აზროვნების დაძაბვას და წარმოქმნის აღმოჩენის სიხარულს განვითარებული სწავლების უმნიშვნელოვანეს ემოციურ ფაქტორებს. მასწავლებლის მიერ ორგანიზებული ამოხსნის ძიების დაძაბულ გარემოში მოხვედრილი

მოსწავლეები, აღმოჩენის სიხარულის განცდიდან გამომდინარე, თანდათანობით ეუფლებიან ამოცანის ამოხსნის ჩვევებს და მათში იღვიძებს ინტერესი დამოუკიდებელი ამოხსნის ძიებისადმი. [76], [69],[53].

ხშირად არასტანდარტულ ამოცანებს სთავაზობენ მხოლოდ ისეთ მოსწავლეებს, რომლებიც უკვე იჩენენ გარკვეულ ინტერესს მათემატიკის შესწავლისადმი. ამას აკეთებენ იმის იმედით, რომ მოსწავლეები თვითონვე მიხვდებიან, თუ როგორ უნდა ამოხსნან ისინი. აქვე შევნიშნოთ, რომ მიხვედრა ადვილი საქმე არ არის. ის საჭიროებს ისეთივე სწავლებას, როგორადაც ვისწავლით, მაგალითად, თეორიების დამტკიცებას და სხვა. მათემატიკით დაინტერესებულ მოსწავლეთა წრის გაფართოება მეტად აქტუალური პრობლემაა. მის გადასაჭრელად არაა საკმარისი მოსწავლეებისათვის არასტანდარტული ამოცანების უბრალო შეთავაზება, რადგან ასეთ შემთხვევაში მათი უმრავლესობის წინაშე შეიძლება წარმოიშვას გადაულახავი სიძნელეები. ეს სიძნელეები მათ მიიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ არ გააჩნიათ ასეთი ამოცანების ამოხსნისათვის საჭირო უნარ-ჩვევები. ამიტომ, აქედან გამომდინარე, აუცილებელია სპეციალური სწავლების ორგანიზება ამ მიმართულებით. ასეთ სწავლებაში ჩვენ ვგულისხმობთ არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის ძიების როგორც ზოგადი, ისე იმ სპეციალური ხერხების შემუშავებას, რომლებიც ხელს შეუწყობს სწავლების შესაბამისი მეთოდიკის ჩამოყალიბებას.

არასტანდარტული ამოცანის პირობა წარმოქმნის სიტუაციას, როცა შეუძლებელი ხდება იმ ფორმულებისა და თეორიების უშუალო გამოყენება, რომელიც ამომხსნელის განკარგულებაშია. ის იძულებულია ეძიოს ამ სიტუაციის შემცვლელი ესა თუ ის მეთოდი. ერთ-ერთი ასეთი მეთოდთაგანია დამატებითი იგივი გარდაქმნა.

ფაქტია, რომ დამატებითი იგივი გარდაქმნის შესრულება უჭირთ მოსწავლეებს. ხშირად ამას იმით ხსნიან, რომ მათ შესასრულებლად მიხვედრაა საჭირო. სინამდვილეში კი მიხვედრა, ცოდნა და დამახსოვრებაა საჭირო. ეს გარდაქმნები ხშირ შემთხვევაში სტანდარტულია და მოსწავლეების შეფერხება მათი შესრულებისას მხოლოდ იმით აიხსნება, რომ ისინი ამ კუთხით არასაკმარისად არიან ნავარჯიშები.

მაგალითად, მოსწავლეებს არცთუ ისე იშვიათად მოუხდებათ რაიმე გამოსახულების რამდენიმე შესაკრების ჯამის ან ნამრავლის სახით წარმოდგენა. წილადური გამოსახულების გამარტივებისას ისინი აუცილებლად შეეცდებიან მათი მრიცხველისა და მნიშვნელის მამრავლებად დაშლას, რაც ხშირ შემთხვევაში გამოსადეგი აღმოჩნდა. ზოგჯერ ისინი ორი გამოსახულების ნამრავლს მათი ჯამის ან

სხვაობის კვადრატში ახარისხებით პოულობენ. ზოგჯერ კი რაიმე გამოსახულების მნიშვნელობის საპოვნელად მათ ამ გამოსახულებაზე ურთიერთშებრუნებულ ოპერაციათა თანმიმდევრული შესრულება მოუხდებათ და სხვა. ყოველივე ეს უმრავლეს შემთხვევაში, სტანდარტული გარდაქმნებია.

სტანდარტული იგივი გარდაქმნების არსებობას საფუძვლად უდევს გარკვეული ობიექტების თვისებების, ამოხსნის პროცესში გამოყენების აუცილებლობა. მათემატიკური ამოცანა მათემატიკური ობიექტების ერთიანი ჯგუფია. ამომხსნელისათვის მატემატიკური ობიექტები და ოპერაციები არ უნდა იყოს სტატიკური, უცვლელი. ამოცანის ობიექტები უნდა განიხილებოდეს სხვა მათემატიკურ ობიექტებთან მჭიდრო კავშირში. თუ ამოცანაში ლაპარაკია ოჯახის მხოლოდ ზოგიერთ წევრზე, ხოლო დანარჩენის შესახებ დუმს, მაშინ ჩვენ მოგვიხდება მათი ჩართვა ამოხსნის პროცესში. აი, ეს ჩართვაა სწორედ დამატებითი გარდაქმნა ფაქტიურად სრულდება თუ არა ის –არაარსებითია. გარდაქმნა გონებაშიც შეიძლება შესრულდეს. გარდაქმნაში იგულისხმება, რომ ერთი და იგივე ობიექტი შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა ტოლფასი ფორმით [66].

ყოველთვის უნდა ვიფიქროთ იმაზე, რომ თითოეულ ობიექტთან მჭიდროდაა დაკავშირებული სხვა ობიექტების გარკვეული სიმრავლე. თუ საჭიროა, ამომხსნელმა უნდა მიმართოს ისეთი ახალი ობიექტის შემოყვანას ძიების პროცესში, რომლებიც უშუალო ნათესაურ კავშირშია ამოცანის პირობის ობიექტთან, რისთვისაც შეიძლება ისარგებლოს მარტივი პრინციპით: რა რის შედეგად მიიღება. რა რასთან ურთიერთქმედებს, რა რისი თანამგზავრია და სხვა.

ერთი მხრივ, მათემატიკა განიხილება, როგორც მტკიცებადი მეცნიერება. იგი ჩამოყალიბებული, დამთავრებული ფორმით გამოიყურება, როგორც მთლიანი, მხოლოდ დამტკიცებისაგან შემდგარი, შემოქმედებით პროცესში მათემატიკა გვაგონებს ადამიანთა ნებისმიერ სხვა ცოდნას, მეცნიერებას განხილულს სრულყოფის პროცესში. ჩვენ უნდა მივაგნოთ მათემატიკურ თვისებას, სანამ მას დავამტკიცებდესთ; უნდა გამოვიცნოთ დამამტკიცებელი იდეა მანამ, სანამ დამტკიცებას ჩავატარებდეთ დაწვრილებით; უნდა დავუპირისპიროთ მას დაკვირვება და მოვყვეთ ანალოგიას; უნდა ვცადოთ და კიდევ ვცადოთ. მატემატიკაში შემოქმედებითი მუშაობის შედეგებია მტკიცებადი დასაბუთება, დამტკიცება. მაგრამ დამტკიცება დგინდება დამაჯერებელი დასაბუთებით, მიხვედრით. მეთოდი, რომელიც გარანტიას მოგვცემდა, თუ როგორ მივაგნოთ რაიმე კანონზომიერებას, არ არსებობს. მას ინტუიცია გვიკარნახებს.

ჩვენ ვერ ვიტყვით იმას, რომ მოსწავლე არასტანდარტული ამოცანის ამოხსნისას ყოველთვის ისე იმსჯელებს, როგორადაც ჩვენ ვმსჯელობთ. მაგრამ უდავოა ის, რომ ობიექტია ნათესაური დამოკიდებულების იდეა (რომელსაც უნდა ჩასწვდე, უნდა დაინახო, რომელსაც ამოცანა თავისთავად წინ არ გადმოგიშლის), ერთ-ერთი ის ძირითადი იდეაა, რომლითაც უნდა ხელმძღვანელობდეს ამოცანის ამოხსნის მაძიებელი.

მოკლედ შევეხოთ არაალგორითმული ამოცანების ამოხსნის პრინციპების სწავლების საკითხებს, როგორც ზოგადსაგანმანათლებლო, ისე უმაღლეს სკოლაში.

4.1. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის დამტკიცების ერთი ხერხის შესახებ

მოსწავლეთა მათემატიკით დაინტერესება მეტად აქტუალური პრობლემაა. მის გადასაჭრელად საკმარისი არ არის მოსწავლეებისათვის მხოლოდ რთული ამოცანების უბრალო შეთავაზება, რადგან ასეთ შემთხვევაში მათი უმრავლესობის წინაშე წარმოიშვება გადაულახავი სიძნელეები, რაც მათ მიიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ არ გააჩნიათ ასეთი ამოცანების ამოხსნისათვის საჭირო უნარ-ჩვევები. ამიტომ, აქედან გამომდინარე, აუცილებელია სპეციალური სწავლების ორგანიზება ამ მიმართულებით. ასეთ სწავლებაში ჩვენ ვგულისხმობთ ამოცანების ამოხსნის ძიების როგორც ზოგადი, ისე იმ სპეციალური ხერხების შემუშავებას, რომლებიც ხელს შეუწყობს სწავლების შესაბამისი მეთოდიკის შემუშავებას.

ქვემოთ განვიხილავთ ამოცანებს, რომელთა ტრადიციული გზით ამოხსნა დიდ დროს და რთული გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს, ხოლო კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით მარტივად იხსნება.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის დამტკიცების მრავალი ხერხია ცნობილი სპეციალისტებისათვის, ჩვენ მოვიყვანთ დამტკიცების ჩვენს მიერ შემუშავებულ ხერხს, რომელიც ეყრდნობა საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის არსებულ დამოკიდებულებას, დამტკიცების ეს ხერხი სკოლის მოსწავლეებისათვის მისაწვდომია.

განვიხილოთ R^n სივრცის ორი ნებისმიერი ვექტორი $x=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ და $y=\left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ და მათ შეუსაბამოთ რიცხვი

$$\left\langle x, y\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k , \qquad (*)$$

რომელსაც დავარქვათ x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

სკალარული ნამრავლი, ცხადია, აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს :

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall x, y \in R^n$;

2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in R^n, \quad \forall \alpha \in R$;

3. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \quad \forall x_1, x_2, y \in R^n$;

4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

შემოვიღოთ შემდეგი **განმარტება** : ვთქვათ E ნამდვილი წრფივი სივრცეა და ამ სივრცის ყოველ x და y ელემენტს (ვექტორს) რაიმე წესით შეესაბამება $\langle x, y\rangle$ რიცხვი ისე, რომ შესრულდება 1)_4) პირობა (აქსიომა), მაშინ E სივრცეს ეწოდება სივრცე სკალარული ნამრავლით ანუ ევკლიდური სივრცე.

ამგვარად R^n -წარმოადგენს ევკლიდურ სივრცეს. ცნობილია აგრეთვე ევკლიდურ სივრცეთა სხვა მაგალითები. $\langle x, x\rangle$ რიცხვიდან ფესვის მნიშვნელობას ეწოდება x ვექტორის ნორმა და მისთვის მიღებულია აღნიშვნა $\|x\|$. ე.ი.

$$\|x\| = \left(\langle x, x\rangle\right)^{\frac{1}{2}}.$$

n განზომილებიან R^n სივრცე, სადაც სკალარული ნამრავლი შემოღებულია (*) ფორმულით, და მასთან ერთად $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ ელემენტის ნორმა განმარტებულია ტოლობით

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} ,$$

ეწოდება ევკლიდეს არითმეტიკული n -განზომილებიანი სივრცე.

თეორემა (კოში-ბუნიაკოვსკი). A^n სივრცის ნებისმიერი ორი $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ და $y = \left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2 .$$

დამტკიცება. თუ $x = 0$ ან $y = 0$, მაშინ უტოლობა ტრივიალურია, ამიტომ საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა $x \neq 0$ და $y \neq 0$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k ,$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} ,$$

$$|y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\ .$$

დავუშვათ

$$a=\frac{x_k}{|x|}\quad \text{და}\quad b=\frac{y_k}{|y|},$$

მაშინ (1) უტოლობის თანახმად

$$\frac{|x_k\cdot y_k|}{|x|\cdot|y|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2}{|x|^2}+\frac{y_k^2}{|y|^2}\right).$$

მივცეთ k -ს მნიშვნელობა 1-დან n -მდე და მათი წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{|x|\cdot|y|}\sum_{k=1}^{n}|x_k\cdot y_k|\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{|x|^2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\frac{1}{|y|^2}\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|^2}\cdot|x|^2+\frac{1}{|y|^2}\cdot|y|^2\right)=1,$$

აქედან

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k\cdot y_k|\le|x|\cdot|y|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\ ,$$

მაშასადამე

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k\cdot y_k|\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2\ ,$$

მით უფრო

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k\cdot y_k|\right)^2\le|x|\cdot|y|\,.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მათემატიკური ანალიზის კურსში ცნობილია ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა

$$\cos\alpha=\frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|},\quad 0\le\alpha\le\pi$$

აქედან $\langle x,y\rangle=|x|\cdot|y|\cdot\cos\alpha$, ვექტორები კოლინეარულია, როცა $\alpha=0$ ან $\alpha=\pi$, ე.ი. $\vec{y}=\lambda\vec{x}$, სადაც λ რაღაც რიცხვია. ამრიგად, $\vec{x}$ და $\vec{y}$ ვექტორები პარალელურია, თუ

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}=\lambda\,.$$

მაშასადამე, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობაში ტოლობას აქვს ადგილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ვექტორები კოლინეარულია.

ნაშრომში განხილულ ამოცანებს, მათი ამოხსნის სირთულის გამო ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი. ქვემოთ მოყვანილია ამოხსნის არასტანდარტული ხერხი, რომელიც უთუოდ საინტერესოა მოსწავლეთა შემოქმედებითი შესაძლებლობების გასავითარებლად. ჩვენ განვიხილავთ სტანდარტულისაგან განსხვავებულ ერთ ხერხს, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი განტოლების მიმართ, როცა ტრადიციული მიდგომა შედეგს არ იძლევა. მათი სწავლება შეიძლება განხორციელდეს როგრც სკოლის საგაკვეთილო პროცესში, ისე კლასგარეშე მუშობის რეჟიმში. შესაძლებელია მსგავსი ამოცანების შედგენა, რათა მივცეთ მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშობისათვის.

სანამ ამ ამოცანების განხილვას დაიწყებს მასწავლებელი, მანამ მან კლასი უნდა მოამზადოს. კერძოდ კლასი უნდა მიიყვანოს იმ აზრამდე, რომ ტრადიციული გზით ამოხსნა სცილდება მათემატიკის სასკოლო პროგრამის ფარგლებს.

II ეტაპზე კლასს უნდა გავახსენოთ ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისებები და მათი სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა და შესაძლოა მიეცეს შესაბამისი სახის სავარჯიშოები:

1) იპოვეთ $\vec{a}=(2,3,1)$ ვექტორის სიგრძე $\left(\ |\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}\ \right)$.

2) ვთქვათ მოცემულია $\vec{a}=(-1,2,5)$ და $\vec{b}=(0,3,1)$ ვექტორები, იპოვეთ მათი სკალარული ნამრავლი $\left(\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot 0+2\cdot 3+5\cdot 1=11\ \right)$.

3) ვთქვათ მოცემულია $\vec{a}=(3,4,1)$ და $\vec{b}=(6,8,2)$. აჩვენეთ რომ ეს ვექტორები პარალელურია (რადგან $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, ამიტომ ეს ვექტორები პარალელურია).

შემდეგ ეტაპზე მოსწავლებს უნდა განვუმარტოთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.

შემდეგ შევთავაზოთ არასტანდარტული ამოცანები.

ამოცანა 1. იპოვეთ

$$\left|1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n\right|=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}$$

განტოლების ფესვები.

ამოხსნა. განვიხილოთ ვექტორები

$$\vec{a}=(1,2,\cdots,n+1) \text{ და } \vec{b}=(1,x_1,\cdots,x_n).$$

ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისების თანახმად

$$1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n=\vec{a}\cdot\vec{b},$$

რადგან $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2}$, მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ამიტომ

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}} \quad \text{და} \quad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}.$$

რადგან ამოცანაში ადგილი აქვს ტოლობას, ამიტომ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ორი ვექტორის პარალელურობის პირობიდან კი შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1=\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{3}=\cdots=\frac{x_n}{n+1},$$

საიდანაც $x_1=2,\quad x_2=3,\ \cdots\ ,\ x_n=n+1$.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ რომ თუ

$$(3\sin x+4\sin y+5\sin z)^2=50\left(\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z\right),$$

მაშინ $x+y+z=180^0$ და ეს არის სამკუთხედი 3, 4 და 5 გვერდებით.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\vec{a}=(3,4,5) \text{ და } \vec{b}=(\sin x,\ \sin y,\ \sin z).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sin x+4\sin y+5\sin z,$$

რადგან $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$, ამიტომ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.$$

წინა ამოცანის მსგავსად რადგან $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ამიტომ

$$\frac{3}{\sin x}=\frac{4}{\sin y}=\frac{5}{\sin z},$$

მაშასადამე სინუსების თეორემის თანახმად $x,\ y$ და z არის სამკუთხედის კუთხეები, რომლის გვერდებია 3, 4 და 5, ე.ი. $x+y+z=180^0$.

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$(\sin x+\sin 4x+\sin 7x)^2=3\left(\sin^2 x+\sin^2 4x+\sin^2 7x\right).$$

ამოხსნა. ვთქვათ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(1, 1, 1)$ და $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(\sin x, \sin 4x, \sin 7x)$. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, საიდანაც

$$\sin x = \sin 4x = \sin 7x .$$

მოცემული განტოლების ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი სისტემის ამოხსნაზე, რომლის ამოხსნის ალგორითმი მოსწავლეებისთვის ცნობილია

$$\begin{cases} \sin x = \sin 4x \\ \sin 4x = \sin 7x \end{cases} \begin{cases} \sin x - \sin 4x = 0 \\ \sin 4x - \sin 7x = 0 \end{cases} \begin{cases} -2\sin\frac{3}{2}x\,\cos\frac{5}{2}x = 0 \\ -2\sin\frac{3}{2}x\,\cos\frac{11}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{3}{2}x = 0, \qquad \frac{3}{2}x = \pi k, \qquad x = \frac{2\pi k}{3} .$$

ამოცანა 4. ამოხსენით განტოლება

$$\left(1 + 2\lg(x-y) + 3\lg(x+y)\right)^2 = 14\left(1 + \lg^2(x-y) + \lg^2(x+y)\right).$$

ამოხსნა. მივიღოთ

$$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3) \text{ და } \vec{b} = \left(1,\ \lg(x-y),\ \lg(x+y)\right).$$

ვინაიდან $\vec{a} \parallel \vec{b}$, ამიტომ

$$\frac{\lg(x-y)}{2} = 1, \qquad \frac{\lg(x+y)}{3} = 1 ,$$

მაშასადამე ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} \lg(x-y) = 2 \\ \lg(x+y) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 100 \\ x + y = 1000 \end{cases}$$

ამ სისტემის და მაშასადამე მოცემული განტოლების ამონახსენია $x = 550$ და $y = 450$.

ამოცანა 5. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $x,\ y,\ z$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left(3 + 2\sin(x+y-z) + 5\cos(x+y-z)\right)^2 \le 76 . \qquad (1)$$

ამოხსნა. განვიხილოთ ვექტორები

$$\vec{p} = (3,\ 2,\ 5) \text{ და } \vec{q} = \left(1,\ \sin(x+y-z),\ \cos(x+y-z)\right).$$

მაშინ

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 + 2\sin(x+y-z) + 5\cos(x+y-z) ;$$

მეორეს მხრივ

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} ,$$

$$\left|\vec{q}\right| = \sqrt{1^2 + \sin^2\left(x+y-z\right) + \cos^2\left(x+y-z\right)} = \sqrt{2}\,,$$

ამრიგად, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან გამომდინარე ჭეშმარიტია (1) უტოლობა.

ჩვენ განვიხილეთ ერთი არასტანდარტული ხერხი, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი კლასის განტოლებების (უტოლობების) მიმართ, როცა მათი ამოხსნისადმი ტრადიციული მიდგომა დადებით შედეგს არ იძლევა. აღნიშნული ხერხი ზოგჯერ ისეთი განტოლებების (უტოლობები) ამოხსნის საშუალებას იძლევა, რომელთა ამოხსნა სხვა ხერხით შეუძლებელია, ზოგჯერ კი ამარტივებს ამოხსნის პროცესს ისეთი განტოლებებისათვის, რომელთა ამოხსნა სხვა გზითაც შეიძლება.

4.2. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის გამოთვლის ზოგიერთი არასტანდარტული ხერხი ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლაში

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლაში ფუნქცის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების განხილვა წარმოებს ელემენტარული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, რაც ზღუდავს განსახილავი ამოცანების კლასს. წარმოებულის სწავლების ამოღებამ საშუალო სკოლის კურსი მეტად „გააღარიბა“ განსახილველი ამოცანებით. მასწავლებელი დგება ალტერნატიული არჩევანის წინაშე: ან საერთოდ არ მოხდეს ექსტრემალური ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში, ეს მიდგომა მიუღებლად მიგვაჩნია, ან საკითხი განხილულ იქნას მხოლოდ უმაღლესი მათემატიკის კურსში, რომელსაც უკვე ისინი უმაღლეს სკოლაში შეისწავლიან. მაგრამ ამ უკანასკნელი არჩევანის განხორციელება ნაკლებ პროდუქტიულია, რადგან ჯერ ერთი ყველა ვინც სკოლაში სწავლობს არ აგრძელებს სწავლას უმაღლეს სასწავლებელში და მეორე, ვინც სტუდენტი ხდება, მათგან ყველა უმაღლეს მათემატიკას არ სწავლობს. ამიტომ დღის წესრიგში დგება ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის არასტანდარტული ხერხების გამოყენების აუცილებლობა.

ნაშრომში განხილულია უმაღლესი მათემატიკის კურსში შემოთავაზებული სტანდარტული სქემა, რომლის მიხედვითაც ხორციელდება ფუნქციათა ექსტრემუმის პოვნის ამოცანა. პარალელურად გარჩეულია იმავე ამოცანებისათვის

ამოხსნის არასტანდარტული ხერხი, რომელიც შეიძლება გამოყენებულ იქნას არა მარტო უმაღლეს, არამედ საშუალო სკოლაშიც.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის დამტკიცებისას დაგვჭირდება ზოგიერთი ცნების და განმარტების შეხსენება სტუდენტებისათვის უმაღლესი მათემატიკის კურსიდან. მოკლედ შევეხოთ ამ საკითხებს:

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ $f : G \to R^{l}$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი, თუ არსებობს ამ წერტილის მიდამო $U(x_0) \subset G$ ისეთი, რომ $f(x) \geq f(x_0)$, როცა $x \in U(x_0)$.

თუ $\forall x \in \overset{0}{U}(x_0)$ წერტილისათვის ადგილი აქვს $f(x) > f(x_0)$ უტოლობას, მაშინ ვამბობთ, რომ f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მკაცრი მინიმუმი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მინიმუმს ლოკალური არამკაცრი მინიმუმი ეწოდება.

განმარტება 2. x_0 წერტილს ეწოდება $f : G \to R^{l}$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის მიდამო $U(x_0) \subset G$, ისეთი, რომ $\forall x \in U(x_0)$, $f(x) \leq f(x_0)$.

თუ $\forall x \in \overset{0}{U}(x_0)$ $f(x) < f(x_0)$, მაშინ ვამბობთ, რომ f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მკაცრი მაქსიმუმი.

განმარტება 3. ლოკალური მინიმუმის და ლოკალური მაქსიმუმის წერტილებს ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები ეწოდებათ, ხოლო ამ წერტილებზე ფუნქციის მნიშვნელობებს-კი ექსტრემუმები.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორმები:

თეორემა 1. (ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა). თუ $f : G \to R^{l}$ ფუნქციას, $x_0 \in G$ წერტილში გააჩნია ექსტრემუმი და ამ წერტილზე არსებობს f ფუნქციის კერძო წარმოებულები $\partial_i f(x_0), \quad i = \overline{1, m}$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\partial_1 f(x_0) = 0, \quad \partial_2 f(x_0) = 0, \cdots, \partial_m f(x_0) = 0 .$$

თეორემა 2. (ექსტრემუმის საკმარისი პირობა). ვთქვათ, $x_0 = (x_{10}, \cdots, x_{m0}) \in R^m$ $U(x_0)$ მისი რაღაც მიდამოა და $f : U(x_0) \to R^1$ არის $C^2(U(x_0); R^1)$, კლასის ფუნქცია, ხოლო x_0 მისი კრიტიკული წერტილია.

