საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

მაკა ლომთაძე

მწკრივთა თეორიის ზოგიერთი ელემენტის სწავლება უნივერსიტეტის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

სრული პროფესორი გიგლა ონიანი

ქუთაისი

2014

სარჩევი

შესავალი

თემის აქტუალურობა. უმაღლეს სკოლაში ნებისმიერი საგნის შესწავლისას სიძნელეები წარმოიქმნება იმ მასალის შერჩევისას, რომელიც უნდა ასწავლონ და იმ მეთოდური მიდგომებისადმი, რომლითაც უნდა იხელმძღვანელონ ლექტორებმა სწავლების პროცესში. მეთოდური მიდგომების სიმრავლეა მიზეზი იმისა, რომ მუდმივად კრიტიკის ქვეშ იმყოფება ზოგადად განათლების სისტემა და კერძოდ უმაღლესი განათლება. მათემატიკის სწავლებისას საქმე უფრო რთულადაა, რადგან მისი გამოყენება ფართოდაა შესაძლებელი ტექნიკისა და მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში.

მათემატიკის სწავლებისას ისმის ძირითადი კითხვა: რა უნდა ისწავლებოდეს მათემატიკაში უმაღლეს სასწავლებელში, მაშინ როდესაც მსოფლიოში ხდება მეცნიერების მათემატიზაცია? სხვადასხვა პროფესიის მქონე პირს სხვადასხვა დონეზე ესაჭიროება მათემატიკის ცოდნა. ჩვენ შევეცდებით განვიხილოთ მათემატიკის სწავლების ზოგიერთი საერთო ასპექტი იმ სტუდენტებისათვის, რომლებიც უმაღლესი სკოლის დამთავრების შემდეგ თავიანთ პრაქტიკულ საქმიანობაში გამოიყენებენ მათემატიკურ მეთოდებს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას თუ თეორიული კვლევების განხორციელებაში, რომელიც უშუალოდაა დაკავშირებული პრაქტიკასთან (მექანიკასთან, ფიზიკასთან, ტექნიკასთან, ბიოლოგიასთან, ეკონომიკასთან და ა.შ).

მუდმივად წარმოიქმნება ახალი სირთულეები მათემატიკის სწავლებისას, რაც დაკავშირებულია მის განვითარებასთან. დღესდღეობით იცვლება მათემატიკური განათლების მიმართ მოთხოვნები საინჟინრო-ტექნიკური, ეკონომიკური, სოფლის მეურნეობის და სხვა სპეციალობის სტუდენტებისათვის. ეს ცვლილებები დაკავშირებულია ჯერ ერთი-ფართოდ დანერგილი კომპიუტერულ ტექნიკასთან ადამიანის საქმიანობის ყველა სფეროში და მეორეც მეცნიერებისა და ტექნიკის მეტად სწრაფი ტემპით განვითარებასთან, ამიტომ პრაქტიკულად შეუძლებელია უმაღლეს სასწავლებელში ისეთი სწავლების სისტემის შექმნა,რომლის გავლის შემდეგ გამოშვებულ სპეციალისტებს ექნებათ მზა რეცეპტები იმ ამოცანების ამოსახსნელად, რომელიც მუშაობის პროცესში შეხვდებათ, ხშირად ასეც ხდება, რომ უმაღლესი სკოლის დამთავრებისას ის მეთოდები, რომელიც სტუდენტმა ისწავლა უკვე მოძველებულია

მუშაობის ახალ პირობებში. იმისათვის რომ თავისი კვალიფიკაცია შეინარჩუნოს სამუშაოსათვის საჭირო დონეზე, ყოველი სპეციალისტი ვალდებულია შეავსოს, გაიღრმაოს თავისი ცოდნა და განათლება. თუ მას გააჩნია აუცილებელი მათემატიკური კულტურა, გააჩნია ცოდნის მყარი ფუნდამენტი და კარგად ერკვევა მისთვის საჭირო თეორიის არსში იგი ადვილად აითვისებს და მიიღებს დამატებით ცოდნას, როცა ახალი ცოდნის მიღების საჭიროება დადგება.

ახალი ინფორმაციული ტექნოლოგიების ფართოდ დანერგვამ აამაღლა მოთხოვნა მათემატიკის გამოყენებითი მიმართულების მიმართ უმაღლეს ტექნიკურ, ეკონომიკურ, სასოფლო და სხვა სპეციალურ ფაკულტეტებზე. მათთვის აუცილებელი გახდა მათემატიკური ლოგიკის, მათემატიკური ანალიზის, გრაფთა თეორიის, ალგორითმების თეორის საფუძვლიანი ცოდნა. უმაღლესი სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში ახალი ინფორმაციული ტექნოლოგიების დანერგვამ შესაძლებელი გახადა უფრო ფართოდ და ეფექტურად იქნეს გამოყენებული ალბათობის თეორია და სტატისტიკური მეთოდები, თამაშთა თეორია და სხვ.

ამგვარად, ის ცვლილებები, რომლებიც ხდება და კვლავ მოხდება უახლოეს პერიოდში უმაღლეს სასწავლებლებში მათემატიკური განათლების სფეროში, იმ მოთხოვნილების საფუძველზე. რომელიც ესაჭიროება უმაღლესი სასწავლებლის კურსდამთავრებულს, იწვევს მათემატიკის გამოყენებითი მიმართულების გაძლიერებას და ფუნდამენტური მათემატიკური მომზადების დონის ამაღლებას.

უმაღლესი ტექნიკური, ეკონომიკური, აგრარული და სხვა სპეციალური ფაკულტეტის კურსდამთვავრებულს უნდა შეეძლოს:

ა) დარგში წარმოშობილი პრობლემის მათემატიკური მოდელის აგება;

ბ) მათემატიკური მოდელის გამოყენებით არსებული ამოცანის მათემატიკურ ენაზე ჩამოყალიბება;

გ) მათემატიკური მეთოდის და/ან ალგორითმის შერჩევა ამოცანის ამოსახსნელად;

დ) საჭიროების შემთხვევაში კონკრეტული პროგრამის შედგენა და მისი გამოყენება ამოცანის ამოსახსნელად;

ე) გამოყენებული მათემატიკური მეთოდის საფუძველზე პრაქტიკული რეკომიენდაციების გამომუშავება.

ცხადია, რომ დასმული მიზნების წარმატებით განხორციელება შეუძლებელია მხოლოდ მათემატიკის შესწავლით, ეს შეიძლება განხორციელდეს მათემატიკისა და კომპიუტერული ტექნოლოგიების პარალელურ რეჟიმში შესწავლას, მათი კოორდინირებული მუშაობით. [22],[63].

საწყის ეტაპზე (I-V სემესტრი) სტუდენტის მათემატიკური მომზადება შეიცავს უმაღლესი მათემატიკის, პროგრამირებისა და გამოთვლითი მათემატიკის კურსების შესწავლას. შემდეგ ეტაპზე (VI-VIII სემესტრი) ხორციელდება თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკური მეთოდების შესწავლა.

მათემატიკის სწავლებაში ახალი იდეების შეტანა დავუკავშიროთ მათ პრაქტიკულ გამოყენებას, რაც გამოიხატება სხვადასხვა სირთულის ამოცანების ამოხსნისას. უნდა დავიწყოთ მარტივი სავარჯიშოებითა და ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანებით და დავასრულოთ ისეთი რთული ამოცანებით რომლის ამოხსნაც მოითხოვს შემოქმედებითი აზროვნების საკმაოდ მაღალ დონეს.[5],[6].

უმაღლესი სპეციალურ სასწავლებელში უპირველეს ყოვლისა უნდა ისწავლებოდეს მათემატიკური სტრუქტურები, რომლებიც წარმოადგენენ ამა თუ იმ რეალური მოვლენის მოდელს. მაგალითად, წარმოებული, რომელიც წარმოადგენს მატერიალური წერტილის მოძრაობის სიჩქარეს, ინტეგრალი რომელიც წარმოადგენს ძალის მუშაობის მოდელს და ა.შ. მათემატიკური სტრუქტურის შესწავლის მიზანი წმინდა და გამოყენებით მათემატიკაში სხვადასხვაა: პირველ შემთხვევაში ჩვენ გვაინტერესებს თვითონ სტრუქტურის თვისებები, მეორე შემთხვევაში კი-ის დასკვნები, რომლებიც შეიძლება გაკეთდეს მათი შესწავლის შედეგად იმ რეალურ ობიექტებზე, რომელთა მოდელსაც ისინი წარმოადგენენ. სუფთა და გამოყენებითი მათემატიკები წარმოადგენენ ერთიანი განუყოფელი მთლიანი მათემატიკის ნაწილებს და ამ ნაწილების ერთმანეთისგან მკვეთრად გამიჯვნა შეუძლებელია. სუფთა და გამოყენებითი მათემატიკები-ერთი და იგივე მეცნიერების სხვადასხვა ნაწილებია, სხვადასხვა თავიანთი შემადგენლობით, თავიანთი მნიშვნელობით, თავიანთი როლით თანამედროვე საზოგადოების ცხოვრებაში.

სუფთა მათემატიკა პასუხობს მათემატიკურ კითხვებს, მასში წყდება შიგა, მათემატიკური პრობლემები, ხოლო გამოყენებით მათემატიკაში მოცემულია იმ ამოცანების ამოხსნის მეთოდები, რომელიც არამათემატიკურია.

მეთოდისტთა აზრით მათემატიკის სწავლება უნდა იყოს შესაძლებლობის მიხედვით მარტივი, გასაგები, ჩვეულებრივი და დამყარებული უნდა იყოს ზომიერ სიმკაცრეზე.

რადგანაც ეს თეზისი ყველამ შეიძლება მიიღოს თავისებურად და ჩადოს ის აზრი, რაც თვითონ უნდა ამიტომ ავხსნათ ზოგიერთი დეტალი. გადმოცემის სიმარტივე ნიშნავს კურსის აგების სიმარტივეს, რომლის დროსაც აქცენტი გადატანილია ძირითადზე, ძირითად პრინციპულ იდეებზე, და დროის დიდი ნაწილი ეთმობა ძირითად მეთოდებს და ფაქტებს. პედაგოგმა უნდა გაითვალისწინოს, რომ ყველაზე მთავარია, რომ სტუდენტმა გაიგოს იმ კვლევების იდეა და მეთოდები, რომელიც გამოიყენება შესასწავლი ამოცანის ამოხსნისას.[69],[70],[87].

თითქმის ყველა მათემატიკოსმა კარგად იცის, რომ მათემატიკური კურსის გადმოცემა მხოლოდ განსაზღვრების, ლემისა და თეორემების ლოგიკურად აწყობილი ჯაჭვით, მაგალითების განხილვის გარეშე არაა მართებული. მათემატიკის შესწავლისას უნდა შევისწავლოთ საბოლოო შედეგის ინტუიციურად განჭვრეტის უნარი და უნდა შეგვეძლოს ევრისტიკული განსჯა და მათემატიკური ინტუიციის განვითარება. ამიტომ მნიშვნელოვანია მათემატიკური ინტუიციის განვითარება მიღებული მათემატიკური ცოდნის საფუძველზე. ნაყოფიერი და სწორი ინტუიცია გამომუშავდება არა ცარიელ ადგილას, არამედ მტკიცე ცოდნის საფუძველზე, მათემატიკაში ცოდნა დაფუძნებულია მსჯელობაზე. არსებობს ისეთი შემთხვევებიც, როდესაც არ არის საჭირო მსჯელობები და მაშინვე გამოიყენება „მკაცრი“ მათემატიკური მეთოდები, ასეთ სიტუაციას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც განხილული ამოცანისათვის არსებობს განსაზღვრული მკაფიოდ დამუშავებული ალგორითმი და ცნობილია, რომ ზუსტად ეს ალგორითმი უნდა გამოვიყენოთ მოცემულ შემთხვევაში. ეს არანაირად არ ეწინააღმდეგება ლოგიკური დამტკიცებების აუცილებლობას. ლოგიკური დამტკიცება ეხმარება სტუდენტს საჭირო მათემატიკური ჩვევების გამომუშავებაში, ასევე ეხმარება დაეუფლოს მათემატიკურ მეთოდებს, გამოიყენოს მათთვის საჭირო მათემატიკური კულტურა, რომლის შემადგენელ ნაწილს შეადგენს ლოგიკური აზროვნება.[7],[88].

დამტკიცების მეორე დადებითი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ მისი საშუალებით შესაძლებლობა გვაქვს ავხსნათ შემოტანილი მათემატიკური ცნებების აზრი, დავეუფლოთ მათ და გამოვიყენოთ ისინი პრაქტიკაში. ჯერ კიდევ არისტოტელე

აფასებდა დამტკიცებას, არა მხოლოდ იმიტომ, რომ ისინი ამყარებენ წესრიგს ამა თუ იმ მდგომარეობაში, არამედ იმისათვის რომ ისინი ხსნიან ლოგიკურ კავშირებს მათ შორის.

მაგალითად: იმის დამტკიცება, რომ ექსტრემუმის შიგა წერტილში წარმოებული თუ იგი არსებობს 0-ის ტოლია, საშუალებას იძლევა გავარკვიოთ მისი არსი, უკეთ გავეცნოთოთ მას და ა.შ. დამტკიცება გვეხმარება უკეთ ავითვისოთ მათემატიკური კურსის ლოგიკური სტრუქტურა დავამყაროთ კავშირები მის ცალკეულ ნაწილებს შორის. არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ლოგიკური მსჯელობა წარმოადგენს ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნის განუყოფელ ნაწილს, მათ შორის მზა ალგორითმების გამოყენების დროსაც.

მათემატიკური დებულების დამტკიცება რაიმეზე დაყრდნობის საშუალებით, წარმოადგენს საწყის მონაცემებსა და განხილულ მტკიცებას შორის კავშირის ლოგიკურ ანალიზს. ეს აზრი ხაზგასმულია ჟ.დენონის მიერ დაწერილი „წრფივი ალგებრა და ანალიზური გეომეტრიის“ წინასიტყვაობაში. „გონებისათვის დიდი აღმზრდელობითი მნიშვნელობა ენიჭება საშუალებების დაზოგვის ძიებასა და ჰიპოთეზების შეწყობას დასკვნების მიმართ.“ თავისთავად, როდესაც ვირჩევთ „მკაცრ დამტკიცებას“ უნდა ჩავჯდეთ გონიერ საზღვრებში, არ უნდა ვიცადოთ, რომ ყველაფერი დავუკავშიროთ აქსიომებს. უნდა გვახსოვდეს, რომ სიმკაცრის ცნება შედარებითია და ისტორიული. სიმკაცრის დონე უნდა შეესაბამებოდეს შემსწავლელ დონეს. იგი განისაზღვრება სტუდენტის მომზადების დონით, მათი სწავლის მიზნებითა და პრაქტიკაში გამოყენებით.[90],[92],[93].

მათემატიკური კურსის აგებისას არ უნდა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ მისი შიგა ლოგიკური აგებულებით, რომლის საშუალებითაც ვღებულობთ განსაზღვრებების, ლემებისა და თეორემების ფორმალურ ლოგიკურ თანმიმდევრობასა და მათ დამტკიცებებს. როდესაც ვისწრაფვით თხრობის სიმარტივისაკენ, მხედველობის არედან არ უნდა გამოგვრჩეს თხრობის სიცხადე.

დიდი ყურადღება უნდა დაეთმოს ცნებების ახსნას, ილუსტრაციული მაგალითების მოყვანას, შესწავლილი მეთოდების კერძო მაგალითებში გამოყენებას და ყოველგვარ „ლირიულ გადახვევებს“. ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ როდესაც ვასწავლით მათემატიკას იმ სტუდენტებს, რომლებმაც თავიანთი ბუნებრივი სწრაფვის გამო მომავალ სპეციალობად მათემატიკა არ აირჩის, განსაკუთრებით ყურადღებით უნდა შევურჩიოთ

მხოლოდ ის მასალა, რომელიც მათთვისაა სასარგებლო, რომელიც მათთვის ხელმისაწვდომია და რომელიც მათ შეუძლიათ აითვისონ დროის მცირე მონაკვეთში და ბოლოს, ის რომელიც მათში ჩამოაყალიბებს საჭირო მათემატიკურ კულტურას.

არსებობს აზრი, რომ მათემატიკის მომხმარებლისთვის არ არის აუცილებელი იცნობდეს მკაცრ განსაზღვრულ მათემატიკურ ცნებებს და შემოიფარგლონ მხოლოდ ინტუიციურ დონეზე. იმ შემთხვევაში როდესაც მათემატიკური ენა გამოიყენება მხოლოდ მოვლენის ასაღწერად, მათემატიკურ ცნებებზე შეგვიძლია არაფერი ვთქვათ, ამას დიდი მნიშვნელობა არა აქვს და არ ახდენს გავლენას შემდგომ პროცესებზე.

იქ სადაც მათემატიკა გამოიყენება, როგორც კვლევის მეთოდი ინტუიციური წარმოდგენა ძირითად ცნებებზე არასაკმარისია. უფრო მეტიც: მათემატიკური ცნებების გამოყენება, ისე რომ მისი აზრი გაუგებარი იყოს, ანუ მათი გამოყენება ინტუიციურ დონეზე იწვევს შეცდომების დაშვებას. ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ როდესაც მათემატიკა გამოიყენება როგორც კვლევის ინსტრუმენტი, კვლევის წარმატებით ჩატარებისთვის აუცილებელია მკაფიო წარმოდგენა გვქონდეს ამ დროს გამოყენებულ მათემატიკურ ცნებებზე. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ არ აქვს მნიშვნელობა „გამოყენების ადგილს“-ანუ ერთნაირად გამოიყენება უნივერსიტეტში და უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებელში. მაგალითად, ცნობილია, რომ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებელში გაცილებით მარტივად განიხილავენ ლაგრანჟის ფორმულას, რადგანაც გამოიყენებენ შესაბამის ნახაზებს, უნივერსიტეტში კი გამოთვლებს ატარებენ სუფთა ანალიზური გზით. ასეთი წინააღმდეგობრიობა არასწორია. ის ვინც შეისწავლის ლაგრანჟის ფორმულას, კარგად უნდა იცოდეს როგორც მისი ანალიზური გამოსახვა, არამედ გეომეტრიული ინტერპრეტაციაც. იმისათვის რომ გამოვიყენოთ მათემატიკა, როგორც გამოკვლევის მეთოდი, აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ და კარგად ავითვისოთ მისი ძირითადი იდეებისა და ცნებების არსი და ურთიერთ-დამოკიდებულება.[13],[15].

მათემატიკური მეთოდების თავისუფლად დაუფლება, ცოდნა და ინტუიცია გამომუშავდება, დაგროვდება და განვითარდება ხანგრძლივი და თავდაუზოგავი შრომის შედეგად ის ვინც ეუფლება მათემატიკას, იღებს მათემატიკური ფაქტების მყარ და ზუსტ ცოდნას, წარმატებულად თავდაჯერებულად მიიწევს წინ და მათემატიკა მის ხელში

ხდება კარგი ინსტრუმენტი. ამა თუ იმ მეთოდების სიმრავლე განპირობებულია იმით, რომ თავის დროზე ეს მეთოდები, კარგად არ იქნა ახსნილი და გაგებული, ამიტომ გახდა გაუგებარი. მათემატიკური ცნების მკაფიო და ზუსტად შესწავლა საშუალებას იძლევა სწორად იქნას გამოყენებული და არ საჭიროებს დამატებით ახსნას. სწორი მათემატიკური ინტუიციის განვითარება სტუდენტებში ხდება მტკიცე და მყარი მათემატიკური მეთოდების ცოდნის გზაზე, ამიტომ თუ სტუდენტს შევასწავლით უაზრო და არასწორ საკითხებს ინტუიციურ დონეზე, ეს მათში იწვევს არასწორ ინტუიციის გამომუშავებას რასაც ზიანი მოაქვს.[6].

სტუდენტი, რომელიც მათემატიკას სწავლობს, აუცილებლად უნდა ფლობდეს ანალიზური გარდაქმნების ძირითად ელემენტებს, გამოიმუშაოს კონკრეტულად დასმული საკითხის გადაწყვეტისადმი განსაზღვრული ალღო, უნდა გამოამჟღავნოს გამომგონებლობა, აბსტრაქტული აზროვნების მაღალი დონე.

ზოგიერთი მკვლევარი თვლის, რომ ანალიზური გარდაქმნების შესწავლის შეცვლა შესაძლებელია შესაბამისი ცნობარების სარგებლობით და მეტად მიზანშეწონილია, ეს უკანასკნელი არ წარმოადგენს ჩვენი შესწავლის საგანს, თუმცა სწავლის პროცესში მეტად სასარგებლოა სტუდენტს აჩვენო, თუ როგორ შეიძლება ისარგებლო საცნობარი ლიტერატურით. ამასთან არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ყოველგვარი ცნობარის გამოყენება მოითხოვს ცოდნის განსაზღვრულ დონეს: სტუდენტმა უნდა იცოდეს რას ეძებს, რა შეიძლება იპოვოს და სად იპოვოს.[89]

სტუდენტისთვის დამოუკიდებლობის, მოხერხებულობის მიზანმიმართული განვითარება და შემოქმედებითი დამოკიდებულების ჩამოყალიბება წარმოადგენს სწავლების მთლიანი პროცესის მეტად მნიშვნელოვან ნაწილს უმაღლეს სკოლაში. უმაღლეს მათემატიკაში ყველაფერი ამის მისაღწევად და ერთდროულად მიღებული ცოდნის ეფექტური განმტკიცებისათვის ძალიან სასარგებლოა ისეთი ამოცანები, რომლის ამოხსნაც ითხოვს მათემატიკის სხვადასხვა განყოფილებების მეთოდების კომბინაციას, ამოცანებს რომლის ამოსახსნელად სტუდენტმა დამოუკიდებლად უნდა შეარჩიოს შემოთავაზებული მეთოდებიდან ერთ-ერთი. მეტად სასარგებლოა ასევე ამოცანები არადეტერმინირებული პასუხებით, რომელსაც სტუდენტი თვითონ უნდა მიხვდეს და დაამტკიცოს თავისი არჩევანის სისწორე. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა წარმოადგენს

სტუდენტის დამოუკიდებელ კვლევით სამეცნიერო სამუშაოს და მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მათი უშუალო ჩართვა ლექციის სასწავლო პროცესში გარკვეული დოზით რაც დამოუკიდებლად უნდა განსაზღვროს საგნის პედაგოგმა, ეს უკანასკნელი კი დამოკიდებულია ლექტორის გამოცდილებაზე, ერუდიციაზე, კვალიფიკაციაზე და პედაგოგიურ ოსტატობაზე.[2],[3].

სტუდენტისთვის შეთავაზებული ამოცანები უნდა იყოს მისთვის საინტერესო და გააჩნდეს პრაქტიკული გამოყენება. მათემატიკის დაუფლების ყველაზე საიმედო მეთოდია სტუდენტის აქტიური ჩართვა კვლევით-სამეცნიერო სამუშაოში. ამით შეიძლება მაღალი კურსის ბაკალავრიატის და განსაკუთრებით მაგისტრატურის სტუდენტების მიზიდვა კვლევით-სამეცნიერო სამუშაოზე, რომელიც სრულდება ამა თუ იმ დეპარტამენტში. რაც შემდგომში გახდება რეკომენდაციის საფუძველი სტუდენტის მაგისტრატურასა თუ დოქტორანტურაში სწავლის გასაგრძელებლად. ახალი ამოცანის გადაჭრის პროცესში გამოყენებილი მათემატიკური ცოდნა მაშინვე პოულობს გამოყენებას. ამოცანის მიმართ ინტერესი სტუდენტს უნერგავს რწმენას საკუთარი ძალების მიმართ და აძლევს კმაყოფილებისა და სიხარულის შეგრძნებას, რომელიც გამოწვეულია დამოუკიდებელი შემოქმედებით.[1],[4].

ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ-ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ის გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ არ არსებობს ისეთი უნივერსალური მათემატიკური მეთოდი და ხერხი, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა[91].

კვლევის ობიექტი. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს:

- უმაღლესი სკოლის სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტების სტუდენტთათვის უმაღლესი მათემატიკის კურსში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ძიების სწავლების პროცესი და ამოხსნა;
- უმაღლესი სკოლის სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტების სტუდენტთათვის უმაღლესი მათემატიკის კურსში მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ამოცანების აამოხსნა.

კვლევის საგანი. კვლევის საგანს შეადგენს:

• უმაღლესი სკოლის სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტების მათემატიკური ანალიზის კურსში მწკრივთა თეორიის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებების დადგენა და მათი პრაქტიკული გამოყენება;

• უმაღლესი სკოლის სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტების მათემატიკური ანალიზის კურსში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების მიზანმიმართული სწავლება უმაღლეს სკოლაში.

კვლევის მიზანი. დამუშავდეს უმაღლესი სკოლის სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტების მათემატიკური ანალიზის კურსში რიცხვითი და ფუნქციონალური მწკრივების სწავლების ეფექტური მეთოდიკა, რომელსაც ექნება პრაქტიკული გამოყენება და უზრუნველყოფს სტუდენტთა აბსტრაქტული აზროვნების საფუძვლების განვითარებას თეორიების დონეზე.

დასმულმა მიზნებმა და ჰიპოთეზამ განსაზღვრა კვლევის შემდეგი ამოცანები:

1. უმაღლეს სკოლაში სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტთათვის მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების რეალიზება და მეთოდური დამუშავება. მწკრივთა თეორიის ამოცანების არასტანდარტული ხერხებით ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის შემუშავება და მათზე დაყრდნობით მეთოდიკური რეკომენდაციების მიცემა.

2. უმაღლეს სკოლაში ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების პრაქტიკული რეალობების რაოდენობრივი და მეთოდური ანალიზი.

3. შემუშავებული მეთოდიკით სწავლების ეფექტურობის შემოწმება პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებით და მიღებული შედეგების სტატისტიკური შეფასება.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს იმაში რომ:

• სტუდენტთა ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური კანონზომიერებების საფუძველზე დადასტურებულია უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების ჩართვის აუცილებლობა სასწავლო პროცესში, როგორც სტუდენტთა გონებრივი და ინტელექტუალური ფორმირების საშუალება, ისე, რომ ამისათვის დამატებითი სასწავლო დროის გამოყოფა საჭირო არ არის;

• შემუშავებულია უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების კლასიფიკაციის კრიტერიუმები ამოხსნის ხერხების მიხედვით და განსაზღვრულია მათი როლი და ადგილი მათემატიკური ანალიზის კურსში;

• დადგენილია უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი სავარჯიშოების მეთოდური თავისებურებები და შემუშავებულია მათი სწავლების მეთოდიკა, როგორც უმაღლესი მათემატიკის სწავლების სპეციალური მეთოდიკა;

• ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტის საშუალებით დადასტურებულია შემუშავებული უმაღლესი მათემატიკის სწავლების სპეციალური მეთოდიკის უპირატესობა ტრადიციულ სწავლებასთან შედარებით.

ნაშრომის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა. კვლევის თეორიული და პრაქტიკული ღირებულებაა კვლევის შედეგების გამოყენება უმაღლესი სკოლის სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის პრაქტიკაში, რომელიც ხელს შეუწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას.