თუ f ფუნქციის ტეილორის დაშლაში

$$f(x_{10} + h_1, \cdots, x_{m0} + h_m) = f(x_{10}, \cdots, x_{m0}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + \overline{\overline{O}}(\|h\|^2) \qquad (1)$$

x_0 წერტილში კვადრატული ფორმა

$$g(h)=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j=\left(h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 f(x_0) \qquad (2)$$

ა) ნიშანგანსაზღვრულია, მაშინ x_0 წერტილში f ფუნქციას აქვს ლოკალური ექსტრემუმი, რომელიც წარმოადგენს ლოკალურ მკაცრ მინმუმს, როცა (2) კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, როცა (2) კვადრატული ფორმა არის უარყოფითად განსაზღვრული, მაშინ x_0 არის ლოკალური მკაცრი მაქსიმუმის წერტილი.

ბ) თუ ღებულობს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობებს, მაშინ x_0 წერტილში f ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.

როგორც თეორემებიდან ჩანს, ფუნქციის ექსტრემუმის საპოვნელად საჭიროა მაღალი რიგის კერძო წარმოებულების გამოთვლა, რაც ზოგჯერ დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული.

მაგალითი 1. იპოვეთ მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგი ფუნქციისათვის

$$z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}},$$

სადაც $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები

$$z'_x=\frac{a\left(x^2+y^2+1\right)-x\left(ax+by+c\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}}=0, \qquad (3)$$

$$z'_y=\frac{b\left(x^2+y^2+1\right)-y\left(ax+by+c\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}}=0, \qquad (4)$$

(3) გავამრავლოთ $-b\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}$-ზე, ხოლო (4) $a\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}$-ზე და მიღებული განტოლებები შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\begin{cases} bx=ay \\ ax+by+c=0 \end{cases},$$

აქედან მივიღებთ, რომ სტაციონალური წერტილებია $x=\dfrac{a}{c}$ და $y=\dfrac{b}{c}$, გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$z''_{x^2}=-\frac{by+c}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}}-\frac{3x\left(\left(x^2+y^2+1\right)a-x\left(ax+by+c\right)\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{ay+c}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}} - \frac{3y\left(\left(x^2+y^2+1\right)b - y\left(ax+by+c\right)\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{ay+bx}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}} + \frac{3xy\left(ax+by+c\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}}.$$

გამოვთვალოთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები სტაციონალურ წერტილებზე

$$A = z''_{x^2}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = -\frac{b^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}}, \qquad B = z''_{y^2} = -\frac{a^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}},$$

$$C = z''_{xy}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}},$$

აქედან მივიღებთ $AC - B^2 = \left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{-3}\left(\frac{b^2+c^2}{c}\cdot\frac{a^2+c^2}{c} - \frac{a^2b^2}{c^2}\right) > 0$, ე.ი. აქვს ექსტრემუმი და რადგანაც $A<0$ როცა $C>0$ და $A>0$ როცა $C<0$, ამიტომ $z_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $z_{\max} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

როგორც ვხედავთ ამ გზით ფუნქციის მაქსიმუმის და მინიმუმის პოვნა დიდ გამოთვლებთან არის დაკავშირებული. შევეცადოთ ამ ამოცანის ამოხსნას არასტანდარტული გზით.

გამოვიყენოთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა მოცემული ფუნქციისათვის განვიხილოთ ვექტორები $\vec{p}\left(a,b,1\right)$ და $\vec{q}\left(x,y,1\right)$. ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისებების თანახმად $ax+by+c = \vec{p}\cdot\vec{q}$, $\left|\vec{p}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ და $\left|\vec{q}\right| = \sqrt{x^2+y^2+1}$, გვაქვს

$$|z| = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\left|\vec{p}\cdot\vec{q}\right|}{\left|\vec{p}\right|} \le \frac{\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|}{\left|\vec{p}\right|} = \left|\vec{q}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს: $\max z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ და $\min z = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მრავალცვლადიანი ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, ამისათვის საჭიროა იაკობის

$$f'(x_0) = \left\| \begin{array}{c} \partial_1 f_1(x_0)\cdots\partial_m f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0)\cdots\partial_m f_2(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial_1 f_n(x_0)\cdots\partial_m f_n(x_0) \end{array} \right\|$$

მატრიცის რანგისა და მთავარი მინორების გამოთვლა, რაც ასევე რთულია. აქაც შესაძლოა ზემოთ გამოყენებული არასტანდარტული გზით მისი ამოხსნა.

მაგალითი 2. იპოვეთ $u=\dfrac{2x+4y-6z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. დავუშვათ $\vec{a}=(2,4,-6)$ და $\vec{b}=(x,y,z)$. ანალოგიურად

$$|u|=\frac{|2x+4y-6z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\le\frac{\sqrt{4+16+36}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{56}\,.$$

მივიღეთ $\max u=\sqrt{56}$ და $\min u=-\sqrt{56}$.

მაგალითი 3. იპოვეთ

$$z=\frac{|1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}}$$

ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

ამოხსნა. განვიხილოთ $\vec{a}$ ვექტორი კოორდინატებით $(1,2,\cdots,n+1)$ და $\vec{b}$ ვექტორი კოორდინატებით $(1,x_1,\cdots,x_n)$. გვაქვს

$$\frac{|1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}\le|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2}=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}\,,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ z ფუნქციის მაქსიმუმია $\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$, ხოლო მინიმუმია $-\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$.

ვფიქრობთ, რომ წარმოდგენილი მაგალითების ამოხსნის სწავლების შემოთავაზებული ხერხები გარკვეულწილად შეავსებს დღემდე არსებულ ვაკუუმს. განხილული ამოცანების მსგავსი ამოცანების შედგენა მეთოდური თვალსაზრისით არ წარმოადგენს რაიმე სირთულეს მასწავლებლებისათვის, რომელიც დავალების სახით შეიძლება მივცეთ მოსწავლეებს.

უდავოა, რომ ძიების ასეთი ხერხების შემადგენელი რეკომენდაციები ვერ უზრუნველყოფენ ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნას, მაგრამ მათი როლი იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ხელს უწყობენ ამოცანის ამოხსნის ძიებისათვის საჭირო მსჯელობების სტრუქტურის ჩამოყალიბებას, იძლევიან ამოხსნის სწორ ორიენტირებს, ზრდიან ამოცანის წარმატებით გადაწყვეტის ალბათობას და

ამცირებენ ამოხსნის ძიებაზე დახარჯულ დროს. არასტანდარტული ამოცანები მოსწავლის აზროვნების განმავითარებელ ფუნქციას ასრულებენ და ამიტომ მათ ზოგჯერ განსავითარებელ ამოცანებსაც უწოდებენ. „განსავითარებელი ამოცანები საჭიროა ან ცნების ცოდნის, ან მოსწავლის აზროვნების სხვადასხვა მხარეების, ან მისი უნარ-ჩვევების განსავითარებლად. განსავითარებელი ამოცანები შედგენილი და დალაგებული უნდა იყოს თანდათანობითი გართულების მიხედვით“. [4]

მოსწავლეებისათვის არასტანდარტული ამოცანების ამოსახსნელი ხერხების სწავლების მეთოდიკა ამოცანის პირობის გააზრების, ამოხსნის გეგმის განხორციელებისა და ნაპოვნი ამოხსნის შესწავლის ეტაპებზე პრაქტიკულად არ განსხვავდება სტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკისაგან. ამგვარი მუშაობის ორგანიზების მეთოდიკა მრავალ ნაშრომსა და მეთოდიკურ გამოკვლევაშია აღწერილი [13], [37], [38], [21], [20], [33], [5], [6], [9], [76], [62], [66], [12], [14]. ამოცანის პირობის გააზრებისას განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა ამომხსნელის ცოდნის არეალს, რადგან მათემატიკის ერთი და იგივე საკითხის სწავლებისადმი მიდგომა სხვადასხვაგვარად ხორციელდება სწავლების სხვადასხვა საფეხურზე.

I თავის დასკვნები

1. მათემატიკის, როგორც მეცნიერების შესწავლის მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს, თუ როგორ ვასწავლოთ მათემატიკა კონკრეტულ სპეციალობებზე, ამან განაპირობა მათემატიკის სწავლების მეთოდოლოგიის, როგორც მეცნიერების ჩამოყალიბება. ამ მეცნიერების ამოცანაა უპასუხოს შემდეგ კითხვებს:

1) რა არის მათემატიკის შესწავლის მიზანი;

2) რა შინაარსით წარვმართოთ სწავლება;

3) რა ფორმებითა და მეთოდებით ვასწავლოთ.

2. მაღალკვალიფიციური სპეციალისტის აღზრდაში დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვეობის მოთხოვნათა გათვალისწინებით შედგენილ სასწავლო გეგმებს, პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებს, საუკეთესო ლექტორ-მასწავლებლების პირობებშიაც კი, თუ არ არის გამართული სახელმძღვანელო, პროგრამა, სასწავლო გეგმა, შეუძლებელია ნამდვილად სრულ წარმატებაზე ვილაპარაკოთ.

3. მათემატიკის მეთოდოლოგიის გადასაჭრელი პრობლემები განხილულ უნდა იქნეს პედაგოგიკის, მათემატიკის, ფსიქოლოგიის და ფილოსოფიის ურთიერთკავშირში. მეთოდოლოგიური დირექტივები უნდა შეიცავდეს რჩევებს, რომლებიც მიმართული იქნება სწავლების შეთანხმებასთან, როგორც ფსიქოლოგიისა და მათემატიკის პედაგოგიკასთან, ასევე მათემატიკის ბუნებასა და გამოყენებასთან. სწავლების მაღალმეცნიერულ დონეზე წარმართვისათვის საკმარისი არ არის მხოლოდ პედაგოგიური პრობლემების თეორიული კვლევა და შესაძლო შედეგების პროგნოზირება, საჭიროა გადასაცემი საკითხებისათვის კერძო და სპეციალური მეთოდიკის დამუშავება.

4. ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ–ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ არ არსებობს ისეთი უნივერსალური მათემატიკური მეთოდები და ხერხები, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა.

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში წარმოებს ელემენტარული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, რაც ზღუდავს განსახილავი ამოცანების კლასს. წარმოებულის სწავლების ამოღებამ საშუალო სკოლის კურსი მეტად „გააღარიბა" განსახილველი ამოცანებით. მასწავლებელი დგება ალტერნატიული არჩევანის წინაშე: ან საერთოდ არ მოხდეს ექსტრემალური ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში, ეს მიდგომა მიუღებლად მიგვაჩნია, ან საკითხი განხილულ იქნას მხოლოდ უმაღლესი

მათემატიკის კურსში, რომელსაც უკვე ისინი უმაღლეს სკოლაში შეისწავლიან. მაგრამ ამ უკანასკნელი არჩევანის განხორციელება ნაკლებ პროდუქტიულია, რადგან ჯერ ერთი ყველა ვინც სკოლაში სწავლობს არ აგრძელებს სწავლას უმაღლეს სასწავლებელში და მეორე, ვინც სტუდენტი ხდება, მათგან ყველა უმაღლეს მათემატიკას არ სწავლობს. ამიტომ დღის წესრიგში დგება ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის არასტანდარტული ხერხების გამოყენების აუცილებლობა.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული საკითხების საშუალო სკოლაში განხილვა ხელს უწყობს უმაღლეს სკოლაში მათემატიკური ანალიზის საკითხების სწავლებას და მეთოდურად სრულყოფილად ხდება ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების მეთოდების ერთიან სისტემაში მოყვანა და მათი შეძლებისდაგვარად დაახლოება. ეს კი მათემატიკის პედაგოგიკის აქტუალური საკითხია და მოითხოვს უმაღლეს სკოლაში მეთოდოლოგიური ასპექტების დამუშავებას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად ჩვენს მიერ შერჩეული იქნა ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტი, სადაც მთელი სიგრძე-სიგანით წარმოჩინდა პრობლემის არსი და საშუალება მოგვეცა მისი გადაწყვეტისა, რადგან სხვა ფაკულტეტებზე, სადაც შეისწავლება უმაღლესი მათემატიკა, არ განიხილება ან შედარებით ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი მათემატიკური ანალიზის იმ საკითხებს, რომელზეც დისერტაციაშია საუბარი.

ნაშრომში განხილულია ისეთი ამოცანებიც, რომელთა ამოხსნას სირთულის გამო საშუალო სკოლაში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი. დისერტაციაში განხილულია ზოგიერთი სახის ამოხსნის არასტანდარტული ხერხი, რომელიც უთუოდ საინტერესოა მოსწავლეთა შემოქმედებითი შესაძლებლობების განსავითარებლად. განხილულია ტრადიციულისაგან განსხვავებული ზოგიერთი ხერხი, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლებათა მიმართ, როცა სტანდარტული მიდგომა შედეგს არ იძლევა, ზოგჯერ კი ამარტივებს ამოხსნის პროცესს ისეთი განტოლებებისათვის, რომელთა ამოხსნა სხვა გზითაც შეიძლება. მათი სწავლება შეიძლება განხორციელდეს როგორც სკოლის საგაკვეთილო პროცესში, ისე კლასგარეშე მუშობის რეჟიმში. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია დისერტაციაში განხილული ამოცანების მსგავსი ამოცანები მიეცეთ მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშობისათვის.

5. უმაღლესი სკოლის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე სასწავლო პროცესში მიმდევრობათა გარდაქმნების მიზანმიმართული, ჩვენს მიერ სპეციალურად შემუშავებული მეთოდიკით სწავლების აუცილებლობა დადასტურდა პედაგოგიური ექსპერიმენტით;

6. ეფექტურია მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის გამოთვლის ზოგიერთი არასტანდარტული ხერხის სწავლების მეთოდიკა უმაღლეს სკოლაში. აღნიშნული საკითხები განხილულია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლისთვისაც (შედარებით დაბალი სირთულის მქონე) და დამუშავებულია მისი სწავლების მეთოდიკა. უმაღლესი და საშუალო სკოლების მათემატიკის კურსში კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენების მეთოდური ასპექტების დამუშავებით მოხდა საშუალო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის საკითხების ერთიან კონტექსტში განხილვა, რამაც დადებითი შედეგი მოიტანა სწავლების ეფექტურობის ამაღლების თვალსაზრისით;

7. შტოლცის თეორემის გამოყენებით, ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული და უკუგდების პრინციპით ზღვართა გამოთვლის სწავლების შემოთავაზებულმა მეთოდიკამ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე საშუალება მოგვცა გამოგვეთავისუფლებინა სასწავლო დრო, რომელიც გამოყენებული იქნა სხვა საკითხების სრულყოფილად შესწავლისათვის;

თავი II

უწყვეტ ფუნქციათა სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე

§ 1. ფუნქციათა უწყვეტობის შემოღების ზოგიერთი მეთოდური ხერხი უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე

ფუნქციის უწყვეტობა, ფუნქციის ზღვრის ცნების მსგავსად, შეიძლება შემოვიღოთ სხვადასხვა, ერთმანეთის ეკვივალენტური განმარტების საფუძველზე. ინტუიციურად გასაგებია, რომ ფუნქციას უწყვეტს უწოდებენ, როცა არგუმენტის ,,მცირე" ცვლილება იწვევს ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობის ,,მცირე" ცვლილებას. სათანადო ცნების მკაცრი ჩამოყალიბების მიზნით შემოვიღოთ ჯერ წერტილზე ფუნქციის უწყვეტობის ცნება.

ვთქვათ E ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა, $x_0 \in E$ და x_0 წარმოადგენს E სიმრავლის ზღვარით წერტილს, ეს ნიშნავს, რომ $\forall \delta > 0$

$$E \cap U(x_0, \delta)$$

სიმრავლე არის უსასრულო, სადაც $U(x_0, \delta)$ არის x_0 წერტილის წრიული (სიმეტრიული) მიდამო, ე.ი.

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

ქვემოთ ჩვენ მიდამოს ქვეშ ყოველთვის ვიგულისხმებთ წრიულ (სიმეტრიულ) მიდამოს.

განმარტება 1. $f : E \to R$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ამ წერტილზე ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა ერთმანეთის ტოლია:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ $f : E \to R$ ფუნქცია იყოს უწყვეტი x_0 წერტილზე საჭიროა: 1) $x_0 \in E$, 2) არსებობდეს ზღვარი $\lim_{x \to x_0} f(x)$ და 3) ეს ზღვარი ტოლი იყოს ფუნქციის მნიშვნელობისა x_0 წერტილზე.

თუ გავიხსენებთ წერტილზე ფუნქციის ზღვრის განმარტებებს, მაშინ ფუნქციის უწყვეტობის ზემოთმიღებული განმარტება შეიძლება შემდეგი ერთმანეთის ეკვივალენტური წინადადებებით დავახასიათოთ.

1) $f:E\to R$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი δ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon \text{, როცა } x\in E \text{ და } \left|x-x_0\right|<\delta .$$

ლოგიკური სიმბოლოებით ეს ასე ჩაიწერება:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in E:\ \left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

2) $f:E\to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ $y_0=f(x_0)$ წერტილის ნებისმიერი $V\left(f(x_0),\varepsilon\right)$ მიდამოსათვის მოიძებნება x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$, ისეთი, რომ

$$f\left(E\cap U(x_0,\delta)\right)\subset V\left(f(x_0),\varepsilon\right).$$

ანუ, რაც იგივეა

$$E\cap U(x_0,\delta)\subset f^{-1}\left[V\left(f(x_0),\varepsilon\right)\right],$$

სადაც, როგორც ყოველთვის $f(X)$ და $f^{-1}(Y)$ შესაბამისად აღნიშნავენ X და Y სიმრავლეების სახეს და წინასახეს.

3) $f:E\to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ

$$\lim_{E\ni x\to x_0}f(x)=f\left[\lim_{E\ni x\to x_0}x\right].$$

4) $f:E\to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ არსებობს x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$, ისეთი, რომ $\forall x\in E\cap U(x_0,\delta)$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x),$$

სადაც α უსასრულოდ მცირეა, როცა $x\to x_0$.

5) $f:E\to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილზე, თუ x_0 წერტილისაკენ კრებადი წერტილთა ნებისმიერი $(x_n)_{n\geq1}\subset E$ მიმდევრობისათვის, ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა $\left(f(x_n)\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x_0)$ რიცხვისაკენ.

6) ვთქვათ x_0 წერტილს გააჩნია E სიმრავლეში ორმხრივი მიდამო, ეს ნიშნავს, რომ ამ მიდამოში, როგორც x_0-ის მარცხნივ ასევე მარჯვნივ იმყოფება E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო ქვესიმრავლე. ამ შემთხვევაში $f:E\to R$ ფუნქციას ეწოდება x_0 წერტილზე უწყვეტი, თუ

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0),$$

სადაც $f(x_0-0)=f(x_0^-)$ და $f(x_0+0)=f(x_0^+)$ შესაბამისად არიან f ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები x_0 წერტილზე.

განმარტება 2. x_0 წერტილს ეწოდება E სიმრავლის იზოლირებული წერტილი, თუ $x_0 \in E$ და არსებობს ამ წერტილის მიდამო $U(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ

$$E \cap U(x_0,\delta)=\{x_0\}. \qquad (2)$$

თუ x_0 არის E სიმრავლის იზოლირებული წერტილი, მაშინ ყოველი $f:E \to R$ ასახვა ასეთ წერტილზე უწყვეტია. იზოლირებული წერტილის განმარტების თანახმად ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ შესრულდება (2) პირობა, ამიტომ

$$f(E \cap U(x_0,\delta))=\{f(x_0)\}\subset V(f(x_0),\varepsilon).$$

$f:E \to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი E სიმრავლეზე, თუ ის უწყვეტია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილზე.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ უწყვეტობა შემოვიღეთ ისეთი ფუნქციისათვის, რომელიც მოცემულია R სიმრავლის, რაიმე E ქვესიმრავლეზე, ამასთანავე ცხადია, რომ E სიმრავლის $E^c=R \setminus E$ დამატება ამ ცნების შემოღებაში (ზღვრის ცნებისაგან განსხვავებით) არავითარ როლს არ არულებს, რის გამოც შეგვიძლია ვილაპარაკოთ $f:R \to R$ ფუნქციების უწყვეტობის შესახებ. ეს ამარტივებს ზოგიერთი თეორემის, როგორც ფორმულირებას ასევე სხვადასხვა ჩანაწერების გაკეთებას და დამტკიცებას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციის უწყვეტობის თვისება მისი განსაზღვრის არის რაიმე x_0 წერტილზე ამ ფუნქციის ლოკალურ (ადგილობრივ) ყოფაქცევაზეა დამოკიდებული. ეს თვისება ასე გავიგოთ:

ვთქვათ $f:E \to R$ და $g:E \to R$ რაიმე ფუნქციებია და $x_0 \in E$. თუ არსებობს x_0 წერტილის $U(x_0,\delta)$ მიდამო, ისეთი, რომ

$$f(x)=g(x), \quad \forall x \in E \cap U(x_0,\delta).$$

ასეთ პირობებში f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ, მაშინ, როცა x_0 წერტილზე უწყვეტია g ფუნქცია.

ამ წინადადების ჭეშმარიტობა უშუალოდ გამომდინარეობს უწყვეტობის 5) განმარტებიდან, რომლის თანახმად $(x_n)_{n\ge1} \subset E$ მიმდევრობისათვის, თუ $x_n \to x_0$, მოიძებნება $k \in N$ რიცხვი, რომ, როცა $n \ge k$ გვექნება: $x_n \in E \cap U(x_0,\delta)$ და ამიტომ

ასეთი n რიცხვებისათვის $f(x_n)=g(x_n)$ და $f(x_0)=g(x_0)$. მაშასადამე $f(x_n)\to f(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $g(x_n)\to g(x_0)$.

როდესაც ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე, მაშინ მას აქვს ზღვარი ამ წერტილზე, ამიტომ ფუნქციათა ზღვრების შესახებ ცნობილი თეორემები ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ უწყვეტი ფუნქციების მიმართ. ამ გზით უშუალოდ მიიღება შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. თუ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილზე, მაშინ ამ წერტილზე უწყვეტია მისი მოდულიც.

თეორემა 2. თუ $f_1, f_2, \cdots, f_n$ უწყვეტი ფუნქციებია x_0 წერტილზე, მაშინ მათი ჯამიც უწყვეტია იმავე წერტილზე.

თეორემა 3. თუ $f_1, f_2, \cdots, f_n$ უწყვეტი ფუნქციებია x_0 წერტილზე, მაშინ მათი ნამრავლიც უწყვეტია იმავე წერტილზე.

თეორემა 4. თუ f და φ ფუნქციები უწყვეტია x_0 წერტილზე, და $\varphi(x_0)\neq 0$, მაშინ მათი შეფარდება $\dfrac{f}{\varphi}$ აგრეთვე უწყვეტია x_0 წერტილზე.

განვიხილოთ უწყვეტი ფუნქციის რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. თუ რაიმე f ფუნქცია მუდმივია x_0 წერტილის მიდამოში, მაშინ იგი უწყვეტია x_0 წერტილზე.

მართლაც, ვთქვათ $f(x)=c$, $\forall x\in U(x_0)$, სადაც $U(x_0)$ - არის x_0 წერტილის მიდამო. მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c=f(x_0),$$

რაც f ფუნქციის უწყვეტობას ნიშნავს.

მაგალითი 2. ფუნქცია $f(x)=x$ უწყვეტია მთელს R რიცხვით წრფეზე.

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი x_0 ნამდვილი რიცხვი, ხოლო $\Delta x=x-x_0$ არგუმენტის ნაზრდია, ცხადია, რომ $\Delta y=(x_0+\Delta x)-x_0=\Delta x$, საიდანაც გვაქვს $\Delta y\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$. ეს ნიშნავს, რომ $y=f(x)=x$ უწყვეტია x_0 წერტილზე.

რადგანაც $x^n=\overbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}^{n}$, $n\geq 1, n\in N$, და ფუნქცია $f(x)=x$ უწყვეტია მთელს R რიცხვით წრფეზე, ამიტომ ეს ფუნქცია უწყვეტია მთელს R რიცხვით წრფეზე, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა ნამრავლი.

ამ წინადადებიდან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ ყოველი მრავალწევრი

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში. ხოლო რაციონალური ფუნქცია

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

უწყვეტია, ყველა ისეთ წერტილზე, სადაც $Q_m(x)\neq 0$. $Q_m(x)$ - არის m-ური ხარისხის მრავალწევრი

$$Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k .$$

ქვემოთ ჩვენ დავრწმუნდებით, რომ არა მარტო ზემოაღნიშნულ მაგალითებში განხილული ფუნქციები, არამედ ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია ყოველ წერტილში, სადაც კი მას აზრი აქვს.

ვთქვათ $E\subset R$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია f ფუნქცია და x_0 იყოს ამ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი, რომელიც შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს. თუ $x_0\in E$, მაშინ, როგორც ვიცით f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ, მაშინ, როცა არსებობს სასრული ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0). \qquad (3)$$

თუ $f(x_0+0)=f(x_0)$, მაშინ f-ს ეწოდება მარჯვნიდან უწყვეტი x_0 წერტილ-ზე E სიმრავლის მიმართ, ხოლო თუ $f(x_0-0)=f(x_0)$, მაშინ ეწოდება უწყვეტი მარცხნიდან x_0 წერტილზე E სიმრავლის მიმართ.

თუ f ფუნქცია x_0 წერტილზე არ არის უწყვეტი, მაშინ x_0 წერტილს ამ ფუნქციის წყვეტის წერტილი ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა ყველა შესაძლო შემთხვევა, რომელთანაც შეიძლება გვექნეს საქმე წყვეტის წერტილში. ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე (a,b) შუალედში, რომლის შიგა წერტილია x_0, ე.ი. $a<x_0<b$. ვთქვათ x_0 არის წყვეტის წერტილი. განმარტების ძალით, ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ წერტილში არ აქვს ადგილი (3) ტოლობას. რამ შეიძლება გამოიწვიოს (3) თანაფარდობის დარღვევა? თუ არსებობს ზღვრები $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ და $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, მაშინ (3) თანაფარდობა იქნება დარღვეული, როცა $f(x_0)$ არ უდრის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების საერთო მნიშვნე-ლობას, ე.ი.

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0).$$

ასეთ შემთხვევაში x_0 წერტილს ეწოდება f ფუნქციის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი.

ამრიგად ისეთ წყვეტის წერტილს, რომელშიც ფუნქციას ზღვარი აქვს, ვუწუდოთ ასაცილებელი წყვეტის წერტილი.

ტერმინი „ასაცილებელი წყვეტის წერტილი“ სავსებით გამართლებულია, რადგან ამ შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება x_0 წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა ისე შევარჩიოთ, რომ ფუნქცია გახდეს უწყვეტი. ამისათვის საჭიროა ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობად მივიღოთ ფუნქციის ზღვარი.

თუ არსებობს $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$, მაგრამ $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. ასეთ შემთხვევაში x_0-ს ეწოდება f ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ხოლო რიცხვს $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ ეწოდება f ფუნქციის ნახტომი x_0 წერტილზე.

ვიტყვით, რომ x_0 არის f ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$ ზღვრებიდან ერთ-ერთი მაინც არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია.

ცხადია, რომ პირველი და მეორე გვარის წყვეტის წერტილებში შეუძლებელია ფუნქცია გავხადოთ უწყვეტი ამ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის შეცვლის ხარჯზე.

ზემოთ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან x_0 წერტილის მიდამოში. განვიხილოთ ახლა f ფუნქცია, რომელიც არაა განსაზღვრული x_0 წერტილში. თუ არსებობს ამ წერტილის გაჩხვლეტილი მიდამო, რომლის ყოველ წერტილში ფუნქცია განსაზღვრულია, მაშინ ასეთ x_0 წერტილს აგრეთვე f ფუნქციის წყვეტის წერტილს ვუწოდებთ.

მაგალითად $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციისათვის $x=0$ წყვეტის წერტილია.

$f:[a,b]\to R$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია (a,b) ინტერვალში, ხოლო a წერტილზე უწყვეტია მარჯვნიდან, ხოლო b წერტილზე კი მარცხნიდან, ე.ი.

$$f(a+0)=f(a),\quad f(b-0)=f(b).$$

ფუნქციის ლოკალურ თვისებად ითვლება მისი ის თვისება, რომელიც სამართლიანია ფუნქციის განსაზღვრის არეს რაიმე ფიქსირებული წერტილის რაგინდ მცირე მიდამოში. ეს თვისება აღწერს ფუნქციის ყოფაქცევას, როცა არგუმენტი მიისწრაფვის გამოსაკვლევი წერტილისაკენ. მაგალითად, ფუნქციის

უწყვეტობა მისი განსაზღვრის არეს რაიმე წერტილზე არის ამ ფუნქციის ლოკალური თვისება.

გლობალური თვისება – ეს ის თვისებაა, რომელიც უკავშირდება ამ ფუნქციის მთელს განსაზღვრის არეს. მაგალითად f ფუნქციის მონოტონურობა $[a,b]$ -ზე არის მისი გლობალური თვისება.

თუ f ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნია, მაშინ ის ლოკალურად შემოსაზღვრულია და თუ ეს ზღვარი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის გაჩხვლეტილი მიდამო, რომელშიც ფუნქციას იგივე ნიშანი აქვს, რაც მის ზღვარს.

ეს წინადადებები უწყვეტი ფუნქციისათვის ასე ჩამოყალიბდება:

1) თუ f ფუნქცია უწყვეტია $x_0 \in E$ წერტილში, სადაც E ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა, რომლისთვისაც x_0 ზღვარითი წერტილია, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ $E \cap U(x_0,\delta)$ სიმრავლეზე f ფუნქციის შეზღუდვა შემოსაზღვრულია.

2) (უწყვეტი ფუნქციის ნიშნის შენარჩუნების თვისება). თუ $f : E \to R$ ფუნქცია უწყვეტია $x_0 \in E$ წერტილში და $f(x_0) \neq 0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ

$$\forall x \in E \cap U(x_0,\delta), \qquad f(x)\cdot f(x_0) > 0 .$$

ქვემო მოყვანილი თეორემები გვიჩვენებს, რომ რიცხვითი ფუნქციის უწყვეტობა შეიძლება დავახასიათოთ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში.

ჩაწერის სიმარტივისათვის განვიხილოთ $f : R \to R$ ფუნქციები.

თეორემა 5. იმისათვის, რომ $f : R \to R$ ფუნქცია იყოს უწყვეტი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი ღია $G \subset R$ სიმრავლის წინასახე $f^{-1}(G)$ იყოს ღია სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია და $G \subset R$ არის ნებისმიერი ღია სიმრავლე, უნდა ვაჩვენოთ, რომ $f^{-1}(G)$ - ღიაა R რიცხვით წრფეზე. მართლაც, თუ ეს სიმრავლე ცარიელია, მაშინ თეორემის პირობის აუცილებლობა ცხადია. ვთქვათ $f^{-1}(G) \neq \varnothing$ და $x_0 \in f^{-1}(G) \Rightarrow y_0 = \ = f(x_0) \in G$. რადგანაც G ღიაა ამიტომ $y_0 = f(x_0)$ წერტილი მისთვის შიგა წერტილია. ეს კი ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ $V(f(x_0),\varepsilon) \subset G$, სადაც $V(f(x_0),\varepsilon)$ არის $y_0 = f(x_0)$ წერტილის ε მიდამო. პირობის ძალით f ასახვა უწყვეტია x_0

წერტილში, ამიტომ $V(f(x_0),\varepsilon)$ მიდამოსათვის მოიძებნება x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ

$$f[U(x_0,\delta)]\subset V(f(x_0),\varepsilon)\subset G,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(G),$$

ე.ი. x_0 არის $f^{-1}(G)$ სიმრავლის შიგა წერტილი. ამგვარად $f^{-1}(G)$ სიმრავლის ყოველი წერტილი მისთვის შიგა წერტილია, ამიტომ ეს სიმრავლე ღიაა.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ღია $G\subset R$ სიმრავლისათვის $f^{-1}(G)$ სიმრავლე ღიაა. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $f:R\to R$ უწყვეტია. მართლაც ავიღოთ რაიმე $x_0\in R$ წერტილი და $\varepsilon>0$ რიცხვი. განვიხილოთ $f(x_0)$ წერტილის ε მიდამო $V(f(x_0),\varepsilon)=(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$. ეს სიმრავლე ღიაა, ამიტომ პირობის ძალით $f^{-1}(V(f(x_0),\varepsilon))$ ღია სიმრავლეა და ის შეიცავს x_0 წერტილს, რის გამოც არსებობს x_0 წერტილის δ მიდამო $U(x_0,\delta)$ ისეთი, რომ

$$U(x_0,\delta)\subset f^{-1}[V(f(x_0),\varepsilon)], \ \Rightarrow \ f[U(x_0,\delta)]\subset V(f(x_0),\varepsilon),$$

რაც ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას x_0 წერტილში.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ $f:R\to R$ ფუნქცია იყოს უწყვეტი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი ჩაკეტილი F სიმრავლის წინასახე იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე.

მართლაც თუ F ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშინ $F^c=R\setminus F=G$ ღიაა, ამიტომ $f^{-1}(G)$ არის ღია სიმრავლე როცა f უწყვეტია. რის გამოც ტოლობიდან

$$f^{-1}(F)=f^{-1}(R\setminus G)=f^{-1}(R)\setminus f^{-1}(G)=R\setminus f^{-1}(G)=\left[f^{-1}(G)\right]^c,$$

ეს სიმრავლე კი ჩაკეტილია.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ უწყვეტი ფუნქციით განხორციელებული ასახვის დროს ღია (ჩაკეტილი) სიმრავლის სახე შეიძლება არ იყოს ღია (ჩაკეტილი). მართლაც ასახვა, რომელიც მოცემულია ფორმულით

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

უწყვეტია მთელს R რიცხვით წრფეზე. ცხადია, რომ

$$f(R)=[0,1),$$

მაგრამ ეს სიმრავლე R რიცხვით წრფეზე არც ღიაა და არც ჩაკეტილი.

თეორემა 7. (ასახვათა კომპოზიციის უწყვეტობა) თუ $f:R\to R$ და $g:R\to R$ უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ უწყვეტია მათი $h=g\circ f$ კომპოზიციაც.

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\forall G \subset R$ ღია სიმრავლისათვის $h^{-1}(G) = f^{-1}[g^{-1}(G)]$ სიმრავლე ღიაა. (ვისარგებლებთ თეორემა 5-ით).

მართლაც, რადგან $g : R \to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ აღებული G სიმრავლისათვის $A = g^{-1}(G)$ სიმრავლე ღიაა. პირობის ძალით $f : R \to R$ ფუნქცია აგრეთვე უწყვეტია, ამიტომ $f^{-1}(A)$ ღია სიმრავლეა, მაგრამ აშკარაა, რომ

$$f^{-1}(A) = f^{-1}[g^{-1}(G)] = h^{-1}(G).$$

თეორემა დამტკიცებულია. ეს თეორემა მოკლედ ასე შეიძლება გამოვთქვათ: უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიცია უწყვეტი ფუნქციაა.

თეორემა 8. ვთქვათ $K \subset R$ რაიმე კომპაქტური სიმრავლეა. თუ $f : K \to R$ უწყვეტია, მაშინ $f(K)$ კომპაქტური სიმრავლეა.

დამტკიცება. როგორც ვიცით R რიცხვით წრფეზე სიმრავლე კომპაქტუ-რია, მაშინ და მხოლოდ, მაშინ როცა ის შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლეა.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $f(K)$ შემოსაზღვრულია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $f(K)$ სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ფუნქცია $f : K \to R$ შემოსაზღვრული არაა. ამიტომ $\forall n \in N$ მოიძებნება $x_n \in K$ წერტილი ისეთი, რომ $|f(x_n)| > n$.

მივიღებთ მიმდევრობას $(x_n)_{n \geq 1}$. ეს მიმდევრობა K სიმრავლის კომპაქტუ-რობის გამო შეიცავს ამავე სიმრავლის რაიმე x_0 წერტილისაკენ კრებად $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ ქვემიმდევრობას,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 .$$

x_0 წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის გამო, გვექნება

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \qquad (1)$$

მეორე მხრივ

$$|f(x_{n_k})| > n_k ,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$$

და მაშასადამე (1) ტოლობის თანახმად $|f(x_0)| = +\infty$, რაც შეუძლებელია. ამიტომ $f(K)$ - სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(K)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. მართლაც ვთქვათ y_0 არის $f(K)$ სიმრავლის რაიმე ზღვარითი წერტილი, მაშინ არსებობს $(y_n)_{n\geq 1} \subset f(K)$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0. \qquad (2)$$

დავუშვათ $f(x_n) = y_n$, $x_n \in K$. განვიხილოთ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა. K სიმრავლის კომპაქტურობის გამო მისგან გამოიყოფა რაღაც x_0 წერტილისაკენ კრებადი $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ ქვემიმდევრობა.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

დავუშვათ $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, მაშინ $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ არის $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, ამიტომ f ფუნქციის უწყვეტობისა და (2) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \in f(K),$$

ე.ი. $f(K)$ სიმრავლე შეიცავს ყველა მის ზღვარით წერტილს და ამიტომ ის ჩაკეტილი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ვაიერშტრასის შემდეგი თეორემები:

თეორემა 9. (ვაიერშტრასის I თეორემა) თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ის ამ სეგმენტზე შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. მართლაც თეორემა 8-ის თანახმად $f([a,b])$ როგორც კომპაქტური სიმრავლის სახე შემოსაზღვრულია, რაც ნიშნავს f ფუნქციის შემოსაზღვრულობას $[a,b]$ სეგმენტზე.

თეორემა 10. (ვაიერშტრასის II თეორემა) თუ $f:[a,b]\to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ იგი მიაღწევს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს, ე.ი. $\exists x_0, y_0 \in [a,b]$ წერტილები ისეთი, რომ

$$f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{და} \quad f(y_0) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

დამტკიცება. თეორემა 8-ის თანახმად $f([a,b])$ (იმის გამო, რომ $[a,b]$ კომპაქტური სიმრავლეა) არის კომპაქტური სიმრავლე, ამიტომ ის შემოსაზღვრულია და ჩაკეტილია. რადგანაც შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლე შეიცავს მის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს, ამიტომ

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup f([a,b]) \in f([a,b])$$

და

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)=\inf f([a,b])\in f([a,b]),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ არსებობს $x_0, y_0 \in [a,b]$ წერტილები ისეთი, რომ

$$f(x_0)=\sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{და} \quad f(y_0)=\inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

ეს თეორემები აგრეთვე გამოსახავენ უწყვეტი ფუნქციის გლობალურ თვისებებს.

ვთქვათ E ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. E სიმრავლეს ეწოდება ბმული, თუ არ არსებობს ორი ღია A და B სიმრავლე ისეთი, რომ $A\cap B=\varnothing$, $A\cap E\neq\varnothing$, $B\cap E\neq\varnothing$ და $E\subset A\cup B$.

ვთქვათ $E=\{x\in R: x\neq 0\}$. ვინაიდან $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, ამიტომ E სიმრავლე არ არის ბმული.

თეორემა 11. არაცარიელი $E\subset R$ სიმრავლე ბმულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი $x,y\in E$ წერტილებისათვის პირობიდან $x<z<y$ გამომდინარეობს, რომ $z\in E$.

შედეგი 1. E სიმრავლე ბმულია R რიცხვით წრფეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის ერთ-ერთი შემდეგი სიმრავლეებიდან:

$$(-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (a,+\infty),\ [a,+\infty),\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b).$$

მართლაც დავუშვათ $a=\inf E$, $b=\sup E$. თეორემა 1-ის თანახმად თუ $x,y\in E$, მაშინ $[x,y]\subset E$. სიმრავლის ზუსტი საზღვრების თვისების თანახმად a წერტილის ნებისმიერ მახლობლობაში მარჯვნიდან იმყოფება E სიმრავლის წერტილები, ასევე, b წერტილის ნებისმიერ მახლობლობაში მარცხნიდან არსებობს E სიმრავლის წერტილები. სხვანაირად, რომ ვთქვათ, როგორიც არ უნდა იყოს $a'>a$ და $b'<b$, $[a',b']\subset E$. საიდანაც $E=(a,b)$. თუ ზემოთ ჩამოთვლილი შუალედებიდან, რომელს დაემთხვევა E სიმრავლე ეს დამოკიდებულია იმაზე, სას-რულია თუ უსასრულო $\inf E$ და $\sup E$ და ეკუთვნიან თუ არა ისინი E სიმრავლეს.

თეორემა 12. ვთქვათ $E\subset R$ ბმული სიმრავლეა, თუ $f: E\to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $f(E)$ აგრეთვე ბმული სიმრავლეა. ანუ მოკლედ რომ ვთქვათ: უწყვეტი ფუნქცია ბმულ სიმრავლეს ასახავს ბმულ სიმრავლეზე.

თეორემა 13. (კოშის თეორემა). თუ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია უწყვეტია და $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A<B$, მაშინ ნებისმიერი c-სათვის, რომელიც მოთავსებულია A და B რიცხვებს შორის, მოიძებნება $x_0\in(a,b)$ ისეთი, რომ $f(x_0)=c$.

თუ $c=0$ მივიღებთ კოშის პირველ თეორემას. თუ $f:[a,b]\to R$ უწყვეტია და $f(a)<0$, $f(b)>0$, მაშინ არსებობს (a,b) შუალედში ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)=0$.

ეს თეორემა ასეც შეიძლება ჩამოყალიბდეს: უწყვეტი ფუნქცია ისე ვერ შეიცვლის ნიშანს, რომ ერთხელ მაინც ნულს არ გაუტოლდეს.

შედეგი 2. თუ f ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო Δ შუალედზე და მუდმივი არ არის, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე $f(\Delta)$ აგრეთვე შუალედია.

მართლაც, Δ შუალედი ბმული სიმრავლეა, ამიტომ $f(\Delta)$-ც ბმულია, თუ გავიხსენებთ, რომ რიცხვით R წრფეზე სიმრავლე ბმულია მაშინ და მხოლოდ. მაშინ, როცა ის წარმოადგენს შუალედს (ინტერვალს), ამიტომ $f(\Delta)$ - არის ინტერვალი.

შედეგი 3. თუ m და M წარმოადგენენ შესაბამისად $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს, მაშინ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას m და M რიცხვებს შორის.

მართლაც, ვაიერშტრასის მეორე თეორემის თანახმად $[a,b]$ სეგმენტზე არსებობს ისეთი x_1 და x_2 წერტილები, რომ $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$. ვთქვათ $x_1<x_2$ და $m<c<M$. მაშინ თეორემა 2-ის თანახმად (x_1,x_2) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც x_0 წერტილი, რომ $f(x_0)=c$.

ზემოხსენებული პირველი და მეორე შედეგებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

შედეგი 4. თუ $f:[a,b]\to R$ უწყვეტია და არ არის მუდმივი, მაშინ მის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[m,M]$ სეგმენტი, სადაც $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

დაბოლოს საინტერესოა გამოვიკვლიოთ შეიძლება თუ არა კოშის თეორემის შებრუნება, ე.ი. თუ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია როგორიც არ უნდა იყოს $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ სეგმენტი, ერთხელ მაინც მიიღებს $f(\alpha)$ და $f(\beta)$ რიცხვებს შორის მოთავსებული ყოველი რიცხვის მნიშვნელობას, მაშინ f იქნება თუ არა უწყვეტი $[a,b]$ სეგმენტში? ქვემოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ამ კითხვას უარყოფითი პასუხი აქვს.

მაგალითი. ვთქვათ $\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$ სეგმენტზე f ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგი წესით:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია თავისი განსაზღვრის არის ყოველ წერტილზე, გარდა $x=0$ წერტილისა. განვიხილოთ ნებისმიერი სეგმენტი

$$[\alpha,\beta]\subset\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right].$$

თუ ამ სეგმენტზე არა არის მოთავსებული $x=0$ წერტილი, მაშინ კოშის თეორემის თანახმად f ფუნქცია მიიღებს ყოველი რიცხვის მნიშვნელობას, მოთავსებულს $f(\alpha)$ და $f(\beta)$-ს შორის. ვთქვათ ახლა, ნულოვანი წერტილი მოთავსებულია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტში; მაშინ, თუ m მთელ რიცხვს ავიღებთ ისე, რომ მისი მოდული $|m|$ საკმაოდ დიდია, სეგმენტი

$$\Delta=\left[\frac{1}{(m+1)\pi},\frac{1}{m\pi}\right]\subset[\alpha,\beta].$$

რადგანაც Δ სეგმენტში ფუნქცია უწყვეტია და მის კიდურა წერტილებზე იგი ტოლია 1-ის და -1 –ის , ამიტომ f ფუნქცია მიიღებს ამ სეგმენტში ყოველი რიცხვის მნიშვნელობას, რომლის მოდული არ აღემატება 1-ს. რადგანაც f ფუნქციის მნიშვნელობის მოდული ყოველთვის ნაკლებია ან ტოლია ერთის, f ფუნქცია მიიღებს ნებისმიერ c რიცხვის მნიშვნელობას ნულოვანი წერტილის ყოველ მიდამოში, სადაც $|c|\le 1$. ამგვარად, როგორიც არ უნდა იყოს სეგმენტი

$$[\alpha,\beta]\subset\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right],$$

f ფუნქცია ღებულობს ამ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც $f(\alpha)$ და $f(\beta)$-ს შორის მოთავსებულ ყოველ რიცხვის მნიშვნელობას, თუმცა იგი არ არის უწყვეტი სეგმენტში

$$\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right].$$

§ 2. შექცეული ფუნქციის უწყვეტობის და ჰომეომორფიზმის სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეის პირველ კურსზე

ვთქვათ E და E_1 ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლეებია. $f:E\to E_1$ ფუნქციას ეწოდება ჰომეორფიზმი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) f ასახვა ბიექციაა;

2) ასახვები $f:E\to E_1$ და $f^{-1}:E_1\to E$ უწყვეტი არიან.

თუ E და E_1 სიმრავლეებს შორის არსებობს ჰომეორფიზმი, მაშინ E და E_1 სიმრავლეებს ურთიერთ ჰომეომორფული ეწოდებათ. ის რომ E და E_1 ურთიერთ ჰომეომორფული სიმრავლეებია ასე აღინიშნება $E\overset{f}{\approx}E_1$, სადაც $f:E\to E_1$ რაიმე ჰომეომორფიზმია, ან $E\approx E_1$.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჰომეორმოფულობის მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1. თუ $K\subset R$ კომპაქტური სიმრავლეა, ხოლო $f:K\to E$ (სადაც $E=f(K)$) ბიექცია უწყვეტია, მაშინ მისი შექცეული ასახვაც $f^{-1}:E\to K$ აგრეთვე უწყვეტია.

ეს თეორემა მოკლედ ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: K კომპაქტური სიმრავლის E სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა და უწყვეტი ასახვა არის ჰომეომორფიზმი.

R სივრცის რაიმე მონაკვეთზე განსაზღვრულ მონოტონურ ფუნქციებს განსაკუთრებული თვისებები გააჩნიათ, ამიტომ ასეთი ფუნქციების უწყვეტობის საკითხები სპეციალურ განხილვას მოითხოვს.

ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ, როცა f უწყვეტია Δ შუალედში, მაშინ $f(\Delta)$ აგრეთვე შუალედს წარმოადგენს R -ში. საზოგადოდ $f(\Delta)$ შესაძლებელია შუალედი (მონაკვეთი) იყოს წყვეტილი ფუნქციის შემთხვევაშიაც. თურმე მონოტონური f ფუნქციისათვის ასეთი რამ შეუძლებელია, ე.ი. სამართლიანია

თეორემა 2. ვთქვათ $f:\Delta\to R$ (სადაც Δ რაიმე მონაკვეთია R -ში: სასრული, ღია, ჩაკეტილი, ნახევრად ღია, ცალმხრივ უსასრულო და ა.შ.) მონოტონური ფუნქციაა Δ -ზე. $f(\Delta)=\{f(x):x\in\Delta\}$ მონაკვეთია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f უწყვეტია Δ -ზე.

თეორემა 3. (შექცეული ფუნქციის შესახებ). ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს შექცეული ფუნქცია

$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$, რომელიც მკაცრად ზრდადია $[f(a),f(b)]$ სეგმენტზე და უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

თეორემა 4. ვთქვათ $f:\Delta\to R$ (სადაც Δ რიცხვითი R წრფის სასრული ან უსასრულო მონაკვეთია) არის უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია და

$$A=\inf_{x\in\Delta} f(x)\,,\quad B=\sup_{x\in\Delta} f(x) \qquad (*)$$

სადაც, კერძოდ შეიძლება მოხდეს $A=-\infty$ და $B=+\infty$. მაშინ f ასახვის შებრუნებული ასახვა f^{-1} (A,B) შუალედში ცალსახა, მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა.