ნაშრომის თეორიული ღირებულებაა უმაღლეს სკოლაში სპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტთა სასწავლო პროცესი მათემატიკურ ანალიზში წარიმართოს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკით მიზანმიმართულად, ხოლო პრაქტიკული ღირებულებაა მეცნიერული კვლევის შედეგების სანდოობა-მიღებული თეორიული დასკვნებისა და პრაქტიკული რეკომენდაციების სანდოობა დადასტურებულია პედაგოგიური ექსპერიმენთით და განმტკიცებულია ხანგრძლივი პედაგოგიური პრაქტიკით.

კვლევის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენს ფილოსოფიურ-ფსიქოლოგიური დებულებები პიროვნების ინტელექტუალურ შესაძლებლობათა გახსნისა და განვითარების შესახებ.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი სავარჯიშოების ჩართვა სასწავლო პროცესში, როგორც სტუდენტთა გონებრივი და ინტელექტუალური ფორმირების საშუალება;

• უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების კლასიფიკაცია ამოხსნის ხერხების მიხედვით და მათი ადგილი მათემატიკური ანალიზის კურსში;

• უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი სავარჯიშოების მეთოდური თავისებურებების გამოკვლევა;

• უმაღლესი მათემატიკის სწავლების შემუშავებული სპეციალური მეთოდიკის ექსპერიმენტული გამოკვლევა.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სემინარს. დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგი მოხსენდა სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის განათლების ფაკულტეტის სამეცნიერო სემინარს. დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტის გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი სამეცნიერო შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. მაკა ლომთაძე-ზოგიერთი სახის მწკრივის ჯამის გამოთვლა. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი. 2012 წელი. №1 (42). .გვ. 152-154. თანაავტორი გ.ონიანი.
2. მაკა ლომთაძე-დიფერენციალური განტოლებების გამოყენება მწკრივის ჯამის გამოთვლისას. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი. 2012 წელი. №1 (42). გვ. 144-148.თანაავტორი ზ.ბაკურაძე.
3. მაკა ლომთაძე-მწკრივთა კრებადობის ზოგიერთი (მარტივი) კრიტერიუმის შესახებ და მათი გამოყენება მწკრივთა ჯამის გამოთვლაში.საქართველოს მეცნიერებისა

და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი. 2011 წელი. №2 (40). გვ. 98-101.თანაავტორი გ.ონიანი.

4. მაკა ლომთაძე-სიმრავლის მეტრიკულ სივრცეში ბმულობისა და კომპაქტურობის შესახებ და ზოგიერთი შენიშვნა ლებეგის ბრტყელი ზომის ცნებასთან დაკავშირებით. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი. 2011 წელი. №1 (38). გვ. 329-337.თანაავტორები: გ.ონიანი, შ.ლომთაძე.

5. მაკა ლომთაძე-უმაღლეს სკოლაში ნამდვილი რიცხვის უსასრულო ათწილადის სახით წარმოდგენის სწავლების ერთი ხერხის შესახებ. საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი.-2011. №1 (38). გვ. 292-297. თანაავტორი შ.ლომთაძე.

6. მაკა ლომთაძე-ზოგიერთი სახის რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლა ინტეგრალის დახმარებით. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის III საერთაშორისო სამეცნიერო-მეთოდური კონფერენცია. ქუთაისი-2012. გვ. 202-213. თანაავტორი გ.ონიანი.

7. მაკა ლომთაძე-ხარისხოვანი მწკრივების გამოყენება ზოგიერთი სახის ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჯამის გამოთვლაში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის III საერთაშორისო სამეცნიერო-მეთოდური კონფერენცია. ქუთაისი-2012. გვ. 214-217. თანაავტორი გ.თეთვაძე.

8. მაკა ლომთაძე-რიცხვითი მწკრივის გამოთვლა, აბელის II თეორემისა და ხარისხოვანი მწკრივის წევრ-წევრა დიფერენცირებისა და ინტეგრების გამოყენებით. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის III საერთაშორისო სამეცნიერო-მეთოდური კონფერენცია. ქუთაისი-2012. გვ. 218-223. თანაავტორი ლ. ციბაძე.

9. მაკა ლომთაძე-ფურის მწკრივის გამოყენების შესახებ რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლაში. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის Ш საერთაშორისო კონფერენცია. ბათუმი 2-9 სექტემბერი. გვ. 181.თანაავტორი ლ.ციბაძე.

10. მაკა ლომთაძე-რიცხვით მწკრივთა გამრავლებისა და გაყოფის სწავლება. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის Ш საერთაშორისო კონფერენცია. ბათუმი 2-9 სექტემბერი. გვ. 183. .თანაავტორი ლ.ციბაძე.

11. მაკა ლომთაძე-ზოგიერთი სახის მწკრივის ჯამის საქართველოს მეცნიერებისა და საზოგადოების განვითარების ფონდის პერიოდული საერთაშორისო სამეცნიერო ჟურნალი ინტელექტი". თბილისი. 2012 წელი. №3 (44). გვ. 79-82.

12. მაკა ლომთაძე-რიცხვითი მწკრივის ჯამის მიახლოებითი გამოთვლასტირლინგის მეთოდით. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ხანმთა“. ქუთაისი-თბილისი. 2013 წელი. №7 (12). გვ. 270-274.

I თავი

რიცხვთა მწკრივის სწავლება უმაღლესი მათემატიკის კურსში

§1. რიცხვითი მწკრივი და მისი ჯამის

სწავლების მეთოდიკა

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\left(U_n\right)_{n\geq1}$. თუ ამ მიმდევრობის ყველა წევრს შევაერთებთ + ნიშნით, მივიღებთ სიმბოლურ გამოსახულებას

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots \quad (1)$$

რომელსაც რიცხვითი მწკრივი ეწოდება. (1) მწკრივის ჯამის განმარტებას ასეთი გზით მივუდგეთ: განვიხილოთ (1) მწკრივის რამდენიმე წევრის ჯამი და წევრთა რიცხვის ზრდისას შევისწავლოთ ასე მიღებული ჯამების ყოფაქცევა. თუ ეს ჯამები შესაკრებთა უსაზღვროდ ზრდისას გარკვეული რიცხვისკენ მიისწრაფვის, მაშინ ამ რიცხვს (1) მწკრივის ჯამი ეწოდება, ხოლო, როცა აღნიშნული ტიპის ჯამებს ზღვარი არ აღმოაჩნდება, მაშინ ამბობენ, რომ (1) მწკრივი განშლადია.

განვიხილოთ (1) მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი: $S_n=\sum_{K=1}^{n}U_K$, მას ვუწოდოთ (1) მწკრივის კერძო ჯამი. თუ n-ს მივცემთ ყველა ნატურალურ მნიშვნელობას, მივიღებთ კერძო ჯამების $\left(S_n\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობას, რომელიც შეესაბამება (1) მწკრივს. შემოვიღოთ

<u>განმარტება 1</u>. ვიტყვით, რომ (1) მწკრივი კრებადია და S არის მისი ჯამი, თუ კრებადია კერძო ჯამების $\left(S_n\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობა და $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. ამ შემთხვევაში ვწერთ: $\sum_{n=1}^{\infty}U_n=S$

იმ შემთხვევაში, როცა $\left(S_n\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობა განშლადია (1) მწკრივს განშლადი ეწოდება და მისი ჯამი არ განიმარტება. განშლადი მწკრივის შემთხვევაში მისი პირველი n წევრის ჯამი Sn მიისწრაფვის უსასრულობისკენ ან Sn არ მიისწრაფვის არავითარი გარკვეული ზღვრისკენ. პირველ შემთხვევაში მწკრივს ეწოდება საკუთრივ განშლადი, ხოლო მეორე შემთხვევაში რხევადი.

მაშასადამე, (1) მწკრივის კრებადობა-განშლადობა ეკვივალენტურია მისი კერძო ჯამების $\left(S_n\right)_{n\geq1}$ მიმდევრობის კრებადობა-განშლადობის.[40].

$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{m+n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_{m+n}$ მწკრივს, რომელიც მიიღება (1) მწრივიდან m წევრის ჩამო-

ცილებით ეწოდება (1) მწკრივის m რიგის ნაშთი. თუ კრებადი მწკრივის ნაშთის ჯამს აღვნიშნავთ R_m -ით,მაშინ $S_m + R_m = S$.

სამართლიანი შემდეგი თეორემები:

1) თუ მწკრივში რამდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დაუმატებთ) რამოდენიმე წევრს, ამით მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა არ დაირღვევა.

2) თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი m რიგის ნაშთის ზღვარი, სადაც $m \to \infty$ ნულის ტოლია, ანუ $\lim_{n\to\infty} R_m = 0$

3) თუ (1) მწკრივი კრებადია S რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი λ რიცხვისთვის (λu_n) მწკრივი კრებადია λS რიცხვისაკენ.

4) განშლადი მწკრივის გამრავლებით $\lambda \neq 0$ რიცხვზე, კვლავ განშლადი მწკრივი მიიღება.[24],[27].

რიცხვით მწკრივის თეორიის ერთ-ერთი უმთავრესი ამოცანაა, მათი ჯამების გამოთვლის მეთოდების შემუშავება. მწკრივის ჯამის ზუსტი გამოთვლა, თუ ის შესაძლებელია, თითქმის ყოველთვის დაკავშირებულია უზარმაზარ გამოთვლებთან. ამიტომ უფრო ხშირად შემოიფარგლებიან მწკრივის ჯამის მიახლოებითი გამოთვლით.

ვთვლით, რომ $S \approx S_m$ ამ დროს მიღებული ცდომილებაა $\sum_{n=1}^{\infty} U_{m+n}$ მწკრივის ჯამი.

მწკრივის ჯამის გამოთვლის დაწყებამდე უნდა გამოვარკვიოთ მოცემული მწკრივი კრებადია თუ განშლადი, ვინაიდან განშლად მწკრივს ჯამი არა აქვს. ამ დროს განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს მწკრივის კრებადობის გამოკვლევის ამოცანები.

მაგალითი 1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მწკრივი: $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\ldots$

დავწეროთ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულა მარტივი ფორმით.

აქ ნათლად ჩანს, რომ მოცემული მწკრივის წევრების მრიცხველები არის ნატურალური რიცხვის კვადრატები, მნიშვნელები კი ნატურალური რიცხვთა მიმდევრობა დაწყებული 2-დან, ამიტომ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულას ექნება სახე: $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითში ითხოვდნენ მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულის დაწერას თანაც უმარტივებს. ეს არაა შემთხვევით, რადგან მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულის დაწერა მისი რამოდენიმე საწყისი წევრით შეუძლებელია.

მაგალითად თუ გვაქვს მოცემული მწკრივის პირველი სამი წევრი 1+2+4+... აქ არ არის რთული შესამჩევი, რომ ეს არის 2-ის ნული, ერთი და ორი ხარისხები. ამიტომ მწკრივის ზოგადი წევრის უმარტივესი ფორმულა იქნება $u_n = 2^{n-1}$. თუმცა შეიძლება შევადგინოთ, კიდევ რამდენიმე სხვადასხა ფორმულა, რომლების n=1,2,3-ის დროს იძლევიან შესაბამისად მოცემული მწკრვისი პირველი წევრების (1,2 და 4-ს). როგორც მაგალითად

$$a_n = \frac{n^2-n+2}{2}; \quad b_n = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{5-n}, n \neq 5 \\ 1, n=5 \end{cases} \quad c_n = \frac{8}{n^2-7n+14}$$

აქ მწკრივები, რომლის ზოგადი წევრის ფორმულებია a_n და b_n განშლადია (მათთვის არ სრულდება კრებადობის აუცილებელი პირობა) c_n კი კრებადია (ამაში შეიძლება დარწმუნდეთ შედარების II ნიშნის დახმარებით თუ შევადარებთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ მწკრივს.)[56].

მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა: (u_n) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ მისი ზოგადი u_n წევრი მიისრაფოდეს ნულისკენ, როცა $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, მაშინ მწკრივი განშლადია. თუ კი $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, მაშინ ვერ ვიტყვით, რომ მწკრივი კრებადია საჭიროა მწკრივის გამოკვლევა. ჩვენ შეგვიძლია მოვიყვანოთ ისეთი მწკრივის მაგალითი რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობას, მაგრამ მწკრივი განშლადია ეს არის ე.წ. ჰარმონიული მწკრივი: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, აქ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, მაგრამ მწკრივი განშლადია ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ $S_n \to \infty$, როცა $n \to \infty$.

მაგალითი 2:ვაჩვენოთ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$ მწკრივი აკმაყოფილებს კრებადობის აუცილებელ პირობას, მაგრამ არის განშლადი.

ჩავწეროთ მწკრივი გაშლილი სახით: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

კრებადობის აუცილებელი პირობა სრულდება ვინაიდან $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

მოცემული მწკრივის განშლადობის დამტკიცებისთვის შევაფასოთ მისი n-ური კერძო ჯამი:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

ასე, რომ $S_n \geq \sqrt{n}$; ცხადია, რომ როდესაც $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$. და მაშასადამე $S \to \infty$. მწკრივი განშლადია.[42].

ზოგიერთი მწკრივის კრებადობის დასამტკიცებლად შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი მარტივი **წინადადება**: თუ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ზოგადი წევრი წარმოდგება ტოლობით:

$x_n = a_n - a_{n+1}$ $(x_n = a_{n+1} - a_n,)$ მაშინ მისი კერძო ჯამი $S_n = a_1 - a_{n+1}$ $(S_n = a_{n+1} - a_1)$ საიდანაც გვექნება: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ $(S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1)$

დამტკიცება: მართლაც, ამ მწკრივის პირველი n წევრის ჯამი

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება II შემთხვევაშიც:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

ამ წინადადების საშუალებით საკმაოდ მარტივად შეგვიძლია ზოგიერთი მწკრივის ჯამის გამოთვლა და კრებადობის დადგენა.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი:

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ მწკრივის ჯამი: $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{\mathrm{n}+3}-\sqrt{\mathrm{n}}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}+2}-\sqrt{\mathrm{n}+1}}\right]$

ამ მაგალითის ამოსახსნის დროს სტუდენტებს ამოვაწერინებთ ამ მწკრივის ზოგად წევრს და მოვახდენთ მწკრივის ამ ზოგადი წევრის გამარტივებას

$$x_n = \frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} - \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} =$$
$$= \frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{n+3-n} - \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{n+2-n-1} = \sqrt{n+3} + \sqrt{n} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

გამარტივების შედეგად და განხილული წინადადების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}=a_{n+1}-a_n \qquad S'_n=a_{n+1}-a_1=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\mathrm{n}}-\sqrt{\mathrm{n}+1}=\mathrm{b}_{\mathrm{n}}-\mathrm{b}_{\mathrm{n}+1} \qquad \mathrm{S}''_{\mathrm{n}}=\mathrm{b}_1-\mathrm{b}_{\mathrm{n}+1}=1-\sqrt{\mathrm{n}+1}$$

საიდანაც გვექნება:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+3}-\sqrt{3})+(1-\sqrt{n+1})]=1-\sqrt{3}+\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})=$$

$$=1-\sqrt{3}+\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{3}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{3}$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ მწკრივის ჯამი: $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$

ლექტორი: მაგალითის ამოხსნის პირველ ეტაპზე როგორ უნდა მოვიქცეთ?

სტუდენტი: ამოვწეროთ მწკრივის ზოგადი წევრი და მოვახდინოთ მისი გარდაქმნა:

$$x_n=\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}=\ln\frac{(n+2)(n+3)}{(n+4)(n+1)}=(\ln(n+2)-\ln(n+1))+(\ln(n+3)-\ln(n+4))$$

ლექტორი: ამის შემდეგ რას ვაკეთებთ?

სტუდენტი: მიღებული წინადადების საფუძველზე ვპოულობთ კერძო ჯამებს:

$$\ln(n+2)-\ln(n+1)=a_{n+1}-a_n\,. \qquad S'_n=a_{n+1}-a_1=\ln(n+2)-\ln 2$$

$$\ln(n+3)-\ln(n+4)=a_n-a_{n-1} \qquad \mathrm{S}''_{\mathrm{n}}=\mathrm{b}_1-\mathrm{b}_{\mathrm{n}+1}=\ln 4-\ln(\mathrm{n}+4)$$

ლექტორი: მაგალითის ამოხსნის ბოლო ეტაპი რა არის?

სტუდენტი: გამოვთვლით კერძო ჯამის ზღვარს:

$$\mathrm{S}=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{S}_{\mathrm{n}}=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\Big(\ln(\mathrm{n}+2)-\mathrm{l}_{\mathrm{n}}2+\mathrm{l}_{\mathrm{n}}4-\ln(\mathrm{n}+4)\Big)=\ln 4-\ln 2+\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\Big(\ln(\mathrm{n}+2)-$$

$$-\ln(\mathrm{n}+4)\Big)=\ln 4-\ln 2+\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\ln\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+4}=\ln 4-\ln 2.$$

იმისათვის რომ სტუდენტები კარგად გაეწაფონ ამ ხერხის გამოყენებაში უნდა შევთავაზოთ რამოდენიმე მაგალითი ამოსახსნელად. [28],[32].

ვთქვათ $\gamma=\arcsin\alpha-\arcsin\beta$. დავამტკიცოთ, რომ, როცა $|\alpha|\le 1$ და $|\beta|\le 1$, მაშინ $\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$. მართლაც

$$\sin\gamma=\sin(\arcsin\alpha-\arcsin\beta)=\sin(\arcsin\alpha)\cos(\arcsin\beta)-$$
$$-\sin(\arcsin\beta)\cdot\cos(\arcsin\alpha)=\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}.$$

აქედან $\gamma=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$, ე.ი. $\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$.

ამ ფორმულის გათვალისწინებით სტუდენტებთან განვიხილოთ

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ მწკრივის ჯამი: $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$

ლექტორი: რა არის მწკრივის ზოგადი წევრი და რა აღნიშვნა უნდა შემოვიღოთ?

სტუდენტი: $X_n=\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)};\ \alpha=\frac{1}{n};\ \beta=\frac{1}{n+1},$

ლექტორი: დამტკიცებული წინადადების თანახმად რა სხვაობას ვიხილავთ?

სტუდენტი: მაშინ

$$\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}-\frac{1}{n+1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)=$$
$$=\arcsin\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{n(n+1)}-\frac{\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$$

ლექტორი: როგორი სახით წარმოდგება მწკრივის ზოგად წევრი? **სტუდენტი**:
$X_n=\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}=a_n-a_{n+1}$

ლექტორი: რა იქნება მოცემული მწკრივის ზღვარი?

სტუდენტი: $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=\arcsin 1-\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$

კოშის კრიტერიუმი: (1) მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ყოველი დადებითი ε რიცხვისავის არსებობდეს ისეთი ნატურალური n_0 რიცხვი, რომ როდესაც $n \geq n_0$ და ნებისმიერი ნატურალური p-სათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k\right| = \left|U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}\right| < \varepsilon$$

შევთანხმდეთ, რომ ჯამს $\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k$ ვუწოდოთ (1) მწკრივის „p სიგრძის მონაკვეთი“.

მაშინ თეორემა 1 გვიჩვენებს, რომ (1) მწკრივი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა „ამ მწკრივის ნებისმიერი სიგრძის მონაკვეთი მოდულით რაგინდ მცირე ხდება, თუ მის სათავეს საკმაოდ შორს ავიღეთ“.[9],[10].

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი: 5. კოშის კრიტერიუმის დახმარებით ვაჩვენოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}$ მწკრივის კრებადობა.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი N ნატურალური რიცხვი, რომ როცა n>N სრულდება შემდგომი უტოლობა: $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$ (2)

ნებისმიერი ნატურალური p რიცხვისათვის $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| =$

$$= \left|\frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)} + \frac{n+2}{2^{n+2}(n+3)} + \ldots + \frac{n+p}{2^{n+p}(n+p+1)}\right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}(1-\frac{1}{2^p})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2^p}) < \frac{1}{2^n}$$

მაშასადამე, ნებისმიერი p-სათვის $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \frac{1}{2^n}$

და გვაქვს უტოლობა $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, საიდანაც $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ და $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. დავუშვათ:

$$N = \begin{cases} \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \text{ როცა } \varepsilon < \frac{1}{2} \\ 1, \text{როცა } \varepsilon \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (3)$$

ვასკვნით, რომ, როცა მართებულია უტოლობა n>N, მაშინ $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

ამრიგად, მართებულია (2) უტოლობა ნებისმიერი p-სათვის. საიდანაც ვასკვნით: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს N რიცხვი დამოკიდებული ε-ზე და დამოუკიდებული p-საგან, რომ როცა n>N, სრულდება (2) უტოლობა. მაშასადამე, კოშის კრიტერიუმის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 6. კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით ვაჩვენოთ მწკრივის კრებადობა $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

მოცემული მაგალითის ამოსახსნელად ლექტორმა ასეთი კითხვები უნდა დასვას:

ლექტორი: რომელი წევრების ჯამის აბსოლუტური მნიშვნელობა უნდა განვიხილოთ?

სტუდენტი: მოცემულ შემთხვევაში $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right| = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2p-1}$ (4)

ლექტორი:კოშის კრიტერიუმის თანახმად რა უნდა გამოვიკვლიოთ?

სტუდენტი: უნდა გამოვიკვლიოთ არსებობს თუ არა $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ნატურალური p რიცხვი, ისეთი რომ (4) არ იყოს ε-ზე ნაკლები.

ლექტორი: ამისათვის როგორ უნა მოვიქცეთ?

სტუდენტი: დავუშვათ $\varepsilon = \frac{1}{4}$ და p=2n, მაშინ

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right| = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-1} > \underbrace{\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}+\ldots\frac{1}{6n}}_{2n} = 2n\frac{1}{6n} = \frac{1}{3} > \varepsilon = \frac{1}{4}$$

ლექტორი: მიღებული უტოლობიდან რა დასკვნის გაკეთება შეგვიძლია?

სტუდენტი: მაშასადამე, კოშის კრიტერიუმის თანახმად მოცემული მწკრივი განშლადია.

კოშის კრიტერიუმი, მიუხედავად მისი უნივერსალობისა, ხშირ შემთხვევაში ძნელად გამოსაყენებელი ხდება. ჩვეულებრივ ძნელი დასადგენია, შესრულებულია თუ არა ამ თეორემის პირობები. ამიტომ სასარგებლოა ვიცოდეთ მწკრივის კრებადობის სხვა (ნაკლებად უნივერსალური, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით მოხერხებული) ნიშნები. ასეთი ნიშნების ერთობლიობა მწკრივთა თეორიის ძირითად მასალას შეადგენს.

§2. დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობის სწავლების მეთოდიკა

(U_n) მწკრივს, რომლის ყოველი წევრი დადებითი რიცხვია, დადებითი მწკრივი ეწოდება. დადებითწევრიანი მწკრივებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. ვთქვათ $U_n \geq U_{n+1} \geq 0\ \forall n \in N$. მწკრივი ($U_n$) კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მწკრივი

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot U_{2k-1} = U_1 + 2U_2 + 4U_4 + 8U_8 + \ldots$ (1) კრებადია.

თეორემა 2. თუ $\alpha > 1$, მაშინ მწკრივი $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ კრებადია, ხოლო თუ $\alpha \leq 1$ მწკრივი განშლადია.

დადებითი მწკრივის კრებადობის დასადგენად ხშირად სარგებლობენ ე.წ. შედარების კრიტერიუმით. მწკრივს, რომლის კრებადობის დადგენაც სურთ, მეორე მწკრივს ადარებენ, რომლის კრებადობა ან განშლადობა ცნობილია.

შედარების I ნიშანი: ვთქვათ მოცემულია ორი დადებითი U_n და V_n მწკრივი. თუ $U_n \leq V_n$, $\forall n \in N$ და (V_n) მწკრივი კრებადია, მაშინ კრებადია U_n მწკრივიც, ხოლო თუ U_n მწკრივი განშლადია, მაშინ განშლადია (V_n) მწკრივიც.

გამოსაკვლევი მწკრივების შედარება ხდება ცხრილურ მწკრივებთან:

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0$ (გეომეტრიული პროგრესია, რომელიც კრებადია, როცა $|q| < 1$ და განშლადია როცა $|q| \geq 1$.)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (განშლადი ჰარმონიული მწკრივი)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (განზოგადოებული ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც კრებადია, როცა $p>1$ და განშლადია, როცა $|p| \leq 1$)

მოყვანილი თეორემის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n}$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. ამ მწკრივის ზოგადი წევრი $\frac{n}{(n+1) \cdot 3^n}$

შევადაროთ გეომეტრიული პროგრესიისგან შემდგარ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ მწკრივის ზოგად წევრს. აქ $q=\frac{1}{3}<1.$ შევნიშნოთ, რომ $\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}<\frac{1}{3^n}$ $\forall n\in N$-თვის.

მაშასადამე, შედარების I ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია, რადგან კრებადია $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ მწკრივი.

მაგალითი 2. გამოვიკვლიოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. **ლექტორი**:მოცემული მწკრივის ზოგადი წევრი რომელი მწკრივის ზოგად წევრს შეიძლება შევადაროთ?

სტუდენტი: ჰარმონიული მწკრივის ზოგად წევრს.

ლექტორი: როგორ უტოლობას მივიღებთ?

სტუდენტი: $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ ნებისმიერი $n\geq 2$-სთვის,

ლექტორი: შედარების I ნიშნის თანახმად რა დასკვნის გამოტანა შეგვიძლია?

სტუდენტი: მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $\frac{1}{n}$, არის ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც განშლადია. ამიტომ შედარების I ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივიც განშლადია.

შედარების II ნიშანი: ვთქვათ (U_n) და (V_n) დადებითი მწკრივება, თუ (V_n) მწკრივი კრებადია და მართებულია უტოლობა $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{V_{n+1}}{V_n}$, $\forall n\in N$ (1)

მაშინ (U_n) მწკრივი კრებადია, ხოლო თუ (U_n) მწკრივი განშლადია და შესრულებულია (1) პირობა, მაშინ (V_n) მწკრივიც განშლადია.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. კრებადობის დასადგენად გამოვიყენოთ ჰარმონიული მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. მისი ზოგადი წევრ ავღნიშნოთ $b_n=\frac{1}{n}$, ხოლო მოცემული მწკრივის ზოგადი წევრი ავღნიშნოთ a_n-ით. $a_n=\frac{1}{n+\ln n}$. გამოვიყენოთ შედარების II ნიშანი. განვიხილოთ ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}}=1\neq 0$$

და რადგან ჰარმონიული მწკრივი განშლადია, ამიტომ განშლადი იქნება მოცემული მწკრივი

დალამბერის ნიშანი: ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ დადებითი მწკრივია. თუ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=e$,

მაშინ როცა e<1, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ კრებადია, როცა e>1, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ განშლადია

არსებობს, როგორც კრებადი, ასევე განშლადი მწკრივები, რომელთათვისაც $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=1.$

მაგალითი 4. დაადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. მწკრივის კრებადობა დავადგინოთ დალამბერის ნიშნის გამოყენებით.

აქ $a_n=\frac{2^n}{n!};\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

განვიხილოთ: $$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

ე.ი. მოცემული მწკრივი კრებადია.

კოშის ნიშანი: ვთქვათ მოცემულია დადებითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

დავუშვათ $\alpha=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, მაშინ

1. როცა $\alpha<1$, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ კრებადია. 2. როცა $\alpha>1$, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ განშლადია.

3. არსებობს, როგორც კრებადი, ასევე განშლადი მწკრივები, რომელთათვისაც $\alpha = 1$.