მე-4 თეორემის შინაარს შეიძლება მივცეთ ასეთი ჩამოყალიბება: R სივრცის Δ მონაკვეთზე განსაზღვრული ყოველი $f:\Delta\to R$ უწყვეტი და მკაცრად მონოტონური ფუნქცია აწარმოებს Δ მონაკვეთის ჰომეომორფულ ასახვას $f(\Delta)$ მონაკვეთზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f:\Delta\to R$ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ $f(\Delta)=\{f(x):x\in\Delta\}$ მონაკვეთია R წრფეზე (ვინაიდან უწყვეტი ფუნქცია მონაკვეთს ასახავს მონაკვეთზე). $f(\Delta)$ მონაკვეთი ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული აღმოჩნდება მაშინ და მხოლოდ, მაშინ, როცა f ფუნქცია ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულია. $f(\Delta)$ აღმოჩნდება მარჯვნიდან (მარცხნიდან) ჩაკეტილი მონაკვეთი მაშინ და მხოლოდ, მაშინ, როცა $f(\Delta)$-ს აქვს უდიდესი (უმცირესი) ელემენტი, ე.ი. როცა f ფუნქციას Δ მონაკვეთზე გააჩნია უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა. თუ $\Delta=[a,b]$-ს მაშინ ვაიერშტრასისა და კოშის თეორემების თანახმად $f(\Delta)$ წარმოადგენს სეგმენტს. $f(\Delta)=[m,M]$, სადაც $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ და $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

გავითვალისწინებთ რა ყოველივე ზემოთ თქმულს მე-5 თეორემის პირობებში შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ამ თეორემის ერთგვარი დაზუსტებანი სხვადასხვა შესაძლებელ ვარიანტებში. აი ზოგიერთი ასეთი შემთხვევა:

1) $\Delta=[a,b]$, სადაც $a,b\in R$ $(a<b)$ და f უწყვეტი, მკაცრად ზრდადი ფუნქ-ციაა, მაშინ მე-3 თეორემის თანახმად f წარმოადგენს ჰომეომორფიზმს $[a,b]$ და $[f(a),f(b)]$ სეგმენტებს შორის.

ცხადია ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, ესაა $f(b)$ და უმცირესი მნიშვნელობა $f(a)$.

f ფუნქციის შებრუნებული f^{-1} განსაზღვრულია სეგმენტზე $[f(a),f(b)]$, ის უწყვეტია და მკაცრად ზრდადი ამ სეგმენტზე.

2) $\Delta=[a,b)$ და f მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან, მაშინ f ფუნქციას აქვს ზღვარი b წერტილში მარცხნიდან $f(b-0)$, რომელიც მკაცრად მეტია $f(a)$-ზე – ასეთ პირობებში f ახორციელებს $[a,b)$ მონაკვეთის ჰომეომორფულ ასახვას $[f(a),f(b-0))$ მონაკ-ვეთზე. f^{-1} ამ უკანასკნელ მონაკვეთზე განსაზღვრული და მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა.

3) ვთქვათ $\Delta=[a,b)$ და f მკაცრად ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც ზემოდან არაა შემოსაზღვრული. ასეთ პირობებში f დადებითი უსასრულოდ დიდია b წერტილში მარცხნიდან. f წარმოადგენს $[a,b)$ მონაკვეთის ჰომეო-მორფულ ასახვას $[f(a),+\infty)$ მონაკვეთზე.

$$f^{-1}:[f(a),+\infty]\to[a,b)$$

ფუნქცია წარმოადგენს უწყვეტ, მკაცრად ზრდად ფუნქციას თავის განსაზღვრის მონაკვეთზე.

4) ვთქვათ $\Delta=[a,+\infty)$ და $f:\Delta\to R$ რაიმე მკაცრად ზრდადი, უწყვეტი ზემოდან შემოსაზღვრული ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ $f(a)<B$. f წარმოადგენს $[a,+\infty)$ მონაკვეთის ჰომეომორფულ ასახვას $[f(a),B)$ მონაკვეთზე. $f^{-1}:[f(a),B)\to R$ უწყვეტი და მკაცრად ზრდადია.

5) თუ $\Delta=[a,+\infty)$ და $f:\Delta\to R$ რაიმე მკაცრად ზრდადი ზემოდან შემოუ-საზღვრელი უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

ამიტომ f წარმოადგენს $[a,+\infty)$ მონაკვეთის ჰომეომორფულ ასახვას $[f(a),+\infty)$ მონაკვეთზე. f^{-1} მკაცრად ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა $[f(a),+\infty)$ მონაკვეთზე.

ცხადია, რომ ყოველივე ზემოთ ნათქვამი სამართლიანია მკაცრად კლებადი ფუნქციის შემთხვევაშიც.

§ 3. ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობის სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო და უმაღლესი სკოლის მათემატიკის კურსში

ელემენტარული ფუნქციებია:

1) $P(x)$ - მრავალწევრი, $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$,

2) რაციონალური ფუნქცია $f(x)=P(x)/Q(x)$, სადაც P და Q მრავალწევრებია.

3) მაჩვენებლიანი ფუნქცია $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

4) ხარისხოვანი ფუნქცია $f(x)=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$.

5) ლოგარითმული ფუნქცია $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

6) ყველა ტრიგონომეტრიული ფუნქცია (როგორც პირდაპირი, ისე შებრუნებული).

7) ამ ფუნქციების ყველა შესაძლებელი სასრული კომპოზიციები.

აღნიშნულ ფუნქციებს ეწოდებათ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები, ვინაიდან ისინი განიხილებიან ელემენტარული მათემატიკის სასკოლო კურსის ფარგლებში. მათი ფუნქციური თვისებების აღწერა არსებითად ეყრდნობა: მაჩვენებლიანი, ხარისხოვანი, ლოგარითმული ფუნქციების და აგრეთვე ნამდვილი არგუმენტის სინუსისა და კოსინუსის განმარტებას.

პირველ პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერი მრავალწევრი უწყვეტია მთელს R რიცხვით წრფეზე. ასევე ვაჩვენეთ, რომ ყოველი რაციონალური ფუნქცია უწყვეტია იმ წერტილებზე, სადაც მისი მნიშვნელი არ არის ნულის ტოლი. ვაჩვენოთ ახლა დანარჩენი ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობა.

1. მაჩვენებლიანი ფუნქცია. $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ სახის ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. მისი განსაზღვრის არეა $(-\infty,+\infty)$ შუალედი.

$f(x)=a^x$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია თავის განსაზღვრის არეში, როდესაც $a>1$, ხოლო მკაცრად კლებადია, როდესაც $a<1$. მართლაც, თუ $a>1$, მაშინ ყოველი x_1 და x_2 რიცხვებისათვის, სადაც $x_1<x_2$, გვექნება $a^{x_1}<a^{x_2}$, ხოლო, თუ $a<1$, მაშინ $a^{x_1}>a^{x_2}$.

ლემა. თუ $a>0$, მაშინ

$$\lim_{x\to 0}a^x=1. \qquad (1)$$

თეორემა 1. მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y=a^x$ უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $x_0\in R$ რიცხვი, მაშინ

$$a^x=a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}.$$

ლემის თანახმად $\lim\limits_{x\to x_0}a^{x-x_0}=1$, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

მაშასადამე, a^x უწყვეტია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

გამოვთვალოთ

$$\lim_{x\to+\infty} a^x \text{ და } \lim_{x\to-\infty} a^x, \quad a>0.$$

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $a<1$, რადგანაც a^x ფუნქცია კლებადია და ყოველი x-სათვის $a^x>0$, ამიტომ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = l$.

$$a^{x+1}=a\cdot a^x$$

ტოლობიდან ზღვარზე გადასვლით, როცა $x\to+\infty$ მივიღებთ:

$$l=l\cdot a \;\Rightarrow\; l(1-a)=0 \;\Rightarrow\; l=0.$$

ახლა ვთქვათ $a>1$, მაშინ

$$a^x=\frac{1}{b^x}, \text{ სადაც } b=\frac{1}{a}<1.$$

მაგრამ $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x=0$, ამიტომ

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \text{ როდესაც } a>1.$$

თუ $x\to-\infty$, მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=-t$, გვექნება:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=\lim_{t\to+\infty} a^{-t}=\begin{cases}0, & \text{როცა } a>1,\\ +\infty, & \text{როცა } a<1.\end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(0,+\infty)$ შუალედი.

2. ლოგარითმული ფუნქცია. განვიხილოთ $y=\log_a x \quad (a>0,\quad a\neq 1)$ ლოგარითმული ფუნქცია. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a>1$. მაშინ $y=a^x$ ფუნქცია უწყვეტია და მკაცრად მონოტონურია მთელს R რიცხვით წრფეზე. ამასთანავე

$$\inf_{x\in R} a^x=0, \quad \sup_{x\in R} a^x=+\infty.$$

მაშასადამე a^x ფუნქცია ჰომეომორფულად ასახავს $(-\infty,+\infty)$ შუალედს $(0,+\infty)$ შუალედზე. მისი შექცეული ფუნქცია ცალსახა, მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა $(0,+\infty)$ შუალედში. ამ ფუნქციას ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია და აღინიშნება

$$y=\log_a x.$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty, \quad \lim_{xc\to 0^+} \log_a x=-\infty.$$

როცა $a<1$ მსჯელობა ანალოგიურია. ფუნქცია a^x ამ შემთხვევაშიაც $(-\infty,+\infty)$ შუალედს ჰომეომორფულად ასახავს $(0,+\infty)=R_+$ შუალედზე. შექცეული ფუნქცია

$\log_a x$ არის ამ შემთხვევაში მკაცრად კლებადი, ცალსახა და უწყვეტი ფუნქცია $(0,+\infty)$ შუალედში. ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty\,.$$

a რიცხვის ლოგარითმი e ფუძით (e ნეპერის რიცხვია) აღინიშნება $\ln a$-თი. მას a რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება.

3. ხარისხოვანი ფუნქცია. $y=x^\alpha$ ფუნქციას, სადაც α ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, ხოლო x ცვლადი, ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება. ეს ფუნქცია ყოველ შემთხვევაში განსაზღვრულია $(0,+\infty)$ შუალედში. ძირითადი ლოგარითმული იგივეობის თანახმად

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}\quad (x>0)\,.\qquad (1)$$

ხარისხოვანი ფუნქციის თვისებები შეიძლება დავადგინოთ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების თვისებების მეშვეობით. ცხადია, რომ x^α არის უწყვეტი ფუნქცია, როგორც $y=e^u$ და $u=\alpha\ln x$ უწყვეტი ფუნქციების კომპოზიცია. როცა $\alpha>0$ ის მკაცრად ზრდადია და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=0\,,\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty\,,$$

როცა $\alpha>0$ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $0^\alpha=0$; ამ შემთხვევაში x^α ფუნქცია $x=0$ წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან.

როცა $\alpha<0$ ფუნქცია x^α უწყვეტი და მკაცრად კლებადია $(0,+\infty)$ შუა-ლედში და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=+\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=0\,.$$

(1) ფორმულიდან გამომდინარეობს ხარისხოვანი ფუნქციის დამახასიათებელი თვისება $(xy)^\alpha=x^\alpha\cdot y^\alpha$. ხარისხოვან ფუნქციას აზრი აქვს, როგორც ნამდვილ ფუნქციას, x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვისაც, როცა α მთელი ან რაციონალური $r=\dfrac{p}{q}$ რიცხვია, როცა q - კენტია.

4. ვაჩვენოთ, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: $\sin x$, $\cos x$, tgx და $ctgx$ უწყვეტი არიან მათ განსაზღვრის არეებში. ჯერ განვიხილოთ $y=\sin x$ ფუნქცია. ავიღოთ რაიმე $x_0\in R$ და ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. ტრიგონომეტრიის ერთერთი ფორმულის თანახმად

$$\sin x-\sin x_0=2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\,.\quad (*)$$

რადგანაც

$$\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 1, \quad \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\frac{|x-x_0|}{2},$$

ამიტომ (*) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$|\sin x-\sin x_0|\le 2\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|, \quad (2)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი და ვთქვათ $\delta=\varepsilon$. მაშინ $|x-x_0|<\delta$ გამომდინარეობს $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\sin x$ უწყვეტია x_0 წერტილზე.

ანალოგიურად მტკიცდება $\cos x$ ფუნქციის უწყვეტობა x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის.

განვიხილოთ, ახლა $y=tgx$ და $y=ctgx$ ფუნქციები. tgx ფუნქცია უწყვეტია ყოველ წერტილში გარდა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ სახის წერტილებისა, სადაც $k\in Z$, ხოლო $ctgx$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან გარდა $x=\pi k$, $k\in Z$ სახის წერტილებისა.

5. $y=f(x)=\sin x$ ფუნქცია მკაცრად ზრდადი და უწყვეტია $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ მონაკვეთზე. მაშასადამე ამ ფუნქციის შეზღუდვას $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ მონაკვეთზე გააჩნია შებრუნებული ფუნქცია $y=f^{-1}(x)$, რომელიც აღინიშნება $\arcsin x$-ით, ის განსაზღვრულია $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\sin\frac{\pi}{2}\right]=[-1,1]$ სეგმენტზე, მკაცრად ზრდადია და უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

6. $y=\cos x$ ფუნქციის შეზღუდვა $[0,\pi]$ მონაკვეთზე არის უწყვეტი და მკაცრად კლებადი ფუნქცია, ამიტომ მას გააჩნია შექცეული ასახვა, რომელიც აღინიშნება $\arccos x$-ით. ეს ფუნქცია უწყვეტი და მკაცრად კლებადია $[-1,1]$ მონაკვეთზე.

7. $y=tgx$ ფუნქციის შეზღუდვა $X=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში არის $-\infty$-დან $+\infty$-მდე ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ ის შექცევადია, მის შექცეულ ფუნქციას აღნიშნავენ $y=arctgx$-ით. ის უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა $(-\infty,+\infty)$ შუალედში.

ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ $y=ctgx$ ფუნქციის შეზღუდვას $(0,\pi)$ შუალედში გააჩნია შექცეული ასახვა $y=arcctgx$, რომელიც $(-\infty,+\infty)$ შუალედში არის მკაცრად კლებადი და უწყვეტი.

8. ჰიპერბოლური ფუნქციები. ფუნქციებს

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

შესაბამისად ეწოდებათ ჰიპერბოლური სინუსი, ჰიპერბოლური კოსინუსი, ჰიპერბოლური ტანგესი და ჰიპერბოლური კოტანგესი.

ფუნქცია $y=shx$ უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში, ის მკაცრად ზრდადია, ვინაიდან e^x მკაცრად ზრდადია, ხოლო e^{-x} კი მკაცრად კლებადი $(-\infty,+\infty)$ შუალედში.

ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} shx=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} shx=-\infty.$$

მაშასადამე shx ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $(-\infty,+\infty)$ შუალედი. $sh(-x)=-shx$, ე.ი. shx კენტი ფუნქციაა.

$y=chx$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში. ის მკაცრად ზრდადია $[0,+\infty)$ შუალედში, ხოლო მკაცრად კლებადია $(-\infty,0]$ შუალედში. $ch(-x)=chx$, ე.ი. ლუწი ფუნქციაა. ამ ფუნქციის გრაფიკს ჯაჭვწირს უწოდებენ.

ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობების სამართლიანობაში:

$$ch^2x-sh^2x=1,$$

$$sh(x\pm y)=shx\cdot chy\pm chx\cdot shy,$$

$$ch(x\pm y)=chx\cdot chy\pm shx\cdot shy.$$

$y=thx$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში. ის ამ შუალედში მკაცრად ზრდადია.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$th(-x)=-thx, \quad \lim_{x\to+\infty} thx=1, \quad \lim_{x\to-\infty} thx=-1.$$

ასე, რომ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ გვაქვს $-1<thx<1$.

$y=cthx$ ფუნქცია განსაზღვრულია x-ის ყველა მნიშვნელობებისათვის, გარდა $x=0$ მნიშვნელობისა. ეს ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to0^+} cthx=+\infty, \quad \lim_{x\to0^-} cthx=-\infty.$$

მაშასადამე, $x=0$ წერტილში განიცდის მეორე გვარის წყვეტას. ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} cthx=1, \quad \lim_{x\to-\infty} cthx=-1.$$

ეს ფუნქცია კლებადია $(-\infty,0)$ და $(0,+\infty)$ შუალედებში, მასთან

$$-\infty<cthx<-1, \text{ როდესაც } -\infty<x<0,$$

$$1 < cthx < +\infty, \text{ როდესაც } 0 < x < +\infty.$$

აშკარაა, რომ:

$$thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}, \quad thx \cdot cthx = 1.$$

როგორც ვიცით $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოდგება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და კომპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

ელემენტარული ფუნქციებია, მაგალითად,

$$y = \ln \cos x, \quad y = ctgx, \quad y = 2^{x^3}$$

$$y = tg^2(\ln x) - \ln \sin x + \sqrt{x+1}.$$

არაელემენტარული ფუნქციაა $y = [x]$, სადაც $[x]$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x-ს.

$y = |x|$ ელემენტარული ფუნქციაა, ვინაიდან იგი წარმოდგება ასე $y = \sqrt{x^2}$.

თეორემა 2. ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დამტკიცება. ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ ყოველი ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. შემდეგ, ნებისმიერი არითმეტიკული ოპერაცია უწყვეტ ფუნქციებზე გვაძლევს ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დასასრულ ვიცით, რომ უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიცია (სუპერპოზიცია) კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშასადამე, ყოველი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია მის განსაზღვრის არეში. თეორემა დამტკიცებულია.

§4. არასაკუთრივი ინტეგრალები

თუ $f : \Delta \to R$ (სადაც Δ არასასრული სეგმენტია) ისეთი ფუნქციაა, რომლის შეზღუდვა Δ მონაკვეთის ყოველ სასრულ $[\alpha, \beta]$ მონაკვეთზე ინტეგრებადია. ასეთ დროს ვიტყვით, რომ f ფუნქცია Δ მონაკვეთზე ლოკალურად ინტეგრებადია.

განვიხილოთ უსასრულო $\Delta = [a, +\infty)$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ფუნქცია, სადაც a რაიმე ნამდვილი რიცხვია. ქვემოთ გარკვეულობისათვის, ყველგან ვიგულისხმებთ,

რომ $\Delta = [a,+\infty)$. მარცხნიდან უსასრულო $(-\infty, a]$ სეგმენტის შემთხვევა სავსებით ანალოგიურად აღიწერება.

ამგვარად, ვთქვათ $f:[a,+\infty) \to R$ რაიმე ფუნქციაა. ავიღოთ ნებისმიერი $t(t > a)$ ნამდვილი რიცხვი და ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქციის შეზღუდვა ყოველ $[a,t]$ სეგმენტზე ინტეგრებადია რიმანის აზრით. ასეთ შემთხვევაში როგორც უკვე აღვნიშნეთ f ფუნქციას ეწოდება ლოკალურად ინტეგრებადი Δ მონაკვეთზე.

განვიხილოთ ინტეგრალი ცვლადი ზედა t საზღვრით $(a < t)$

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

და გამოვიკვლიოთ F ფუნქციის ყოფაქცევა, როცა $t \to +\infty$.

თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

მას ბუნებრივია, ვუწოდოთ f ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,+\infty)$ მონაკვეთზე და ის

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

სიმბოლოთი აღვნიშნოთ.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ ძირითად განმარტებას: ვთქვათ $f:[a,+\infty) \to R$ რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,+\infty)$ მონაკვეთზე. ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

კრებადია, როცა არსებობს ზღვარი

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

და ასეთ შემთხვევაში $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ რიცხვი განიმარტება ტოლობით

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

თუ ეს ზღვარი არ არსებობს, ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ვიტყვით, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია. ასეთ შემთხვევაში $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ სიმბოლოს არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა არ მიეწერება.

ახლა, ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty, b] = \Delta$ მონაკვეთზე და ინტეგრებადია ყოველ $[t, b]$ სეგმენტზე, სადაც t ნაკლებია b-ზე ნებისმიერი რიცხვია, ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება ლოკალურად ინტეგრებადი $(-\infty, b]$ მონაკვეთზე, თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$. მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty, b]$ მონაკვეთზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

ამ დროს ვამბობთ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია. თუ ეს ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ვიტყვით, რომ (2) განშლადია.

დასარულს ჩვენ ვიტყვით, რომ $(-\infty, +\infty)$ შუალედში განსაზღვრული f ფუნქცია ინტეგრებადია ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \text{ და } \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი $-\infty$-დან $+\infty$-მდე $f(x)dx$-დან.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

ამგვარად

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2},$$

სადაც $a > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \lim_{t \to +\infty} arctg \frac{x}{a}\bigg|_0^t = \frac{1}{a} \lim_{t \to +\infty} \left(arctg \frac{t}{a} - arct0 \right) = \frac{\pi}{2a}.$$

ე.ი. ეს ინტეგრალი არის კრებადი.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, სადაც $a > 0$ კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია $\alpha \le 1$.

თუ $\alpha \ne 1$, მაშინ

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, \text{ hjwf } \quad \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \text{ hjwf } \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

თუ $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln t - \ln a\right) = +\infty.$$

მაშასადამე მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \le 1$.

ინტეგრალებს უსასრულო საზღვრებით სხვანაირად პირველი გვარის არასაკუთრივ ინტეგრალებსაც უწოდებენ.

ვთქვათ $f:[a,b) \to R$ რაიმე ფუნქციაა. b წერტილს ვუწოდოთ განსაკუთრებული წერტილი, თუ f ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ამ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში, მაგრამ მისი შეზღუდვა შემოსაზღვრულია ყოველ $[a,b-\varepsilon] \subset [a,b)$ სეგმენტში.

თუ f ფუნქციისათვის b განსაკუთრებული წერტილია და ამასთანავე f ფუნქციის შეზღუდვა ინტეგრებადია (რიმანის ჩვეულებრივი აზრით) $[a,b-\varepsilon]$ სეგმენტზე $\forall \varepsilon > 0$. მაშინ f ფუნქციას ეწოდება ლოკალურად ინტეგრებადი $[a,b)$ მონაკვეთზე.

განმარტება 1. ვთქვათ, $f:[a,b) \to R$ რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,b)$ ნახევარსეგმენტზე. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (3)$$

Vაშინ ამ ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი (მეორე გვარის) $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (4) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო f ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,b]$ სეგმენტზე. ამგვარად განმარტების თანახმად

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

თუ (3) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოდ დიდია, მაშინ ამბობენ, რომ (4) ინტეგრალი განშლადია, ასეთ შემთხვევაში $\int_a^b f(x)dx$ სიმბოლოს არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა არ მიეწერება.

ანალოგიურად განიმარტება $f:[a,b]\to R$ (a განსაკურებული წერტილია) ფუნქციის ლოკალურად ინტეგრებადობა და მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_a^b f(x)dx$$

Cახელდობრ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

იმ შემთხვევაში, როცა f ფუნქცია განსაზღვრულია (a,b) ინტერვალზე და a და b წერტილები მისთვის განსაკუთრებული წერტილებია, მაშინ მას ეწოდება ლოკალურად ინტეგრებადი (a,b) ინტერვალზე, თუ $\forall c\in(a,b)$ ფუნქცია ლოკალურად ინტეგრებადია $(a,c]$ და $[c,b)$ მონაკვეთებზე.

განმარტება 2. ვთქვათ $f:(a,b)\to R$ რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ მას ეწოდება ინტეგრებადი (არასაკუთრივი აზრით) $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $\forall c\in(a,b)$ კრებადია ინტეგრალები

$$\int_a^c f(x)dx \text{ და } \int_c^b f(x)dx$$

ამ ინტეგრალების ჯამს ეწოდება f ფუნქციის მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე და განმარტების თანახმად გვაქვს

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a+\varepsilon_1}^{c} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$

დასასრულ, ვთქვათ f ფუნქციისათვის $[a,b]$ სეგმენტის შიგა c წერტილი არის განსაკუთრებული წერტილი. თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრლები:

$$\int_a^c f(x)dx \text{ და } \int_c^b f(x)dx$$

მაშინ f ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი $[a,b]$ სეგმენტზე და მათ ჯამს ეწოდება f ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე, ე.ი.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

თუ $\int_a^c f(x)dx$ და $\int_c^b f(x)dx$ ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ ინტეგრალს $\int_a^b f(x)dx$ ეწოდება განშლადი.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქციისათვის $x=2$ არის განსაკუთრებული წერტილი, ამიტომ განმარტების თანახმად

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

ე.ი. ინტეგრალი კრებადია.

მაგალითი 4. ვთქვათ $f:(a,b] \to R$ განსაზღვრულია ტოლობით

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \forall x \in (a,b]$$

სადაც α რაიმე ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია. ავიღოთ $\varepsilon > 0$ რიცხვი, ისე რომ $a+\varepsilon < b$. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (x-a)^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b (x-a)^{-\alpha} d(x-a) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ hjwf } & \alpha < 1 \\ +\infty 7\text{hjwf} & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

ამგვარად მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როცა $\alpha < 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \geq 1$.

სავსებით ანალოგიურად მარჯვნიდან ღია $[a,b)$ მონაკვეთზე განხილული არასაკუთრივი

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

ინტეგრალისათვის გვაქვს, რომ ის კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha < 1$ (და მისი მნიშვნელობაა $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$).

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციისათვის გარკვეული დამატებითი პირობის შედეგად მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის საკითხი შეიძლება დავიყვანოთ პირველი გვარის ინტეგრალის კრებადობის გამოკვლევაზე.

სახელდობრ: ვთქვათ $f:[a,b) \to R$ უწყვეტია და b მისთვის განსაკუთრებული წერტილია. ამ პირობებში ინტეგრალისათვის

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$\varepsilon > 0$, ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ ცვლადის შეცვლა

$$x = b - \frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \frac{1}{b-a} \le t \le \frac{1}{\varepsilon}$$

რის შედეგადაც მივიღებთ

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_{(b-a)^{-1}}^{\varepsilon^{-1}} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt \qquad (5)$$

ვთქვათ კრებადია ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

(5) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ არსებობს მარჯვენა მხარის ზღვარი და იგი ტოლია რიცხვის

$$\int_{(b-a)^{-1}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt \qquad (6)$$

ცხადია, რომ (6) ინტეგრალის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის კრებადობა და ამ ინტეგრალების ტოლობა. ამგვარად თუ ინტეგრალებიდან

$$\int_a^b f(x)dx \text{ და } \int_{(b-a)^{-1}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$$

ერთ-ერთი კრებადია მაშინ კრებადია მეორე ინტეგრალიც და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(b-a)^{-1}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$$

4.1. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი. აბსოლუტური და პირობითი კრებადობა

პირველი გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის გამოკვლევა ეკვივალენტურია

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

ფუნქციის ზღვრის გამოთვლისა (არსებობისა) როცა $t \to +\infty$. ამის გამო არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმი.მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ, $f:[a,+\infty) \to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a,+\infty)$ მონაკვეთზე არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $A > a$ რიცხვი, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon, \text{ როცა } t' > A \text{ და } t'' > A.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

$f:[a,+\infty) \to R$ ფუნქციის ლოკალურად ინტეგრებადობის გამო F სასრულია t ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის $\Delta = [a,+\infty)$ შუალედიდან. როგორც ვიცით F ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როცა $t \to +\infty$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $A > a$ რიცხვი, რომ

$$\left|F(t'')-F(t')\right|<\varepsilon\text{, როცა } t'>A \text{ და } t''>A.$$

მაგრამ

$$F(t'')-F(t')=\int_a^{t''}f(x)dx-\int_a^{t'}f(x)dx=\int_{t'}^{t''}f(x)dx.$$

მაშასადამე, როცა $t'>A$ და $t''>A$ გვაქვს

$$\left|\int_{t'}^{t''}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობიდან არ გამომდინარეობს საზოგადოდ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის შემოსაზღვრულობა. ასე მაგალითად, ვთქვათ, f ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$f(x)=\begin{cases}n,\ \text{hjwf} & x\in Z\\ 0,\ \text{hjwf} & x\notin Z\end{cases}$$

(n - მთელია), ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0$$

მაგრამ f ფუნქცია შემოსაზღვრული არ არის.

თეორემა 2. ვთქვათ, $f:[a,+\infty)\to R$ და $g:[a,+\infty)\to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი არიან $\Delta=[a,+\infty)$ შუალედში, ამასთანავე f კლებადია Δ-ში და $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. თუ ინტეგრალი

$$\int_a^t g(x)dx$$

შემოსაზღვრულია Δ შუალედში, მაშინ კრებადია ინტეგრალი $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $K=\sup\limits_{t\in\Delta}\left|\int_a^t g(x)dx\right|$ რადგანაც $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ამიტომ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $\exists A>a$ რიცხვი, რომ

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2k}\text{, როცა } x>A.$$

განვიხილოთ ახლა ორი ნებისმიერი $t'>A$ და $t''>A$ რიცხვი, მაშინ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულის თანახმად

$$\left|\int_{t'}^{t''}f(x)g(x)dx\right|=\left|f(t')\int_a^{\xi}g(x)dx\right|=\left|f(t')\int_a^{\xi}g(x)dx-f(t')\int_a^{t'}g(x)dx\right|\le 2k|f(t')|<\varepsilon..$$

ამიტომ თეორემა 1-ის თანახმად ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, სადაც $a > 0$ კრებადია, თუ $\alpha > 0$.

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნები $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $g(x) = \sin x$.. რადგანაც

$$\left| \int\limits_a^t g(x)dx \right| = \left| -\cos t + \cos a \right| \leq 2$$

ამიტომ

$$\sup_{a \leq t < +\infty} \left| \int\limits_a^t g(x)dx \right| \leq 2 .$$

ცხადია, რომ f ფუნქცია კლებადია $[a,+\infty)$ შუალედში და $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ამიტომ $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ კრებადია.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$, , როცა $\alpha > 0$.

თეორემა 3. ვთქვათ, $f:[a,+\infty) \to R$ და $g:[a,+\infty) \to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი არიან $\Delta = [a,+\infty)$ შუალედში, ამასთანავე g მონოტონურია და შემოსაზღვრული $[a,+\infty)$ შუალედში. თუ ინტეგრალი

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

კრებადია, მაშინ აგრეთვე კრებადია ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

დამტკიცება. საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის თანახმად

$$\int\limits_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx = g(t')\int\limits_{t'}^{\xi} f(x)dx + g(t'')\int\limits_{\xi}^{t''} f(x)dx \qquad (1)$$

სადაც $a \leq t' < \xi < t''$. ვთქვათ $K = \sup\limits_{x \in \Delta} |g(x)|$.

რადგანაც ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, ამიტომ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\exists A > a$ რიცხვი, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2k}, \text{ როცა } t' > A \text{ და } t'' > A \ .$$

ასეთი t' და t'' რიცხვებისათვის (1) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(t')|\left|\int_{t'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(t'')|\left|\int_{\xi}^{t''} f(x)dx\right| \le k\cdot\frac{\varepsilon}{2k} + k\cdot\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ვთქვათ, $f:[a,+\infty)\to R$ და $g:[a,+\infty)\to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციები არიან $\Delta=[a,+\infty)$ შუალედში, ამასთანავე $\forall x\in\Delta,\ f(x)\le g(x)$. თუ კრებადია ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, მაშინ კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციები $F(t)=\int_a^t f(x)dx$, $G(t)=\int_a^t g(x)dx \quad t\in\Delta$.

ცხადია, რომ $\forall t\in\Delta, F(t)\le G(t)$. ამის გარდა F და G ფუნქციები ზრდადია Δ შუალედში. პირობის ძალით არსებობს $\lim_{x\to+\infty} G(t)$ ამიტომ იარსებებს $\lim_{x\to+\infty} F(t)$, ე.ი. კრებადია ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ განშლადია, მაშინ განშლადია ინტეგრალიც $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

შედეგი (შედარების ნიშანი). ვთქვათ, $f:[a,+\infty)\to R$ და $g:[a,+\infty)\to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციები არიან $\Delta=[a,+\infty)$ შუალედში, ამასთანავე $f(x)\sim g(x)$ როცა $x\to+\infty$, მაშინ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ და $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალები ერთდროულად კრებადია ან განშლადი.

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$$

კრებადია.

მართლაც $\forall x \in \Delta$ $\frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \frac{1}{3^x}$, სადაც $\Delta = [1,+\infty)$ რადგანაც ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3^x} = \int_1^{+\infty} 3^{-x}\,dx = -\lim_{t\to+\infty}\int_1^t 3^{-x}\,d(-x) = -\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3^{-t}}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3}\right) = \frac{1}{3\ln 3}$$

კრებადია, ამიტომ კრებადია მოცემული ინტეგრალიც.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x}}dx$ განშლადია.

მართლაც აშკარაა, რომ

$$\frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ამიტომ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ ინტეგრალის განშლადობის გამო განშლადია გამოსაკვლევი ინტეგრალიც.

მაგალითი 4. გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}} \text{ და } 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

ამოხსნა: 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ ფუნქციას $(0,+\infty)$ შუალედზე აქვს ორი განსაკუთრებული წერტილი: 0 და $+\infty$. მაშასადამე, აუცილებელია ცალცალკე განვიხილოთ $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ და $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ ინტეგრალების კრებადობა ნებისმიერი $a \in (0,+\infty)$-თვის.

ვისარგებლებთ რა შედარების ნიშნით და თანაფარდობით

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}} \sim \frac{1}{2x^3} \text{ როცა } x\to+\infty,\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}} \sim \frac{1}{x^{4/3}} \text{ როცა } x\to 0,$$

ვღებულობთ, რომ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ ინტეგრალი კრებადია, ხოლო $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ $(0 < a < +\infty)$ ინტეგრალი განშლადი. მაშასადამე, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}$ ინტეგრალი განშლადია.

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ ფუნქციას $(0,+\infty)$ შუალედზე აქვს ორი განსაკუთრებული წერტილი: საკუთრივი $x_0 = 0$ და არასაკუთრივი $(+\infty)$. მაშასადამე, აუცილებელია

ცალცალკე განვიხილოთ $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ და $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ ინტეგრალების კრებადობა ნებისმიერი $a \in (0,+\infty)$-თვის.

ვისარგებლებთ რა შედარების ნიშნით და თანაფარდობით

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ როცა } x \to 0+, \quad \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \text{ როცა } x \to +\infty,$$

ვღებულობთ, რომ მოცემული ინტეგრალებიდან თითოეული კრებადია, ე.ი. კრებადია ინტეგრალი $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$.

შემოვიღოთ პირველი გვარის ასრაკუთრივი ინტეგრალის აბსოლუტურად და პირობით (არააბსოლუტურად) კრებადობის ცნებები.

ვთქვათ, $f:[a,+\infty) \to R$ ფუნქცია ლოკალურად ინტეგრებადია $[a,+\infty)$ შუალედში.

განმარტება 1. არასაკუთრივ ინტეგალს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

განმარტება 2. არასაკუთრივ ინტეგრალს $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ეწოდება პირობით კრებადი, თუ ის კრებადია, მაგრამ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ განშლადია.

თეორემა 5. თუ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ კრებადია თვით მოცემული ინტეგრალიც და მართებულია უტოლობა

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx \qquad (1).$$

დამტკიცება. რადგან $|f(x)|$ ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,+\infty)$ შუალედში, ამიტომ კოშის კრიტერიუმის თანახმად $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $A > a$ ისეთი რიცხვი, რომ

$$\left|\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon, \text{ როცა } t' > A \text{ და } t'' > A.$$

მაგრამ

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \le \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx < \varepsilon \text{, როცა } t' > A \text{ და } t'' > A .$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ კრებადია, თუ უტოლობაში

$$\left|\int_a^t f(x)dx\right| \le \int_a^t |f(x)|dx$$

გადავალთ ზღვარზე, როცა $t \to +\infty$, მივიღებთ (1) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 5. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ სადაც $a > 0$ კრებადია, ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty .$$

მართლაც, მოცემული ინტეგრალის კრებადობა, ჩვენ ვაჩვენეთ წინა პარაგრაფში. ახლა დავუშვათ, რომ ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

კრებადია, მაშინ იმის გამო, რომ $\sin^2 x \le |\sin x|$ კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$$

ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ კრებადი ინტეგრალი $\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$, გვექნება

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} .$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა ნაწილი სასრულია, მარჯვენა კი უსასრულო. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

განშლადია, ე.ი. მოცემული ინტეგრალი არის პირობით კრებადი.

მაგალითი 6. ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

აბსოლუტურად კრებადია, მართლაც, $\forall x \in [0,+\infty)$

$$\frac{|\sin x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \text{ და } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

ამიტომ მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

თეორემა 6. თუ $f:[a,+\infty) \to R$ ფუნქცია ლოკალურად ინტეგრებადია $[a,+\infty)$ შუალედში და $\forall x \in [a,+\infty)$ $\left|x^\alpha f(x)\right| < A$, სადაც $a > 0, \alpha > 1$, ხოლო A დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

აბსოლუტურად კრებადია.

მართლაც, პირობის ძალით $\forall x \in [a,+\infty)$ გვაქვს $\left|f(x)\right| < \dfrac{A}{x^\alpha}$, მაგრამ ინტეგრალი $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ კრებადია, როცა $\alpha > 1$, მაშასადამე კრებადია ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx .$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7. ვთქვათ, $f:[a,+\infty) \to R$ ფუნქცია ლოკალურად ინტეგრებადია $[a,+\infty)$ შუალედში და $\forall x \in [a,+\infty)$ $\left|f(x)\right| \le \left|g(x)\right|$.. თუ ინტეგრალი $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ აბსოლუტურად კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \; 8$$

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. თუ $f:(a,b] \to R$ რაიმე ფუნქციაა, არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა ტოლფასია $\lim\limits_{l \to a} F(l)$ ზღვრის არსებობისა, სადაც

$$F(l) = \int_l^b f(x)dx \qquad a < l < b.$$

ამიტომ აქ შესაძლებელია გამოვიყენოთ F ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმი (a წერტილში). ჩვენ ვიცით, რომ $\lim\limits_{l \to a} F(l)$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა $\forall\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი, რომ რიცხვთა ნებისმიერი l', l'' წყვილისათვის $a < l' < a+\delta$ და $a < l'' < a+\delta$ გვექნება: $\left|F(l') - F(l'')\right| < \varepsilon$. მაგრამ ინტეგრალის ადიციურობის თვისების ძალით ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$F(l') - F(l'') = \int_{l'}^{l''} f(x)dx.$$

ამგვარად $f:(a,b] \to R$ ფუნქციის არასაკუთრივი $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის არსებობის კოშის კრიტერიუმი ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 8. (ო. კოში) არასაკუთრივი $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\forall\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $a < l' < a+\delta$, $a < l'' < a+\delta$ გვექნება

$$\left|\int_{l'}^{l''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

დადებითი $f:(a,b] \to R$ (ან $f:[a,b) \to R$) ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის კრიტერიუმს სავსებით მარტივი ფორმა გააჩნია.

ვთქვათ $f:(a,b] \to R$ დადებით ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში შესაბამისი F ფუნქცია, რომელიც $\forall l \in (a,b]$ განმარტებულია ტოლობით

$$F(l) = \int_l^b f(x)dx,$$

ცხადია კლებადი და დადებითი ფუნქციაა. ამიტომ $\lim_{l \to a} F(l)$ ზღვარი, რომელიც F ფუნქციის მარჯვენა ზღვარია a წერტილში, არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა F ფუნქცია a წერტილის მიდამოში შემოსაზღვრულია ზემოდან.

მაშასადამე, ამ სიტუაციაში შესაძლებელია წარმოგვიდგეს ორი შემთხვევა:

ა) $F(l) = \int_l^b f(x)dx$ ზემოდან შემოსაზღვრულია, როცა $l \downarrow a$ (ანუ რაც იგივეა $l \to a^+$) და მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი დადებითი რიცხვია და

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{a<l<b} \int_l^b f(x)dx$$

ბ) $F(l)=\int\limits_l^b f(x)dx$ უსასრულოდ დიდია, როცა $l\downarrow a$, ასეთ შემთხვევაში $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი განშლადია.

ამიტომ მხოლოდ დადებითი ფუნქციის შემთხვევაში გამოიყენება შემდეგი პირობითი ჩაწერა:

ა) $\int\limits_a^b f(x)dx<+\infty$, თუ f -ის ინტეგრალი კრებადია.

ბ) $\int\limits_a^b f(x)dx=+\infty$, თუ f -ის ინტეგრალი განშლადია.

ვთქვათ, $f:(a,b]\to R$ რაიმე ფუნქციაა და $g:(a,b]\to R$ არაუარყოფითია $(a,b]$-ზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ g წარმოადგენს f ფუნქციის მაჟორანტს a წერტილის მიდამოში, თუ მოიძებნება $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in(a,a+\delta)$ სრულდება უტოლობა $|f(x)|\le g(x)$.

თეორემა 9. ვთქვათ $f:(a,b]\to R$ და $g:(a,b]\to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციებია, რომელთაგან g არაუარყოფითია $(a,b]$-ზე, თუ g არის f ფუნქციის მაჟორანტი და არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int\limits_a^b g(x)dx$$

კრებადია, მაშინ აგრეთვე კრებადია $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალიც.

ამ თეორემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს კოშის კრიტერიუმიდან.

შედეგი. თუ $f:(a,b]\to R$ ისეთი ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა, რომ არასაკუთრივი ინტერგალი $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ კრებადია, მაშინ კრებადია აგრეთვე არასაკუთრივი $\int\limits_a^b f(x)dx$ -იც.

განმარტება 2. ლოკალურად ინტეგრებადი $f:(a,b]\to R$ ფუნქციის არასაკუთრივ $\int\limits_a^b f(x)dx$ ინტეგრალს აბსოლუტურად კრებადი ეწოდება, თუ კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

სავსებით ისევე, როგორც პირველი გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალისათვის, მტკიცდება შემდეგი ელემენტარული დებულების სამართლიანობა:

თეორემა 10. ყოველი ლოკალურად ინტეგრებადი $f:(a,b]\to R$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია, თუ ის კრებადია აბსოლუტურად.

თეორემა 11. (შედარების ნიშანი). ვთქვათ $f:(a,b]\to R$ და $g:(a,b]\to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციებია, სადაც g არაუარყოფითია და წარმოადგენს f ფუნქციის მაჟორანტს. თუ ასეთ პირობებში კრებადია $\int_a^b g(x)dx$ არასაკუთრივი ინტეგრალი, მაშინ $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი კრებადია აბსოლუტურად.

მსგავსად პირველი გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალისა შეიძლება ავაგოთ მეორე გვარის კრებადი არასაკუთრივი ინტეგრალის მაგალითი, რომელიც არ არის აბსოლუტურად კრებადი. ასეთ შემთხვევაში ინტეგრალს $\int_a^b f(x)dx$ ეწოდება პირობით კრებადი.

ახლა მოვიყვანოთ მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალის აბსოლუტურად კრებადობის ზოგიერთი სპეციფიკური ნიშანი.

თეორემა 12. ვთქვათ $f:(a,b]\to R$ რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა და

1) მოიძებნება ისეთი $M>0,\delta>0$ და $\alpha<1$ რიცხვები, რომ $\forall x\in(a,a+\delta)$, გვაქვს $|f(x)|<M(x-a)^{-\alpha}$. Vაშინ არასაკუთრივი $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

2) თუ მოიძებნება ისეთი $m>0,\delta>0$ და $\alpha\geq 1$ რიცხვები, რომ $\forall x\in(a,a+\delta)$, გვაქვს

$$f(x)\geq\frac{m}{(x-a)^{\alpha}}\quad (\text{ან } f(x)\leq-\frac{m}{(x-a)^{\alpha}})$$

Vაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ განშლადია;

თეორემა 13. თუ $f:(a,b]\to R$ რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა და მოიძებნება ისეთი $\alpha\in R$ რიცხვი, რომ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x\to a}(x-a)^{\alpha}f(x)=\beta,$$

Vაშინ

1) როცა $\alpha < 1$, არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ კრებადია;

2) როცა $\alpha \geq 1$ და $\beta \neq 0$ მასთან არასაკუთრივი ინტეგრალი განშლადია.

ცხადია, რომ ამ პარაგრაფში განხილულ ყველა ცნებას და დებულებას ადგილი აქვს $f:[a,b) \to R$ ფუნქციისათვის.

შემთხვევა, როცა ინტეგრების მონაკვეთი შემოსაზღვრულია და თვით ფუნქციაც ამ მონაკვეთზე შემოსაზღვრული არ არის აღნიშნულ პრობლემატიკაში ახალს არაფერს არ გვაძლევს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ინტეგრების შუალედს დაყოფით ასეთი ინტეგრალების შესწავლას დავიყვანთ პირველი და მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალების კრებადობისა და განშლადობის განხილვაზე.

4.2. არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა

ვთქვათ $f:R \to R$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია ინტეგრებადია კოშის აზრით, თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x)dx$$

ამ ზღვაარს ეწოდება არასაკუთრივი $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა კოშის აზრით და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x)dx$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x) = x$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა. ვინაიდან f ფუნქცია კენტია, ამიტომ $\forall l > 0$ რიცხვისათვის

$$\int_{-l}^{+l} xdx = 0 \text{, რის გამოც } V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$$

Pუსტად ასევე დავასკვნით, რომ $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \sin xdx = 0$.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $f:R \to R$, რაიმე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. თუ f კენტია, მაშინ ის ინტეგრებადია კოშის აზრით და ინტეგრალის მთავარი

მნიშვნელობა ნულის ტოლია. თუ f ლუწი ფუნქციაა, მაშინ f ინტეგრებადია კოშის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

ამ თეორემის პირველი ნაწილი ცხადია, ვინაიდან $\forall l > 0$ რიცხვისათვის f ფუნქციის კენტობის გამო გვაქვს

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \Rightarrow V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$$

მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად საკმარისია ვისარგებლოთ ტოლობით $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^{l} f(x)dx$, რომელიც ჭეშმარიტია ყოველი ლუწი ფუნქციისათვის, ამის შემდეგ ვისარგებლებთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის განმარტებით.

კოშის აზრით ინტეგრებადობის ცნება შეიძლება შემოვიღოთ მეორე გვარის არასაკუთრივი ინტეგრალებისათვის, იმ შემთხვევაში, როცა განსაკუთრებული წერტილი არის ინტეგრების მონაკვეთის შიგა წერტილი.

ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე, გარდა შესაძლებელია c წერტილისა, სადაც $a < c < b$ და ლოკალურად ინტეგრებადია $[a,c)$ და $(c,b]$ მონაკვეთებზე. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე კოშის აზრით, თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) = V.P.\int_a^b f(x)dx \cdot$$

ამ ზღვარს უწოდებენ არასაკუთრივი $\int_a^b f(x)dx$ ინტეგრალის მთავარ მნიშვნელობას კოშის აზრით და ამას ასეც ჩაწერენ:

$$V.P.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\right) f(x)dx \cdot$$

მაგალითი 2. ფუნქცია $1:(x-c)$ არ არის ინტეგრებადი არასაკუთრივი აზრით $[a,b]$ სეგმენტზე, როცა $a < c < b$ მაგრამ ის ინტეგრებადია კოშის აზრით. ამასთანავე გვაქვს

$$V.P.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-c|\Big|_a^{c-\varepsilon} + \ln|x-c|\Big|_{c+\varepsilon}^{b}\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln\varepsilon\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

§5. წირი და მისი სიგრძის გამოთვლის სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე

ვთქვათ $[\alpha,\beta]$ რაიმე სეგმენტია, ყოველ $\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ (ან $\gamma:(\alpha,\beta)\to R^n$) უწყვეტ ასახვას (ვექტორ ფუნქციას) ეწოდება გზა R^n სივრცეში. $a=\gamma(\alpha)$ წერტილს ეწოდება გზის საწყისი წერტილი, ხოლო $b=\gamma(\beta)$ წერტილს გზის ბოლო წერტილი.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ γ გზა აერთებს R^n სივრცის a და b წერტილებს. აქ $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $b=(b_1,b_2,...,b_n)$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გზა ეს არის ნამდვილი ცვლადის ვექტორ-მნიშვნელობიანი ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის ყოველ t_0 წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს t_0 წერტილის ისეთი $U(t_0,\delta)\subset[\alpha,\beta]$ მიდამო რომ $\forall t\in U(t_0,\delta)\Rightarrow\gamma(t)\in V(\gamma(t_0,\varepsilon)$ სადაც $V(\gamma(t_0,\varepsilon)$ აღნიშნავს $\gamma(t_0)\in R^n$ წერტილის მიდამოს, ე.ი. ε რადიუსიან ღია ბირთვს ცენტრით $\gamma(t_0)$ წერტილში. თუ $\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ ფუნქციის კომპონენტებს აღვნიშნავთ γ_k-თი $k=\overline{1,n}$, მაშინ $\gamma(t_0)=(\gamma_1(t_0),\gamma_2(t_0),...,\gamma_n(t_0))$ ამიტომ

$$V(\gamma(t_0),\varepsilon)=\{y\in R^n:|y-\gamma(t_0)|<\varepsilon\}=\left\{y\in R^n:\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\gamma_k(t_0))^2}<\varepsilon\right\}.$$

$\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ გზას ეწოდება ჩაკეტილი (შეკრული), თუ $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, თუ $\gamma(\alpha)\neq\gamma(\beta)$-გახსნილი.

ვიტყვით, რომ $\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ გზა ძევს $M\subset R^n$სიმრავლეში, თუ $\forall t\in[\alpha,\beta],\gamma(t)\in M$.

ვთქვათ, მოცემულია გზა $\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$, ანუ $x=\gamma(t)$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$, მაშინ გზას $y=\gamma(c-t)$ (სადაც $c-\beta\le t\le c-\alpha$) ეწოდება γ გზის მიმართულების შეცვლა და აღინიშნება γ^--ით ან $-\gamma$-თი. წერტილთა სიმრავლეები, რომლებიც შეესაბამება γ და γ^- გზებს ერთმანეთს ემთხვევა, მაგრამ დადებითი მიმართულებები მათზე სხვადასხვაა ($\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ გზის დადებით მიმართულებად შეთანხმებით მოცემულია ის, რომელიც შეესაბამება t პარამეტრის ზრდას).