მაგალითი 5. გამოვიკვლიოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივის ზოგადი წევრ წარმოადგენს რაღაც გამოსახულებას n ხარისში, ამიტომ გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი.

$$d = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1$$

რადგან $\alpha < 1$, მოცემული მწკრივი კრებადია

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენებენ კოშის ნიშანს ზღვრული ფორმით: თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$ მაშინ როცა $\rho < 1$მწკრივი კრებადია, როცა $\rho > 1$განშლადია როცა $\rho = 1$შესაძლებელია მწკრვი იყოს როგორც კრებადი ასევე განშლადი.

აღვნიშნოთ, რომ კოში ნიშანი დალამბერის ნიშანზე უფრო ძლიერია, ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ შეიძლება არსებობდეს, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ -არა ,თუკი არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ზღვარი, მაშინ არსებობს ზღვარიც $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, თანაც ეს ორივე ზღვარი აღმოჩნდება ტოლი. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ზღვრული ნიშნებიდან რომელიმე ნიშნის (კოშის ან დალამბერის) გამოყენება არ იძლევა პასუხს მწკრივის კრებადობის შესახებ (ერთ-ერთი ზღვრებიდან $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ან $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ არის ერთის ტოლი) მაშინ სხვა ნიშნის გამოყენებას აზრი არა აქვს.

კოშის განზოგადებული ნიშანი: თუ არსებობს ზედა ზღვარი $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \rho$, მაშინ როცა ρ<1 მწკრივი კრებადია, როცა ρ >1 განშლადია (იხ.[40] ან [24]) განვიხილოთ მაგალითი: დაადგინეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2[2+(-1)^n]^n}{4^n}$ მწკრივის კრებადობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ მწკრივის კრებადობის გასარკვევად გამოდგება დალამბერის ნიშანი, გამოდგება აგრეთვე კოშის ნიშანიც.[53].

თეორემა 3. თუ $(U_n)_{n>0}$ მიმდევრობა დადებითია და არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$ (2)

სასრულია ან უსასრულო, მაშინ იარსებებს აგრეთვე $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n}$ და მართებულია ტოლობა $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=e$ (2)

ამ შენიშვნის მიხედვით შეიძლება ვთქვათ, რომ კოშის ნიშანი დალამბერის ნიშანზე უფრო ძლიერია.

მწკრივის კრებადობის კოშის და დალამბერის ნიშნები დამყარებულია მოცემული მწკრივის გეომეტრიულ პროგრესიასთან შედარებაზე. ამიტომ ეს ნიშნები წარმატებით შეიძლება გამოყენებულ იქნას მხოლოდ ისეთ მწკრივებზე, რომელთა წევრები უფრო სწრაფად კლებულობენ, ვიდრე რაიმე გეომეტრიული პროგრესიის წევრები. ასეთ მწკრივებზე ამბობენ, რომ ისინი სწრაფად კლებადია. მწკრივებისთვის, რომლებიც უფრო ნელა კრებადია, ვიდრე ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესია, კოშისა და დალამბერის კრიტერიუმებს უკვე ვერ გამოვიყენებთ. ნელა კლებად მწკრივთა რიცხვს ეკუთვნის დიდი პრაქტიკული ღირებულების უამრავი მწკრივი. მოვიყვანოთ დადებითი მწკრივის კრებადობის უფრო ძლიერი ნიშანი.

კოშის ნიშანი: ვთქვათ $f:[1;+\infty)\to \mathrm{R}$ დადებითი და კლებადი ფუნქციაა, მაშინ: 1) თუ $0\le \mathrm{U_n}\le f(\mathrm{n})\ \forall \mathrm{n}\ge \mathrm{n_0}$, სადაც n_0 რაიმე ნატურალური რიცხვია და კრებადია არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_1^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$, მაშინ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_n}$ აგრეთვე კრებადია.

2) თუ $\mathrm{U_n}\ge f(\mathrm{n})\ \forall \mathrm{n}\ge \mathrm{n_0}$ და არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_1^{+\infty} f(\mathrm{n})\mathrm{d_x}$ განშლადია, მაშინ განშლადია $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_n}$ მწკრივიც.

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის პირობაში $\int_1^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ შეიძლება შევცვალოთ $\int_a^{+\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$, სადაც a>1 ნებისმიერი რიცხვია.[20],[18].

კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით ადვილი დასადგენია, რომ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\alpha}}$ კრებადია, როცა $\alpha>1$ და განშლადია, როცა $\alpha\le 1$.

მაგალითი 6. გამოვარკვიოთ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}\ln \mathrm{n}}$ მწკრივის კრებადობა.[33].

ამოხსნა. გამოვიყენოთ კოშის ინტეგრალურ ნიშანი. აქ $f(\mathrm{n})=\frac{1}{\mathrm{n}\ln \mathrm{n},}$ მაშინ $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $2\le \mathrm{x}<\infty$ შუალედში. განვიხილოთ არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_2^{\infty} f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$. $\int_2^{\infty}\frac{d_x}{x\ln x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{b\to\infty}[\ln\ln b-\ln\ln 2]=\infty$

არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_2^{\infty} f(x)dx$ განშლადია, ამიტომ მოცემული მწკრივიც განშლადია.

შევნიშნოთ, რომ $f(n)$-ში n-ის ჩანაცვლება x-ით ყოველთვის შესაძლებელი არ არის, ასე მაგალითად თუ $f(n)=\frac{1}{n^2}$ მაშინ $f(x)=\frac{1}{x^2}$, თუ f(n)=$\frac{2^n}{n^n}$, მაშინ $f(x)=\frac{2^x}{x^x}$ და ა.შ. მაგრამ თუ განვიხილავთ $f(n)=\frac{1}{n!}$ ამ შემთხვევაში არ შეიძლება n-ის შეცვლა xით, ვინაიდან $x!$ არამთელი x-ისთვის კარგავს აზრს. მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ არ არსებობს $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ღებულობს $f(n)$-ის მნიშვნელობებს წერტილში $x=n$. პირიქით ის ყოველთვის არსებობს, მაგრამ მისი ანალოგიური გამოსახულების პოვნა ყოველთვის არ არის მარტივი.

მწკრივის განშლადობის საკმარისი ნიშანი: თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის ზოგადი წევრი აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, მაშინ მოცემული მწკრივი არის განშლადი.

მაგალითი 7. გამოვიკვლიოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{3n^2+1}{n^2}$ მწკრივის კრებადობა.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ მწკრივის განშლადობის საკმარისი ნიშანი და განვიხილოთ $\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{3n^2+1}{n^2} = \ln 3 \neq 0$, მაშასადამე მოცემული მწკრივი განშლადა.

ჩვენ ახლა ჩამოვაყალიბებთ მწკრივის კრებადობის რააბეს ნიშანს, რომელიც უფრო ძლიერია, ვიდრე კოშისა და დალამბერის ნიშნები. მწკრივის კრებადობის რააბეს ნიშანი შემდეგი თეორემით ჩამოყალიბდება:

რააბის ნიშანი: თუ (U_n) მწკრივისათვის დაწყებული რომელიმე N ნომრიდან, n>N-სთვის სრულდება უტოლობა $$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right) \geq r > 1 \qquad (3)$$

მაშინ მწკრივი კრებადია, ხოლო თუ რომელიმე N ნომრიდან n>N-თვის სრულდება უტოლობა $$n\cdot\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right) \leq 1 \qquad (4)$$

მაშინ (U_n) მწკრივი განშლადია.

რააბეს ნიშანი უმეტესად გამოიყენება ზღვრული ფორმით. თუ $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right) = r > 1$

მწკრივი კრებადია და თუ $r \leq 1$ მწკრივი განშლადია.[30],

ბერტრანსის ნიშანი: ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ დადებითი მწკრივია. თუ არსებობს ზღვარი $\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n = B$ და $\beta > 1$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი კრებადა, ხოლო თუ $B<1$, განშლადი.

გაუსის ნიშანი: ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ დადებითწევრებიანი მწკრივია და $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ წარმოდგება შემდეგი სახით $\frac{a_n}{a_{n+1}} = A + \frac{B}{n} + \frac{\theta_n}{n^p}$

სადაც p>1 $|\theta_n| \le M$ (A, B, M, P — მუდმივებია). მაშინ, როცა $A \le 1$ და $B \le 1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი განშლადია. ხოლო, თუ $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ფარდობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{B}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ანუ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{B}{n-a} + \frac{c}{(n-a)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (16)

სადაც B, c და a რომელიღაც მუდმივებია, ხოლო $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ უმაღლესი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\frac{1}{n^2}$-ს შორის. როცა $n \to \infty$.

როცა $B > 1 \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ მწკრივი კრებადია, ხოლო როცა $B \le 1$ — განშლადი.

იმ შემთხვევაში, როცა $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ფარდობა წარმოადგენს n არგუმენტის რაციონალურ ფუნქციას $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^m + c_1 n^{m-1} + \ldots + c_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + bm}$

გაუსის ნიშანი შემდეგნაირად განიმარტება: როცა $c_1 - b_1 > 1 \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ მწკრივი კრებადია, ხოლო, როცა $c_1 - b_1 \le 1$ განშლადი.[31]

ლოგარითმული ნიშანი: დადებით წევრებიანი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი კრებადია, თუ არსებობს რიცხვი q<1, ისეთი, რომ ნებისმიერი საკმაოდ დიდი n-სათვის სრულდება უტოლობა:

$$\frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)} < q$$

თუ რომელიმე ნომრიდან დაწყებული $\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{a_n}} \geq 1$, მაშინ მოცემული მწკრივი განშლადია. მწკრივთა კრებადობის ამ ნიშნის გამოყენებით ამოვხსნათ

მაგალითი 8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

შევადგინოთ დამოკიდებულება

$$\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{a_n}} = \frac{\ln n}{\ln (\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} \quad \text{საიდანაც} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln^2 x} = \infty$$

(აქ $\ln n$ შეცვალე x-ით, მიმდევრობის ზღვრის გამოთვლა დავიყვანე ფუნქციის ზღვრის გამოთვლაზე და გამოვიყენე ლოპიტალის წესი).

მაშასადამე, რომელიღაც ნომრიდან დაწყებული $\frac{\ln n}{\ln \left(\frac{1}{a_n} \right)} > 1.$

ლოგარითმული ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი განშლადია.[41].

შედარების კოშის ნიშანი: თუ დადებითწევრებიანი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის წევრები n-ის ზრდისას მონოტონურად კლებადია, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია ან განშლადია $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (ანუ $\sum_{k=1}^{\infty} m^k a_{mk}$, სადაც m — ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) მწკრივთან ერთად.[24]

§3. მწკრივთა თეორიის ზოგიერთი გამოყენება სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე

მწკრივთა კრებადობის აუცილებელი პირობის გამოყენებით სტუდენტებს შეგვიძლია დავუმტკიცოთ $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0$ ტოლობის სამართლიანობა. კერძოდ, დავადგინოთ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ მწკრივის კრებადობა რომელიმე ნიშნის გამოყენებით და თუ ეს მწკრივი კრებადი აღმოჩნდება, ვიყენებთ მწკრივის კრებადობის აუცილებელ პირობას, რომლის თანახმადაც კრებადი მწკრივის ზოგადი წევრის ზღვარი 0-ის ტოლია.

აგრეთვე ვიყენებთ პირობას, რომ თუ დადებითი და მონოტონურად კლებადი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}$ მწკრივი კრებადია, მაშინ $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$.

განვიხილავთ რამოდენიმე მაგალითს.

მაგალითი 1: დავამტკიცოთ, რომ $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0;$ თუ a>0.

ამოხსნა: აქ $f(n)=\frac{a^n}{n!}$ და $f(n+1)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

დავწეროთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ და მისი კრებადობა გამოვიკვლიოთ დალამბერის ნიშნის გამოყენებით: $e=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{a+1}=0<1.$

ამიტომ, მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია $\frac{a^n}{n!}$, კრებადია და $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}=0.$

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ ტოლობა $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n}=0$.

ლექტორი: ტოლობის სამართლიანობის დასადგენად როგორ უნდა მოვიქცეთ?

სტუდენტი: შევადგინოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}}{\left[(3n)!\right]^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

ლექტორი: ამ მწკრივის კრებადობის დასადგენად რომელი ნიშანი უნდა გამოვიყენოთ?

სტუდენტი: კოშის ნიშნის გამოყენებით დავამტკიცებთ ამ მწკრივის კრებადობას: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}$

ლექტორი: როგორ უნდა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ზღვარი ნულის ტოლია?

სტუდენტი: ამისათვის პირველ რიგში განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n)!}$

და დალამბერის ნიშნის გამოყენებით ვაჩვენოთ მწკრივის კრებადობა.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot(3n)!}{(3n+1)!\cdot n^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{(3n+1)(3n+2)}=0<1.$$

ლექტორი: და რა მივიღეთ?

სტუდენტი: $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ მწკრივის ზოგადი წევრი მიისწრაფის O-საკენ, როცა $n\to\infty$. საიდანაც $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}=0$, და $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0<1$.

ლექტორი: მაშასადამე,რა დასკვნამდე მივედით?

სტუდენტი: მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ კრებადია, საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}}{\left[(3n)!\right]^n}=0$$

რიცხვითი მწკრივები აგრეთვე შეიძლება გამოვიყენოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის დასადგენად. კოშის ინტეგრალური ნიშნის თანახმად არასაკუთრივი ინტეგრალი $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ და $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ ერთდროულად კრებადი ან განშლადი, თუ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები x=n, n=1, 2...-ზე ემთხვევა შესაბამისად $f(x)$ დადებითი რიცხვითი მწკრივის მნიშვნელობებს $x\geq a$ -სათვის.[21],[35].

ამ პირობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ასეთი

მაგალითი 3: გამოვიკვლიოთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალის $\int_0^{\infty}\sqrt{n}e^{-x}dx.$

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}=\frac{\sqrt{x}}{e^x}$ დადებითი უწყვეტი ფუნქციაა და მონოტონურად კლებადია, როცა x>0. თუ x>1 ვღებულობთ მწკრივს: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^n}$

დალამბერის ნიშნის თანახმად ეს მწკრივი კრებადია, მართლაც

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}e^n}{e^{n+1}\sqrt{n}}=\frac{1}{e}<1.$$

მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს მოცემული ინტეგრალის კრებადობა.[37]

მაგალითი 4: გამოვიკვლიოთ კრებადობა შემდეგი ინტეგრალის $\int_1^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{x^x}dx$, სადაც $\Gamma(x)=\int_0^\infty \alpha^{x-1}\cdot e^{-\alpha}d\alpha$ — გამმა ფუნქციაა.

ამოხსნა. დამტკიცება დავიწყოთ $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x}$ ფუნქციით, რომელიც მონოტონურად კლებადია, როცა $x\to+\infty$. გამოვიყენოთ $\Gamma(x)$ მიახლოებითი ფორმულა

$$\Gamma(x)\approx 2\pi x^{x-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}(x\to+\infty)$$

ავღნიშნოთ, რომ $\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}\to 1,$ როცა $x\to+\infty$.

საიდანაც ვღებულობთ, რომ x არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისათვის $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x}$ ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $\frac{\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}{x^x}=\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$, რომელიც კლებულობს, რაც $x\to+\infty$. მაშასადამე, $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x}$ ფუნქცია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის კლებადია, როცა $x\to+\infty$.

ახლა გამოვიყენოთ გამმა-ფუნქციის ცნობილი ტოლობა $\Gamma(n+1)=n!$ და დავამტკიცოთ მწკრივის კრებადობა: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

დალამბერის ნიშნის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot n!}=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1.$$

მაშასადამე, მწკრივი კრებადია და კრებადია აგრეთვე $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{n^n}$ მწკრივიც, საიდანაც გამომდინარეობს მოცემული არსაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა.[72],[75].

§4. ნიშანცვლადი მწკრივების კრებადობის

სწავლების მეთოდიკა

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი ეწოდება ისეთ მწკრივს, რომლის წევრებს რიგრიგობით დადებითი და უარყოფითი ნიშნები აქვთ.

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n;\ U_n > 0 \qquad (1)$$

სადაც U_0, U_1, U_2, ..., U_n, ... დადებითი რიცხვებია.

თუ ნიშანცვლადი მწკრივი შეიცავს უარყოფითი (დადებითი) წევრების სასრულ რაოდენობას, მაშინ გამოკვლევა კრებადობაზე დაიყვანება დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობაზე, ვინაიდან მწკრივიდან სასრული რაოდენობით წევრების ჩამოკლებით (კერძოდ ერთი ნიშნის წევრებით) მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა არ ირღვევა. ამიტომ განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს შემთხვევა, როცა ნიშანცვლადი მწკრივები შეიცავს უსასრულო რაოდენობის როგორც დადებით ასევე უარყოფით წევრებს.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \qquad (2)$$

მწკრივს აბსოლუტურად კრებადი ეწოდება, თუ კრებადია ამ მწკრივის წევრების აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots$ (3)

(2) მწკრივს ეწოდება პირობითად კრებადი, თუ მწკრივი კრებადია, მაგრამ აბსოლუტურად კრებადი არ არის. კრებადი მწკრივების გაყოფას ორ კლასად: აბსოლუტურად და პირობით კრებად მწკრივებად დიდი მნიშვნელობა აქვს, რადგანაც აბსოლუტურად კრებად მწკრივებს აქვს თვისებები, რომლებიც არ გააჩნია პირობით მწკრივებს.

ავიღოთ (U_n) მწკრივი, რომლის წევრები ზოგი დადებითია და ზოგი უარყოფითი. ცხადია, როგორც დადებითი წევრები, ისე უარყოფითი წევრები უსასრულოა. (U_n) მწკრივის დადებით წევრთაგან შედგენილი მწკრივი იყოს $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$ (P)

ხოლო უარყოფით წევრთა აბსოლუტურ სიდიდესთან შედგენილი მწკრივი იყო $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 + q_2 + ... + q_n + ...\ (q)$

მართებულია შემდეგი **თეორემა 1.** თუ (U_n) აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მისი დადებით წევრთაგან შედგენილი (P) მწკრივი და უარყოფით წევრთა აბსოლუტურ მნიშვნელობათაგან შედგენილი (q) მწკრივი კრებადია. ამასთან $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

თუ (U_n) მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ მისი დადებით წევრთაგან შედგენილი (P) მწკრივი და უარყოფით წევრთაგან შედგენილი (q) მწკრივი განშლადია.

თუ მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მისი წევრთა გადანაცვლებით მიღებული მწკრივიც აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადია.

თეორემა 2. (დირიხლე) აბსოლუტურად კრებად მწკრივში წევრთა გადანაცვლებით მწკრივის ჯამი არ იცვლება.

არავითარი ამის მსგავსი არა გვაქვს პირობით კრებადი მწკრივებისათვის. ასეთი მწკრივების წევრთა გადანაცვლებამ შეიძლება გამოიწვიოს მისი ჯამის შეცვლა (უფრო მეტიც, ასეთი გადანაცვლების შედეგად შეიძლება განშლადი მწკრივიც მივიღოთ).

1) იმისათვის, რომ ნიშანცვლადი მწკრივი იყოს აბსოლუტურად კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ კრებადი იყოს მისი მხოლოდ დადებითი და მხოლოდ უარყოფითი წევრებისაგან შედგენილი მწკრივები.

2) თუ (1) მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ მწკრივები, რომლებიც შედგენილნი არიან მხოლოდ დადებითი და მხოლოდ უარყოფითი წევრებისგან, ორივე განშლადია.

განმარტება1 . ვიტყვით, რომ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ უპირობოდ კრებადია, თუ კრებადია მისი წევრების ნებისმიერი გადანაცვლებით მიღებული მწკრივი (იმავე ჯამისაგან).

დირიხლეს თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი არის აგრეთვე უპირობოდ კრებადი.

ნიშანცვლადი მწკრივის გამოკვლევა კრებადობაზე ნიშნავს არა მარტო პასუხის გაცემას კითხვაზე კრებადია თუ განშლადი მოცემული მწკრივი, არამედ როგორაა კრებადი: აბსულუტურად თუ პირობითად.[11],[26].

მაგალითი 1: გამოვიკვლიოთ მწკრივის კრებადობა

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}+...$$

(ერთი პლიუსი, ორი მინუსი, სამი პლიუსი, ოთხი მინუსი და ა.შ $|a_n|=\frac{1}{n^2}$)

შევადგინოთ მწკრივი, რომელიც შედგება მოცემული მწკრივის წევრების მოდულებისგან. $a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. ეს არის კრებადი მწკრივი (რადგან $n-$ის ხარისხი $p=2>1$).

მაშასადამე მოცემული მწკრივიც კრებადია თანაც აბსოლუტურად.

განმარტება 2. ნიშანმონაცვლეობით $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ მწკრივს ეწოდება ლაიბნიცის მწკრივი, თუ მისი ზოგადი a_n წევრის მოდული $|a_n|$ მონოტონურად მიისწრაფვის ნულისკენ, ე.ი. $|a_n|\to 0$

თეორემა 3. ლაიბნიცის ყოველი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 2. ლაიბნიცის ნიშნის დახმაებით გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე ნიშანცვლადი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, გავარკვიოთ კრებადობის ხარისხი.

ვინაიდან $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$ (მწკრივის წევრები მონოტონურად იკლებს) და ვინაიდან $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, მაშინ ლაიბნიცის ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია. მაგრამ ის კრებადია მხოლოდ პირობითად რადგან მისი წევრების მოდულებისგან შედგენილი მწკრივი განშლადია (ჰარმონიული მწკრივი) ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივების კრებადობის გამოკვლევა უნდა დაიწყოს მათი აბსოლუტური კრებადობის გამოკვლევით, ვინაიდან ამით უფრო მალე აღწევენ მიზანს,ვიდრე ლაიბნიცის ნიშნის გამოყენებით.

აბსოლუტურ კრებადობაზე ნიშანცვლადი მწკრივების გამოკვლევისას გამოიყენებენ დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობის ყველა ნიშანს, კერძოდ (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია,თუ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|; \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)}$$

არსებობს და თითოეული ნაკლებია 1-ზე. თუკი ჩამოთვლილი ზღვრებიდან ერთი მაინც 1-ზე მეტია, მაშინ (1) მწკრივი განშლადია.

ნიშანცვლადი მწკრივებისთვის გვაქვს კრებადობის შემდეგი ნიშნები:

1) თუ კრებადია მწკრივი
$$(a_1 + a_2 + ... + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + ... + a_{k_2}) + ... + (a_{k_{m+1}} + a_{k_{m+2}} + ... + a_{k_{m+n}}) + ...$$
$$(k_1 < k_2 < ... < k_m < k_{m+1} < ...)$$
რომელიც მიიღება (1) მწკრივის წევრების დაჯგუფებით მისი წევრების რიგის შეუცვლელად, მაშინ კრებადია (1) მწკრივიც.

2) აბელის ნიშანი: გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე მწკრივი:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n b_n + ... \qquad (4)$$

თუ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივი კრებადია, ხოლო a_n მიმდევრობა მონოტონური და ზემოდან შემოსაზღვრული $(|a_n| \leq m)$, მაშინ (2) მწკრივი კრებადია.

დირიხლეს ნიშანი: გამოვიკვლიოთ კრებადობაზე (2) მწკრივი. თუ მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ კერძო ჯამების მიმდევრობა შემოსაზღვრულია რაღაც $M > 0$ რიცხვით და (a_n) მიმდევრობა მონოტონურად მიისწრაფის 0-სკენ, მაშინ (2) მწკრივი კრებადია.

მაგალითად განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, როგორც (2) სახის მწკრივი რომელშიც $a_n = \sqrt{n}$; $b_n = \frac{1}{2^n}$; აგრეთვე მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $a_n = \frac{1}{n}$ და $b_n = nc_n$ ან $a_n = \frac{1}{n}$ და $b_n = nc_n$ და ა. შ. ნამრავლი.

თუ რაიმე კრებადი მწკრივი შეიცავს უარყოფით (დადებით) წევრთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია.

ასევე თუ (a_n) მწკრივი შეიცავს დადებითი წევრების მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, მაშინ ამ მწკრივის წევრების (-1)-ზე გამრავლებთ ისეთ მწკრივს მივიღებთ, რომელიც შეიცავს უარყოფით წევრთა სასრულ სიმრავლეს და ამიტომ თუ ასეთი მწკრივი კრებადია, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია.

თეორემა 4. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის ყველა გადანაცვლება კრებადია, მაშინ ისინი კრებადი არიან ერთი და იგივე ჯამისკენ.

მაგალითი 3: ვაჩვენოთ, რომ თუ ლაიბნიცის პირობითად კრებადი მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ წევრების თანმიმდევრობას შევცვლით, ისე რომ ყოველ მის დადებით წევრს მოყვება ორი უარყოფითი წევრი, მაშინ მივიღებთ მწკრივს.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...$ მწკრივი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})-\frac{1}{12}+...=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+...=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...)=\frac{1}{2}S$$

აქედან ჩანს, რომ მოცემული მწკრივის ჯამი, მიღებული ლაიბნიცის მწკრივის წევრების მარტივად გადაადგილებით ორჯერ ნაკლებია ლაიბნიცის მწკრივის ჯამზე.

ვაჩვენოთ, რომ $S\neq 0$

$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+(\frac{1}{2_{n-1}}-\frac{1}{2_n})+...>0$ ვინაიდან ფრჩხილებში მოთავსებული ყოველი სხვაობა დადებითია.

განვიხილოთ ზოგიერთი სახის რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლის არასტანდარტული ხერხები, როცა ტრადიციული მიდგომა შედეგს არ იძლევა ან ამარტივებს ამოხსნის პროცესს, რომელთა ამოხსნა სხვა გზითაც შეიძლება მაგრამ დიდ დროს მოითხოვს.[43],[54],[58].

შევისწავლოთ მწკრივები, რომელთა წევრები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, აგრეთვე გავითვალისწინოთ, რომ იმ მწკრივის ჯამი, რომლის წევრები უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას წარმოადგენს, გამოითვლება ფორმულით $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$.[55].