ხშირ შემთხვევაში საჭიროა ერთმანეთისაგან განვასხვაოთ გზისა და წირის ცნებები, ამისათვის შემოვიღოთ ასეთი

განმარტება 1. ორ გზას $\gamma_1:[\alpha_1,\beta_1]\to R^n$ და $\gamma_2:[\alpha_2,\beta_2]\to R^n$ ეწოდება ეკვივალენტური (და ვწერთ $\gamma_1\approx\gamma_2$, თუ არსებობს უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი სიურექციული ფუნქცია

$$\varphi:[\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha_2,\beta_2]$$

ისეთი, რომ $\forall t\in[\alpha_1,\beta_1]$ $\gamma_1(t)=\gamma_2[\varphi(t)]$. ამ შემთხვევაში φ ფუნქციას ეწოდება γ_1 და γ_2 გზების იდენტიფიკატორი და ვამბობთ, რომ γ_1 გზა მიიღება γ_2 გზისაგან t პარამეტრის შეცვლით.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ეს მიმართება აკმაყოფილებს ეკვივალენტობის ჩვეულებრივ აქსიომებს: რეფლექსურობას $(\gamma\approx\gamma)$, სიმეტრიულობას (თუ $\gamma_1\approx\gamma_2\Rightarrow\gamma_2\approx\gamma_1$) ტრანზიტულობას (თუ $\gamma_1\approx\gamma_2$ და $\gamma_2\approx\gamma_3\Rightarrow\gamma_1\approx\gamma_3$).

განმარტება 2. ეკვივალენტურ გზათა კლასს წირი ეწოდება (ანუ წირი R^n სივრცეში, თუ $n=2$, მაშინ წირს ბრტყელი წირი ეწოდება).

Γ წირის მისაღებად საკმარისია მივუთითოთ ერთი რომელიმე $\gamma:[\alpha,\beta]\to R^n$ გზა, რომელიც განსაზღვრავს Γ კლასს. ამ კლასის სხვა გზების შესახებ ამბობენ, რომ ისინი არიან Γ წირის პარამეტრული წარმოდგენები (ან კიდევ თითოეულ მათგანს ეწოდება Γ წირის პარამეტრული განტოლება).

წირის ზემოთ მოყვანილი ცნება ყოველთვის არ შეესაბამება მის ინტუიციურ წარმოდგენას. ვინაიდან შეიძლება ავაგოთ რიცხვითი წრფის რაიმე $[\alpha,\beta]$სეგმენტის უწყვეტი ასახვა კვადრატზე (ასეთი მაგალითი პირველად ააგო ცნობილმა იტალიელმა მათემატიკოსმა პეანომ). შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ წირებს (გზებს), რომლებიც გარკვეულ შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ $\varphi:[a,b]\to R^n$ გზას ეწოდება გლუვი, თუ φ ფუნქცია $[a,b]$-ზე უწყვეტად დიფერენცირებადია და ამასთანავე $\forall t\in[a,b]$ $\varphi'(t)\neq 0$. თუ ეს გზა ამავე დროს შეკრულია (ჩაკეტილია), მაშინ დამატებით მოითხოვება, რომ $\varphi'(a+0)=\varphi'(b-0)$.

ეკვიალენტურ გლუვ გზათა კლასს, უწყვეტად დიფერენცირებადი და დადებითი წარმოებულის მქონე იდენტიფიკატორია სიმრავლის მიმართ, ეწოდება გლუვი წირი (თუ წირი ჩაკეტილია, მაშინ იგულისხმება, რომ იდენტიფიკატორების წარმოებულები სეგმენტის ბოლოებზე ერთმანეთის ტოლია).

$\varphi:[a,b]\to R^n$ გზას ეწოდება უბან-უბან გლუვი, თუ $[a,b]$ სეგმენტის დაყოფა შეიძლება სასრული რაოდენობის ქვესიმრავლეებად ისე, რომ თითოეულ ქვესეგმენტებზე φ ფუნქციის შეზღუდვა განსაზღვრავს გლუვ გზას. ანალოგიურად განიმარტება უბან-უბან გლუვი წირი.

$\varphi:[a,b]\to R^n$ გზას ეწოდება მარტივი ანუ ჟორდანის გზა, თუ $\varphi:[a,b]\to R^n$ ფუნქცია უწყვეტია და ინექციაა. გზას ეწოდება ჟორდანის ჩაკეტილი (შეკრული) გზა, თუ $\varphi:[a,b]\to R^n$ უწყვეტია, ინექციაა და $\varphi(a)=\varphi(b)$.

მარტივი წირი (ჟორდანის ჩაკეტილი წირი) ეწოდება ეკვივალენტურ მარტივ გზათა (ჟორდანის ჩაკეტილ გზათა) კლასს.

მარტივ წირებს და ჟორდანის შეკრულ წირებს შემდგომში ჟორდანის წირის სახელით მოვიხსენიებთ. ჟორდანის წირთა შესახებ ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 1 (ჟორდანი) . თუ Γ ჟორდანის შეკრული (ჩაკეტილი) წირია, მაშინ მას მხოლოდ ორი მოსაზღვრე არე აქვს, ე.ი. ჟორდანის შეკრული წირი R^2 სიბრტყეს ყოფს ორ არედ, რომელთაც საერთო წერტილები არა აქვთ. $R^2\setminus\Gamma=A_i\cup A_e$. A_i სიმრავლის (ამ სიმრავლეს Γ წირის შიგა არე ეწოდება) ნებისმიერი ორი წერტილის შეერთება შეიძლება წირით რომელიც მთლიანად A_i სიმრავლეში ძევს. ასეთივე თვისება აქვს A_e სიმრავლეს (Γ წირის გარე არეს). ნებისმიერი წირი, რომელიც აერთებს A_i და A_e სიმრავლეების ორ ნებისმიერ წერტილს კვეთს Γ წირს ერთ წერტილში მაინც. A_i არე შემოსაზღვრულია, იმ დროს როცა A_e არ არის შემოსაზღვრული.

ვთქვათ მოცემულია მარტივი Γ წირი, რომლის განტოლებებია

$x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t),\ldots,x_n=\varphi_n(t)$ სადაც $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$

უწყვეტი ფუნქციები არიან, რაიმე $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე. ეს განტოლებები ჩავწეროთ ვექტორულად

$$r(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))$$

ვიგულისხმოთ, რომ როცა t წერტილი იცვლება α-დან β-მდე, მაშინ $z(t)$ ვექტორის ბოლო წერტილი აღწერს Γ წირს გარკვეული მიმართულებით. α-და β-ს შესაბმისი წერტილები Γ-წირზე აღვნიშნოთ შესაბამისად A და B-თი.

განვიხილოთ $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის რაიმე P დანაწილება

$$\alpha=t_0<t_1,\ldots<t_m=\beta$$

და Γ წირში ჩავხაზოთ ტეხილი წირი, რომლის წვეროები ეთანადებიან t პარამეტრის $t_0,t_1,\ldots t_m$ მნიშვნელობებს. აღვნიშნოთ ეს წერტილები Γ წირზე $A=A_0,A_1,\ldots A_m=B$ ასოებით. ამ ტეხილი წირის სიგრძე აღვნიშნოთ l-ით, ე.ი.

$$l=\sum_{i=1}^{m}\left|A_{i-1}A_i\right| \qquad (1)$$

მაგრამ

$$A_{i-1}(\varphi_1(t_{i-1}),\varphi_2(t_{i-1}),...,\varphi_n(t_{i-1})),\quad A_i(\varphi_1(t_i),\varphi_2(t_i),...,\varphi_n(t_i))$$

ამიტომ

$$|A_{i-1}A_i|=\sqrt{[\varphi_1(t_i)-\varphi_1(t_{i-1})]^2+...+[\varphi_n(t_i)-\varphi_n(t_{i-1})]^2}\ ,\ i=\overline{1,m}\,.$$

ამგვარად

$$l=\sum_{i=1}^{m}\sqrt{[\varphi_1(t_i)-\varphi_1(t_{i-1})]^2+[\varphi_2(t_i)-\varphi_2(t_{i-1})]^2+...+[\varphi_n(t_i)-\varphi_n(t_{i-1})]^2}\qquad(2)$$

მაშასადამე $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის ყოველ P დანაწილებას შეესაბამება სათანადო დადებითი l რიცხვი.

განმარტება 3. მარტივ Γ წირს ეწოდება წრფევადი, თუ მასში ჩახაზული ყველა შესაძლებელი ტეხილი წირების l სიგრძეების სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან.

განმარტება 4. წრფევადი Γ წირის სიგრძე ეწოდება მასში ჩახაზული ყველა შესაძლებელი ტეხილი წირების სიგრძეების სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს და აღინიშნება $|\Gamma|$-თი.

თეორემა 2. ვთქვათ Γ მარტივი წირია, რომლის ვექტორული განტოლებაა $z(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)),\quad \alpha\le t\le\beta$. თუ $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე, მაშინ Γ წირი წრფევადია და მისი სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi_1'(t_i)]^2+[\varphi_2'(t_i)]^2+...+[\varphi_m'(t_i)]^2}\,dt$$

თუ $n=2$, მაშინ გვაქვს ბრტყელი წირი და მისი სიგრძე

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi_1'(t_i)]^2+[\varphi_2'(t_i)]^2}\,dt\ .\qquad(6)$$

თუ ბრტყელი წირის განტოლება მოცემულია $y=f(x)$ სახით, სადაც f ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე, მაშინ მისი განტოლება პარამეტრული სახით ასე დაიწერება $x=t, y=f(x)$, ამიტომ (6) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

თუ ბრტყელი მარტივი Γ წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $\rho=f(\theta)$, სადაც $f:[\alpha,\beta]\to R$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ წირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{f^2(\theta)+[f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ ფორმულებით, $x = \rho\cos\theta, y = \sin\theta$, მაშინ

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\right]^2 +$$
$$+\left[f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta\right]^2 = \left[f'(\theta)\right]^2 + f^2(\theta).$$

ამიტომ (6) ფორმულის თანახმად დავწერთ:

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta) + \left[f'(\theta)\right]^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \cdot$$

შედეგი. ვთქვათ $s = s(u)$ -არის Γ წირის რკალის სიგრძე, სადაც $a \le t \le u$ და წირის განტოლებებია $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, მაშინ ამ რკალის ds დიფერენციალისათვის გვაქვს

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_m)^2 .$$

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ წირის სიგრძის ფორმულით, გვექნება

$$S(u) = \int_a^u \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \ldots + (x_m'(t))^2}\, dt$$

თუ ამ გამოსახულებას გავადიფერენციალებთ, მივიღებთ

$$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_m)^2}$$

როცა $n = 2$ ან $n = 3$ ან წირის განტოლება მოცემულია $y = f(x)$ სახით, ან პოლარულ კოორდინატებში $\rho = f(\theta)$, მაშინ შესაბამისად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$$

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta} .$$

§6. ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთი საკითხის (ელემენტების) სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ფუნქციათა მნიშვნელოვან კლასს-კლასს ფუნქციებისა შემოსაზღვრული ვარიაციით, რომლებიც მჭიდროდ არიან დაკავშირებული მონოტონურ ფუნქციებთან.

ვთქვათ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული f ფუნქცია, თუ $P=\{x_0, x_1,..., x_n\}$ $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილებაა, ე.ი. $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, მაშინ დავუშვათ

$$\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}),\ i=\overline{1,n}$$

და

$$V = \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \qquad (1)$$

განმარტება 1. $f:[a,b]\to R$ ფუნქციას ეწოდება ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით (შემოსაზღვრული ცვლილებით) ან კიდევ სასრული ვარიაციით (ცვლილებით), თუ არსებობს $M>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის შესრულდება უტოლობა

$$V = \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| \le M\ .$$

განმარტება 2. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ არის სასრული ფუნქცია. (1) სახის ჯამების ზუსტ ზედა საზღვარს, სადაც ზუსტი ზედა საზღვარი აიღება $[a,b]$ სეგმენტის ყველა შესაძლებელი P დანაწილების მიმართ, ეწოდება f ფუნქციის სრული ვარიაცია (ცვლილება) $[a,b]$ სეგმენტზე და აღინიშნება სიმბოლოებით $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \overset{b}{\underset{a}{V}}[f], V(f,a,b)$ ამგვარად:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}[f] = V(f,a,b) = \sup_{P} \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i|.$$

თუ f ფუნქცია მოცემულია მთელს $R=(-\infty,+\infty)$ რიცხვით წრფეზე, მაშინ მას ეწოდება ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, თუ $\forall a,b\in R$ $\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]$ რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია, ამასთანავე ზღვარს

$$\lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to+\infty}} \overset{b}{\underset{a}{V}}[f]$$

ეწოდება f ფუნქციის სრული ვარიაცია $R=(-\infty,+\infty)$ რიცხვით წრფეზე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{V}}[f]$$

ცნება ფუნქციისა შემოსაზღვრული ვარიაციით შემოიღო ფრანგმა მათემატიკოსმა კამილ ჟორდანმა.

დავადგინოთ შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე ფუნქციათა ძირითადი თვისებები.

თეორემა 1. მონოტონური $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია არის ფნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

ეს თეორემა საკმარისია დამტკიცდეს ზრდადი ფუნქციებისათვის. თუ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია ზრდადია, მაშინ ყველა $\Delta f_i = f(x_i)-f(x_{i-1}),\, i=\overline{1,n}$ არაუარყოფითია და

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta f_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]=f(b)-f(a).$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა, თუ f კლებადია, მაშინ

$$V=f(a)-f(b),$$

ე.ი. თუ $f:[a,b]\to R$ მონოტონურია, მაშინ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]=\left|f(b)-f(a)\right|.$$

მეორე მაგალითს ფუნქციისა სასრული ვარიაციით წარმოადგენს ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს `ლიფშიცის პირობას~.

განმარტება 3. $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, თუ არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ $\forall x,y\in[a,b]$ წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le M\left|x-y\right|.$$

თუ $f:[a,b]\to R$ ფუნქცია დიფერენცირებადია და მისი f' წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ, როგორც ეს ჩანს ლაგრანჟის ფორმულიდან

$$f(x)-f(y)=f'(z)(x-y),\quad x<z<y$$

f აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.

თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილება გვაქვს:

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta f_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}M(x_i-x_{i-1})=M(b-a)\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}[f]\le M(b-a),$$

და მაშასადამე f არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით.

ისეთი უწყვეტი ფუნქციის მაგალითს, რომლის სრული ვარიაცია უსასრულოა, წარმოადგენს ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, \text{ hjwf } & 0<x\le 1,\\ 0, \text{ hjwf } & x=0.\end{cases}$$

თუ [0,1] სეგმენტის დაყოფის წერტილებად ავიღებთ

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<...<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1.$$

წერტილებს, მაშინ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$V=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}>\ln(1+n),$$

საიდანაც $\overset{1}{\underset{0}{V}}[f]=+\infty.$.

თეორემა 2. ყოველი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით შემოსაზღვრულია.

მართლაც, $\forall x\in[a,b]$ გვაქვს

$$V=\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x)\right|\le \overset{b}{\underset{a}{V}}[f],$$

საიდანაც $\left|f(x)\right|\le\left|f(a)\right|+\overset{b}{\underset{a}{V}}[f].$

თეორემა 3. ორი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი, არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

დამტკიცება. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ და $g:[a,b]\to R$ არიან ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით და $S(x)=f(x)\pm g(x),\quad F(x)=f(x)g(x)$. დავუშვათ $A=\sup\limits_{[a,b]}\left|f(x)\right|,\quad B=\sup\limits_{[a,b]}\left|g(x)\right|$ მაშინ უტოლობებიდან:

$$\left|\Delta S_i\right|=\left|S(x_i)-S(x_{i-1})\right|\le\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|+\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|$$

$$\begin{aligned}&\left|\Delta F_i\right|=\left|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right|=\\&=\left|\left[f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})\right]+\left[f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right]\right|\le\\&\le\left|f(x_i)\right|\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|+\left|g(x_{i-1})\right|\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\le\\&\le A\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|+B\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\end{aligned}$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[S] \le \overset{b}{\underset{a}{V}}[f] + \overset{b}{\underset{a}{V}}[g], \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}[F] \le A \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}[g] + B \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}[f].$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი

თეორემა 4. თუ $f:[a,b] \to R$ და $g:[a,b] \to R$ არიან ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით და $\forall x \in [a,b] \; |g(x)| \ge m > 0$, მაშინ მათი ფარდობა $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ არის აგრეთვე ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით.

თეორემა 5. ვთქვათ, $[a,b]$-ზე მოცემულია სასრული f ფუნქცია და $a < c < b$, მაშინ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f] = \overset{c}{\underset{a}{V}}[f] + \overset{b}{\underset{c}{V}}[f] \qquad (2)$$

დამტკიცება. მართლაც, ჯერ განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ისეთი დანაწილება, რომელშიც c იმყოფება დაყოფის წერტილთა შორის. დავუშვათ $x_m = c$, მაშინ

$$V = \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^{m} |\Delta f_i| + \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta f_i| \le \overset{c}{\underset{a}{V}}[f] + \overset{b}{\underset{c}{V}}[g] \qquad (3)$$

ახლა თითოეული $[a,c]$ და $[c,b]$ სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად

$$y_0 = a < y_1 < \ldots < y_n = c; \quad z_0 = c < z_1 < \ldots < z_n = b.$$

წერტილებით და შევადგინოთ ჯამები

$$V_1 = \sum_{i=1}^{m} |\Delta f_i|, \quad V_2 = \sum_{k=0}^{n} |\Delta f_k|$$

დავუშვათ $P = \{y_0, y_1, \ldots y_m, z_0, z_1, \ldots z_n\}$ მაშინ P არის $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება. თუ V-თი აღვნიშნავთ ამ დანაწილების შესაბამის ჯამს, მაშინ გვექნება

$$V = V_1 + V_2$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $V_1 + V_2 \le \overset{b}{\underset{a}{V}}[f]$ და მაშასადამე

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}[f] + \overset{b}{\underset{c}{V}}[f] \le \overset{b}{\underset{a}{V}}[f] \qquad (4)$$

(3) უტოლობა ჩვენ დავადგინეთ ისეთი P დანაწილებისათვის, როცა $c \in P$. მაგრამ, რადგანაც ახალი დაყოფის წერტილის დამატება, აშკარაა, არ ამცირებს V ჯამებს, ამიტომ (3) სამართლიანია, საზოგადოდ, ყველა V ჯამებისათვის, ამიტომ (3) და (4) უტოლობებიდან დავწერთ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f] = \overset{c}{\underset{a}{V}}[f] + \overset{b}{\underset{c}{V}}[f].$$

შედეგი 1. თუ $f:[a,b]\to R$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, მაშინ მას აგრეთვე შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს თითოეულ $[a,c]$ და $[c,b]$, $(a<c<b)$ სეგმენტზე და პირიქით.

შედეგი 2. თუ $[a,b]$ სეგმენტი შეიძლება დავანაწილოთ ისეთი სეგმენტების სასრულ რაოდენობად, რომელთაგან თითოეულზე f მონოტონურია, მაშინ f ფუნქციას $[a,b]$ სეგმენტზე შემოსაზღვრული ვარიაცია აქვს.

თეორემა 6. იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი წარმოიდგინებოდეს ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

დამტკიცება. პირობის საკმარისობა გამომდინარეობს პირველი და მესამე თეორემებიდან. მისი აუცილებლობის დამტკიცებისათვის, ვთქვათ

$$U(x)=\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]\text{, როცა } a<x\le b, U(a)=0\,.$$

მეხუთე თეორემის ძალით U ფუნქცია ზრდადია. დავუშვათ

$$v(x)=u(x)-f(x) \qquad (5)$$

ვაჩვენოთ, რომ v ფუნქცია ზრდადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მართლაც, თუ $a\le x\le y\le b$, მაშინ მეხუთე თეორემის ძალით,

$$\begin{aligned}v(y)&=u(y)-f(y)=\overset{y}{\underset{a}{V}}[f]-f(y)=\overset{x}{\underset{a}{V}}[f]+\overset{y}{\underset{x}{V}}[f]-f(y)=\\&=v(x)+\overset{y}{\underset{x}{V}}[f]-f(y)\end{aligned}$$

და მაშასადამე

$$v(y)-v(x)=\overset{y}{\underset{x}{V}}[f]-[f(y)-f(x)]\ge\overset{y}{\underset{x}{V}}[f]-\left|f(y)-f(x)\right|\ge0\Rightarrow v(y)\ge v(x).$$

ასე, რომ v ფუნქცია ზრდადია. ამის შემდეგ დაგვრჩენია (5) ტოლობა ასე გადავწეროთ $f(x)=u(x)-v(x)$, იმისათვის რომ მივიღოთ f ფუნქციის საძებნი წარმოდგენა.

შედეგი 3. ფუნქციას შემოსაზღვრული ვარიაციით სასრული ან თვლადი სიმრავლე წყვეტის წერტილებისა, წყვეტის ყოველ x_0 წერტილში არსებობს ორივე ზღვარი

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x),$$

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

დაბოლოს განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია $f:[a,b]\to R^m$, სადაც $m\ge 2, m\in N$. დავუშვათ f ფუნქციის კომპონენტებია $f_j:[a,b]\to R,\ j=\overline{1,m}$. ავიღოთ $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე $P=\{x_0,x_1,...x_n\}$ დანაწილება და დავუშვათ

$$\begin{aligned}\Delta f_i &= f(x_i)-f(x_{i-1})=\left(f_1(x_i), f_2(x_i),..., f_m(x_i)\right)-\\ &-\left(f_1(x_{i-1}), f_2(x_{i-1}),..., f_m(x_{i-1})\right)=\\ &=\left(f_1(x_i)-f_1(x_{i-1}), f_2(x_i)-f_2(x_{i-1}),..., f_m(x_i)-f_m(x_{i-1})\right)=\\ &=\left(\Delta f_{1i},\Delta f_{2i},...,\Delta f_{mi}\right)\quad i=\overline{1,m}.\end{aligned}$$

$$|\Delta f_i|=\sqrt{[f_1(x_i)-f_1(x_{i-1})]^2+[f_2(x_i)-f_2(x_{i-1})]^2+...+[f_m(x_i)-f_m(x_{i-1})]^2}$$

$$V=\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\ |\Delta f_{ki}|^2}$$

რიცხვს

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]=\sup_p\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i|,$$

სადაც ზუსტი ზედა საზღვარი აიღება $[a,b]$ ყველა P დანაწილების მიმართ, ვუწოდოთ $f:[a,b]\to R^m$ ვექტორ-ფუნქციის სრული ვარიაციია $[a,b]$ სეგმენტზე.

თუ $\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]<+\infty$, მაშინ $f:[a,b]\to R$ ფუნქციას ეწოდება ვექტორ-ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a,b]$ სეგმენტზე.

ვექტორმნიშვნელობიანი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის მრავალი თვისება შეიძლება დავადგინოთ ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციების შემთხვევაზე დაყვანით.

თეორემა 7. ვთქვათ $f=(f_1,f_2,...,f_m):[a,b]\to R^m$, სადაც $f_j:[a,b]\to R,\ j=\overline{1,m},$ $f:[a,b]\to R^m$ ვექტორმნიშვნელობიანი ფუნქცია არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი თითოეული კომპონენტი $f_j:[a,b]\to R,\ j=\overline{1,m},$ არის ფუნქცია სასრული ვარიაციით $[a,b]$ სეგმენტზე, ამასთან ყოველი j-სათვის $j=\overline{1,m},$ გვაქვს

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left[f_j\right]\le\overset{b}{\underset{a}{V}}\left[f\right]\le\sum_{j=1}^{m}\overset{b}{\underset{a}{V}}\left[f_j\right].$$

დამტკიცება. $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\left|f_j(x_i)-f_j(x_{i-1})\right|\le\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\le\sum_{k=1}^{m}\left|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})\right|$$

თუ ამ ტოლობებს შევკრებთ $i=\overline{1,n}$-ის მიმართ, ხოლო შემდეგ მიღებულ ტოლობებში ავიღებთ ზუსტ ზედა საზღვარს, მივიღებთ დასამტკიცებელ წინადადებას.

თეორემა 8. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით. თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ ამავე წერტილზე უწყვეტია ფუნქცია $v(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}[f]$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $x_0<b$ და ვაჩვენოთ, რომ $v(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე მარჯვნიდან. ამ მიზნით ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ და $[x_0,b]$ სეგმენტი დავყოთ წერტილებით

$$x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

ისეთ ნაწილებად, რომ აღმოჩნდეს

$$V=\sum_{i=1}^{m}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|>\overset{b}{\underset{x_0}{V}}[f]-\varepsilon\,.\ (1)$$

რადგანაც V ჯამი მხოლოდ იზრდება ახალი წერტილების დამატებით, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\left|f(x_1)-f(x_0)\right|<\varepsilon\,.$$

ამ შემთხვევაში (1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}}[f]<\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|<2\varepsilon+\sum_{i=2}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\le 2\varepsilon+\overset{b}{\underset{x_1}{V}}[f]\cdot$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}}[f]-\overset{b}{\underset{x_1}{V}}[f]<2\varepsilon\Leftrightarrow\overset{x_1}{\underset{x_0}{V}}[f]<2\varepsilon$$

და ამიტომ

$$v(x_1)-v(x_0)<2\varepsilon$$

აქედან მით უფრო $v(x_0+0)-v(x_0)<2\varepsilon$, მაგრამ ε ნებისმიერია; მაშასადამე $v(x_0+0)=v(x_0)$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $v(x_0-0)=v(x_0)$, ე.ი. v ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან x_0 წერტილზე.

შედეგი 4. უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით წარმოიდგინება როგორც ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობა.

ვთქვათ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი f ფუნქცია. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P=\{x_0, x_1,...x_n\}$ დანაწილება. დავუშვათ ამ დანაწილების პარამეტრია $\lambda=\lambda(p)=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ და შევადგინოთ ჯამები:

$$V=\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i|=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}\varpi_i,$$

სადაც $\varpi_i=M_i-m_i$, $m_i=\min\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$, $M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$.

თეორემა 9. თუ $f:[a,b]\to R$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$1.\quad \lim_{\lambda\to 0}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i|=\overset{b}{\underset{a}{V}}[f],$$

$$2.\quad \lim_{\lambda\to 0}\Omega=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varpi_i=\overset{b}{\underset{a}{V}}[f].$$

შევნიშნოთ, რომ $\overset{b}{\underset{a}{V}}[f]$ ვარიაციას ჩვენ არ ვგულისხმობთ აუცილებლად სასრულად.

ამ თეორემაში არსებითია ის, რომ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე. ვთქვათ $f:[-1,1]\to R$ ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{hjwf} & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ 1, \text{hjwf} & x=0.\end{cases}$$

მაშინ ცხადია, რომ $\overset{1}{\underset{-1}{V}}[f]=2$, მაგრამ ნებისმიერი ისეთი P დანაწილებისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0\in P$ გვაქვს:

$$V=0,\quad \Omega=1.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ $f:[a,b]\to R^m$ უწყვეტი ვექტორმნიშვნელობიანი ფუნქციაა, რომლის კომპონენტებია $f_i[a,b]\to R, i=\overline{1,n}$, მაშინ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i|=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[f_j(x_i)-f_j(x_{i-1})\right]^2}=\overset{b}{\underset{a}{V}}[f].$$

ვთქვათ მოცემულია ჟორდანის Γ წირი R^m სივრცეში, რომლის ვექტორული განტოლებაა $r(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))$, სადაც $\varphi_j:[\alpha,\beta]\to R, j=\overline{1,m}$ ამავე დროს ეს ფუნქციები უწყვეტი არიან და $\forall(t_1\ne t_2)$ $r(t_1)\ne r(t_2)$, $r(\alpha)=r(\beta)$ თუ წირი ჩაკეტილია.

თუ გავითვალისწინებთ წირის სიგრძის განმარტებას და $r:[\alpha,\beta]\to R^m$ ვექტორ-ფუნქციის სრული ვარიაციის ცნებას, მაშინ დავასკვნით, რომ Γ წირი წრფევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $r:[\alpha,\beta]\to R^m$ არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით, ანუ რაც იგივეა: Γ წირი წრფევადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი პარამეტრული განტოლებები $x_j=\varphi_j(t),\ j=\overline{1,m}$ არიან ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციით $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე. ამასთანავე თეორემა 2-ის თანახმად მისი სიგრძე იქნება

$$l=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}[r]=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta r_i\right|,$$

სადაც

$$\left|\Delta r_i\right|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\varphi_j(t_i)-\varphi_j(t_{i-1})\right]^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left|\Delta x_{ji}\right|^2}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\Delta r_i\right|$ არის იმ ტეხილის სიგრძე, რომელიც ჩახაზულია Γ წირში და რომლის წვეროები შეესაბამება $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის მოცემული P დანაწილებას, დავუშვათ $\mu(P)=\max\limits_{1\le i\le n}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}\left|\Delta x_{ji}\right|^2}$, სადაც

$$\Delta x_{ji}=\varphi_j(t_i)-\varphi_j(t_{i-1}),\ j=\overline{1,m},i=\overline{1,n}$$

რადგანაც $x_j=\varphi_j(t)\ j=\overline{1,m}$ უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ $\lambda(P)\to 0\Leftrightarrow\mu(P)\to 0$ ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ Γ ჟორდანის წირია ე.ი. $r:[\alpha,\beta]\to R^n$ არის კომპაქტური სიმრავლის უწყვეტი და ურთიერთცალსახა ასახვა, ამიტომ ის ჰომეომორფიზმია.

ამ შენიშვნიდან გამომდინარე წირის სიგრძე შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობებიდან ერთ-ერთით.

$$l=\left|\Gamma\right|=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta r_i\right|=\lim_{\mu(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta r_i\right|=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}[r]\,.$$

ამგვარად, Γ წირის სიგრძე ეწოდება ამ წირში ჩახაზული ტეხილის პერიმეტრის ზღვარს, როცა ტეხილის გვერდებს შორის უდიდესის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თეორემა 10. ვთქვათ $\Gamma_\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$ აღნიშნავს Γ წირის რკალს, რომელიც შეესაბამება $[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$ მონაკვეთს. თუ Γ_ε წრფევადია $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\Gamma_\varepsilon| = |\Gamma| \qquad (5)$$

ამგვარად Γ წირის წრფევადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ (5) ზღვარი იყოს სასრული რიცხვი.

§7. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

განვიხილოთ წრეწირი $x^2 + y^2 = 1$. მისი ზედა ნახევარი აღვნიშნოთ Γ-თი და ცხადია ის აღიწერება $[-1,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ფუნქციით. ვინაიდან $f:[-1,1]\to R$ ფუნქცია ზრდადია $[-1,0]$ სეგმენტზე და კლებადია $[0,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ ის არის ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციით $[-1,1]$ სეგმენტზე, რის გამოც ცნობილი თეორემის თანახმად Γ წრფევადი წირია. მაგრამ მისი წარმოებული $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ უწყვეტია $(-1,1)$ ინტერვალში. ამიტომ წირის სიგრძის ფორმულა მოცემულ შემთხვევაში სამართლიანია მხოლოდ $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<1)$, მონაკვეთისათვის, სადაც f უწყვეტია მის წარმოებულთან ერთად:

$$|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

მაგრამ ფუნქცია $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადია $[-1,1]$ მონაკვეთზე, ამიტომ თეორემა 3-ის თანახმად

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0}|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty \qquad (1)$$

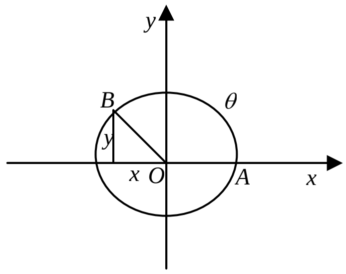
მაშასადამე ნახევარწრეწირი Γ წრფევადია და მისი სიგრძე გამოისახება (1) ფორმულით. ეს რიცხვი აღვნიშნოთ π-თი; ე.ი.

$$\pi = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2)$$

ფუნქცია $\arccos x$ შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით

$$\theta = \arccos x = \int_{x}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1\le x\le 1, \qquad (3)$$

სადაც θ არის AB რკალის სიგრძე (იხ. ნახ. 1), ხოლო x არის B წერტილის აბსცისა. B ეკუთვნის წრეწირის ზედა ნახევარს.



ნახ.1.

ინტეგრალის, როგორც ქვედა საზღვრის ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარე, დავასკვნით, რომ $\arccos x$ ფუნქცია უწყვეტია, მკაცრად კლებადია $[-1,1]$ მონაკვეთზე და მისი წარმოებული ტოლია

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

ცხადია, რომ $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$.

ასეთ შემთხვევაში არსებობს $\arccos x$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[0,\pi]$-ზე, ის უწყვეტია და მკაცრად კლებადი $[0,\pi]$-ზე. $x = \cos\theta$ ფუნქციას ეწოდება θ რკალის კოსინუსი (θ გამოსახულია რადიანებში).

წრეწირის θ რკალის სიგრძის განმარტება ჩვეულებრივი წესით გავრცელდება მთელი $R = (-\infty,+\infty)$ რიცხვითი წრფისათვის. შესაბამისად გავრცელდება $\cos\theta$. სახელდობრ ჩვენ ჩავთვლით, რომ $\cos\theta$ $(-\infty < \theta < +\infty)$ არის ლუწი, 2π პერიოდის ფუნქცია, რომელიც $[0,\pi]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულია ზემოთ აღწერილი წესით. ეს განმარტება შეესაბამება სასკოლო მათემატიკის კურსში შემოღებულ განმარტებას, რომლის თანახმადაც $\cos\theta$ არის B წერტილის აბსცისა, რომლის რკალური კოორდინატი ერთეულოვან წრეწირზე არის θ. ამ განმარტებიდან და $\cos\theta$ ფუნქციის $[0,\pi]$ მონაკვეთზე თვისებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\cos\theta$ უწყვეტად დიფერენცირებადია მთელს R რიცხვით წრფეზე. გარდა ამისა (3) ფორმულის გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $\cos\theta$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ წრფის მიმართ არის კენტი, ე.ი.

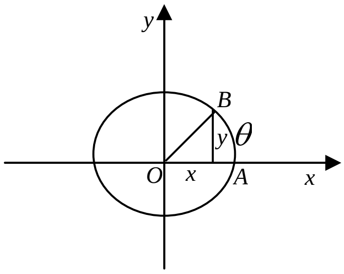
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ მოძრავი B წერტილი ეკუთვნის ერთეულოვანი წრეწირის მარჯვენა ნახევარს (იხ. ნახ. 2).

$x = \sqrt{1-y^2}$, $-1 \le y \le 1$. ფუნქცია

$$\theta = \arcsin y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (4)$$

სადაც $-1 \le y \le 1$ გამოსახავს AB რკალის სიგრძეს შესაბამისი ნიშნით. ცხადია ის უწყვეტია, კენტია და მკაცრად ზრდადია $[-1,1]$ მონაკვეთზე დააკმაყოფილებს პირობებს



ნახ.2.

$$\theta(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \theta(0) = 0,\ \theta(1) = \frac{\pi}{2},$$

ამიტომ ის უწყვეტად დიფერენცირებადია $(-1,1)$ ნტერვალში.

მისი შექცეული ფუნქცია $y = \sin\theta$ უწყვეტი და მკაცრად ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე.

ეს ფუნქცია კოსინუსის მსგავსად შეიძლება გავაგრძელოთ მთელს რიცხვით წრფეზე. მიღებული ფუნქცია არის 2π პერიოდის მქონე კენტი და უწყვეტი მთელს რიცხვით წრფეზე. $\sin\theta$ არის B წერტილის ორდინატი, რომლის რკალური კოორდინატია θ.

ცხადია, რომ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, -\infty < \theta < +\infty$, ეს გამომდიანრეობს იქედან, რომ $\cos\theta$ და $\sin\theta$ შესაბამისად წარმოადგენენ ერთეულოვანი წრეწირის აბსცისას და ორდინატს.

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას $\forall x \in [-1,1]$.

$$\arcsin x + \arccos x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$

თუ $\theta \in [0, \pi]$ და $x = \cos\theta$, მაშინ $\theta = \arccos x$, $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \theta$, მაშასადამე

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad (6)$$

ანალოგიურად, თუ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ და $x = \sin\theta$, მაშინ $\theta = \arcsin x$, ხოლო (5) ფორმულის ძალით $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x$, მაშასადამე

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad (7)$$

(6), (7) ტოლობები, თუ ვისარგებლებთ $\cos\theta$ და $\sin\theta$ ფუნქციების სიმეტრიულობისა და პერიოდულობის თვისებებით ადვილად გავრცელდება ნებისმიერი θ-თვის.

სამართლიანია აგრეთვე ტოლობები:

$$\sin'\theta = \cos\theta, \quad \cos'\theta = -\sin\theta, -\infty < \theta < +\infty \qquad (8)$$

ასე მაგალითად, (4) ფორმულიდან გვაქვს

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (-1 \le y \le 1),$$

საიდანაც მიიღება (შექცეული ფუნქციის გაწარმოების თანახმად)

$$\sin'\theta = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta.$$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, მაგრამ ეს ტოლბა სამართლიანია θ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, ვინაიდან $\sin\theta$ და $\cos\theta$ ფუნქციებს აქვთ სიმეტრიულობის და პერიოდულობის თვისებები.

(3) და (4) ფორმულების გამოყენებით ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ფორმულების სამართლიანობაში

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \qquad (9)$$

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ უტოლობა $|\sin\theta| \le \theta$ შეიძლება ასე დავამტკიცოთ

$$|\theta| = \left| \int_0^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \ge \int_0^{|\sin\theta|} 1dt = |\sin\theta|, \quad |\theta| \le \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

და რადგანაც $\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \ge \int_{-1}^{1} dt = 2$ და $|\sin\theta| \le 1$, ამიტომ

(10) მართებულია $\forall\theta \in R$. უტოლობა $\theta \le tg\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, შეიძლება დავამტკიცოთ ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით:

$$tg\theta - \theta = \theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) \ge 0 \qquad 0 < \theta_1 < \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

§8. პედაგოგიური ექსპერიმენტი

მათემატიკური ანალიზის კურსში მიმდევრობათა გარდაქმნების და უწყვეტ ფუნქციათა სწავლების მეთოდიკამ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების ფაკულტეტის პირველ კურსზე, რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული იყო დისერტაციის I და II თავებში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა 5 წლის (2005-2010 წლებში) განმავლობაში აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტის პირველ კურსებზე და ქუთაისის უნივერსიტეტის ეკონომიკისა და ბიზნესის მართვის ფაკულტეტის პირველ კურსებზე.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, ჩვენს მიერ შესწავლილი იქნა აღნიშნული უმაღლესი სასწავლებლების პირველკურსელი სტუდენტების მათემატიკის შუალედური შეფასებების და შემაჯამებელი გამოცდების ნაშრომები, რომლებიც დისერტაციაში განხილული საკითხების სწავლებას ეხებოდა.

ანალიზმა ცხადყო, რომ სტუდენტთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმოადგენს მიმდევრობათა გარდაქმნების და უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების შესწავლა ტრადიციული მეთოდებით.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის განმავლობაში ძირითადი მუშაობა წარვმართეთ პრინციპით „ამოცანა-თეორია-ამოცანა“. რადგან თეორიული მასალის უკეთ ათვისებისათვის გაცილებით კარგი შედეგი მოგვცა მარტივი მაგალითების განხილვამ, რომლის შემდეგ ლექტორის სათანადო მსჯელობით სტუდენტები თვითონ მიდიოდნენ განსახილავი თეორიული საკითხის წესების ჩამოყალიბებამდე, რომლის სათუძველზეც შემდგომ შედარებით უფრო რთული ამოცანების ამოხსნას ვახდენდით. ასეთი მიდგომა საკითხის შესწავლისადმი პოზიტიურ მოტივაციას ქმნიდა სტუდენტებში და ხელს უწყობდა მიღებული ცოდნის განამტკიცებას.

ამ წესების ჩამოყალიბებაში ბუნებრივად მონაწილეობდა კურსისათვის განკუთვნილი ამოცანათა კრებულებში [15], [16], [17], [18], [19], [26], [27], [32], [39], [43], [44], [48], [50], [51], [59], [60], [63], [70], [73] მოთავსებული ის ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან და ასევე ჩვენს მიერ სპეციალურად შერჩეული ამოცანები.

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხები, ხოლო მეორეს მხრივ ამ საკითხების პრაქტიკული რეალიზების შემცველი ამოცანები, ზუსტ და

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკუკლტეტის პირველ კურსზე განიხილება მცირე რაოდენობით. მეორეს მხრივ, თუ განიხილება, არ ხდება ამოხსნისას გამოყენებული ხერხის სრულფასოვანი მეცნიერული ახსნა.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

^ ეტაპი-მოსამზადებელი ექსპერიმენტი-რომელიც ძირითადად ტარდებოდა პრაქტიკულ მეცადინეობებზე, ვიხილავდით ისეთ მაგალითებს, რომელთა ამოხსნა დაკავშირებული იყო მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან.

^^ ეტაპი-სასწავლო ექსპერიმენტი რომელიც ტარდებოდა ძირითადად სალექციო და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა სტუდენტთა საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმება. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ მოსწავლეები ისეთი მაგალითების, ამოხსნის ხერხებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა 2 წლის (2005-2007 წლები) განმავლობაში და მასში მონაწილეობა მიიღო 233 სტუდენტმა.

სტუდენტებთან მუშაობის ძირითადი ფორმა იყო მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან. დაკავშირებული თეორიული საკითხების განხილვა და შესაბამისი თემატიკით პრაქტიკული მაგალითების ამოხსნა. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახილავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

სტუდენტებს ეძლეოდათ სილაბუსში რეკომენდირებული კრებულებში განთავსებული ამოცანები, რომლებიც ეხება მიმდევრობათა გარდაქმნებს და უწყვეტ ფუნქციებს [2], [8], [22], [23], [24], [25], [28], [29], [31], [46], [49], [56], [57], [61], [68], [74], [75], [77], [78], [79], [80], [81], [82] და ჩვენს მიერ შედგენილი ამოცანები.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

1. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{1+5+9+\cdots+(4n-3)}.$$

2. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}}.$$

3. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+5{,}5+7+\cdots+\frac{3n-1}{2}}{3+6+9+\cdots+3(n-4)}.$$

4. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}.$$

5. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}$ ზღვრის გამოთვლა დაიყვანება $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha-n^\alpha}$ ზღვრის გამოთვლამდე.

6. დაამტკიცეთ, რომ თუ p ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

7. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta}$, როცა $\alpha>0,\ \beta>0$.

8. ვიპოვოთ ზღვარი

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}.$$

9. იპოვეთ ზღვარი

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3\cdot 4^x}{2\cdot 4^{x+1}-5^x}.$$

10. იპოვეთ ზღვარი

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}.$$

11. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+3)(n^2+11)(n^4-8)}{(n^2+3)(n^4-2)(n+2)}.$$

12. იპოვეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{81n^4+n-4}-7n}{\sqrt[6]{128n^4+3n^2-7}-3n}.$$

13. გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

14. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

15. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

16. გამოთვალეთ ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}.$$

17. იპოვეთ $\left|1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n\right|=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}$ განტოლების ფესვები.

18. დაამტკიცეთ რომ თუ $(3\sin x+4\sin y+5\sin z)^2=50\left(\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z\right)$, მაშინ $x+y+z=180^0$ და ეს არის სამკუთხედი 3, 4 და 5 გვერდებით.

19. ამოხსენით განტოლება

$$(\sin x+\sin 4x+\sin 7x)^2=3\left(\sin^2 x+\sin^2 4x+\sin^2 7x\right).$$

20. ამოხსენით განტოლება

$$\left(1+2\lg(x-y)+3\lg(x+y)\right)^2=14\left(1+\lg^2(x-y)+\lg^2(x+y)\right).$$

21. დავამტკიცოთ, რომ ნებნისმიერი x, y, z რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left(3+2\sin(x+y-z)+5\cos(x+y-z)\right)^2\le 76.$$

22. იპოვეთ მაქსიმუმი და მინიმუმი შემდეგი ფუნქციისათვის

$$z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}},\ \text{სადაც}\ a^2+b^2+c^2\neq 0.$$

23. იპოვეთ $u=\dfrac{2x+4y-6z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

24. იპოვეთ $z=\dfrac{\left|1+2x_1+3x_2+\cdots+(n+1)x_n\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2+1}}$ ფუნქციის მაქსიმუმი და მინიმუმი.

25. ვაჩვენოთ, რომ კრებადია ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}.$$

26. ვაჩვენოთ, რომ განშლადია ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

27. გამოიკვლიეთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალებისა:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+8x^9}}\ \text{და}\ 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}\,.$$

მოსამზადებელმა ექსპერიმენტმა საშუალება მოგვცა გაგვეკეთებინა შემდეგი დასკვნები:

1. ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე მათემატიკური ანალიზის კურსში მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული იმ თეორიული მასალის სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს პრაქტიკულ მაგალითებზე არასტანდარტული მიდგომის განხორციელებას საკმარისი ყურადღება არ ექცევა;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო სტუდენტთა უმრავლესობა ვერ ფლობს მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებულ ვერც თეორიულ საკითხებს და ვერც ამოცანების ამოხსნის იმ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ბევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. სტუდენტთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხები, მართალია ახერხებენ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნას, მაგრამ ვერ ფლობენ ამოხსნის იმ რაციონალურ ხერხებს, რომლებიც სწავლებაში მეტად ეფექტურია.

4. მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხების და ამოცანების ამოხსნის ხერხების მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხების განხილვისას სწავლების რომელი მეთოდების და ფორმების გამოყენებაა მიზანშეწონილი სასკოლო პრაქტიკაში.

ბ) ამის საფუძველზე საამოცანო მასალის შერჩევა კონკრეტული თემებისათვის და შერჩეული ამოცანების ამოხსნის რომელი ხერხების სწავლებაა აუცილებელი და მეთოდური თვალსაზრისით მიზანშეწონილი.

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ მათემატიკური ანალიზის კურსის სასწავლო მასალა, რომელიც დაკავშირებულია მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან, გავეცანით შესაბამის მეთოდიკურ ლიტერატურას, კონსულტაციები მივიღეთ სპეციალისტებისაგან, მოვიძიეთ საზღვარგარეთული გამოცდილების შესახებ არსებული ლიტერატურა. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ ის პრაქტიკული მაგალითები, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მათემატიკური ანალიზის კურსში ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე და დავამუშავეთ შერჩეული ამოცანების ამოხსნის ხერხები.

აღნიშნული საკითხები ექსპერიმენტის პროცესში განიხილებოდა ლექციებზე და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე.

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის I-II თავებში შემოთავაზებული მეთოდიკა .

აღნიშნული მეთოდიკა შემოწმებას გადიოდა ლექციებზე და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე. რამდენჯერმე მოგვიხდა სწავლების მეთოდიკისა და დასმული ამოცანების კორექტირება მათი დახვეწის მიზნით. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სასწავლო წლის მანძილზე. ერთ მეცადინეობაზე განიხილებოდა არაუმეტეს ერთი საკითხისა, ხოლო სტუდენტებს საშინაო დავალების სახით ეძლეოდათ ანალოგიური პრაქტიკული ხასიათის მაგალითი, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ მაგალითით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში, მათგან ზოგიერთი მათგანი ამოვხსენით სალექციო და პრაქტიკულ მეცადინეობებზე, დანარჩენი სტუდენტებს მივეცით დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. გარდა ამისა ვსარგებლობდით მათემატიკური ანალიზის პრაქტიკული კურსისათვის გამოსაყენებელი სხვადასხვა კრებულით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს.

სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება.

სასწავლო ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა სამი სასწავლო წლის (2007-2010 წლები) განმავლობაში აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტის პირველ კურსებზე და ქუთაისის

უნივერსიტეტის ეკონომიკისა და ბიზნესის მართვის ფაკულტეტის პირველ კურსებზე.

ექსპერიმენტის დაწყების ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს სტუდენტებს უნდა ამოეხსნათ მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული მაგალითები, დაახლოებით ისეთი, როგორც მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა სტუდენტთა 34-36%. ორი სასწავლო წლის განმავლობაში მიმდინარეობდა მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული თეორიული საკითხების სწავლება და პრაქტიკული მაგალითების ამოხსნის ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა სემესტრების ბოლოს. სტუდენტთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად სტუდენტთა 90%-მდე ასრულებდა. ზემოთ თქმული ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა ექსპერიმენტში მონაწილე ჯგუფებისა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებსაც.

საკონტროლო და ექსპერიმენტული ჯგუფების სტუდენტთა ცოდნის დონე მათემატიკურ ანალიზში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,3 და 7,6.

ექსპერიმენტული ჯგუფებში სწავლება მიმდინარეობდა ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით შუალედური შეფასებებსა და შემაჯამებელ გამოცდაზე მიცემული პრაქტიკული მაგალითების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული სპეციალური საკითხების ცოდნას და პრაქტიკული მაგალითის ამოხსნის კონკრეტული, ჩვენს მიერ ნასწავლი ხერხის გამოყენებას. უნდა შევნიშნოთ, რომ დავალებად მიცემული მაგალითის ამოხსნა შესაძლებელი იყო სხვა ხერხითაც.