I. განვიხილოთ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kn+m}$ სახის მწკრივი.

მწკრივის ზოგადი წევრია $a_k=\frac{1}{k\ \ +n}$. გარდავქმნათ ზოგადი წევრი $a_k=\frac{1}{kn+m}=\frac{1}{n(k+\frac{m}{n})}=\frac{1}{n}\frac{1}{k+\frac{m}{n}}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{1}{k+\frac{m}{n}}=\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx$, მაშინ გვექნება:

$$a_k=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{k+\frac{m}{n}-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{m}{n}-1}x^k dx\cdot$$

მაშასადამე, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn+m}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 k^x x^{\frac{m}{n}-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right]x^{\frac{m}{n}-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{1-x}dx$ ·

ამრიგად, მართებულია ტოლობა
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn+m}=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{1-x}dx \tag{5}$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a_k=\frac{(-1)^k}{kn+m}$, გვექნება

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1+x} \text{ და } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)}{kn+m}=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{1+x}dx \tag{6}$$

ამ ფორმულის საშუალებით ადვილად ამოიხსნება კონკრეტული ამოცანები. მაგალითად, განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+\varepsilon}$, სადაც $\varepsilon=1$ ან 2. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $\varepsilon=1$, ე.ი. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$. აქ, n=3 და m=1, (2) ტოლობის თანახმად, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{3}-1}}{1+m}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+x)}$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt[3]{x}=t$, $x=t^3$ და $dx=3t^2dt$, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3t^2dt}{t^2(1+t^3)}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)(t^2-t+1)}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right|\Bigg|_0^1+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}(\ln 4-\ln 1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=$$
$$\frac{1}{6}\ln 4+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}\ln 4+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\left(\frac{\ln 4}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

ახლა განვიხილოთ შემხთვევა, როცა $\varepsilon=2$, ე.ი. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}$, აქ n=3, m=2, (2) ტოლობის თანახმად,
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^{\frac{2}{3}-1}}{1+x}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\cdot$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt[3]{x}=t$, $x=t^3$ და $dx=3t^2dt$, გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3t^2dt}{t(1+t^3)}=\int_0^1\frac{tdt}{1+t^3}=\int_0^1\frac{tdt}{(1+t)(t^2-t+1)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{acrtg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1-\left(\frac{1}{6}\ln 4+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\ln 4-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln 4=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 4\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\right)$$

მაშასადამე, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+\varepsilon}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-(-1)^{\varepsilon}\ln 2\right)\cdot$

II. გამოვთვალოთ ჯამი $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^k}{(k+a)(k+b)} \qquad (3)$$

ჯერ განვიხილოთ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}$. გარდავქმნათ მოცემული მწკრივის ზოგადი წევრი

$$\alpha_k=\frac{1}{(k+\alpha)(k+b)}=\frac{1}{b-\alpha}\left(\frac{1}{k+\alpha}-\frac{1}{k+b}\right)=\frac{1}{b-\alpha}\left[\int_0^1 x^{k+\alpha-1}dx-\int_0^1 x^{k+b-1}dx\right]=$$
$$=\frac{1}{b-\alpha}\left[\int_0^1 x^k\cdot x^{\alpha-1}dx-\int_0^1 x^k\cdot x^{b-1}dx\right]=\frac{1}{b-\alpha}\int_0^1 x^k\left(x^{\alpha-1}-x^{b-1}\right)dx$$

a_k -ს ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (3)-ში

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^k\left(x^{a-1}-x^{b-1}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right]\left(x^{a-1}-x^{b-1}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx$$

ამრიგად, $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx \qquad (4)$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)(k+b)}=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right]\left(x^{a-1}-x^{b-1}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1+x}dx \qquad (5)$$

III. განვიხილოთ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^k}{k(kn+m)}$ სახის მწკრივი,

ჯერ განვიხილოთ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(kn+m)}$ სახის მწკრივი. ამ მწკრივის ზოგადი წევრია $a_k=\frac{1}{k(kn+m)}$, და გარდავქმნათ იგი, მივიღებთ

$$\alpha_k=\frac{1}{kn\left(k+\frac{m}{n}\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k\left(k+\frac{m}{n}\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m}{n}}\right)=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m}{n}}\right)=\frac{1}{m}\left[\int_0^1 x^{k-1}dx-\int_0^1 x^{k-1+\frac{m}{n}}dx\right]=\frac{1}{m}\int_0^1 x^{k-1}\left(1-x^{\frac{m}{n}}\right)dx$$

a_k -ს ეს მნიშვნელობა გავითვალისწინოთ მწკრივის ჯამში, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(kn+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 x^{k-1}\cdot\left(1-x^{\frac{m}{n}}\right)dx=\frac{1}{m}\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right]\left(1-x^{\frac{m}{n}}\right)dx=\frac{1}{m}\int_0^1\frac{1-x^{\frac{m}{n}}}{1-x}dx$$

მაშასადამე მივიღეთ, რომ $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(kn+m\right)}=\frac{1}{m}\int_0^1\frac{1-x^{\frac{m}{n}}}{1-x}dx \qquad (6)$$

ხოლო, თუ განვიხილავთ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(kn+m\right)}$ მივიღებთ, რომ $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(kn+m\right)}=\frac{1}{m}\int_0^1\frac{x^{\frac{m}{n}}-1}{1+x}dx \qquad (7)$$

ამ ტოლობის მეშვეობით გამოვთვალოთ შემდეგი მწკრივის ჯამი $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(2k+3\right)}$, აქ n=2 და m=3, (7) ტოლობის თანახმად $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(2k+3\right)}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{1+x}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1+x}dx \qquad (8)$$

აღვნიშნოთ $\sqrt{x}=y, \quad x=y^2$ და $dx=2ydy$, მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(2k+3\right)}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{y^3-1}{1+y^2}2ydy=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{y^4-y}{1+y^2}dy=\frac{2}{3}\int_0^1\left(y^2-1+\frac{1-y}{1+y^2}\right)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Bigg|_0^1+$$
$$+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)+\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\ln\left|1+y^2\right|\Big|_0^1=-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\ln 2=-\frac{4}{9}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\ln 2$$

განვიხილოთ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(n_1k+m_1\right)\left(n_2k+m_2\right)}$ სახის მწკრივი.

ამ მწკრივის ზოგადი წევრია $U_k=\frac{1}{k\left(n_1k+m_1\right)\left(n_2k+m_2\right)}$.

მოვახდინოთ ზოგადი წევრის გარდაქმნა

$$U_k=\frac{1}{k\left(n_1k+m_1\right)\left(n_2k+m_2\right)}=\frac{1}{n_1n_2k}\cdot\frac{1}{\left(k+\frac{m_1}{n_1}\right)\left(k+\frac{m_2}{n_2}\right)}=\frac{1}{n_1n_2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_1}{n_1}}\cdot\left(\frac{1}{k+\frac{m_1}{n_1}}-\frac{1}{k+\frac{m_2}{n_2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{n_1n_2}\cdot\frac{n_1n_2}{n_1m_2-m_1n_2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k+\frac{m_1}{n_1}}-\frac{1}{k+\frac{m_2}{n_2}}\right)=\frac{1}{n_1m_2-m_1n_2}\left[\frac{1}{k\left(k+\frac{m_1}{n_1}\right)}-\frac{1}{k\left(k+\frac{m_2}{n_2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{n_1m_2-m_1n_2}\left[\frac{1}{\frac{m_1}{n_1}-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m_1}{n_1}}\right)-\frac{1}{\frac{m_2}{n_2}-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m_2}{n_2}}\right)\right]=\frac{1}{n_1m_2-m_1n_2}\left[\frac{n_1}{m_1-n_1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m_1}{n_1}}\right)-\frac{n_2}{m_2-n_2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{m_2}{n_2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n_1m_2-m_1n_2}\left[\frac{n_1}{m_1-n_1}\left(\int_0^1 x^{k-1}dx-\int_0^1 x^{\frac{m_1}{n_1}+k-1}dx\right)-\frac{n_2}{m_2-n_2}\left(\int_0^1 x^{k-1}dx-\int_0^1 x^{\frac{m_2}{n_2}+k-1}dx\right)\right]$$

აქ გავითვალისწინე, რომ $\frac{1}{k}=\int_0^1 x^{k-1}dx$,

$$\frac{1}{k+\frac{m_1}{n_1}}=\int_0^1 x^{\frac{m_1}{n_1}+k-1}dx \text{ და } \frac{1}{k+\frac{m_2}{n_2}}=\int_0^1 x^{\frac{m_2}{n_2}+k-1}dx$$

აგრეთვე თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$ გვექნება

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n_1k+m_1)(n_2k+m_2)}=\frac{1}{n_1m_2-n_2m_1}\left[\frac{n_1}{m_1-n_1}\int_0^1\frac{\left(1-x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)dx}{1-x}-\frac{n_2}{m_2-n_2}\int_0^1\frac{\left(1-x^{\frac{m_2}{n_2}}\right)dx}{1-x}\right]$$

აქ იგულისხმება $m_1\neq n_1$ და $m_2\neq n_2$.

ახლა განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(n_1k+m_1)(n_2k+m_2)}=$$

$$=\frac{1}{n_1m_2-n_2m_1}\left[\frac{n_1}{m_1-n_1}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{k-1}\left(1-x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)\right)dx-\frac{n_2}{m_2-n_2}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{k-1}\left(1-x^{\frac{m_2}{n_2}}\right)\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n_1m_2-n_2m_1}\left[\frac{1}{m_1-n_1}\int_0^1\frac{x^{\frac{m_1}{n_1}}-1}{1+x}dx-\frac{1}{m_2-n_2}\int_0^1\frac{x^{\frac{m_2}{n_2}}-1}{1+x}dx\right]$$

მაშასადამე, თუ $m_1\neq n_1$ და $m_2\neq n_2$.

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(n_1k+m_1\right)\left(n_2k+m_2\right)}=\frac{1}{n_1m_2-n_2m_1}\left[\frac{n_1}{m_1-n_1}\int_0^1\frac{\left(1-x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)}{1-x}dx-\frac{n_2}{m_2-n_2}\int_0^1\frac{\left(1-x^{\frac{m_2}{n_2}}\right)}{1-x}dx\right]$$

2) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k\left(n_1k+m_1\right)\left(n_2k+m_2\right)}=\frac{1}{n_1m_2-n_2m_1}\left[\frac{1}{m_1-n_1}\int_0^1\frac{x^{\frac{m_1}{n_1}}-1}{1+x}dx-\frac{1}{m_2-n_2}\int_0^1\frac{x^{\frac{m_2}{n_2}}-1}{1+x}dx\right]$$

ამ ფორმულების გამოყენებით მარტივად ამოიხსნება კონკრეტული მაგალითები.

განვიხილოთ ასეთი მაგალითი: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}$

აქ $n_1=2;\ \ m_1=1;\ \ n_2=2;\ \ m_2=3$

ამიტომ (1) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=\frac{1}{2\cdot3-2\cdot1}\cdot\left[\frac{2}{1-2}\int_0^1\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1-x}dx-\frac{2}{3-2}\int_0^1\frac{1-x^{\frac{3}{2}}}{1-x}dx\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\int_0^1\frac{-1}{1+\sqrt{x}}dx-2\int_0^1\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-x}dx\right]$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\sqrt{x}=t$, მაშინ $x=t^2$ და $dx=2tdt$

$$-\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=-\int_0^1\frac{2tdx}{1+t}=-2\int_0^1\frac{t+1-1}{1+t}dt=-2\int_0^1dt+2\int_0^1\frac{dt}{1+t}=-2t\Big|_0^1+2\ln\left|1+t\right|\Big|_0^1=-2+2\ln2$$

ახლა განვიხილოთ $\int_0^1\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-x}dx$

აქ შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=t^2$, მაშინ $dx=2tdt;\ \ \sqrt{x^3}=t^3$ და $1-x=1-t^2$

$$\int_0^1\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-x}dx=\int_0^1\frac{1-t^3}{1-t^2}2tdt=\int_0^1\frac{1+t^2+t}{1+t}2tdt=2\int_0^1tdt+2\int_0^1\frac{t^3dt}{1+t}=2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{t^3+1-1}{1+t}dt=$$
$$=1+2\int_0^1\left(t^2-t+1\right)dt-2\ln\left|1+t\right|\Big|_0^1=1+2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_0^1-2\ln2=1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-2\ln2=\frac{5}{3}-2\ln2$$

და მაშასადამე

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln2-\frac{5}{6}+\ln2=-\frac{8}{6}+\frac{3}{2}\ln2$$

ანალოგიურად გამოითვლება შემდეგ მწკრივთა ჯამები:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(2k+1)(2k+3)}=\frac{5}{13}+\ln 2-\frac{\pi}{3}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)(3k+1)}=2-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}+4\ln 2-\frac{9}{2}\ln 3$

3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(2k+1)(3k+2)}=\frac{7}{4}-\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\ln 2$

ახლა განვიხილოთ ისეთი მწკრივები, რომელთათვისაც $m_1=n_1$ ან $m_2=n_2$ ან $\begin{cases} m_1=n_1 \\ m_2=n_2 \end{cases}$

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k-0)(k+1)}$

აქ $n_1=1;\quad m_1=0;\quad n_2=m_2=1$

ამ შემთხვევაში (1) და (2) ფორმულები სასურველ შედეგს ვერ მოგვცემს.

ვისარგებლოთ $U_k=\frac{1}{k^2(k+1)}$ ფუნქციის უმარტივეს წილადებად დაშლით.

$\frac{1}{k^2(k+1)}=\frac{A}{k^2}+\frac{B}{k}+\frac{C}{k+1}$ აქედან

$$A(k+1)+Bk(k+1)+Ck^2=1$$
$$Ak+A+Bk^2+Bk+Ck^2=1$$
$$k^2(B+C)+k(A+B)+A=1$$

$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \\ B+C=0 \end{cases}$ აქედან $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$

ამიტომ $U_k=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{\pi^2}{6}-1$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

2) განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(k+1)}$

აქ $U_k = \frac{(-1)^k}{k^2(k+1)} = (-1)^k\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = (-1)^k\left[\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right]$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} =$$
$$= -\frac{\pi^2}{12} + 1 - \ln 2 + 1 - \ln 2 = 2 - \frac{\pi^2}{12} - \ln 2$$

აქ გავითვალისწინოთ, რომ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

3) განვიხილოთ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$

აქ $n_1 = m_1 = 1;\quad n_2 = 2$ და $m_2 = 1$. მოვახდინოთ ზოგადი წევრის გარდაქმნა

$$U_k = \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+0,5}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+0,5}\right) = -\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+0,5)} =$$
$$= -\frac{1}{k(k+1)} - 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+0,5}\right) = -\frac{1}{k(k+1)} - 2\left(\int_0^1 x^{k-1}dx - 2\int_0^1 x^{k-0,5}dx\right) = -\frac{1}{k(k+1)} + 2\int_0^1 x^{k-1}\left(1 - x^{1,5}\right)dx$$

განვიხილოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} + 2\int_0^1\frac{1-x^{\frac{3}{2}}}{1-x}dx = -1 + 2\int_0^1\frac{\left(1-t^3\right)2tdt}{1-t^2} = -1 + 4\int_0^1\frac{1+t^2+t}{1+t}dt =$$
$$= -1 + 4\int_0^1 dt + 4\int_0^1\frac{t^2dt}{1+t} = -1 + 4 + 4\int_0^1\frac{\left(t^2-1\right)+1}{1+t} = 3 + 4\int_0^1(t-1)dt + 4\ln(1+t)\Big|_0^1 = 3 + 2(t-1)^2\Big|_0^1 +$$
$$+ 4\ln 2 = 3 + 2 + 4\ln 2 = 5 + 4\ln 2$$

აქ მიღებული ფორმულების საშუალებით შესაძლებელია განხილული ტიპის მწკრივების ჯამის გამოთვლა პირდაპირი ჩასმის გზით, რომელთა ამოხსნაც სხვა ხერხით თითქმის შეუძლებელია. ამავე დროს ამოხსნისათვის საჭიროა შედარებით მცირე დრო, რაც გვაძლევს იმის საშუალებას რომ ამოვხსნათ ბევრი ამოცანა. ამ ტიპის ამოცანები გამოიყენება თეორიულ ფიზიკასა და სხვადასხვა ტექნიკურ სპეციალობებზე, ამიტომ ჩვენს მიერ მიღებული ფორმულები მათ უნდა გავურჩიოთ და მივცეთ შესაბამისი ამოცანები.[46],[47],[49].

§ 5. რიცხვითი მწკრივის ჯამის მიახლოებითი გამოთვლის სწავლება

მოცემული $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ მწკრივის მიახლოებითი S ჯამის გამოსათვლელად დავუშვათ

$$S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

აქ უგულებელვყოთ ნაშთი $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k),$ (1)

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ცდომილობა, უნდა შევაფასოთ ნაშთი.

კრებადი ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივის იმ წევრებისათვის, რომლებიც იწყება n+1-დან და მონოტონურად კლებადია, მართებულია ნაშთის შემდეგ შეფასება

$$R_n \le \int_n^{\infty} f(x) d_x \tag{2}$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) d_x \le R_n \le f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x) d_x \tag{3}$$

სადაც $f(n)$ მოცემული მწკრივის ზოგადი წევრია, $f(x)$ კი ფუნქცია, რომელიც x=n წერტილებში, სადაც n=1,2,3…, ღებულობს $f(n)$-ის ტოლ მნიშვნელობებს და ინტეგრების შუალედში მონოტონურად კლებადია.

ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლაიბნიცის თეორემაში (ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, რომ $(u_n)_{n\ge 0}$ მიმდევრობა იყოს არსებითად კლებადი და $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$) ჩამოყალიბებულ პირობას, მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$|R_n| \le |a_{n+1}| \tag{4}$$

მითითებული შეფასება ხშირად ძალიან უხეშად, მაგრამ მაინც გვაძლევს შესაძლებლობას გამოვიანგარიშოთ მწკრივის ჯამი წინასწარი მოცემული სიზუსტით.[68]

ზოგიერთ შემთხვევაში მწკრივის ჯამის შეფასება (2) და (3) ფორმულებით საკმაოდ რთულია, მაგალითად თუ მწკრივის ზოგადი წევრი შეიცავს ფაქტორიალს (იხ. მაგალითი

3). ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ სხვადასხვა ხელოვნური ხერხები.[38],[44]. განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი:

მაგალითი 1. შევაფასოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივის ნაშთში n, გამოვთვალოთ მწკრივის ჯამი 0,1 სიზუსტით. რამდენი წევრი უნდა ავიღოთ, რომ მწკრივის წევრთა ჯამი გამოვთვალოთ 0,001 სიზუსტით.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ მწკრივის ნაშთის შეფასების (2) ფორმულა. მივიღებთ

$$R_n \le \int_n^{\infty}\frac{d_x}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^b=\frac{1}{n}.$$

თუ ავიღებთ მწკრივის პირველ 10 წევრს, მაშინ $R_n \le \frac{1}{10}$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\approx 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{100}\approx 1,6 \qquad \text{(ეს არის 0,1 სიზუსტით).}$$

თუ განვიხილავთ 0,001 სიზუსტით, უნდა ავიღოთ 1000 წევრი. ამ შემთხვევაში $R_n \le \frac{1}{1000}$.

მაგალითი 2. როგორი სიზუსტით გამოითვლება $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ მწკრივის ჯამი, თუ გამოვთვლით მწკრივის პირველი 7 წევრის ჯამს.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი არის ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი, რომლის წევრები არის მონოტონურად კლებადი. მოცემული მწკრივის ნაშთისათვის სამართლიანია (4) უტოლობა, რომლის თანახმადაც

$$|R_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+2)\cdot 2^{n+1}}, \text{ როცა } n=7, \quad \text{გვაქვს} \quad |R_7| \le \frac{1}{8\cdot 2^8} < \frac{1}{2000}.$$

მაგალითი 3. შევაფასოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ მწკრივის ნაშთში n და გამოვთვალოთ მისი ჯამი 0,001 სიზუსტით.[98]

ამოხსნა. აქ (2), (3) და (4) შეფასებები არ გამოგვადგება, რადგან მწკრივი არ არის ნიშანმონაცვლეობითი და მისი ზოგადი წევრი შეიცავს ფაქტორიალს. ამიტომ ვეცადოდ მწკრივის ნაშთი უშუალოდ შევაფასოთ:

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right)$$

ფრჩხილებში დაგვრჩა კლებადი გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრია 1, მნიშვნელი კი $\frac{1}{n+1}$, ამიტომ მისი ჯამი ტოლია: $\dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$

საიდანაც ვღებულობთ $R_n<\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\dfrac{1}{n\cdot n!}$

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ჯამი უნდა გამოვთვალოთ 0,001 სიზუსტით, მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ n=6, ე.ი. $R_6<\dfrac{1}{6\cdot 6!}=\dfrac{1}{4320}$

ეს ნიშნავს, რომ უნდა ავიღოთ მხოლოდ პირველი 6 წევრი და უნდა შევკრიბოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\approx 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 1{,}718.$$

§ 6. მწკრივებზე მოქმედებების სწავლება

ორი $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ მწკრივების ჯამი (სხვაობა) ეწოდება მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$

თუ შესაკრები მწკრივები კრებადია, მაშინ კრებადია ჯამიც და

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

მაგალითი 1. იპოვეთ ორი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ მწკრივების სხვაობა. ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მწკრივები განშლადია, ხოლო ამ მწკრივების სხვაობით მიღებული მწკრივი კრებადი.

ამოხსნა: I მწკრივი არის ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც განშლადია. ხოლო II მწკრივის განშლადობა შეიძლება ვაჩვენოთ შედარების II ნიშნის გამოყენებით. მას შევადარებთ ჰარმონიულ მწკრივს.

დავწეროთ მოცემული მწკრივების სხვაობა $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^2+1\right)}$

მიღებული მწკრივი კრებადია, რომელიც შეიძლება ვაჩვენოთ შედარების I ნიშნის გამოყენებით. მას შევადარებთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ მწკრივს.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ ტოლობის სამართლიანობა $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\left(n^3-n\right)\cdot 3^n}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

ამოხსნა, $\frac{2}{n^3-n}$ წილადი გავშალოთ მარტივი წილადების ჯამის სახით

$$\frac{2}{n^3-n}=\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}.$$

ვისარგებლოთ ამ გაშლით და მოცემული მწკრივი დავშალოთ სამი მწკრივის ჯამის სახით:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\left(n^3-n\right)\cdot 3^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\cdot 3^n}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n} \qquad (7)$$

ყოველი მწკრივი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\cdot 3^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 3^{m+1}}=\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 3^m}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$$

(აქ გამოვიყენოთ აღნიშვნა n=m+1 და ბოლოს m შევცვალოთ n-ით)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=\frac{1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}-\frac{1}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}-\frac{1}{3}. \qquad \text{და ბოლოს}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}=3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=3\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 3^m}=3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 3^m}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 3^2}\right]=$$

$$3\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot 3^m}-\frac{7}{2\cdot 3^2}\right]=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}-\frac{7}{6}.$$

ეს გარდაქმნები გავითვალისწინოთ (7)-ში და მივიღებთ:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\left(n^3-n\right)\cdot 3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}+\frac{2}{3}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}-\frac{7}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

როგორც ვიცით, ორი ჯამის გასამრავლებლად საჭიროა სამრავლის ყოველი წევრი გავამრავლოთ მამრავლის ყოველ წევრზე და ყველა მიღებული ნამრავლი შევკრიბოთ.[8]

ორი (U_n) და (V_n) მწკრივის ნამრავლი კოშის აზრით ან უბრალოდ ნამრავლი ეწოდება მწკრივს $W_0+W_1+W_2+\ldots+W_n+\ldots$, სადაც ზოგადი წევრი W_n, n=0, 1, 2... განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$W_n=U_0V_n+U_1V_{n-1}+\ldots+U_nV_0.$$

თუ (U_n) და (V_n) მწკრივები პირობით კრებადია, მაშინ მწკრივთა ნამრავლი შეიძლება განშლადი იყოს.

თეორემა 1. (მერტენსის) თუ (U_n) და (V_n) მწკრივები კრებადია და მათი ჯამებია სათანადოდ S და Q, ამასთან (U_n) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ გამრავლების შედეგად მიღებული (W_n) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S\cdot Q$-ს ტოლია.

მერტენსის თეორემა აბსოლუტურად კრებადი მწკრივებისათვის ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 2. თუ (U_n) და (V_n) მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ მათი ნამრავლი მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია.[82],[84].

მაგალითი 3. იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$ მწკრივების ნამრავლი.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, რაშიდაც შეგვიძლია დავრწმუნდეთ დალამბერის ნიშნის გამოყენებით. ამიტომ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}=\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+...\right)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+...\right)=1+\left(-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{2!}+\frac{1}{5!}\right)+...+\left(-1\right)^{n-1}[\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{3!(2n-4)!}+\frac{1}{5!(2n-6)!}+...+$$
$$+\frac{1}{(2n-2)!2!}+\frac{1}{(2n-1)!}]+...=1-\frac{4}{3!}+\frac{16}{5!}-\frac{64}{7!}+\frac{256}{9!}-...+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!}+...$$

ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ $\frac{1}{(2n-1)!}$. მივიღებთ:

$$\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}[(2n-1)+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{3!}+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{5!}+...+$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{4!}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{2!}+1]=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{1}{2}[1+(2n-1)+\frac{(2n-1)(2n-2}{2!}+$$
$$+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{3!}+...+\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{3!}+\frac{(2n-1)(2n-2)}{2!}+(2n-1)+1]=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{2}(1+1)^{2n-1}=(-1)^{n-1}\frac{2^{n-2}}{(2n-1)!}$$

მიღებული მწკრივი არის აბსოლუტურად კრებადი. მწკრივის კვადრატი განისაზღვრება როგორც მწკრივის ნამრავლი თავის თავზე.ანალოგიურად განისაზღვრება მწკრივის ნებისმიერი ხარისხი.[59],[60].

ორი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივების ფარდობა ეწოდება ისეთ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ თუ სამივე მწკრივი კრებადია, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივი შეიძლება აღმოჩნდეს განშლადი. ნებისმიერ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1^2}\right) + \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_1 b_3}{b_1^2} - \frac{a_2 b_2}{b_1^2} + \frac{a_1 b_2^{\,2}}{b_1^3}\right) + \left(\frac{a_4}{b_1} - \frac{a_1 b_4}{b_1^2} - \frac{a_2 b_3}{b_1^2} - \frac{a_3 b_2}{b_1^2} + \frac{2 a_1 b_2 b_3}{b_1^3} + \frac{a_2 b_2^{\,2}}{b_1^3} - \frac{a_1 b_2^{\,3}}{b_1^4}\right) + \ldots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივის ყოველი მომდევნო წევრი გამოითვლება ფორმულით:

$$c_n = \frac{a_n - c_1 b_n - c_2 b_{n-1} - \ldots - c_{n-1} b_2}{b_1} \tag{8}$$

აგრეთვე შეიძლება მწკრივის მწკრივზე გაყოფა, ისე როგორც მრავალწევრის მრავალწევრზე.

ამ ფაქტის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ [57].

მაგალითი 4. $1 + 2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots$ მწკრივი გავყოთ

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} + \ldots$$

ამოხსნა. I ხერხი. საძიებელი მწკრივის კოეფიციენტები გამოვთვალოთ (8) ფორმულის საშუალებით:

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1} = 1; \quad c_2 = \frac{a_2 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3; \quad c_3 = \frac{a_3 - a_1 b_3 - a_2 b_2}{b_1} = \frac{4}{2!} - \frac{1}{2!} - 3(-1) = \frac{3^2}{2!}$$

$$c_4 = \frac{a_4 - a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2}{b_1} = \frac{8}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{2!} = \frac{3^3}{3!} \quad c_5 = \frac{a_5 - a_1 b_5 - a_2 b_4 - a_3 b_3 - a_4 b_2}{b_1} = \frac{16}{4!} - \frac{1}{4!} + 3 \cdot \frac{1}{3!} - \frac{3^2}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{3^3}{3!} = \frac{3^4}{4!}$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით მარტივად დავამტკიცებთ, რომ $c_n = \dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$

მაშასადამე, საძიებელ მწკრივს აქვს სახე: $1+3+\frac{3^2}{2!}+...+\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{3^n}{n!}+...$

II ხერხი. I მწკრივი გავყოთ II მწკრივზე, როგორც მრავალწევრი მრავალწევრზე:

$$
\begin{array}{r|l}
1+2+\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}+\frac{16}{4!}+... & 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-... \\
-\quad 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-... & \overline{1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+...} \\
\hline
3+\frac{3}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{15}{4!}+... & \\
-\quad 3-3+\frac{3}{2!}-\frac{3}{3!}+... & \\
\hline
\frac{3^2}{2!}+0+\frac{27}{4!}+... & \\
-\quad \frac{3^2}{2!}-\frac{3^2}{3!}+\frac{3^2}{4}+... & \\
\hline
\frac{3^3}{2!}-\frac{27}{4!}+... & \\
-\quad \frac{3^3}{3!}+\frac{3^3}{3!}+... & \text{და ა.შ.} \\
\hline
\frac{3}{4!}-... &
\end{array}
$$

მაშასადამე, მივიღეთ: $1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+...\frac{3^n}{n!}+...$ მწკრივი.

I თავის დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები.

1. უმაღლესი მათემატიკის შესწავლის მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს, თუ როგორ ვასწავლოთ მათემატიკა კონკრეტულ სპეციალობებზე, რადგან განსხვავებული მიდგომებია სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის როგორც სწავლების სიღრმის, ისე სწავლების მეთოდების მხრივ. პასუხი უნდა გაეცეს შემდეგ კითხვებს:

- რა არის უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის შესწავლის მიზნები და ამოცანები;
- უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის რა თემების განხილვაა მიზანშეწონილი და რა სიღრმით;
- რა შინაარსით წარვმართოთ მწკრივთა თეორიის საკითხების სწავლება უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში;
- უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის თემების რა ფორმებითა და მეთოდებით ვასწავლოთ.

2. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის გადასაჭრელი პრობლემები განხილულ უნდა იქნეს სხვადასხვა მეცნიერებებთან, კერძოდ, პედაგოგიკასთან, მათემატიკურ ანალიზთან, ალგებრასთან, რიცხვთა თეორიასთან, გეომეტრიასთან, ფსიქოლოგიასთან, ფილოსოფიასთან და სხვა მეცნიერებებთან ურთიერთკავშირში. შემუშავებული მეთოდური რეკომენდაციები შესაბამოსობაში უნდა იყოს ფსიქოლოგიის, მათემატიკური ანალიზის, ალგებრის, რიცხვთა თეორიის, გეომეტრიის, პედაგოგიკის და სხვა მეცნიერებათა უახლეს მიღწევებთან და მათი გამოყენების სფეროსთან. სწავლების პროცესის მაღალ მეცნიერულ დონეზე წარმართვისათვის აუცილებელია პედაგოგიური პრობლემების თეორიული კვლევა და შესაძლო შედეგების პროგნოზირება, უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და

არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის საკითხების და პრაქტიკული სავარჯიშოებისათვის ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების სპეციალური მეთოდიკის დამუშავება.

3.უნივერსიტეტებში ლექტორად მუშაობის ხანგრძლივი პრაქტიკა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ საუკეთესო ლექტორებიც ვერ აღწევენ წარმატებებს თუ არ არის გამართული სახელმძღვანელო, პროგრამა, სასწავლო გეგმა და არ არის შემუშავებული განსახილავი თემების სწავლების სპეციალური მეთოდიკა. უმაღლესი სკოლა იმ შემთხვევაში მოამზადებს მაღალკვალიფიციურ სპეციალისტს, თუ სწავლების პროცესში ზოგადად გათვალისწინებული იქნა თანამედროვეობის მოთხოვნები განათლების მიმართ. კონკრეტულად კი, ის მოთხოვნები რომლებიც ეხება სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის შემცველი ისეთი საკითხების შეტანას სასწავლო გეგმებში, პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებში, რომლთა გადაწყვეტა მოითხოვს არასტანდარტულ მიდგომებს. აქვე შევნიშნავთ, რომ ამისათვის არ მოვითხოვთ დამატებით სასწავლო დროს, ამ საკითხების სწავლებას ვახორციელებთ ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკით.

4. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ–ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ ზოგადად არ არსებობს უნივერსალური მათემატიკური მეთოდები და ხერხები, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლება, რომლის ეფექტურობა დადასტურდა ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტით.

II თავი

ფუნქციათა მწკრივის სწავლება უნივერსიტეტის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე

§1. ფუნქციათა მწკრივები. მისი კრებადობის და განშლადობის არეების დადგენის სწავლების მეთოდიკა

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლეზე განსაზღვრუ ფუნქციათა მიმდევრობა $U_0(x), U_1(x), ..., U_n(x), ...$

და შევადგინოთ მწკრივი $U_0(x), U_1(x)+...+U_n(x)+...$ (1)

ეს მწკრივი E სიმრავლის ყოველი x_0 წერტილისათვის გვაძლევს რიცხვთა მწკრივს

$U_0(x_0), U_1(x_0)+...+U_n(x_0)+...$

თუ ეს მწკრივი კრებადია, მაშინ ამბობენ, რომ (1) მწკრივი კრებადია x_0 წერტილში, ხოლო თუ განშლადია, მაშინ (1) მწკრივი განშლადია x_0 წერტილში.

(1) სახის მწკრივს ეწოდება E სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციათა მწკრივი.

E სიმრავლის x წერტილს, რომელზედაც (1) მწკრივი კრებადია, ამ მწკრივის კრებადობის წერტილი ეწოდება, ხოლო წერტილს, რომელზეც (1) მწკრივი განშლადია, მწკრივის განშლადობის წერტილი ჰქვია. ამრიგად, E სიმრავლე იყოფა ორ სიმრავლედ: კრებადობის წერტილთა სიმრავლედ და განშლადობის წერტილთა სიმრავლედ. პირველ მათგანს ეწოდება ფუნქციათა მწკრივის კრებადობის არე, მეორეს კი — განშლადობის არე. ფუნქციათა მწკრივის კრებადობისა და განშლადობის არეები შეიძლება იყოს ძალიან რთული აგებულების. განვიხილოთ მწკრივი: $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$

ეს მწკრივი განსაზღვრულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ მწკრივის კრებადობის არეს წარმოადგენს (-1;+1) ინტერვალი.

გამოსახულებას $S_n(x)=U_0(x)+U_1(x)+...+U_n(x)$ ეწოდება (1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი ანუ უბრალოდ კერძო ჯამი. თუ (1) მწკრივი კრებადია x წერტილში, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$

$S_n(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია E სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაგრამ *f*(x) ფუნქცია, რომელსაც (1) მწკრივის ჯამი ეწოდება, განსაზღვრულია ამ მწკრივის მხოლოდ კრებადობის წერტილებში. ფუნქციას $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ ეწოდება მოცემული მწკრივის

ნაშთი. ცხადია, რაგინდ დიდიც იყოს $n, R_n(x)$ ფუნქცია, განსაზღვრულია (1) მწკრივის კრებადობის არეში. ამ არის ყოველ x წერტილში მართებულია ტოლობა $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის არის დასადგენად შეიძლება გამოვიყენოთ ცხრილური მწკრივი და რიცხვითი მწკრივის კრებადობის ნიშნები. როგორ ხდება ეს, ვაჩვენოთ კონკრეტული მაგალითებით.[61],[62],[23].[41].

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი წარმოადგენს ჰარმონიული $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ მწკრივის განზოგადოებას, რომელიც კრებადია, თან აბსოლუტურად, როცა p=x>1 და განშლადია, როცა $x \le 1$.

მაშასადამე, მიღებული მწკრივის კრებადობის არეა $1 < x < \infty$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. როცა x>1 მოცემული ფუნქციონალური მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, რადგან მოცემული მწკრივის აბსოლუტური მნიშვნელობებისაგან შედგენილი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ მწკრივი ამ შუალედში კრებადია, როცა $0 < x \le 1$. მოცემული მწკრივი პირობითად კრებადია, რადგან მწკრივი ნიშანმონაცვლეობითია და აკმაყოფილებს ლაიბნიცის პირობას, ხოლო როცა $x \le 0$ მოცემული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 3. იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. ცხადია, როცა x=0 მწკრივი კრებადია. ვთქვათ $x \ne 0$. გამოვიყენოთ დალამბერის ნიშანი

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n};\ f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad \text{მაშინ } l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n}{x^n\cdot(n+1)}\right| = |x|$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მწკრივი კრებადია და თან აბსოლუტურად. როცა $|x| < 1$, ხოლო როცა $|x| > 1$, მწკრივი განშლადია. იმ შემთხვევაში, როცა x=1, მაშინ დალამბერის ნიშნით კრებადობას ვერ დავადგენთ, მაშასადამე, როცა $x = \pm 1$ მწკრივი ცალკე უნდა გამოვიკვლიოთ. თუ x=1, ვღებულობთ ჰარმონიულ მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. ის

განშლადია, თუ x=-1, ვღებულობთ დალამბერის მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. ამ შემთხვევაში მწკრივი კრებადია $-1\le x<1$ ინტერვალში.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^n}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა დავადგინოთ კოშის ნიშნის დახმარებით. ასე რომ, $f_n(x)=\frac{(x-3)^n}{n^n}$, მაშინ

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{n}=0$$

ნებისმიერი x-სათვის. მაშასადამე მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $-\infty<x<\infty$ შუალედში.

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x^2+1)(x^2+2)...(x^n+n)}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. თუ x=0 მოცემული მწკრივი მიიღებს სახეს 1+1+...+1+..., რომელიც განშლადია. თუ გამოვიყენებთ დალამბერის ნიშანს, გვექნება:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\frac{(n+1)!(x^2+1)(x^2+2)...(x^2+n)}{(x^2+1)(x^2+2)...(x^2+n+1)\cdot n!}=\frac{n+1}{x^2+n+1}\to 1,\text{ როცა } n\to\infty.$$

ე.ი. ამ ნიშნით კრებადობას ვერ დავადგენთ. გამოვიყენოთ რააბის ნიშანი

$$R=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\left|\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}\right|-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{x^2+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{n+1}=x^2$$

როცა $x^2>1$ ე.ი. $|x|>1$ მწკრივი კრებადია.

როცა $x^2<1$, ე.ი. $|x|<1$ მწკრივი განშლადია და როცა $x=\pm1$ გვაქვს $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot 3...(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ მწკრივი და ცხადია, ეს არის განშლადი მწკრივი.

§2. ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობის სწავლების მეთოდიკა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ფუნქციათა მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

კრებადობა ნიშნავს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობას $(S_n)_{n\geq 1}$, სადაც $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} U_k(x)$ x-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის აქვს ზღვარი, როცა $n\to\infty$. ეს ზღვარი აღნიშნულია S(x) სიმბოლოთი. ამრიგად, ტოლობას $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)=S(x)$

ვწერთ მაშინ, როცა $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x) \quad (2)$.

ვთქვათ U_n ფუნქციები განსაზღვრულია E სიმრავლეზე, მაშინ ამავე სიმრავლეზეა განსაზღვრული S_n ფუნქციები. ვთქვათ (2) ტოლობას ადგილი აქვს E სიმრავლის ნებისმიერ x წერტილში. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური K რიცხვი, რომ $\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon$, როცა $n\geq K$

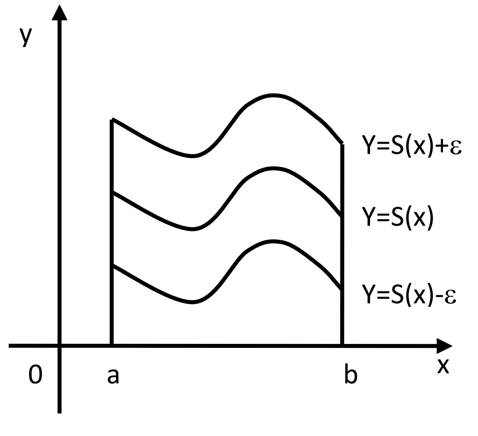
თუ E სიმრავლიდან მეორე Y წერტილს ავიღებთ, მაშინ იმავე ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური K_1, რომ $\left|S_n(y)-S(y)\right|<\varepsilon$, როცა $n\geq K_1$

თუ K_1 რიცხვის ადგილას გამოდგება K რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ მიმდევრობა $(S_n)_{n\geq 1}$ თანაბრად კრებადია S ფუნქციისკენ E სიმრავლეზე.

ფუნქციონალური $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(S_n)_{n\geq 1}$ მწკრივი E სიმრავლეზე თანაბრად კრებადია, თუ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური K რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის, როცა $n\geq K$ შესრულდება უტოლობა

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

გეომეტრიულად თანაბრად კრებადობა შემდეგნაირად შეიძლება იქნეს



განმარტებული, ვთქვათ $\varepsilon>0$ რაიმე რიცხვია. დავხაზოთ ორი ფუნქციის გრაფიკი

$y=S(x)+\varepsilon$ და $y=S(x)-\varepsilon$. ეს ორი გრაფიკი განსაზღვრავს ზოლს, რომლის სიგანეც (ვერტიკალური მიმართულებით) $2\cdot\varepsilon$-ის ტოლია. ამ ზოლის შუა ხაზი იქნება y=S(x) ფუნქციის გრაფიკი[12],[78],[86].

თუ $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია S ფუნქციისაკენ, მაშინ მოიძებნება ისეთი K ნომერი , რომ ამ ნომრიდან დაწყებული ყოველი ფუნქციის $y=S_k(x)$ და $y=S_{k+1}(x)$,... გრაფიკი მოთავსებული იქნება ზემოთ აღნიშნული ზოლის შიგნით. მართლაც, (3) უტოლობა იმას ნიშნავს, რომ $\forall x\in E$ და $\forall n\geq k$,

$$S(x)-\varepsilon<S_n(x)<S(x)+\varepsilon$$

ამბობენ, რომ ფუნქციათა (1) მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე, თუ მისი კერძო ჯამების $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია ამ სიმრავლეზე.

ფუნქციონალური მწკრივი არათანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე, თუ არსებობს ε>0 რიცხვი და E სიმრავლის წერტილთა ისეთი $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა, რომ მართებულია უტოლობა $\left(f_n(x_n)-f(x_n)\right)\geq\varepsilon$ (n=1, 2, ...).

თეორემა: მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ თანაბრად კრებადობისათვის E სიმრავლეზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობდეს x-ზე დამოუკიდებელი ისეთი K ნატურალური რიცხვი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის შესრულდეს უტოლობა $\left|\sum_{m=n+1}^{n+p}U_m\right|<\varepsilon$, როდესაც $n\geq k$ და $\forall P\in N$.

მაგალითი 1. გამოვარკვიოთ $1+x^2+x^2+...+x^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$

მწკრივის თანაბრად კრებადობა (0, 1) ინტერვალზე.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივის ჯამია $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$, ხოლო ნაშთის მოდული

$$R_n(x)=\left|S(n)-S_n(x)\right|=\left|\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^n}{1-x}\right|=\frac{x^n}{1-x}$$

ავიღოთ ნებისმიერი ε>0 რიცხვი და ვიპოვოთ N ისეთი, რომ, როცა n>N მართებულია შემდეგი უტოლობა $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$,, ე.ი. $\dfrac{x^n}{1-x}<\varepsilon$

ამ უტოლობიდან განვსაზღვროთ n, მივიღებთ:

$$n > \frac{\ln(1-x)\cdot\varepsilon}{\ln x}$$

(უტოლობის ნიშანი იცვლება, რადგან $l_n x < 0$)

ამ უტოლობის მთელი ფესვი არის N-ის მნიშვნელობა, ე.ი. $N = \left[\frac{l_n(1-x)\cdot\varepsilon}{l_n x}\right]$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ N-ის მნიშვნელობა დამოკიდებულია ε და x-ზე. ახლა გამოვიკვლიოთ N(x) ფუნქციის ქცევა (0, 1) ინტერვალში მარტივად ჩანს, რომ ამ ინტერვალზე ის შემოსაზღვრულია, რადგან როცა $x \to 1$, $\ln x \to 0$ და მაშასადამე $N \to \infty$, რადგან, როცა $x \to 1$, არ არსებობს ისეთი N რიცხვი, რომ ნებისმიერი x-სთვის (0,1) ინტერვალიდან მწკრივის ნაშთი იყოს ε-ზე პატარა, ამიტომ მოცემული მწკრივი (0,1) ინტერვალზე არაა თანაბრადკრებადი.[99].

ხოლო ნებისმიერ $(0,\delta]$ ნახევარსეგმენტში, სადაც $0<\delta<1$ მწკრივი თანაბრადკრებადია.[85]

მაგალითი 2. ვაჩვენოთ, რომ $x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(x^{2n} - x^{2n-2}\right)$ მწკრივის ჯამს, რომლის წევრები წარმოადგენენ უწყვეტ ფუნქციებს, აქვს წყვეტის წერტილები.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ მოცემული მწკრივის n წევრის ჯამი:

$$\begin{array}{l} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x^4 - x^2 \\ +\, f_3(x) = x^6 - x^4 \\ -----------\\ f_n(x) = x^{2n} - x^{2n-2} \\ \hline S_n(x) = x^{2n} \end{array}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{2n} \begin{cases} 0, \text{ როცა } |x|<1 \\ 1, \text{ როცა } |x|=1 \\ \infty, \text{ როცა } |x|>1 \end{cases}$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ მწკრივი კრებადია [-1;1] ინტერვალზე და მისი ჯამი ამ ინტერვალზე უწყვეტია.

x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის (-1;1) ინტერვალიდან გვაქვს:

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = |0 - x^{2n}| = x^{2n}$$

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი ფიქსირებული რიცხვია

$$\left|R_n(x)\right| = \left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|0 - x^{2n}\right| = x^{2n}$$

$n \ln x^2 < \ln\varepsilon$, რადგან $\ln x^2 < 0$, ამიტომ $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x^2}$

ამ უტოლობიდან და $x^{2n} < \varepsilon$ უტოლობიდან გამომდინარე

$$N = \begin{cases} \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x^2}\right], & \text{თუ } \frac{\ln\varepsilon}{\ln x^2} \geq 1 \\ 1, & \text{თუ } \frac{\ln\varepsilon}{\ln x^2} < 1 \end{cases}$$

იქნება უმცირესი, საიდანაც, როცა n>N გამომდინარეობს

$x^{2n} \leq \varepsilon$ რადგან ყველა შესაძლო N -დან უმცირესიც კი უსასრულოდ იზრდება როცა $x \to \pm 1$, მაშინ მწკრივის ნაშთის მოდული არ შეიძლება იყოს ნაკლები რაგინდ მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვზე (-1;1) ინტერვალიდან აღებულ ნებისმიერი x-ისთვის. მითუმეტეს [-1;1] მონაკვეთისთვის. ეს ნიშნავს, რომ მოცემული წმკრივის კრებადია [-1;1] მონაკვეთზე არათანაბრად, რაც ხსნის მწკრივის ჯამში წყვეტის წერტილების არსებობას.[100]

ახლა განვიხილოთ ფუქნციონალური მწკრივის თანაბრად კრებადობის ნიშნები:

ვაირშტრასის თეორემა : თუ $\sum_{n=\Lambda}^{\infty} U_n(x)$ (7) მწკრივის წევრები E სიმრავლეზე აკმაყოფილებენ პირობას $\forall x \in E,\ \left|U_n(x)\right| \leq a_n$ [n=1,2...) (8)

სადაც $a_1+a_2+...+a_n+...$ (9)

არის დადებითი კრებადი მწკრივი, მაშინ (7) მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე.

რიცხვით მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ეწოდება მაჟორანტი მწკრივი ანუ რიცხვითი მაჟორანტი $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ფუნქციონალური მკწრივის რაღაც შუალედში, თუ ამ შუალედის ნებისმიერი x-თვის სამართლიანია უტოლობა $\left|u_n(x)\right| \leq a_n$.

ვაიერშტრასის ნიშნის ფორმულირება ასეც შეიძლება: ფუნქციონალური მწკრივი რაღაც შუალედში თანაბრად კრებადია, თუ ამ შუალედში ის მაჟორირდება რაღაც კრებად რიცხვით მწკრივით. აღვნიშნოთ, რომ თუ $\sum_{n=\Lambda}^{\infty} U_n(x)$ ფუნქციონალური მწკრივისთვის

გამოიყენება ვაიერსტრასის ნიშანი მაშინ მასთან ერთდროულად თანაბრად კრებადი იქნება $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|$ მწკრივიც.[83].[77].

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციათა მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$

რომელიც განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში, თანაბარდ კრებადია. (9) მწკრივს ეწოდება (7) მწკრივის მაჟორანტი მწკრივი.

ამოხსნა. მართლაც, რადგან $\left|\cos nx\right|\le 1,\ \ \forall x\in R$ და $\forall n\in N$, ამიტომ $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$

მეორეს მხრივ, დადებითი მწკრივი, რომლი ზოგადი წევრი $\frac{1}{n^2}$ კრებადია. ამიტომ ვაიერშტრასის თეორემის ძალით მოცემული მწკრივი არის მთელს რიცხვით წრფეზე თანაბრადკრებადი.

მაგრამ შეიძლება იყოს შემთხვევა როდესაც $\sum_{n=\Lambda}^{\infty}U_n\left(x\right)$ მკწრივი თანაბრად კრებადია, მაგრამ არის მხოლოდ პირობითად კრებადი (მაგალითი 4). შესაძლოა ისეთი შემთხვევები, როდესაც მწკრივი $\left|u_n(x)\right|$ კრებადია არათანაბრად (მაგალითი 5). ცხადია ორივე აღნიშნულ შემთხვევაში ვაიერსტრასის ნიშანი არ გამოიყენება აქ საჭირო უფრო დახვეწილი ნიშნები [80].

მაგალითი 4: გამოვიკვლიოთ თანაბარ კრებადობაზე მკწრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$

მოცემული ნიშან ცვლადი მწკრივი $0\le x<\infty$ შუალედში კრებადია ლეიბნიცის ნიშ-ნის თანახმად. ამ შუალედში იგი კრებადია პირობითად, ამიტომ ვაიერშტრასის ნიშანი არ გამოიყენება, მაგრამ ნიშანცვლადი მწკრივის ნაშთის $\left(\left|R_n(x)\right|\le\left|u_{n+1}(x)\right|\right)$ შეფასების გამოყე-ნებით მარტივია შემდეგი უტოლობის მიღება: $\left|R_n(x)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი. მოიძებნება N, $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right]$, ისეთი, რომ ნებისმიერი $n>N$-სთვის იქნება სამართიანი უტოლობა $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon$, მაშინ როცა $n>N$ და ნებისმიერი x-თვის $0\le x<\infty$ შუალედიდან, სრულდება უტოლობა $\left|R_n(x)\right|<\varepsilon$ ეს მოწმობს მოცემული მკწრი-ვის თანაბრად კრებადობას აღნიშნულ შუალედში.

მაგალითი 5: ვაჩვენოთ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ ფუნქციონალური მკწრივი თანაბრად კრებადია მთელ რიცხვით ღერძზე, ხოლო მისი წევრების მოდულებისაგან შედგენილი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ არათანაბრად კრებადი.

მოცემული მწკრივი ნიშანცვლადია, ამიტომ

$$\left|R_n(x)\right|<\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{x^2}{1+(n+1)x^2+...+x^{2(n+1)}}<\frac{x^2}{(n+1)x^2}=\frac{1}{n+1}$$

ყველა $x\neq 0$-ისათვის. როდესაც $x=0$ $R_n(0)=0$ წინა მაგალითში განხილული მსჯელობის დახმაებით დავადგენთ მწკრივის თანაბრად კრებადობას მთელ რიცხვით ღერძზე .

ახლა განვიხილოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ მწკრივის თანაბრად კრებადობა, ვინაიდან ეს მწკრივი გეომეტრიული პროგრესიაა, მნიშვნელით $q=\frac{1}{1+x^2}$, მაშინ $x\neq 0$-სათვის გვექნება:

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+...=\frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

როდესაც $x\to 0$, მაშინ $R_n(x)\to 1$ (ნებისმიერი n-თვის) და მაშასადამე ნაშთი ვერ იქნება რაგინდ მცირე $\varepsilon>0$ რიცხვზე ნაკლები. ეს ნიშნავს, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ მკწრივი მთელს რიცხვით ღერძზე არათანაბრად კრებადია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კრებადობა აუცილებელი არის და საკმარისიც ზღვრული ფუნქციის უწყვეტობისათვის.

დინის თეორემა: თუ [a,b] სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$ ზრდადია და კრებადი [a,b] სეგმენტზე უწყვეტ $f(x)$ ფუნქციისაკენ, მაშინ აღებული მიმდევრობა თანაბრად კრებადია [a,b]-ზე $f(x)$ ფუნქციისკენ.[65].

მაგალითი 6. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^n}$$

ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია ყველა იმ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს 0-ს.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას $q=\frac{1}{1+x^4}$ მნიშვნელით. მოცემული მწკრივის ჯამია $S(x)=\frac{x^4}{a-\frac{1}{1+x^4}}=1+x^4$

როცა x=0, მაშინ S(O)=0

მაშინ $S(x)=\begin{cases}1+x^4, & \text{როცა } x\neq 0\\ 0, & \text{როცა } x=0\end{cases}$

მწკრივის S(n) ჯამი უწყვეტია გარდა x=0 წერტილისა. ასე რომ, მოცემული მწკრივის წევრები დადებითია და უწყვეტი ნებისმიერი x-სათვის. ამიტომ დინის თეორემის თანახმად მოცემული ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ სეგმენტზე, რომელიც არ შეიცავს 0-ს.

აბელის ნიშანი. ვთქვათ ფუნქციონალურ მწკრივს აქვს სახე: $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$

თუ $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)$ მწკრივი თანაბრად კრებადია რომელიღაც შუალედზე, ხოლო $\alpha_n(x)$ n=1,2... ფუნქცია შემოსაზღვრულია იგივე შუალედზე, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\cdot\beta_n(x)$ ფუნქციონალური მწკრივი იქნება თანაბრად კრებადი იმავე შუალედზე. [102]

მაგალითი 7. აჩვენეთ თანაბრადკრებადობა მწკრივისა

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ [0,1] შუალედზე

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$, სადაც $\alpha_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ხოლო $\beta_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$

გამოვიყენოთ აბელის ნიშანი. მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$

თანაბრადკრებადია $0\le x<\infty$ სეგმენტზე. ამიტომ იგი თანაბრადკრებადი იქნება [0,1] სეგმენტზეც.

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ მიმდევრობა $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ ნებისმიერი x>0-სათვის მონოტონურად ზრდადია, როცა $n\to\infty$ და მისი ზღვარია e^x.

ამიტომ ფუნქცია $\alpha_n(n)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ შემოსაზღვრულია [0,1] სეგმენტზე და ყოველი $x\in[0,1]$სეგმენტი მონოტონურად ზრდადია, საიდანაც აბელის ნიშნის გამოყენებით დავასკვნით, რომ მოცემული ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრადკრებადია [0,1] სეგმენტზე.[63],[64].

დირიხლეს ნიშანი ვთქვათ ფუნქციონალური მწკრივი მოცემულია შემდეგი ფორმით: $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n(x)$

სადაც $\{\alpha_n\}$ — მონოტონური რიცხვითი მწკრივია, რომელიც კრებადია 0-სკენ. თუ $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)$ მწკრივის კერძო ჯამები $S_n(x)$ შემოსაზღვრულია რომელიმე შუალედში, რაიმე M რიცხვისკენ $\left(M>0,\ |S_n(x)|\le M\right)$, მაშინ მოცემული ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრადკრებადია ამ შუალედში.

მაგალითი 8. დავამტკიცოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ მწკრივის თანაბრადკრებადობა ნებისმიერ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს $x=2\pi k;\ k\in z$ წერტილებს.