მოვიყვანოთ მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული პრაქტიკუოი მაგალითების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მიერ ექსპერიმენტის ორი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწმების შედეგები. პირველი

შემოწმება ითვალისწინებდა მოსწავლეთა საერთო დონის დადგენას, ხოლო დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებზე სტატისტიკურ შეფასებას ვახდენდით ორი ნიშნით:

1. რამდენი სტუდენტი შეეცადა ამოეხსნა მიცემული პრაქტიკული მაგალითი;
2. ამ სტუდენტებიდან რამდენმა ამოხსნა პრაქტიკული მაგალითი სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1.

კლასები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
მოსწავლეთა რაოდენობა	124	124	124	124	124	109	109	109	109	109
ამოხსნა I	103	106	107	108	111	77	78	80	81	79
ვერ ამოხსნა	21	18	17	16	13	32	31	29	28	30
ამოხსნა II	84	88	89	92	97	54	54	55	57	55
ვერ ამოხსნა	19	18	18	16	14	23	24	25	24	24

იმის გამო, რომ თითოეულიპრაქტიკული მაგალითის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე.

შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [45, გვ.96-106].

კრიტერიუმის სტატისტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან [45. გვ.130] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68.

T_0 ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის სტუდენტთა შორის შემთხვევითია.

ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის.

ცხრილი 2.

კლასები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
სტუდენტთა თა რაოდენობა	124	109
ამოხსნა	107	79
ვერ ამოხსნა	17	30
ამოხსნა	90	55
ვერ ამოხსნა	17	24

ჩატარებული ექსპერიმენტის *Tნ* კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_{ნ} = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2\left(\mathrm{O}_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \qquad [45, გვ.96]$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3.

^ ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 107$	$O_{21} = 79$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 17$	$O_{22} = 30$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 124$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 109$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 233$

ცხრილი 4.

^ ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11} = 90$	$O'_{21} = 55$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12} = 17$	$O'_{22} = 24$
	$O'_{11} + O'_{12} = n'_1 = 107$	$O'_{21} + O'_{22} = n'_2 = 79$

სადაც $n'_1 + n'_2 = N' = 183$.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: *Tნ=11;16*

მეორე ნიშნისათვის: *Tნ=10,93.*

რადგან ორთავე მნიშვნელობა აღემატება *Tკრ,* ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების *T0* ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული *T1* ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფის სტუდენტები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული პრაქტიკული მაგალითების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. სწავლების მეთოდიკა, რომელიც მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე მათემატიკური ანალიზის კურსის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

2. მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული ჩვენს მიერ განხილული ხერხებით სწავლება ხელს უწყობს სტუდენტებს მათემატიკური განათლების მიღებაში, ამაღლებს მათ ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული პრაქტიკული მაგალითები დავყოთ მსგავსების ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ მაგალითები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით.

პრაქტიკულ მეცადინეობებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული მაგალითები, ხოლო შედარებით მარტივი მაგალითები სტუდენტებს მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

მიუღებლად მიგვაჩნია სტუდენტთათვის სწავლების პროცესში ძალზედ რთული პრაქტიკული მაგალითების მიცემა. რადგან ისეთი მაგალითები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება სტუდენტთა შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებულმა მეთოდიკამ, ეფექტური გახადა მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული საკითხების სწავლება, სტუდენტებს განუმტკიცა საკუთარი თავის რწმენა, აამაღლა მიმდევრობათა გარდაქმნებთან და უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებული პრაქტიკული მაგალითების ამოხსნის ინტერესი. ყოველივე ეს დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

ზოგადი დასკვნები და რეკომენდაციები

1. მათემატიკის, როგორც მეცნიერების შესწავლის მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს, თუ როგორ ვასწავლოთ მათემატიკა კონკრეტულ სპეციალობებზე, ამან განაპირობა მათემატიკის სწავლების მეთოდოლოგიის, როგორც მეცნიერების ჩამოყალიბება. ამ მეცნიერების ამოცანაა უპასუხოს შემდეგ კითხვებს:

1) რა არის მათემატიკის შესწავლის მიზანი;

2) რა შინაარსით წარვმართოთ სწავლება;

3) რა ფორმებითა და მეთოდებით ვასწავლოთ.

2. მაღალკვალიფიციური სპეციალისტის აღზრდაში დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვეობის მოთხოვნათა გათვალისწინებით შედგენილ სასწავლო გეგმებს, პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებს, საუკეთესო ლექტორ-მასწავლებლების პირობებშიაც კი, თუ არ არის გამართული სახელმძღვანელო, პროგრამა, სასწავლო გეგმა, შეუძლებელია ნამდვილად სრულ წარმატებაზე ვილაპარაკოთ.

3. მათემატიკის მეთოდოლოგიის გადასაჭრელი პრობლემები განხილულ უნდა იქნეს პედაგოგიკის, მათემატიკის, ფსიქოლოგიის და ფილოსოფიის ურთიერთკავშირში. მეთოდოლოგიური დირექტივები უნდა შეიცავდეს რჩევებს, რომლებიც მიმართული იქნება სწავლების შეთანხმებასთან, როგორც ფსიქოლოგიისა და მათემატიკის პედაგოგიკასთან, ასევე მათემატიკის ბუნებასა და გამოყენებასთან. სწავლების მაღალმეცნიერულ დონეზე წარმართვისათვის საკმარისი არ არის მხოლოდ პედაგოგიური პრობლემების თეორიული კვლევა და შესაძლო შედეგების პროგნოზირება, საჭიროა გადასაცემი საკითხებისათვის კერძო და სპეციალური მეთოდიკის დამუშავება.

4. ელემენტარული ფუნქციების თვისებები ძირითადად დგინდება ემპირიულ დონეზე. გამოიყენება თვალსაჩინო არითმეტიკული და გეომეტრიული მოსაზრებები. მაგალითად, ავიღოთ ლოგარითმული ფუნქცია $f(x)=\log_a x,\ (a>0,\ a\neq 1)$, თუ მას ვასწავლით მათემატიკის სპეციალობაზე საშუალო სკოლის მეთოდიკით, მაშინ ჩვენ აღმოვჩნდებით სერიოზული წინააღმდეგობის წინაშე. ეს გამოწვეულია შემდეგი მოსაზრებებიდან:

1) საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებში ინტუიციურ დონეზეა მოცემული a^x-გამოსახულების განსაზღვრება, როცა x ირაციონალური რიცხვია;

2) ინტუიციურ დონეზეა წარმოდგენილი მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები, ვინაიდან მათი დამტკიცება არსებითად სცილდება სასკოლო მათემატიკის კურსის ფარგლებს;

3) ლოგარითმული ფუნქცია განისაზღვრება, როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, პირდაპირ და შექცეულ ფუნქციებს შორის დამოკიდებულების შესახებ თეორემის მკაცრი დამტკიცება ვერ ხერხდება სასკოლო მათემატიკის კურსში;

4) სასკოლო მათემატიკის კურსი ვერ იძლევა დადებითი რიცხვის ლოგარითმის არსებობის დამაჯერებელ დამტკიცებას.

ამ პრობლემათა სრულფასოვანი მეცნიერული შესწავლა მხოლოდ მათემატიკური ანალიზის მეთოდების გამოყენებით არის შესაძლებელი. მათემატიკური ანალიზის მეთოდები საშუალებას გვაძლევს მოვიყვანოთ ამ ფუნქციების სრული და მკაცრი განმარტება. ელემენტარული ფუნქციების ყველა თვისება სრულყოფილად შეიძლება შევისწავლოთ ანალიზის მეთოდების შერწყმით. მაგრამ, ვინაიდან, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული და ხარისხოვანი ფუნქციების განმარტებები შეგვიძლია შემოვიღოთ მონოტონური ფუნქციის თვისებების შესწავლის შემდეგ, ხოლო ეს საკითხები ისწავლება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე, ამიტომ აუცილებლად ვთვლით, რომ ელემენტარული ფუნქციების სწავლება მოხდეს პირველ კურსზე.

5. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებები ეყრდნობა წრეწირის რკალის სიგრძის ცნებას. ეს უკანასკნელი კი მოითხოვს შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის შესაწავლას, ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია პირველ კურსზე მოხდეს ამ საკითხების სწავლება, რადგან ამ ფორმით სწავლება სტუდენტებს საშუალებას აძლევს დაინახონ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამდვილი ბუნება. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სწავლების დროს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დაეთმოს მეთოდურად გამართული პრაქიკული ამოცანების სისტემების განხილვას, რომელიც დამუშავებული უნდა იქნეს სპეციალურად თითოეული კონკრეტული თემისათვის.

6. ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ–ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ არ არსებობს ისეთი უნივერსალური მათემატიკური მეთოდები და ხერხები, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა.

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში წარმოებს ელემენტარული ფუნქციების თვისებების გამოყენებით, რაც ზღუდავს განსახილავი ამოცანების კლასს. წარმოებულის

სწავლების ამოღებამ საშუალო სკოლის კურსი მეტად „გააღარიბა“ განსახილველი ამოცანებით. მასწავლებელი დგება ალტერნატიული არჩევანის წინაშე: ან საერთოდ არ მოხდეს ექსტრემალური ამოცანების განხილვა საშუალო სკოლაში, ეს მიდგომა მიუღებლად მიგვაჩნია, ან საკითხი განხილულ იქნას მხოლოდ უმაღლესი მათემატიკის კურსში, რომელსაც უკვე ისინი უმაღლეს სკოლაში შეისწავლიან. მაგრამ ამ უკანასკნელი არჩევანის განხორციელება ნაკლებ პროდუქტიულია, რადგან ჯერ ერთი ყველა ვინც სკოლაში სწავლობს არ აგრძელებს სწავლას უმაღლეს სასწავლებელში და მეორე, ვინც სტუდენტი ხდება, მათგან ყველა უმაღლეს მათემატიკას არ სწავლობს. ამიტომ დღის წესრიგში დგება ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის არასტანდარტული ხერხების გამოყენების აუცილებლობა.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული საკითხების საშუალო სკოლაში განხილვა ხელს უწყობს უმაღლეს სკოლაში მათემატიკური ანალიზის საკითხების სწავლებას და მეთოდურად სრულყოფილად ხდება ზოგდსაგანმანათლებლო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების მეთოდების ერთიან სისტემაში მოყვანა და მათი შეძლებისდაგვარად დაახლოება. ეს კი მათემატიკის პედაგოგიკის აქტუალური საკითხია და მოითხოვს უმაღლეს სკოლაში მეთოდოლოგიური ასპექტების დამუშავებას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად ჩვენს მიერ შერჩეული იქნა ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტი, სადაც მთელი სიგრძე-სიგანით წარმოჩინდა პრობლემის არსი და საშუალება მოგვეცა მისი გადაწყვეტისა, რადგან სხვა ფაკულტეტებზე, სადაც შეისწავლება უმაღლესი მათემატიკა, არ განიხილება ან შედარებით ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი მათემატიკური ანალიზის იმ საკითხებს, რომელზეც დისერტაციაშია საუბარი.

ნაშრომში განხილულია ისეთი ამოცანებიც, რომელთა ამოხსნას სირთულის გამო საშუალო სკოლაში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი. დისერტაციაში განხილულია ზოგიერთი სახის ამოხსნის არასტანდარტული ხერხი, რომელიც უთუოდ საინტერესოა მოსწავლეთა შემოქმედებითი შესაძლებლობების განსავითარებლად. განხილულია ტრადიციულისაგან განსხვავებული ზოგიერთი ხერხი, რომელიც წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლებათა მიმართ, როცა სტანდარტული მიდგომა შედეგს არ იძლევა, ზოგჯერ კი ამარტივებს ამოხსნის პროცესს ისეთი განტოლებებისათვის, რომელთა ამოხსნა სხვა გზითაც შეიძლება. მათი სწავლება შეიძლება განხორციელდეს როგორც სკოლის საგაკვეთილო პროცესში, ისე კლასგარეშე მუშობის რეჟიმში. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია დისერტაციაში განხილული ამოცანების მსგავსი ამოცანები მიეცეთ მოსწავლეებს დამოუკიდებელი მუშობისათვის.

7. უმაღლესი სკოლის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე სასწავლო პროცესში მიმდევრობათა გარდაქმნებისა და უწყვეტ ფუნქციათა მიზანმიმართული, ჩვენს მიერ სპეციალურად შემუშავებული მეთოდიკით სწავლების აუცილებლობა დადასტურდა პედაგოგიური ექსპერიმენტით;

8. ეფექტურია მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის გამოთვლის ზოგიერთი არასტანდარტული ხერხის სწავლების მეთოდიკა უმაღლეს სკოლაში. აღნიშნული საკითხები განხილულია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლისთვისაც (შედარებით დაბალი სირთულის მქონე) და დამუშავებულია მისი სწავლების მეთოდიკა. უმაღლესი და საშუალო სკოლების მათემატიკის კურსში კოში–ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენების მეთოდური ასპექტების დამუშავებით მოხდა საშუალო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის საკითხების ერთიან კონტექსტში განხილვა, რამაც დადებითი შედეგი მოიტანა სწავლების ეფექტურობის ამაღლების თვალსაზრისით;

9. შტოლცის თეორემის გამოყენებით, ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული და უკუგდების პრინციპით ზღვართა გამოთვლის სწავლების შემოთავაზებულმა მეთოდიკამ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის I კურსზე საშუალება მოგვცა გამოგვეთავისუფლებინა სასწავლო დრო, რომელიც გამოყენებული იქნა სხვა საკითხების სრულყოფილად შესწავლისათვის;

10. პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა, რომ მიმდევრობათა გარდაქმნების და უწყვეტ ფუნქციათა ჩვენს მიერ დისერტაციაში შემოთავაზებული მეთოდიკა ეფექტურია და ის საშუალებას იძლევა ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების ფაკულტეტის სპეციალობების პირველ კურსზე მათემატიკური ანალიზის კურსის სწავლება წარვმართოთ ბუნებრივი ზოგადობით.

დისერტაციაში მოყვანილი თეორიული მოსაზრებები სრულ შესაბამისობაშია ინტერდისციპლინარული და ინტეგრირებული სწავლების პრინციპებთან. ჩვენს მიერ დამუშავებული მეთოდოლოგიური პრინციპებით ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ფაკულტეტის პირველ კურსზე მათემატიკის ანალიზის კურსის სწავლება მიმდინარეობს საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების რეალიზებით, რაც საფუძველს ქმნის სხვა მათემატიკური დისციპლინების უკეთ და გააზრებულად შესწავლისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ბალანჩივაძე რ., ასათიანი ვ. პედაგოგიკის ფილოსოფიური საფუძვლები, თბილისი, „თსუ“, 1997.

2. დავითაძე ჯ. მათემატიკური ანალიზი. I ნაწილი. ბათუმი, 2002.

3. ვასაძე ნ. პედაგოგიკა, თბილისი, „ცის ნამი“, 2000.

4. ვახანია ზ. სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი, 1999.

5. ვახანია ზ., ნოზაძე გ., პაატაშვილი დ., ფხაკაძე ვ. მათემატიკა. საცდელი სახელმძღვანელო V კლასისათვის, I და II ნაწილი. I გამოცემა. თბილისი, 1991.

6. ვახანია ზ., ნოზაძე გ., პაატაშვილი დ., ფხაკაძე ვ. მათემატიკა. საცდელი სახელმძღვანელო VI კლასისათვის, I და II ნაწილი. I გამოცემა. თბილისი, 1992.

7. ვეფხვაძე თ. მათემატიკის რჩეული თავები, I ნაწილი, თბილისი, საქართველოს პედაგოგთა კვალიფიკაციის ამაღლებისა და გადამზადების ინსტიტუტი. 1997.

8. ზერაგია პ. უმაღლესი მათემატიკა, I ნაწილი. თბილისი, 1984.

9. თოფურია ს., აბესაძე გ. და სხვ. მათემატიკა I ნაწილი. თბილისი, „განათლება“, 1991.

10. იმერლიშვილი ე. მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკა, თბილისი, „თსუ“, 2001.

11. ლორთქიფანიძე დ. და სხვები. პედაგოგიკა, თბილისი, „განათლება“, 1969.

12. მორალიშვილი თ. სასკოლო მათემატიკის ამოცანების ამოხსნის ძიების სწავლების მეთოდური საფუძვლები. პედაგოგიკური მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია.თბილისი, 2003.

13. ონიანი გ. მათემატიკური ანალიზის ძირითადი სტრუქტურები. პედაგოგიკური მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია.თბილისი, 2004.

14. ონიანი გ. საშუალო და უმაღლეს სკოლებში მათემატიკის სწავლების ზოგიერთი საკითხი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი, პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. #1(21), თბილისი, 2005.

15. ონიანი გ., ნუცუბიძე ნ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. 1, ქუთაისი, „ქსუ“, 1996.

16. ონიანი გ., ნუცუბიძე ნ., ნემსაძე ზ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ. 2, ქუთაისი, „ქსუ“, 1997.

17. ონიანი გ., ნუცუბიძე ნ., ჯაფარიძე ე., ქემოკლიძე ტ., სოხაძე ზ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ქუთაისი, „ქსუ“, 1997.

18. ონიანი გ.ა. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები. 1 ტ. ქუთაისი, 2006.

19. ქარცივაძე ი. მათემატიკური ანალიზი, ტ. 1, თბილისი, 1981.

20. ქელბაქიანი ვ., მორალიშვილი თ., ახვლედიანი ა. მათემატიკის ამოცანათა კრებული. „განათლება“, თბილისი, 1983.

21. ჩაჩანიძე გ. ალგებრა და საქართველოს მატიანე. „განათლება“, თბილისი,1991.

22. ციბაძე ლ., ონიანი გ. ანალიზურ ფუნქციათა ინტეგრალური წარმოდგენები, ბერგმანის ტიპის პროექტორები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ერთობლივი რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენციის შრომები. ქუთაისი 2007. გვ. 115-118.

23. ციბაძე ლ., ბერძულიშვილი გ. ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის ერთი არასტანდარტული ხერხი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(33). თბილისი. 2009 წ. გვ. 371-373.

24. ციბაძე ლ., ბერძულიშვილი გ. განტოლებათა ამოხსნის ერთი არასტანდარტული ხერხი. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №2(34). თბილისი. 2009 წ. გვ. 268-270.

25. ციბაძე ლ., ბერძულიშვილი გ. მიმდევრობათა გარდაქმნები და მათი სწავლება ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პირველ კურსზე. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(36). თბილისი. 2010 წ. გვ. 202-205.

26. ციბაძე ლ., ბერძულიშვილი გ. ზღვრის გამოთვლა უკუგდების პრინციპით და ნეპერის რიცხვთან დაკავშირებული ზღვრები. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდი „ინტელექტი“-ს პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი №1(36). თბილისი. 2010 წ. გვ. 206-209.

27. ციბაძე ლ., ონიანი გ. B^p სივრცის ფუნქციათა ზოგიერთი თვისების შესახებ. საქრთველოს მათემატიკოსთა კავშირის I საერთაშორისო კონფერენცია, მოხსენებათა თეზისები, ბათუმი, 2010 წ. გვ. 31.

28. ციბაძე ლ., ბერძულიშვილი გ. ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობის სწავლება უმაღლესი სკოლის მათემატიკის კურსში. საქრთველოს მათემატიკოსთა კავშირის I საერთაშორისო კონფერენცია, მოხსენებათა თეზისები, ბათუმი, 2010 წ. გვ. 60.

29. ჭელიძე ვლ., წითლანაძე ე. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. 1. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1971.

30. ხარშილაძე ფ. მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები, თბილისი, 1981.

31. ხარშილაძე ფ. ზოგადი ანალიზის საფუძვლები, თბილისი, 1971.

32. ხახუბია გ. უმაღლესი მათემატიკის პრაქტიკუმის სახელმძღვანელო. ნაწილი I, ტექნიკა და შრომა, თბილისი, 1955.

33. ჯინჯიხაძე ჯ. დაწყებით სკოლაში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. „განათლება“, 1990.

34. ჯიბლაძე გ. პედაგოგიკა და მეთოდიკა, თბილისი, „განათლება“, 1974.

35. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изабратения в области математики, М., Сов. радио, 1970. с. 98-100.

36. Александров П.С. Мир ученного-наука и жизнь, 1974, №8, с.2-9.

37. Балк М., Балк Г. Поиск решения: научно-популярная литература. –М.: Дет. лит., 1983.

38. Бартенев Ф. Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей. –М.: Просвещение, 1976.

39. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу Математического анализа. Издателство „Наука“, Москва, 1971.

40. Борель Е. Как соглосовить преподование в средней школе с прогрессом науки, „Математическое просвещение“, 1958, №3, с.89-100.

41. Бурбаки Н. Очерки по истории математики, „Мир“, 1963.

42. Виленкин Н.Я., Дуничев К.И., Калужина А.А., Столяр А.А. Современные основы школьного курса математики, Москва, „Просвещение“, 1980.

43. Виноградова И.А., Олехник С.Н, Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 1, Издателство „Дрофа“, Москва, 2004.

44. Виноградова И.А., Олехник С.Н, Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, часть 2, Издателство „Дрофа“, Москва, 2004.

45. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических иследованиях. Непараметрические методы. М., „Педагогика“, 1977.

46. Грауерт, Либ, Фишер, Математический анализ, Москва, „Мир“, 1976.

47. ДавыдовВ.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. –М.: Педагогика, 1986.

48. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. Издателство „Наука“, Москва, 1968.

49. Зорич В.А. Математический анализ, т. I. Москва, „Наука“, 1983.

50. Зорич В.А. Математический анализ, т. II. Москва, „Наука“, 1984.

51. Илин В.А, Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ, т. II. Москва, „МГУ“, 1987.

52. Колмогоров А.Н. О профессии математика, М., „МГУ“, 1960.

53. Колягин Ю.М. Методика преподования математики в среднеи школе. Частные методики: Учебное пособие для студентов физ-мат. пединститутов. –М.: Просвещение, 1977.

54. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников, М., „Наука“, 1968.

55. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподаванние, М., „Наука“, 1985.

56. Кудрявцев Л.А. Курс Математического анализа, т. I, М., „Наука“, 1981.

57. Кудрявцев Л.А. Курс Математического анализа, т. II, М., „Наука“, 1983.

58. Леонтьев А.Н. Проблема деятельности в психологии. Вопросы Философии. 1972.

59. Ляшко И.И, Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. т. 1, „Виша школа“, Киев, 1974.

60. Ляшко И.И, Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. т. 2, „Виша школа“, Киев, 1977.

61. Литвуд Дж. Математическая смесь. М., „Наука“, 1965.

62. Медведева О.С. Методическая основа развития теоретического мышления учащихся в процессе решения математических задач. М.: МПГУ, 2000.

63. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу, М., „Наука“, 1981.

64. Пойя Д. Математика и правдопадобные рассуждения, М., ИЛ, 1957.

65. Пойя Д. Математическое откритие, М., „Наука“, 1970.

66. Пойа Дж. Как решить задачу. – Львов: Журнал „Квантор“, 1991 /Киев: РПО. Полиграфкнига/ - Выпуск 1.

67. Рубенштейн С.Л. Основы общей психологии: Учебное пособие для студентов выс. пед. учеб. заведений и ун-тов. –М.: Учпедгиз, 1946.

68. Рудин У. Основы математического анализа, Москва, „Мир“, 1976.

69. Саранцев Г.И. О методике обучения школьников поиску решения математических задач. /Преподование алгебры и геометрии в школе: Пособие для учителей./ Сост. О.А. Боконцев. –М.: Просвещение, 1982.

70. Спивак М. Математический анализ на многообразиях, Москва, „Мир“, 1968.

71. Столяр А.А. Методы обучения математике. –Минск: Высшая школа, 1966.

72. Столяр А.А. Педагогика математики, Минск, „Высшая школа“, 1986.

73. Уваренков И.М, Маллер М.З. Курс матемвтического анализа. Москва, „Просвещение“, 1976.

74. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. т. 1. Москва, 1962.

75. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. т. 1. Москва, 1963.

76. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов средн. школы. -3-е изд., дораб. –М.: Просвещение, 1989.

77. Шварц Л. Анализ, т. I, Москва, „Мир“, 1972.

78. Шварц Л. Анализ, т. II, Москва, „Мир“, 1972.

79. Шилов Г.Е. Математический анализ, Москва, „Наука“, 1970.

80. Oniani G.A., Tsibadze L. Integral Representations and Continuous Projectors in Some Spaces of Analytic and Pluriharmonic Functions. Georgian Math. J. 15(2008), No. 4, 753-758.

81. Oniani G.A., Tsibadze L. Integral Representations of Analytic and Pluriharmonic Functions of the Bergman Class in the Unit Ball. 2007 Bull. Georg. Nati. Acad.Sci. vol. 175, no 2. pp. 27-30.

82. Oniani G.A., Tsibadze L. On Poisson type integral representations in a unit Ball. 2010 Bull. Georg. Nati. Acad.Sci. vol. 4, no 2. pp. 13-19.