ამოხსნა. ამ მწკრივის თანაბრადკრებადობა გამოვიკვლიოთ დირიხლეს ნიშნის დახმარებით. მოცემული მწკრივი წარმოვადგინოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n(x)$ ფორმით, სადაც $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $\beta_n(x)=\sin nx$

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ მიმდევრობა მონოტონურად კრებადია 0-სკენ. ამიტომ დირიხლეს პირველი პირობა შესრულებულია, ახლა შევამოწმოთ მეორე პირობის მართებულობა. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ მწკრივის σ_n კერძო ჯამებისათვის მართებულია უტოლობა $|\sigma_n|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\ x\ne 2\pi k.$

$x=2\pi k$ წერტილებში $\sin\frac{x}{2}=0,$ ნებისმიერ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს $x=2\pi k$ წერტილებს, $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ ფუნქცია უწყვეტია და შემოსაზღვრული. ამიტომ არსებობს M>0 რიცხვი, ისეთი, რომ $|\sigma_n|\le M$ ყოველი ასეთი შუალედისთვის.

მაშასადამე, დირიხლეს ნიშნის მეორე პირობაც შესრულებულია, ამიტომ მოცემული მწკრივი თანაბრადკრებადია ყველა ისეთ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს $x=2\pi k$, $k\in z$ წერტილებს.[79].

§3. ხარისხოვანი მწკრივების სწავლება

ფუნქციათა მწკრივებს შორის თეორიული თვალსაზრისით უმარტივესი და ამასთან მრავალი გამოყენებისათვის უმნიშვნელოვანესია ხარისხოვანი მწკრივები, ე.ი. შემდეგი სახის მწკრივები: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$ (1)

სადაც, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ მუდმივებია. ამ მუდმივებს ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები ეწოდება. ხშირად ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება უფრო ზოგად გამოსახულებას $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$ (2)

სადაც a მუდმივი სიდიდეა. ეს ხარისხოვანი მწკრივი y=x-a ჩასმით შეიძლება დავიყვანოთ (1) სახემდე.

ხარისხოვანი მწკრივის კერძო $S_n(x)$ ჯამი მრავალწევრია. თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი S(x) ჯამი საზოგადოდ ძალიან რთული აგებულების ფუნქციაა. $S_n(x)$ შეგვიძლია განვიხილოთ S(x) ფუნქციის მიახლოებით გამოსახულებად, ამასთან ამ მიახლოების სიზუსტე შეგვიძლია რაგინდ მაღალი გავხადოთ, თუ $S_n(x)$ კერძო ჯამში n-ს საკმაოდ დიდს ავიღებთ.[17].

ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე ცარიელი სიმრავლე არაა. (1) მწკრივი კრებადია, ყოველ შემთხვევაში x=0 წერტილში მაინც. ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე შუალედია, რაც აადვილებს მწკრივთა ამ კლასის შესწავლას.

აბელის პირველი თეორემა: თუ ხარისხოვანი მწკრივი $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$ კრებადია $x = x_0$ მნიშვნელისათვის, მაშინ იგი აბსოლუტურად კრებადია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| < |x_0|$. თუ (1) ხარისხოვანი მწკრივი განშლადია $x = x_0$-სათვის, მაშინ იგი განშლადია ყველა x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x| > |x_0|$.

გავარკვიოთ, თუ რა ხასიათის კრებადობის არეები შეიძლება არსებობდეს ხარისხოვანი მწკრივებისათვის. განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი $1 + x + 2^2x^2 + ... + n^nx^n + ...$

დავამტკიცოთ, რომ ამ მწკრივის კრებადობის არე შედგება მხოლოდ ერთი x=0 წერტილისგან. თუ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $U_n = |n^nx^n|$ (n=1,2,...). გვექნება

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}|x| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)|x|.$$

აქედან ცხადია, რომ $x \neq 0$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty.$

მაშასადამე, დალამბერის ნიშნის მიხედვით მოცემული მწკრივი განშლადია, როცა $x \neq 0$. ამრიგად, კრებადობის არე შედგება მხოლოდ ერთი x=0 წერტილისაგან.

მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

ამ მწკრივის კრებადობის არეა $]-\infty;+\infty[$ შუალედი. მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $U_n=\left|\frac{x^n}{n!}\right|$ $(n=0,1,...)$ გვექნება $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{|x|}{n+1}$

აქედან ყოველი x-სათვის გვექნება $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=0$, მაშასადამე, დალამბერის ნიშნის თანახმად მოცემული მწკრივი კრებადია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი $1+x+x^2+...+x^n+...$

ეს წარმოადგენს გეომეტრიულ მწკრივს და ამიტომ იგი კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $|x|<1$, მაშასადამე, მწკრივის კრებადობის არე (-1;+1) ინტერვალია.

ამრიგად, ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე შეიძლება შედგებოდეს მხოლოდ ერთი წერტილისაგან, რიცხვა ღერძისაგან და სასრული შუალედისაგან.

ავღნიშნოთ E-თი მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე. ავღნიშნოთ R ასოთი E სიმრავლის ზედა საზღვარი. ცხადია, აღნიშნული მწკრივი კრებადია (-R;R) ინტერვალში და განშლადია, როდესაც $|x|>R$, ხოლო, როცა $x=-R$ ან x=R შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა შემთხვევას: მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს ორივე — -R და R წერტილში. კრებადი იყოს ამ წერტილებიდან ერთ-ერთში, ხოლო განშლადი — მეორეში. და ბოლოს, მწკრივი შეიძლება განშლადი იყოს -R და R წერტილში. (-R,R) ინტერვალს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ინტერვალი, R რიცხვს კი — კრებადობის რადიუსი.

თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ x=0 წერტილში, მაშინ ვიტყვით, რომ კრებადობის რადიუსია 0, ხოლო თუ მწკრივი კრებადია x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის, მაშინ $R=+\infty$.

1)თუ (1) მწკრივის კოეფიციენტები ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ მაშინ კრებადობის R რადიუსი იქნება

$$R=\begin{cases}\frac{1}{L},\ \text{როდესაც}\ 0<L<+\infty\\ +\infty,\text{როდესაც}\ L=0\\ 0,\quad \text{როდესაც}\ L=+\infty\end{cases}$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S^{n^2}x^{n^2}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივი გაშლილი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$5\cdot x+5^4x^4+5^9x^9+\ldots+5^{n^2}x^{n^2}+\ldots$$

კრებადობის რადიუსი გამოვთვალოთ კოშის ნიშნით გამოყენებით

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{5^{n^2}x^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(5x)^n=\begin{cases}\infty, \text{ Tu } |5x|>1, \text{ ანუ } |x|>\dfrac{1}{5}\\ 1, \text{ Tu } |5x|=1, \text{ ანუ } x=\pm\dfrac{1}{5}\\ 0, \text{ Tu } |5x|<1, \text{ ანუ } -\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

მაშასადამე, გამოირკვა, რომ მწკრივი კრებადია $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}$ შუალედში. ამ შუალედის გარეთ მწკრივი განშლადია და, როცა $x=\pm\frac{1}{5}$ არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. აქ $c_n=n^n$. კოშის ნიშნის გამოყენებით $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

მაშასადამე, მწკრივი კრებადია ერთ $x=0$ წერტილში.

2) თუ (1) მწკრივის კოეფიციენტი ისეთია, რომ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ (3)

მაშინ მწკრივის კრებადობის რადიუსი R იქნება

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{L}, \text{ r odesac } 0<L<+\infty\\ +\infty, \text{ r odesac } L=0\\ 0, \quad \text{როდესაც } L=+\infty\end{cases}$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{2^n}$ მწკრივის კრებადობის არე.

ამოხსნა. აქ $c_n=\dfrac{n^2}{2^n}$, $c_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2}=2$$

კრებადობის შუალედია (-2;2).

გამოვიკვლიოთ მწკრივის კრებადობა ამ ინტერვალის საზღვრის წერტილებში. როცა $x=\pm 2$ ხარისხოვანი მწკრივი მიიღებს სახეს: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cdot(\pm 2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n\cdot n^2$

მიღებული მწკრივი განშლადია, რადგან არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა. მაშასადამე, მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა -2<x<2.

როგორც ზემოთ დავინახეთ, ხარისხოვანი მწკრივი $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ (4)

შეიძლება კრებადი იყოს მისი კრებადობის ინტერვალის ერთ-ერთ ან ორივე ბოლოზე. ამ შემთხვევაში მისი $S(x)$ ჯამი განსაზღვრული იქნება ასეთ ბოლო წერტილზე და $\lim_{x\to R}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$, სადაც S(x) (4) მწკრივის ჯამია.

რომ დავადგინოთ $a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$ მწკრივის კრებადობის რადიუსი გამოვიყენებთ y=x-a ჩასმა და მწკრივი დავიყვანოთ (1) სახემდე.

თუ (1) მწკრივის კრებადობის ინტერვალი სიმეტრიულია x=0 წერტილის, მაშინ (2) მწკრივის კრებადობის ინტერვალი იქნება $a-R<x<a+R$,რომელიც სიმეტრიულია x=a წერტილის.

ხარისხოვანი მწკრივის გამოკვლევა კრებადობაზე, ნიშნავს კრებადობის ინტერვალის პოვნას და გამოკვლევას კრებადია თუ განშლადი მწკრივი კრებადობის ინტერვალის სასაზღვრო წერტილებში.ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე ყოველთვის შედგება მისი კრებადობის ინტერვალისაგან და შესაძლოა ამ ინტერვალის სასაზღვრო წერტილებისაგან. (2) სახის ხარისხივანი მწკრივებისთვის ადგილი აქვს თეორემას, რომელსაც აბელის მეორე თეორემას უწოდებენ.

თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია ინტერვალში $(a-R_1,a+k)$ $s(x)$ ფუნქციისკენ, მაშინ მისი ჯამი $x=a-R$ და $x=a+R$ სასაზღვრო წერტილებში შესაბამისად შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულებით

$$S(a-R)=\lim_{x\to(a-R)+0}S(x) \qquad \text{და} \qquad S(a+R)=\lim_{x\to(a+R)-0}S(x)$$

იმ პირობით, რომ მოცემული ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x = a - R$ და $x = a + R$ წერტილებში.

ხარისხოვანი მწკრივის გამოთვლას კრებადობის ინტერვალის სასაზღვრო წერტილებში (5) ფორმულის გამოყენებით ეწოდება აბელის მეთოდი.

ფუნქციონალურ $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left| f(x) \right|^n$ მწკრივს ეწოდება ზოგადად ხარისხოვანი მკწრივი, რომელიც $f(x) = y$ ჩასმით დაიყვანება $\sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n$ სახეზე. თუ $|y| < R$ არის $\sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n$ მკწრივის კრებადობის არე, მაშინ მოცემული ფუნქციონალური მკწრივის კრებადობის არის მოსაძებნად უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $\left| f(x) < R \right|$, x -ის მიმართ.

მაგალითი 7: ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2} e^{-nx}$ მწკრივის კრებადობის არე.

შემოვიღოთ აღნიშნვა $e^{-x} = y$, მივიღებთ ხარისხოვან მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2} y^n$, რომლის კრებადობის რადიუსია $R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1 + 1/n)^{-n^2}}} = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n = e$ სასაზღვრო წერტილში $y = e$ მოცემული მწკრივი ღებულობს სახეს $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(1 + 1/n)^{n^2}}$ და ვინაიდან ნებისმიერი n-თვის $\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{(1 + 1/n)^n} > 1$ კოშის ნიშნის გამოყენებით $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი განშლადია ვინაიდან $y = e^{-x} > 0$, მაშინ მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^{-n^2} y^n$ კრებადობის არე იქნება რიცხვების y სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობის $0 < y < e$. აქედან $0 < e^{-x} < e$, $-\infty < -x < 1$ და მაშასადამე, $x > -1$. ეს უტოლობა განსაზღვრავს მოცემული მწკრივის კრებადობის არეს.

ოპერაციები ხარისხოვან მწკრივებზე განისაზღვრება ისევე, როგორც ფუნქციონალურ მწკრივებზე. ვთქვათ მოცემულია ორი ხარისხოვანი მწკრივი:

$$f_1(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{a_n x^n} \quad \text{და} \quad f_2(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{b_n x^n}$$

რომელთა კრებადობის რადიუსებია შესაბამისად R_1 და R_2 რიცხვები. ცხადია, ორივე მოცემული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია (-R,R) ინტერვალში, სადაც $R=\min(R_1,R_2)$.

მაშასადამე ამ ინტერვალში კრებადი იქნება ამ მწკრივების ჯამი და სხვაობა, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით: $\left(f_1 \pm f_2\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)x^n$ (5)

შეკრების ოპერაცია ზემოთ აღწერილი წესით განისაზღვრება ხარისხოვან მწკრივთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობის შემთხვევაში. ვინაიდან $\forall x \in(-R, R)$ (5) მწკრივი კრებადია, ამიტომ მისი კრებადობის რადიუსი აბელის პირველი თეორემის თანახმად არ არის ნაკლები $R=\min(R_1,R_2)$ რიცხვზე.

ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივების გამრავლება. ვთქვათ მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივები: $f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ და $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

ორივე ეს მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია (-R,R) ინტერვალში, სადაც $R=\min(R_1,R_2)$. ამიტომ ჩვენ უფლება გვაქვს ეს მწკრივები გავამრავლოთ ერთმანეთზე კოშის აზრით. $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\ldots+a_n b_0\right)x^n$

ცხადია, მიღებული მწკრივის კრებადობის რადიუსი აბელის პირველი თეორემის თანახმად არაა ნაკლები R-ზე.[74].

მაგალითი 7. გადავამრავლოთ მწკრივები: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$ და $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$

ამოხსნა

$$\left(1+3x+\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{3^n x^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1+(3-1)x+\left(\frac{3^2}{2!}-3+\frac{1}{2!}\right)x^2+\ldots+\left(\frac{3^n}{n!}-\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{3^{n-2}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\cdot x^n+\ldots=$$

$$=1+2x+\frac{2^2}{3!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left[3^n-n\cdot 3^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 3^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 3^{n-3}+\ldots+(-1)^n\right]x^n+$$

$$+\ldots=1+2x+\frac{2^2}{3!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}(3-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}.$$

სამივე მწკრივი კრებადია $\forall x$ -სათვის.

ორი ხარისხოვანი მწკრივის გაყოფის ხერხები არ განსხვავდება რიცხვითი მწკრივის გაყოფის ხერხებისაგან. განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივების გაყოფის მაგალითი:

მაგალითი 8. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ მწკრივი გავყოთ $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ მწკრივზე.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივების კრებადობის არეა $|x|<1$. გაყოფა შევასრულოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\ldots \\ \underline{1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots} \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} 2x+5x^2+9x^3+14x^4+\ldots \\ \underline{2x+2x^2+2x^3+2x^4+\ldots} \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} 3x^2+7x^3+12x^4+\ldots \\ \underline{3x^2+3x^3+3x^4+\ldots} \end{array} \\
\qquad\quad -\begin{array}{l} 4x^3+9x^4+\ldots \\ \underline{4x^3+4x^4+\ldots} \end{array} \\
\qquad\qquad\quad 5x^4+\ldots
\end{array}
&
\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots \\ \hline 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+(n+1)\cdot x^n+\ldots \end{array}
\end{array}$$

ამ შემთხვევაში ორი მწკრივის გაყოფით მივიღეთ $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$ მწკრივი. სამივე მწკრივი კრებადია, როცა $|x|<1$.

გაყოფა შეიძლება შევასრულოთ სხვა მეთოდითაც. ვთქვათ:

$$\frac{1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\ldots}{1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots}=c_o+c_1x+c_2x^2+c_3x^x+c_4x^4+\ldots \text{აქედან}$$

$$1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\ldots=\left(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots\right)+\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\right)$$

თუ გამოვიყენებთ მწკრივების გამრავლების წესს, მივიღებთ

როცა x^0, მაშინ $c_0\cdot 1=1$

როცა x^1, მაშინ $c_0+c_1=3$

როცა x^2, მაშინ $c_0+c_1+c_2=6$

როცა x^3, მაშინ $c_0+c_1+c_2+c_3=10$

როცა x^4, მაშინ $c_0+c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

ამ უტოლობების ამოხსნით მივიღებთ: $c_0=1,\ c_1=2,\ c_2=3,\ c_3=4,\ldots c_n=n+1$

და მაშასადამე გაყოფისას მივიღებთ მწკრივს $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n\ldots$

§4. მწკრივთა დიფერენცირების და ინტეგრების სწავლების მეთოდიკა

ზოგიერთი ფუნქციონალური მწკრივის ჯამის გამოთვლისას შეიძლება გამოვიყენოთ მწკრივის წევრობრივ ინტეგრება ან დიფერენცირება.განვიხილავთ ფუნქციათა მწკრივის წევრ-წევრა ინტეგრების საკითხი:

თეორემა 1: თუ [a,b] სეგმენტზე ინტეგრებად ფუნქციათა მწკრივი

$$U_0(x)+U_1(x)+...+U_n(x)+... \qquad (1)$$

ამავე სეგმენტზე თანაბრად კრებადია, მაშინ S(x) ჯამიც ინტეგრებადია და მართებულია ტოლობა:

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b U_0(x)dx+\int_a^b U_1(x)dx+...+\int_a^b U_n(x)dx+... \qquad (2)$$

შევნიშნოთ რომ, ინტეგრებად ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობა აუცილებელი არაა მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებადობისათვის.[19],[25].

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(x^2-a\right)^n$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ x^2-1=y და გამოვთვალოთ S(y) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ ხარისხოვანი მწკრივის, რომელიც თანაბრად კრებადია, როცა |y|<1. $S(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot y^n$ ტოლობა გავაინტეგროთ [0,y] სეგმენტზე და შემდეგ მიღებული ტოლობა გავადიფერენციალოთ y-ის მიმართ. გვექნება:

$$\int_0^y S(y)dy=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}=\frac{y}{1-y} \text{ და } S(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)^1=\frac{1}{(1-y)^2}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ y=x^2-1, გვექნება $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$

ეს ტოლობა სამართლიანია ყველა იმ x-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|x^2-1|<1$ ე.ი. $-1<x^2-1<1$ და $0<x^2<2$ საიდანაც $-\sqrt{2}<x<0$ და $0<x<\sqrt{2}$

თეორემა 2. თუ [a,b] სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებდა ფუნქციათა მწკრივი

$U_0(x)+U_1(x)+...+U_n(x)+...$ ამავე სეგმენტზე კრებადია, ხოლო წარმოებულია მწკრივი $U_0'(x)+U_1'(x)+...+U_n'(x)+...$ თანაბრად კრებადია [a,b] სეგმენტზე, მაშინ მწკრივის S(x) ჯამსაც აქვს წარმოებული და მართებულია ტოლობა: $S'(x)=U_0'(x)+U_1'(x)+...+U_n'(x)+...$ (3)

თეორემა 3: ვთქვათ [a,b] სეგმენტზე დიფერენცირებად ფუნქციათა მწკრივი $(U_n(x))$ კრებადია ამ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც. თუ მწკრივი $(U_n'(x))$ თანაბრად კრებადია [a,b]-ზე, ხოლო ყოველი $U_n'(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმნის აზრით [a,b] სეგმენტზე, მაშინ მოცემული მწკრივი $(U_n(x))$ აგრეთვე თანაბრად კრებადია [a,b]-ზე. ამ მწკრივის ჯამი დიფერენცირებადი ფუნქციაა და მისი წარმოებული უდრის წარმოებულთა მწკრივის ჯამს: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x)$

ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივის ინტეგრება და გაწარმოება. განვიხილოთ ხარისხოვანი მწკრივი $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ (4)

აგრეთვე განვიხილოთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივები

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+... \quad (5)$$

$$a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+... \quad (6)$$

(5) მწკრივი მიიღება (4) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით [0,x] შუალედში, (6) მწკრივი კი —(4) მწკრივის წევრ-წევრად გაწარმოებით.

ხარისხოვანი მწკრივებისათვის მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 4. ხარისხოვანი მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების ან გაწარმოების შედეგად მიღებულ მწკრივებს ისეთივე კრებადობის რადიუსები აქვთ, როგორც აღებულ ხარისხოვან მწკრივს.[39].

თეორემა 5. (4) მწკრივის კრებადობის ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია ტოლობა $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (7)

სადაც f(x) წარმოადგენს (4) მწკრივის ჯამს. ამასთან, უკანასკნელი მწკრივი თანაზრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე, რომელიც მოთავსებულია (4) მწკრივის კრებადობის (-R; R) ინტერვალში.

თეორემა 6. (4) მწკრივის f(x) ჯამი წარმოებადია ამ მწკრივის კრებადობის (-R; R) ინტერვალში და ამ ინტერვალის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია ტოლობა

$$f'(x)=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+... \qquad (8)$$

შედეგი: თუ (4) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია R, R>0, მაშინ ამ მწკრივის f(x) ჯამს აქვს (-R; R) ინტერვალში ყველა რიგის წარმოებული, ამასთან $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, ...)$ ფუნქცია წარმოადგენს (4) მწკრივის n-ჯერ წევრ-წევრად გაწარმოებით მიღებულ მწკრივის ჯამს.[67].

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი

.**მაგალითი2.** გამოთვალეთ $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...=f(x)$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივის კრებადობის არეა (-1,1) ინტერვალი. თეორემა 4-ის თანახმად მოცემული ხარისხოვანი მწკრივის წევ-წევრად გაწარმოებით მიღებული მწკრივის კრებადობის არე იგივე (-1,1) ინტერვალი იქნება.

ვიპოვოთ წარმოებული $1+x+x^2+x^3+...x^{n-1}+...=S'(x)$

მიღებული მწკრივის ჯამი, როცა $|x|<1$ არის $S'(x)=\frac{1}{1-x}$. საიდანაც

$S(x)=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+c$ გამოთვალეთ c მუდმივას მნიშვნელობა, როცა $x=0,\ S(0)=0$ და მივიღებთ: $0=-\ln(1-0)+c$, საიდანაც c=0 ამ შემთხვევაში მოცემული მწკრივის ჯამი $S(n)=-\ln(1-x)$, რომელიც კრებადია, როცა $|x|<1$

შევნიშნოთ, რომ მოცემული მწკრივი x=1 წერტილზე განშლადა და ლეიბნიცის ნიშნის თანახმად, როცა x=-1 კრებადია.

აბელის II თეორემის თანახმად, თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია x=a-K წერტილზე, გვაქვს $S(a-R)=\lim_{x\to(a-R)+0}S(x)$

ჩვენ შემთხვევაში $a=0,\ R=a,\ S(x)=-\ln(1-x)$

და მაშასადამე $S(-1)=\lim_{x\to-1+0}\left[-\ln(1-x)\right]=-\ln 2$

ამ შემთხვევაში $-\ln(1-x)$ ფუნქციის კრებადობის არე განისაზღვრება შემდეგნაირად: $-1\le x<1$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. მოცემული მწკრივის ჯამი ავღნიშნოთ S(x)-ით და ვიპოვოთ S'(x) და S''(x)

$$S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$$

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...$$

$$S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$$

შევნიშნოთ, რომ S''(x)=S(x) მიღებული თანაფარდობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დიფერენციალური განტოლება საძიებელი S(x) ფუნქციისათვის, რომლის საწყისი პირობებია S(0)=1, S'(0)=0.

ეს განტოლება წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციას c მუდმივი კოეფიციენტით. იგი იხსნება K^2-1=0 მახასიათებელი განტოლებით, რომლის ფესვებია $K_{1,2}=\pm1$. მაშასადამე $S(x)=c_1\ell^{x}+c_2\ell^{-x}$

c_1 და c_2 კოეფიციენტები ვიპოვოთ სისტემით

$$\begin{cases}S(0)=1\\ S'(0)=0\end{cases}\quad \text{ანუ}\quad \begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1-c_2=0\end{cases}$$

$c_1=c_2=\frac{1}{2}$. მაშასადამე $S(x)=\frac{1}{2}\ell^{x}+\frac{1}{2}\ell^{-x}$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)}$ მწკრივის ჯამი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ დამხმარე ხარისხოვანი მწკრივი $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$

და გამოვიყენოთ აბელის მეთოდი

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)}=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}=\lim_{x\to1-0}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right)_x^1 dx=\lim_{x\to1-0}\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\right)dx=\lim_{x\to1-0}\int_0^x\frac{dx}{1+x^3}=$$

$$\lim_{x\to1-0}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^x=\lim_{x\to1-0}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right]=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

§5. ფუნქციის დაშლა მწკრივებად

ჩვენ განვსაღვრეთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის არე და შევისწავლეთ ასეთი მწკრივის ჯამის თვისებები. გამოყენებებში საქმე გვაქვს შებრუნებულ ამოცანასთან: მოცემულია შუალედში განსაზღვრული f(x) ფუნქცია და გამოსარკვევია ამ შუალედში ეს ფუნქცია წარმოადგენს თუ არა ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს ანუ, შეიძლება თუ არა f(x) ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად. თუ ასეთი დაშლა შესაძლებელია, როგორ ვიპოვოთ ამ მწკრივის კოეფიციენტები. f(x) ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად დაშლაზე შეიძლება ლაპარაკი იმ შემთხვევაში, როდესაც ამ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული მოცემულ შუალედში.[38].

განვიხილოთ f(x) ფუნქცია, რომელსაც აქვს a წერტილში ყველა რიგის წარმოებული და შევადგინოთ ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+T_n(x) \qquad (1)$$

ამ მწკრივს ეწოდება f(x) ფუნქციის ტეილორის მწკრივი. თუ a=0, მაშინ (1) მწკრივს მაკლორენის მწკრივი ეწოდება. სადაც $T_n(x)$ მწკრივის დანარჩენი წევრებია.

თუ f(x) ფუნქციას x=a წერტილის მოცემულ მიდამოში აქვს (n+1) რიგის უწყვეტი წარმოებული, მაშინ $T_n(x)$ შეიძლება სამი სახით ჩაიწეროს.

1. $\mathrm{T_n}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{f}^{(n+1)}\big(\mathrm{a}+\mathrm{Q}(\mathrm{x}-\mathrm{a})\big)}{(\mathrm{n}+1)!}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{n}+1}$ სადაც $0<\mathrm{Q}<1$ (ლაგრანჟის ფორმულა)

2. $\mathrm{T_n}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{f}^{(n+1)}\big[\mathrm{a}+\mathrm{Q}(\mathrm{x}-\mathrm{a})\big]}{\mathrm{n}!}(1-\mathrm{Q})^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\mathrm{n}+1},\ 0<\mathrm{Q}<1$ (კოშის ფორმულა)

3. $\mathrm{T_n}(\mathrm{x})=\dfrac{1}{\mathrm{n}!}\displaystyle\int_a^x(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\mathrm{n}}\mathrm{f}^{(n+1)}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ (ინტეგრალური ფორმა)

ახლა ვთქვათ f(x) ფუნქციას x=a წერტილში და მის მიდამოში აქვს ყველა რიგის წარმოებული. მაშინ (1) ფორმულის წევრთა რაოდენობა შეიძლება შემოუსაზღვრელად გავზარდოთ და ჩნდება კითხვა ხომ არ მივიღებთ ზღვარში, როცა $\mathrm{n}\to\infty$, $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ფუნქციას წარმოადგენს უსასრულო მწკრივად

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\infty \qquad (2)$$

(2) მწკრის მიუხედავად იმისა, მიისწრაფვის თუ არა იგი f(x) ფუნქციისაკენ, ეწოდება ტეილორის მწკრივი. f(x) ფუნქციისათვის თუ x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის a წერტილის რაიმე მიდამოდან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (3)$$

მაშინ f(x) ფუნქციას ეწოდება ტეილორის მწკრივად გაშლადი x=a წერტილის მიდამოში.

როცა a=0, მაშინ ტეილორის მწკრივ აქვს სახე $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$ (4)

და ეწოდება მაკლორენის მწკრივი.

თეორემა 1. ყოველი ხარისხოვანი მწკრივი $a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$ (5)

რომლის კრებადობის R რადიუსი ნულისაგან განსხვავებულია, წარმოადგენს ამ მწკრივის ჯამის ტეილორის მწკრივს.

ისმის კითხვა: თუ f(x) ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული რაიმე შუალედში, მაშინ ამ ფუნქციას ტეილორის მწკრივი ხომ არ იქნება კრებადი და თუ კრებადია, ხომ არ წარმოადგენს მისი ჯამი f(x) ფუნქციას? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი.

მაგალითი 1. ვთქვათ f(x) ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში

$$f(x)=\begin{cases}\ell^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როდესაც } x\neq 0\\ 0, & \text{როდესაც } x=0\end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

თუ $x\neq 0$, გვაქვს: $f'(x)=\frac{2}{x^3}\ell^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}\ell^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}\ell^{-\frac{1}{x^2}},\ldots$

ცხადია, რომ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{\ell^{t^2}}=0 \qquad \left(t=\frac{1}{x}\right),$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-6\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{\ell^{t^2}}=0$$

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=0$$

მაშასადამე f(x) ფუნქციის მაკლორენის მწკრივს აქვს სახე $0+0\cdot x+0\cdot x^2+\ldots+0\cdot x^n+\ldots=0$

ეს მწკრივი კრებადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში და მისი ჯამი ნულის ტოლია. მეორე მხრივ f(x) ფუნქცია ყველგან განსხვავებულია ნულისაგან გარდა x=0 წერტილისა. მაშასადამე, f(x) ფუნქცია არ იშლება თავისი ტეილორის მწკრივად x=0 წერტილის არც ერთ მიდამოში.

ამრიგად, თუმცა f(x) ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული და მისი ტეილორის მწკრივი კრებადია, ამ მწკრივის ჯამი არ გვაძლევს f(x) ფუნქციას.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი f(x) ფუნქცია, რომელსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული x=0 წერტილში, მაგრამ მწკრივი $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$

განშლადია ნულისაგან განსხვავებულ ყოველ წერტილში? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2^m x)}{m!}$

ამ მწკრივის წევრები უწყვეტი ფუნქციებია. მწკრივი კი თანაბრად კრებადი $(-\infty;+\infty)$ შუალედში. მაშასადამე, f(x) უწყვეტია ნებისმიერი x-სათვის. ამ მწკრივის n-ჯერ გაწარმოება წევრ-წევრად გვაძლევს მწკრივს $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^{mn}}{m!}\sin\left(2^m x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad(n=1,2,\ldots.)$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში. ამიტომ $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^{mn}}{m!}\sin\left(2^m x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ აქედან $f^{(n)}(0)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^{mn}}{m!}\sin\frac{n\pi}{2}$

თუ n ლუწია, მაშინ $f^{(n)}(0)=0$, ხოლო თუ n კენტია n=2K+1, მაშინ

$$f^{(2K+1)}(0)=(-1)^K\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{(2K+1)m}}{m!}=(-1)^K\left(\ell^{2K+1}-1\right).$$ ამის გარდა, $f(0)=0$

ამრიგად, ჩვენი ფუნქციის მაკლორენის მწკრივია $\frac{\ell^2-1}{1}x-\frac{\ell^{2^3}-1}{3!}x^3+\frac{\ell^{2^5}-1}{5!}x^5-\ldots$

როცა $x\neq 0$ ამ მწკრივის ყოველი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობის ფარდობა წინა წევრის აბსოლუტურ მნიშვნელობასთან გვაძლევს:

$$\frac{e^{2k+1}-1}{(2k+1)!}|x|^{2k+1}:\frac{e^{2k+1}-1}{(2k-1)!}|x|^{2k-1}=\frac{e^{2k+1}-1}{e^{2k-1}-1}\frac{x^2}{2k(2k+1)}=\frac{e^{3\cdot 2^{k-1}}-e^{-2k-1}}{1-e^{-2k-1}}\cdot\frac{x^2}{2k(2k+1)}>\left(e^{3\cdot 2^{k-1}}-1\right)\frac{x^2}{2k(2k+1)}$$

ეს უკანასკნელი გამოსახულება მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ. როცა $K \to \infty$ ე.ი. მოცემული f(x) ფუნქციის მაკლორენის მწკრივი განშლადია ნებისმიერი x-სათვის, რომელიც ნულისაგან განსხვავებულია.

ახლა გადავიდეთ იმ პირობის დადგენაზე, რომელთა შესრულების შემთხვევაში f(x) ფუნქციის (1) ტეილორის მწკრივი კრებადია f(x) ფუნქციისაკენ რაიმე (a-R; a+R) ინტერვალში.

f(x) ფუნქციისათვის დავწეროთ ტეილორის ფორმულა:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

მართებულია შემდეგი **თეორემა 2**. f(x) ფუნქციის (1) ტეილორის მწკრივი კრებადია f(x) ფუნქციისაკენ (a-R; a+R) ინტერვალში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ (6) (a-R; a+R) ინტერვალის ყოველ x წერტილში.

თეორემა 3. თუ (a-R; a+R) ინტერვალში f(x) ფუნქციის წარმოებულები აკმაყოფილებს პირობებს

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

სადაც M_n ისეთი რიცხვებია რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n(n+1)} = 0 \qquad (8)$$

მაშინ f(x) ფუნქცია დაიშლება ტეილორის მწკრივად.

თეორემა 4. თუ f(x) ფუნქციას x=a წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს ყველა რიგის წარმოებული და $\exists\lambda > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $\left|f^{(n)}(x)\right| \le x^n$ $\forall_n$-თვის, მაშინ f(x) ფუნქცია ხსენებული მიდამოს ყოველ წერტილში იშლება ტეილორის მწკრივად (x-a)-ს ხარისხებად.

თეორემა 5. თუ f(z) ფუნქცია (Z კომპლექსური ცვლადია) ანალიტიკურია a წერტილში და $Z_0 = x_0 + iy_0$ a-სთან ახლო განსაკუთრებული წერტილია f(z) ფუნქციის, მაშინ f(x) ფუნქცია (ნამდვილი ცვლადის) იშლება ხარისხოვან მწკრივად $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, რომელიც კრებადია f(x)-კენ (a-R; a+R) ინტერვალში, რომლის რადიუსი ტოლია a და Z_0 წერტილებს შორის მანძილის $R = |Z_0 - a|$

(f(z) ფუნქციას ეწოდება ანალიზური Z_0 წერტილში, თუ ამ წერტილში და მის რაიმე მიდამოში მას აქვს წარმოებული. წერტილს, რომელშიც f(z) ფუნქცია არაა ანალიზური ეწოდება განსაკუთრებული)[76],[81].

თეორემა 5-ის მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი იძლევა ტეილორის ნაპოვნი მწკრივის კრებადობის გარანტიას f(x) ფუნქციისაკენ ინტერვალში $\left(a-\left|Z_0-a\right|,\, a+\left|Z_0-a\right|\right)$. და გვათავისუფლებს შესაბამისი ტეილორის ფორმულის ნარჩენი წევრის გამოკვლევის და გაშლის სხვა საკმარისი ნიშნების გამოყენებისაგან.

ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად გაშლის ერთადერთობის შესახებ ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

ა) რა გზითაც არ უნდა იყოს f(x) ფუნქცია გაშლილი $c_0+\sum c_n\left(x-a\right)^n$ ხარისხოვან მწკრივად, ეს მწკრივი იქნება მისთვის ტეილორის მწკრივი, ე.ი. მისი კოეფიციენტები ცალსახად იქნებიან განსაზღვრული ფორმულებით

$$c_0=f\left(a\right);\quad c_n=\frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!},\qquad n=1,2,....$$

გვაქვს ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად გაშლის შემდეგი მიდგომები.

1. f(x) ფუნქციის უშუალო გაშლა ტეილორის მწკრივად.

მიდგომა მდგომარეობს შემდეგში:

ა) f(x) ფუნქციისთვის ფორმალურად ადგენენ ტეილორის მწკრივს. ამ მიზნით გამოთვლიან f(x) ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებულს x<a წერტილში და სვამენ (2) გაშლაში.

ბ) პოულობენ მიღებული მწკრივის კრებადობის არეს.

გ) არკვევენ, კრებადობის არის რომელი x მნიშვნელობისთვის შეიძლება დაისვას ტოლობის ნიშნით f(x) ფუნქციასა და მის ტეილორის მწკრივს შორის.

2. გაშლის ცხრილის გამოყენება. ძირითად ცხრილურ გაშლას წარმოადგენს:

$$\ell^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...\qquad\left(\left|x\right|<\infty\right)\qquad(10)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\qquad\left(\left|x\right|<\infty\right)\qquad(11)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad (|x|<\infty) \tag{12}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3-x^4+\ldots \qquad (|x|<1) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m&=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=\\&=1+mn+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots \qquad (|x|<1)\end{aligned} \tag{14}$$

(m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მწკრივს ეწოდება ბინომიალური).

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad (-1<x\le 1) \tag{15}$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (|x|\le 1) \tag{16}$$

ამ გაშლათა გამოყენებით საკმაოდ მარტივად შეიძლება ბევრი სხვა ფუნქციის გაშლის პოვნა. ასე მაგალითად $\cos x^2$ ფუნქციის გაშლისას x-ის ხარისხებად საჭიროა (12) ტოლობაში x შევცვალოთ x^2-ით, ამასთან აღარაა აუცილებელი ტეილორის შესაბამის ფორმულებში ნარჩენი წევრების გამოკვლევა იმის გასარკვევად, შეიძლება თუ არა შედგენილ მწკრივსა და თავად ფუნქციას შორის ტოლობის ნიშნის დასმა, ვინაიდან ცხრილის მწკრივების კრებადობის არეები ცნობილია. (ბინომიალური მწკრივისათვის (14) მითითებულია მხოლოდ კრებადობის ინტერვალი ე.ი. როცა $x=\pm1$ (14) გაშლა იქცევა შემდეგნაირად: როცა $m\ge 0$, მაშინ აბსოლუტურად კრებადია ორივე საზღვარზე: როცა $-1<m<0$, მაშინ განშლადია x=-1-თვის და პირობით კრებადია x=1 თვის, ხოლო როცა $m\le -1$, მაშინ ორივე საზღვარზე განშლადია).

3. მწკრივების მიმატება და გამოკლების და მწკრივის რიცხვზე გამრავლების გამოყენება. ზოგჯერ ფუნქციისმწკრივად გაშლა მიიღება ცხრილები და ადრე ნაპოვნი გაშლების შეკრებით, ასევე ცნობილი გაშლის რიცხვზე გამრავლების გზით. ასე მაგალითად $(x^2-1)\ell^x$ ფუნქციის მწკრივად გაშლისას x-ის ხარისხებად საჭიროა (10) გაშლა გავამრავლოთ x^2-ზე და -1-ზე, ხოლო შემდეგ შეკრებით $x^2\ell^x$ და ℓ^x ფუნქციების ნაპოვნი გაშლები.

4. მწკრივების დიფერენცირებისა და ინტეგრების გამოყენება.

ფუნქციის მწკრივად გასაშლელად ხშირად იყენებენ მწკრივების დიფერენცირებას და ინტეგრებას. ასე მაგალითად $\frac{1}{1+x}$ ფუნქციის x-ის ხარისხებად.[94].

ცნობილი გაშლის ინტეგრებით შეიძლება მივიღოთ ცხრილური გაშლა (15).

5. მწკრივების გამრავლების გამოყენება.

თუ f(x) ფუნქცია წარმოადგენს ორი ფუნქციის ნამრავლს, მაშინ მისი მწკრივად გაშლა შეიძლება ნაპოვნი იქნას მწკრივების გადამრავლებით, რომლებშიც წინასწარ იშლებიან გადასამრავლებელი ფუნქციები. ასე მაგალითად, $\frac{\cos}{\sqrt{1+x}}$ ფუნქციის x-ის ხარისხებად გაშლის საპოვნელად უნდა გადავამრავლოთ cosx და $\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}$ ფუნქციების ცხრილური გაშლები (12) და (14).

მაგალითი 3. $f\left(x\right)=2^x$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად.

ა) განვიხილოთ f(x) ფუნქციის და მისი ყველა რიგის წარმოებულები x=0 ნაშთი

$$
\begin{array}{ll}
f\left(x\right)=2^x & f\left(0\right)=1 \\
f'\left(x\right)=2^x\ln 2 & f'\left(0\right)=\ln 2 \\
f''\left(x\right)=2^x\ln^2 2 & f''\left(0\right)=\ln^2 2 \\
\text{-----------------------} & \\
f^{(n)}\left(x\right)=2^n\ln^n 2 & f^{(n)}\left(0\right)=\ln^n 2
\end{array}
$$

ეს მნიშვნელობები გავითვალისწინოთ (2) ფორმულაში, როცა a=0 ტეილორის მწკრივს 2^x-სათვის

$$1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots$$

ვიპოვოთ მწკრივის კრებადობის რადიუსი.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)!\ln^n 2}{n!\ln^{n+1}2}=\infty$$

მაშასაადმე მწკრივი კრებადია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

მაგალითი 4. $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქცია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად.

ავღნიშნოთ $-x^2=y$ და გამოვიყენოთ (13) გაშლა. გვექნება

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+\ldots+y^n+\ldots=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

სადაც $-1<x<1$

მაგალითი 5. $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად.

ავღნიშნოთ $x^3 = y$ და გამოვიყენოთ ბინომიალური გაშლა (14).

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = (1+y)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{y}{3} + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3 + \ldots +$$

$$+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{-1}{3}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n + \ldots = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n} + \ldots$$

ეს გაშლა გვაქვს, როცა $-1 < x \le 1$

მაგალითი 6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ფუნქცია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად. (გამოვიყენოთ ცხრილური გაშლა)

შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{arctg} x$ ფუნქცია შეიძლება მივიღოთ $\frac{1}{1+x^2}$ ფუნქციის ინტეგრებით.

ამიტომ

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \ldots\right)dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

მიღებული მწკრივი კრებადია ინტერვალის $x = \pm 1$ ბოლოებზეც, ამიტომ კრებადობის შუალედია $-1 \le x \le 1$.

მაგალითი 7. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ფუნქცია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

მიღებული ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $-1 < x < 1$ ინტერვალში.

მაგალითი 8. $\frac{\ell^x}{1-x}$ ფუნქცია დავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად.

მიღებული ფუნქცია წარმოვადგინოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით.

$$\frac{\ell^x}{1-x}=\ell^x\cdot\frac{1}{1-x}=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots\right)=$$

$$=1+\left(x\cdot1+1\cdot x\right)+\left(1\cdot x^2+x^2+\frac{x^2}{2!}\cdot1\right)+\left(1\cdot x^3+x^3+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\left(1\cdot x^4+x^4+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)+$$

$$+\ldots+\left(1\cdot x^n+x^n+\frac{x^n}{2!}+\frac{x^n}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)+\ldots=1+2x+\left(2+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)x^3+$$

$$+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)x^4+\ldots+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)x^n+\ldots$$

გაშლა გვაქვს, როცა $-1<x<1$.

მაგალითი 9. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ფუნქცია გავშალოთ a=1 წერტილის მიდამოში, ე.ი. (x-1) ხარისხებად.

გამოვიყენოთ უშუალოდ გაშლის მეთოდი.

x=1 წერტილში გამოვთვალოთ ფუნქციის და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები.

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad f(1)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(1)=\frac{1}{3}$$

$$f''(x)=\frac{2}{3^2}x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''(1)=-\frac{2}{3^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot5}{3^3}x^{-\frac{8}{3}} \qquad f'''(1)=-\frac{2\cdot5}{3^3}$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots(3n-4)}{3^n}\cdot x^{-\frac{3n-1}{3}} \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots(3n-4)}{3^n}$$

მიღებული რიცხვითი მნიშვნელობები შევიტანოთ ტეილორის (3) გაშლაში, როცა a=1.

გვექნება

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3\cdot1!}(x-1)-\frac{2}{3^2\cdot2!}(x-1)^2+\frac{2\cdot5}{3^3\cdot3!}(x-1)^3-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}(x-1)^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}(x-1)^n$$

შეიძლება განვიხილოთ მიღებული მწკრივის გაშლის მეორე ხერხი:

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{1}{3}y+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}(x-1)^n$$

აქ გამოვიყენოთ ბინომიალური მწკრივი, როცა $m=\frac{1}{3}$.

ამ ბინომიალური დაშლისთვის $-1\le y\le 1$, მაშინ $-1\le x-1\le 1$, ე.ი. $0\le x\le 2$.

მაგალითი 10. $f(x)=\frac{1}{4+3x}$ მწკრივი გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად (x+2) ხარისხებად და დავადგინოთ კრებადობის არე.

$\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{-2+3(x+2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3(x+2)}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}$, სადაც $y=\frac{3(x+2)}{2}$, მაშინ ვისარგებლოთ ცხრილური გაშლით (13):

$$\frac{1}{4+3x}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-y}=-\frac{1}{2}(1+y+y^2+y^3+\ldots+y^n+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{3(x+2)}{2}+\left(\frac{3(x+2)}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3(x+2)}{2}\right)^n+\ldots\right]=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n$$

ამ მაგალითისათვის $-1<y<1$. ამიტომ $-1<\frac{3(x+2)}{2}<1$ საიდანაც

$-\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}$. ეს არის მიღებული მწკრივების კრებადობის არე.

მაგალითი 11. $\frac{1}{x^3-4x^2+13x}$ ფუნქცია გავშალოთ (x-6) ხარისხებად და ვიპოვოთ მიღებული მწკრივის კრებადობის არე?

დავაკვირდეთ $f(z)=\frac{1}{z^3-4z^2+13z}$ ფუნქციას, მოცემული ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილებია $z_1=0$ და $z_{1,2}=2\pm3i$.

განვიხილოთ $R=|a-z_0|=|6-(2+3i)|=|4-3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

მაშასადამე საძიებელი ინტერვალია (1; 11) (6-5; 6+5)

მაგალითი 12. გამოვთვალოთ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{(2n)!} = S(x)$ მწკრივის ჯამი, გვაქვს

$$S(x) = x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(2n)!} + \ldots = x^2\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots\right)$$

როცა $x \geq 0$.

$$S(x) = x^2\left(1 - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) = x^2 \cos\sqrt{x}$$

როცა $x < 0$ ავღნიშნოთ $x = -y$. მაშინ

$$S(x) = x^2\left(1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + \ldots + \frac{y^n}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= x^2\left(1 + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\sqrt{y}\right)^6}{6!} + \ldots + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) = x^2\, \mathrm{ch}\sqrt{y} = x^2\, \mathrm{ch}\sqrt{-x}$$

ასეთ შემთხვევაში

$$S(x) = \begin{cases} x^2 \cos\sqrt{x} & \text{როცა } x \geq 0 \\ x^2\, \mathrm{ch}\sqrt{-x} & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

§6. მწკრივების გამოყენება ზღვრების, წარმოებულების და ინტეგრალების გამოთვლაში

მწკრივების საშუალებით შეგვიძლია წინასწარ დასახელებული სიზუსტით ვიპოვოთ ფუნქციების, ინტეგრალების და ა.შ. მიახლოებითი მნიშვნელობები.

ჯერ განვიხილოთ მწკრივების გამოყენება ზღვართა თეორიაში, კერძოდ ისეთი წილადის ზღვრის საპოვნელად, რომლის მრიცხველი და მნიშვნელი მიისწრაფვიან ნულისაკენ, გვაქვს სხვადასხვა მიდგომა: იყენებენ ცხრილის ფორმულებს, ექვივალენტურ უასრულოდ მცირეებს და ლოპიტალის წესს, მაგრამ არსებობს ფარდობის ზღვრის გამოთვლის საკმაოდ ეფექტური ხერხი, რომელიც ეფუძნება ხარისხოვანი მწკრივების გამოყენებას. ის მდგომარეობს შემდეგში: წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი განლაგდებიან ხარისხოვან მწკრივებად (ერთი და იგივე x-a-ს ხარისხებით). ამის შემდეგ ახდენენ აუცილებელ შეკვეცებს, რომლის შემდეგად განუზღვრელობა ჩვეულებრივ ქრება. ცხადია მწკრივების გამოყენება არ გამორიცხავს სხვა მიდგომების გამოყენებას.[36],[34].

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\cos x-3\sin x}{x^4\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)-3\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)}{x^5}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)x^5+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{3}{7!}\right)x^7+\ldots}{x^5}=\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}=\frac{1}{60}$$

ტეილორის მწკრივის დახმარებით შეიძლება ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ნებისმიერი რიგის წარმოებულის რიცხვითი მნიშვნელობები. კერძოდ, რომ ვიპოვოთ $f^{(n)}(a)$, საჭიროა $f(x)$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად (x-a)-ს ხარისხებით, ხოლო შემდეგ ფორმულით $f^{(n)}(a)=c_n n!$ (1)

გამოვთვალოთ საჭირო რიგის წარმოებული (მოყვანილი ფორმულა მიიღება ზოგადი გამოსახულებიდან ეტილორის მწკრივის კოეფიციენტებისათვის $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$).

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $f(x)=x^5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის მეთერთმეტე რიგის წარმოებული x=0 წერტილში.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად x-ის ხარისხებით:

$$x^5\cos\frac{x}{2}=x^5\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{8!}-\ldots\right]=x^5-\frac{x^7}{2^2\cdot 2!}+\frac{x^9}{2^2\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{2^2\cdot 6!}+\frac{x^{13}}{2^2\cdot 8!}-\ldots$$

(1) ფორმულის გამოყენებით, გვაქვს: $f''(0)=c_n\cdot 11!=-\frac{11!}{2^6\cdot 2!}=-\frac{3465}{4}=-866,25$

შევნიშნოთ, რომ მოცემული ფუნქციის მეთერმეტე რიგის წარმოებულის უშუალო გამოთვლა არის საკმაოდ რთული და ამ ფორმულის გამოყენებით ეს მარიტვად ხდება.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+5}$ გამოსახულება ნებისმიერი რიგის წარმოებული x=-1 წერტილებში.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად (x+1)-ის ხარისხებით. $\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2(n+1)}}(x+1)^{2n}$

აქ $c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2(n+1)}}$, ხოლო $c_{2n-1}=0$ $\quad n=1,2,3,\ldots$ მაშინ მივიღებთ შემდეგს

$$f^{(2n)}(-1)=c_{2n}(2n)!=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+2}} \quad \text{და} \quad f^{(2n-1)}(-1)=0$$

მწკრივთა თეორია შეიძლება გამოვიყენოთ ფუნქციის ინტეგრირებისას. თუ $f(x)$ ფუნქცია იშლება $[a,b]$ მონაკვეთზე თანაბრად კრებად მწკრივად, მაშინ ინტეგრალი $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, სადაც $a\le x_1<x_2\le b$, ხშირად ასევე მარტივად წარმოდგება კრებადი მწკრივის სახით, ცხადია განუსაზღვრელი ინტეგრალებიც შეიძლება გამოვთვალოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მწკრივად გაშლის საშუალებით ამ უკანასკნელი მწკრივის ინტეგრებით. ასეთი გზით გვიხდება გამოვთვალოთ ინტეგრალების მწკრივი, რომლებიც არ გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციებით საბოლოო სახით, ასევე ზოგიერთი ინტეგრალების მწკრივი, რომელთა გამოთვლა სხვა ხერხებით მნიშვნელოვნად რთულდება.[51].

მაგალითი 4. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ ინტეგრალი წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით.

ამოხსნა. მოცემული ინტეგრალური ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად x-ის ხარისხებით. $\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$

მიღებული მწკრივი კრებადია მთელ $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ ინტერვალზე და თანაბრად კრებადია, მაშასადამებ იგი შეიძლება წევრ-წევრად ვაინტეგროთ ამ ინტეგრალზე. მივიღებთ:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}dx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{x^n}{n^2}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2\cdot 4^n}$$

მიღებული მწკრივის ჯამი გვაძლევს საწყისი ინტეგრალის ზუსტ მნიშვნელობას.

მაგალითი 5. $F(x)=\int_{\ell}^{x}\frac{dx}{\ln x}$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით.

ამოხსნა. ვთქვათ $\ln x=y$, მაშინ $x=\ell^y$ და $dx=\ell^y dy$

$$\int\limits_{\ell}^{x}\frac{dx}{\ln x}=\int\limits_{1}^{\ln x}\frac{\ell^{y}dy}{y}=\int\limits_{1}^{\ln x}\left[\frac{1}{y}\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}+...\right)\right]dy=$$

$$=\int\limits_{1}^{\ln x}\left(\frac{1}{y}+1+\frac{y}{2!}+...+\frac{y^{n-1}}{n!}+...\right)dy=\left[\ln|y|+y+\frac{y^2}{2\cdot 2!}+...+\frac{y^n}{n\cdot n!}+...\right]_1^{\ln x}=$$

$$=\left[\ln|\ln x|+\ln x+\frac{\ell^2 x}{2\cdot 2!}+...+\frac{\ln^n x}{n\cdot n!}+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 2!}+...+\frac{1}{n\cdot n!}+...\right)=$$

$$=\ln|\ln x|+\frac{\ln x-1}{1\cdot 1!}+\frac{\ln^2 x-1}{2\cdot 2!}+...+\frac{\ln^n x-1}{n\cdot n!}+...$$

ეს დაშლა მოხდება მაშინ, როცა $x>0$ და $x\neq 1$.

§7. მიახლოებითი გამოთვლები მწკრივების საშუალებით

x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ შემდეგი პირობა: $f(x)$ ფუნქცია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად. მიღებულ გაშლაში დავუშვათ $x=x_0$. $f(x_0)$-ის საჭირო სიზუსტით გამოსათვლელად ავიღოთ საწყისი წევრების გარკვეული რაოდენობა. ასე მაგალითად, $\arcsin\left(\frac{1}{10}\right)$-ის გამოსათვლელად $\arcsin x$ ფუნქცია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად x-ის ხარისხებად. შემდეგ კი ჩავსვათ $x=\frac{1}{10}$.

განვიხილოთ რამოდენიმე მიახლოებითი გამოთვლა.

I. თუ გვინდა გამოვთვალოთ ℓ რიცხვის სხვადასხვა ხარისხი ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულით $\ell^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$

დავუშვათ, გამოთვლის ცდომილება R_n, რომელიც როცა $|x|<n+1$ ფასდება უტოლობით: $|R_n|<\frac{|x|^{n+1}}{n!(n+1-|x|)}$

როცა $x\leq 0$ შეიძლება ვისარგებლოთ უბრალო შეფასებით $|R_n|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

განვიხილოთ **მაგალითი 1**. გამოვთვალოთ $\sqrt[4]{\ell}$ მნიშვნელობა 0,00001 სიზუსტით.

ამოხსნა. ℓ^x ფუნქცია გავშალოთ $x=\frac{1}{4}$-სათვის. $\ell^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2\cdot 2!}+\frac{1}{4^3\cdot 3!}+\frac{1}{4^4\cdot 4!}+...$

თუ ავიღებთ ამ მწკრივის ხუთ წევრს (n=4) მაშინ ცდომილება არ იქნება 0,00001-ზე დიდი. $R_4 < \frac{x^{4+1}}{4!\left(4+1-x\right)} = \frac{1}{4^5 \cdot 4!\left(5-\frac{1}{4}\right)} < 0,00001$

გამოვთვალოთ რა პირველი ხუთი წევრის ჯამი, მივიღებთ $\sqrt[4]{\ell} \approx 1,28403$

II. sinx და cosx-ის მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოსათვლელად ვისარგებლებთ შემდეგი ფორმულებით

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!} \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$$

რომელთა ცდომილებები შესაბამისად ასე შეფასდება:

$$\left|R_{2n-1}\left(x\right)\right| = \left|R_{2n}\left(x\right)\right| \le \frac{\left|x\right|^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} \quad \text{და} \quad \left|R_{2n}\left(x\right)\right| = \left|R_{2n+1}\left(x\right)\right| \le \frac{x^{2n+2}}{\left(2n+2\right)!}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ $\cos 1^0$ მნიშვნელობა 0,0001 სიზუსტით.

ამოხსნა. ცნობილია, რომ $\cos 1^0 = \cos\frac{\pi}{180}$. $\cos x$ -ის გაშლაში გავითვალისწინოთ $x = \frac{\pi}{180}$ მნიშვნელობა.

$\cos 1^0 \approx 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} \approx 0,9998$ აქ გაშლის პირველი ორი წევრი უკვე უზრუნველყოფს დიდ სიზუსტეს, მაშასადამე $\left|R_2\right| \le \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 4!} < \frac{4^4}{180^4 \cdot 4!} = \frac{1}{45^4 \cdot 24} < 0,0000001$

III. ნებისმიერი დადებითი რიცხვების ნატურალური ლოგარითმების გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ მწკრივი

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) \text{ სადაც } \left|x\right| < 1.$$

მწკრივის ჯამის ნაშთის შეფასება ხდება შემდეგი უტოლობით: $\left|R_n\right| < \left|\frac{2x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)\left(1-x^2\right)}\right|$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\ln 2$ -ის მნიშვნელობა 0,0001 სიზუსტით.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ $\ln\frac{1+x}{1-x}$ ფუნქციის გაშლა. დავუშვათ $\frac{1+x}{1-x} = 2$, აქედან $x = \frac{1}{3}$.

მაშინ, $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^5 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \frac{1}{3^5 \cdot 7} + \ldots\right)$

მოცემულ სიზუსტეს უზრუნველყოფს 4 წევრი.

ცდომილობის შესაფასებლად გამოვიყენოთ უტოლობა $\left|R_n\right| < \left|\dfrac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}\right|$

როცა n=4 და $x = \dfrac{1}{3}$ მივიღებთ $R_4 < \dfrac{2\cdot 9}{3^9\cdot 9\cdot 8} = \dfrac{1}{3^9\cdot 4} < 0{,}0001$

ამ შემთხვევაში 0,0001 სიზუსტით $\ln 2 \approx \dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{405}+\dfrac{1}{5103}\right) \approx 0{,}6931$

IV. თუ გვინდა გამოვთვალოთ $A > 0$ რიცხვიდან K ხარისხის ფესვის მნიშვნელობა დავუშვათ $A = a^K + y$, სადაც a^K - არის რიცხვი, რომელიც ახლოსაა A-თან და ამოდის ფესვი, ასევე $\left|\dfrac{y}{a^K}\right| < 1$, მაშინ $\sqrt[K]{A} = a\sqrt[K]{1+\dfrac{y}{a^K}} = a\left(1+\dfrac{y}{a^K}\right)^{\frac{1}{K}}$

მიღებული ფუნქცია გავშალოთ ბინომიალურ მწკრივად და შემდეგ შევკრიბავთ იმდენ წევრს, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემულ სიზუსტეს.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\sqrt[3]{68}$ მნიშვნელობა 0,001 სიზუსტით.

ამოხსნა. $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{64}} = 4\left(1+\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ გამოვიყენოთ $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ფუნქციის გაშლა.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots$$

დავუშვათ $x = \dfrac{1}{16}$ და მწკრივი გავამრავლოთ 4-ზე, მივიღებთ

$$\sqrt[3]{68} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 16}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 16^2}\right) = 4+\frac{1}{12}-\frac{1}{576} \approx 4{,}082$$

მოცემულ სიზუსტეს უზრუნველყოფს სამი წევრი. ცდომილების გამოსათვლელად განვიხილოთ უტოლობა: $\left|R_3\right| \le 4\cdot\dfrac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 16^3} < 0{,}001$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ π რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა. განვიხილოთ მწკრივი $\operatorname{arctg}x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

როგორც ვიცით ამ მწკრივის კრებადობის არეა $[-1, 1]$ სეგმენტი. თუ ავიღებთ $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ მაშინ $x = \dfrac{\pi}{6}$. მაშასადამე $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{3^3}+\ldots\right)$

ეს მწკრივი გამოსადეგია გამოთვლებისათვის, მაგრამ არსებობს გაცილებით უფრო მოხერხებული მწკრივები π რიცხვის გამოსათვლელად.

ვთქვათ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{120}{119}$,

რადგანაც $\operatorname{tg}4\alpha$ ახლოსაა ერთთან, ამიტომ 4α ახლოს იქნება $\frac{\pi}{4}$-თან.

ვთქვათ $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$, მაშინ $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{239}$, აქედან $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$, მაშასადამე,

$$\pi=16\alpha-4\beta=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=$$
$$=16\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\ldots\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\ldots\right)=3{,}141592..$$

V. ინტეგრალის გამოთვლა. ვთქვათ, ცნობილია $f(x)$ ფუნქციის დაშლა ხარისხოვან მწკრივად $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$ (1)

და გამოსათვლელია ინტეგრალი $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

სადაც x აღებულია მწკრივის კრებადობის ინტერვალში, თუ (1) ტოლობას ვაინტეგრებთ წევრ-წევრად $[a, x]$ სეგმენტზე, მივიღებთ F(x) ფუნქციისათვის ხარისხოვან მწკრივს, რომლის კრებადობის რადიუსი იგივეა, რაც (1) მწკრივისა. თუ ინტეგრალი $\int_a^x f(t)dt$ გამოისახება სასრული სახით, მაშინ F(x) არის ელემენტარული ფუნქცია თუკი ინტეგრალი $\int_a^x f(t)dt$ ელემენტარულ ფუნქციებში ვერ გამოისახება, მაშინ (1) მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებით მიღებული მწკრივი წარმოადგენს არაელემენტარულ F(x) ფუნქციის გამოსახულებას უმარტივესი ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx$ 0,001 სიზუსტით.

როგორც ვიცით $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$ აქედან $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots$

ამ მწკრივის კრებადობის ინტერვალია $[0; 2]$, ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dt=\left[x-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7\cdot7!}+\ldots\right]_0^2=2-\frac{2^3}{3\cdot3!}+\frac{2^5}{5\cdot5!}-\frac{2^7}{7\cdot7!}+\ldots$$

ინტეგრალის გამოთვლის სიზუსტეს უზრუნველყოფს მწკრივის 4 წევრი, რომლისთვისაც

$|R_n| \le \frac{2^9}{9 \cdot 9!} < 0,001$ გამოთვლის შედეგად მივიღებთ $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,605$

§8. მწკრივთა თეორიის გამოყენება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაში

გამოყენების თვალსაზრისით განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების ამონახსნი ელემენტარული ფუნქცია არ არის ხშირად, ამონახსნს წარმოადგენს მწკრივის სახით, რომელიც ტრანსცენდენტულ ფუნქციას გვაძლევს.

მაგალითად: ბესელის დიფერენციალურ განტოლებას.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \quad \left(p = \text{const} \;\; 0 < x < \infty\right)$$

აქვს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, რომლებიც უმაღლესი ტრანსცენდენტური ფუნქციებია და ცნობილია ბესელის ფუნქციების სახელით.

ავიღოთ განტოლება $p_0(x) y' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ $p_0,\ p_1,\ p_2$ კოეფიციენტები $x - x_0$ სხვაობის მიმართ წარმოადგენენ მრავალწევრებს ან მათი დაშლა შეიძლება $(x - x_0)$-ის მიმართ ხარისხოვან მწკრივებად და $p_0(x) \ne 0$, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნიც გამოისახება ხარისხოვანი მწკრივით.[97],[24].

ჯერ განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება: $y'' = F(x, y, y')$ (1)

ვიპოვოთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს: $x = x_0,\ f(x_0) = A_0,\ f'(x_0) = A_1$. (2)

დავუშვათ, რომ (1) განტოლების ამონახსნია $y = f(x)$ და შეიძლება მისი დაშლა x_0 წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (3)$$

ვიპოვოთ დაშლის კოეფიციენტები: $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0)\ldots$ ამისათვის გამოვიყენოთ (2) საწყისი პირობები. გვექნება $f(x_0) = A_0,\ f'(x_0) = A_1$, ხოლო (1) განტოლებიდან

$$y_0'' = f''(x_0) = F(x_0,\ y_0,\ y_0')$$

შემდგომი წარმოებულების მოსაძებნად გავაწარმოოთ (1) განტოლების ორივე ნაწილი. მივიღებთ $y''' = F_x'(x,y,y') + F_y'(x,y,y')y' + F_{y_1}'(x,y,y')y''$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ $x = x_0,\ f(x_0) = A_0,\ f'(x_0) = A_1,\ f''(x_0) = F(x_0, A_0, A_1)$

მივიღებთ $f'''(x_0)$ მნიშვნელობას, თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, ვიპოვით

$$f'''(x_0) = \frac{dF(x_0, A_0, A_1)}{dx} \ldots f^{n}(x_0) = \frac{d^{n-2}F(x_0, A_0, A_1)}{dx^{n-2}} \ldots$$

აქ $\frac{dF}{dx}, \ldots \frac{d^{n-2}F}{dx^{n-2}}$ სიმბოლოები აღნიშნავს $F(x, y, y')$ ფუნქციის სრულ წარმოებულს, ე.ი.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot F(x, y, y')$$

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (3)-ში, მივიღებთ:

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + \frac{1}{2!} F(x_0, A_0, A_1)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{d^{n-2}F(x_0, A_0, A_1)}{dx^{n-2}} (x - x_0)^n + \ldots$$

განხილული მეთოდი გამოიყენება ნებისმიერი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად.

შევნიშნოთ, რომ მიმდევრობით დიფერენცირების მეთოდი ზოგადად არ იძლევა საშუალებას გამოვიკვლიოთ მიღებული მწკრივი ამოხსნისაკენ კრებადობაზე, ვინაიდან ხშირ შემთხვევაში ვერ ვახერხებთ საძიებელი მწკრივის ზოგადი წევრისათვის ანალიტიკური გამოსახულების პოვნას. ამ მეთოდს გამოვიყენებთ მაშინ, როცა წინასწარაა ცნობილი, რომ განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით არსებობს. განსაკუთრებით ამ მეთოდს გამოიყენებენ საინჟინრო პრაქტიკაში, კვლევით შრომებში, სადაც ამონახსნი შეიძლება ექსპერიმენტალურად იყოს შემოწმებული.[95].

შევნიშნოთ, რომ განხილულ ხერხს გამოვიყენებთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნისას, A_0 და A_1-ს განვიხილავთ როგორც ნებისმიერ მუდმივებს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y'' + yx^2 = 0$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

ამოხსნა. რადგანაც $x_0 = 0$, ამიტომ ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \ldots \tag{4}$$

ვიპოვოთ $f(0),\ f'(0),\ f''(0)\ldots$ სიდიდეები, საწყისი პირობებიდან გვაქვს:

$f(0)=1,\ f'(0)=0$.

მოცემული განტოლებიდან ვღებულობთ: $y''=-y_0\ x_0^2=0$

თუ მოცემული განტოლების ორივე ნაწილს ვაწარმოებთ K-ჯერ, ლაიბნიცის ფორმულა მოგვცემს $y^{(K=2)}=-y^{(K)}x^2-2Ky_x^{(K-1)}-K(K-1)y^{(K-2)}$ როცა x=0, მივიღებთ

$$y_0^{(K+2)}=-K(K-1)y_0^{(K-2)}$$

მივიღეთ რეკურენტული ფორმულა $y_0^{(K)}$ წარმოებულების გამოსათვლელად, როცა $K\geq 2$, გვექნება

$$y'''=0,\ y_0^{(IV)}=-2,\ y_0^{(5)}=y_0^{(6)}=y_0^{(7)}=0$$

$$y_0^{(8)}=(-1)^2(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ y_0^{(9)}=y_0^{(10)}=y_0^{(11)}=0$$

$$y_0^{(12)}=(-1)^3\cdot(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10)$$

– – – – – – – – – – – – – – – – –

$$y^{(4n)}=(-1)^n(1\cdot 2)\cdot(5\cdot 6)\cdot(9\cdot 10)\cdot\ldots\cdot\left[(4k-3)(4k-2)\right].$$

მიღებული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ ის წარმოებული, რომლის რიგი 4-ის ჯერადა. მოძებნილი გამოსახულებები ჩავსვათ (4) ტოლობაში, მივიღებთ მწკრივს

$$y=f(x)=1-\frac{x^4}{4!}(1\cdot 2)+\frac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)+\ldots+(-1)^k\cdot\frac{x^{4k}}{(4k)!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ldots\left[(4k-3)(4k-2)\right]+\ldots \qquad (5)$$

თუ გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის დალამბერის ნიშანს, ვნახავთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში. მაშასადამე (5) მწკრივი წარმოადგენს მოცემული დიფერენციალური განტოლების საძიებელ ამონახსნს.[96].

მაგალითი 2. ავიღოთ განტოლება $y''+xy=0$

იგი აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილი დებულების პირობებს. ვეძებოთ ამონახსნი შემდეგი მწკრივის სახით $y=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$

გავაწარმოოთ ორჯერ, გვექნება: $2\cdot 1\cdot A_2+3\cdot 2A_3x+\ldots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\ldots$

მოცემული განტოლების თანახმად $y''=-xy$

ამ განტოლებაში y-ისა და y''-ის ჩასმისა და x-ის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტთა განტოლების შემდეგ გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$2\cdot 1\cdot A_2=0, 3\cdot 2\cdot A_3+A_0=0, 4\cdot 3A_4+A_1=0$$

$$n(n-1)A_n + A_{n-3} = 0$$

აქედან $A_2 = 0$ $A_3 = -\frac{A_0}{2\cdot 3}$ $A_4 = -\frac{A_1}{3\cdot 4}$

$$A_5 = -\frac{A_2}{4\cdot 5} = 0 \quad A_6 = -\frac{A_3}{5\cdot 6} = \frac{A_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} \qquad A_7 = -\frac{A_4}{6\cdot 7} = \frac{A_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$$

საზოგადოდ, მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულებს:

$$A_{3k-1} = 0,\ A_{3k} = (-1)^k \frac{A_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot ...(3k-1)\cdot 3k} \quad , \quad A_{3k+1} = (-1)^k \frac{A_0}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3k(3k+1)}$$

ამონახსნის A_0 და A_1 კოეფიციენტები ამ განტოლებებით არ განისაზღვრება, ესენი წარმოადგენენ ორ ნებისმიერ მუდმივს. ამგვარად, მივიღებთ შემდეგ ზოგად ამონახსნს ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$y = A_0\left[1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + ... + \frac{(-1)^k \cdot x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot ...(3k-1)\cdot 3k} + ...\right] +$$

$$+A_1\left[x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 7} + ... + (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3k(3k+1)} + ...\right]$$

აქ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულია მწკრივები და მათი კრებადობა მტკიცდება დალამბერის ნიშნის გამოყენებით. ეს მწკრივები წარმოადგენენ მოცემული დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნებს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $y'' = x\sin y'$ განტოლების ამონახსნის პირველი ექვსი წევრის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს $y(1)=0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$

ამოხსნა. რადგანაც $x_0 = 1$, ამიტომ ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + ...$$

აქ $f(1) = 0,\ \ f'(1) = \frac{\pi}{2}$ გამოვთვალოთ II, III, IV და V რიგის წარმოებულები:

$$f''(1) = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$f(x) = \sin y' + xy''\cos y' = \sin y' + x^2\sin y'\cos y' = \sin y' + \frac{1}{2}x^2\sin 2y',\ f'''(1) = 1$$

ანალოგიურად გამოვთვალეთ $f^{IV}(1) = -1$ და $f^{V}(1) = -6$

ეს მნიშვნელობები შევიყვანოთ მოცემული განტოლების ამონახსნში

$$y=\frac{\pi}{2}\left(x-1\right)+\frac{1}{2}\left(x-1\right)^{2}+\frac{1}{6}\left(x-1\right)^{3}-\frac{1}{24}\left(x-1\right)^{4}-\frac{1}{20}\left(x-1\right)^{5}+...$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი მომდევნო წარმოებული $x\sin y'$ ფუნქციის არის რთული, ვიდრე წინა. ამიტომ აქ მიღებული მწკრივის ზოგადი წევრის ფორმულის დადგენა საკმაოდ რთულია.

განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდი გამოიყენება, როცა მოითხოვება ვიპოვოთ (1) განტოლების კერძო ამონახსნი $y=f\left(x\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს $f\left(x_0\right)=A_0$, $f'\left(x_0\right)=A_1$ ანდა ვიყენებთ, როცა გვინდა ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით (x-x_0) ხარისხებით.

თუ (1) განტოლება (x_0, A_0, A_1) წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს კოშის II რიგის დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამონახსენის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის პირობებს, მაშინ მისი კერძო (ან ზოგადი) ამონახსენი შეიძლება ვეძებოთ მწკრივის სახით $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$ (6)

რომლის კოეფიციენტები ექვემდებარება განსაზღვრას.

თუ (x_0, A_0, A_1) წერტილი არის განსაკუთრებული (1) განტოლებისთვის, მაშინ მისი კერძო (ანდა ზოგადი) ამონახსენი უნდა ვეძებოთ განზოგადებული ხარისხოვანი მწკრივის სახით $y_n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^{n+\rho}$ (7)

სადაც ρ არაა აუცილებელი მთელი რიცხვი იყოს, რომელიც ექვემდებარება განსაზღვრას მწკრივის კოეფიციენტებთან ერთად.

რომ განსაზღვრონ (5) და (6) მწკრივების C_n, $n=0,1,2,...$ კოეფიციენტები, იქცევიან შემდეგნაირად:

1) ორჯერ აწარმოებენ (5) (ან (6)) უცნობი კოეფიციენტებით და პოულობენ y' და y''-ს.

2) საწყის დიფერენციალურ განტოლებაში (1)-ში სვამენ y' და y''-ის ხარისხოვან მწკრივებად გაშლას.

3) წარმოადგენენ ფუნქციის $F\left(x,y,y'\right)$ ხარისხოვანი მწკრივის სახით $\left(x-x_0\right)$ ხარისხებად, რის შემდეგაც (1) ტოლობა ღებულობს ორი ხარისხოვანი მწკრივის ტოლობის სახეს.

4) მიღებული მწკრივების $x-x_0$ სხვაობის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტების განტოლების გზით ღებულობენ უცნობი C_n კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის განტოლებებს. თუ ამონახსნები იძებნება (6) სახით, მაშინ $\left(x-x_0\right)$ სხვაობის უმცროსი ხარისხის კოეფიციენტების განტოლებით ღებულობენ ე.წ. განმსაზღვრელ განტოლებას, საიდანაც პოულობენ ρ პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს.

5) მიღებული განტოლებებიდან პოულობენ C_n კოეფიციენტებს და სვამენ მათ საძიებელ (5) მწკრივში, თუ ამონახსენს ვეძებთ (6) სახით, მაშინ C_n კოეფიციენტებს პოულობენ ρ -ს

ყოველი მნიშვნელობისთვის და ამგვარად ღებულობენ იმდენ კერძო ამონახსენს, რამდენი მნიშვნელობაც აქვს ρ პარამეტრს.

მწკრივის სახით მიღებული ამონახსენი შეიძლება გამოკვლეულ იქნას კრებადობაზე კრებადობის ცნობილი ნიშნებით.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის აღწერილი მეთოდი ცხადია შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი რიგის განტოლებისათვის. ყველაზე ხშირად ამ ხერხს იყენებენ წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

1) თუ წრფივი დიფერენციალური განტოლების

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=\varphi(x) \tag{8}$$

კოეფიციენტები $a_K(x)$, $K=0,1,2,\ldots n$ და მისი მარჯვენა ნაწილი $\varphi(x)$, რომელიც გაშლილია $|x-x_0|<R_1$ ინტერვალში $x-x_0$ ხარისხებით, ხარისხოვან მწკრივად, ხოლო $a_n(x)\neq 0$ $|x-x_0|<R_2$ ინტერვალში, მაშინ $|x-x_0|<r_1$, სადაც $r=\min(R_1,R_2)$ ინტერვალში და არსებობს მოცემული განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $y=f(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $a_n(x)$ და $\varphi(x)$ მრავალწევრებია, ხოლო $a_n(x)\neq 0$ ყოველი x-სათვის, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ამონახსენი იქნება (5) სახის მწკრივი, რომელიც კრებადია მთელს რიცხვით ღერძზე.

2. თუ II რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება წარმოდგება სახით:

$$(x-x_0)^2y''+y'(x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+y\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=0$$

სადაც $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ და $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$

$|x-x_0|<R$ ინტერვალში კრებადი ხარისხოვანი მწკრივებია, რომლებშიც a_0, b_0 და b_1 კოეფიციენტები ერთდროულად 0-ის ტოლი არ არის, მაშინ არსებობს მოცემული დიფერენციალური განტოლების, უკიდურეს შემთხვევაში, ერთი კერძო ამონახსენი $y=f(x)$, $|x-x_0|<R$ ინტერვალში კრებადი განზოგადებული (6) ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $y''-xy=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით. მივუთითოთ კრებადობის ინტერვალი მიღებული მწკრივისა.

ამოხსნა. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება მოიძებნოს შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივის სახით: $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots$

რომელიც მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ (9)

ან შემდეგი სახით $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}x^{n-1}$ (10)

ითვლება, რომ $c_{-1} = 0$. ვიპოვოთ (7) მწკრივის I და II რიგის წარმოებულები

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots + nc_nx^{n-1} + (n+1)c_{n+1}x^n + (n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 3\cdot2c_3x + \ldots + n(n-1)c_nx^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

თუ y და y'' მნიშვნელობებს გავითვალისწინებთ მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^{n-1} = 0$$

ანუ $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - c_{n-1}\right]\cdot x^n = 0$ მწკრივის კოეფიციენტები გავუტოლოთ ნულს,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_{n-1} = 0, \qquad c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

როცა $n = 0$ $c_2 = 0$ (მაშასადამე $c_{-1} = 0$),

როცა $n = 1$ $c_3 = \frac{c_0}{2\cdot3}$, როცა $n = 2$ $c_4 = \frac{c_1}{3\cdot4}$

როცა $n = 3$ $c_5 = \frac{c_2}{4\cdot5} = 0$, როცა $n = 4$ $c_6 = \frac{c_3}{5\cdot6} = \frac{c_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6}$

როცა $n = 5$ $c_7 = \frac{c_4}{6\cdot7} = \frac{c_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}$, როცა $n = 6$ $c_8 = \frac{c_5}{8\cdot9} = 0$

მაშასადამე, როცა $n = 3K - 3$ $c_{3K-1} = 0$ $(K = 1, 2, 3, \ldots)$

როცა $n = 3K - 2$ $c_{3K} = \frac{c_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3K-1)(3K)}$

როცა $n=3K-1$ $\quad c_{3K+1}=\dfrac{c_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(3K)(3K+1)}$

მიღებული კოეფიციენტები ჩავსვათ (7)-ში

$$y=c_0+c_1x+\frac{c_0}{2\cdot3}x^3+\frac{c_1}{3\cdot4}x^4+\frac{c_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6}x^6+\frac{c_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\ldots+\frac{c_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3K-1)3K}x^{3K}+$$

$$+\frac{c_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(3K)(3K+1)}x^{3K+1}+\ldots=c_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{x^{3K}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(3K-1)3K}+\ldots\right)+$$

$$+c_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{x^{3K+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(3K)(3K+1)}+\ldots\right)+$$

ეს არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც შეიძლება ასე ჩავწეროთ $y=c_0y_1+c_1y_2$. მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს წრფივ კომბინაციას ორი y_1 და y_2 კერძო ამონახსნების, დალამბერის ნიშნის გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ y_1 და y_2 მწკრივების კრებადობა ნებისმიერი n-თვის.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $2x^2y''+\left(3x-2x^2\right)y'-\left(x+1\right)y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოდგენილი x-ის ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

ამოხსნა. x=0 წერტილი წარმოადგენს განსაკუთრებულ წერტილს მოცემული დიფერენციალური განტოლების, ამიტომ მისი ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი სახით: $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\rho}$

სადაც $c_0\neq0$ ვიპოვოთ y' და y''

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\rho\right)c_nx^{n+\rho-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\rho-1\right)c_{n-1}x^{n+\rho-2}\quad \text{(გავითვალისწინოთ, რომ } c_{-1}=0\text{)}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\rho\right)\left(n+\rho-1\right)c_nx^{n+\rho-2}$$

შემდეგ მოცემული განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$2x^2y''+3xy'-2x^2y'-xy-y=0$$

და ჩავსვათ y, y' და y''-ის მნიშვნელობები. გავითვალისწინოთ, რომ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+\rho}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^{n+\rho-1}$$

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)(n+\rho-1)c_n x^{n+\rho-2}+3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho)c_n x^{n+\rho-1}-$$

$$-2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\rho-1)c_{n-1}x^{n+\rho-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}x^{n+\rho-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\rho}=0$$

საიდანაც წევრთა დაწყვილებით მივიღებთ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+\rho)(2n+2\rho+1)-1\right]c_n-\left[2n+2\rho-1\right]c_{n-1}\right\}=0$$

მწკრივის კოეფიციენტები გავუტოლოთ ნულს:

$$\left[(n+\rho)(2n+2\rho+1)-1\right]c_n-(2n+2\rho-1)c_{n-1}=0$$

საიდანაც, როცა n=0 მივიღებთ ρ -ს მიმართ განტოლებას:

$$\rho(2\rho+1)-1=0$$

$$2\rho^2+\rho-1=0$$

$$\rho_1=-1 \qquad \rho_2=\frac{1}{2}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $\rho_1=-1$, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left[(n-1)(2n-1)-1\right]c_n-(2n-3)c_{n-1}=0 \quad \text{ანუ} \quad nc_n-c_{n-1}=0$$

რეკურენტულ ფორმულას კი აქვს სახე:

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{n} \quad \text{როცა} \quad n=1,2,3,4,\ldots$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$c_1=c_0; \quad c_2=\frac{c_1}{2}=\frac{c_0}{1\cdot 2}; \quad c_3=\frac{c_2}{3}=\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$c_4=\frac{c_3}{4}=\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{c_0}{4!},\ldots,\ c_n=\frac{c_0}{n!}\ldots$$

ასე რომ, კერძო ამონახსნი $\rho_1=-1$, შესაბამისად არის

$$y_1=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{\ell^x}{x}$$

(აქ დავუშვათ, რომ $c_0=1$)

2) $\rho_2 = \dfrac{1}{2}$ განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(2n+2)-1\right]c_n - 2nc_{n-1} = 0$$

საიდანაც $c_n = \dfrac{2c_{n-1}}{2n+3}$

როცა $n = 1, 2, 3, \ldots$ საბოლოოდ მივიღებთ

$$c_1 = \frac{2c_0}{5}; \quad c_2 = \frac{2c_1}{7} = \frac{2^2 c_0}{5\cdot 7};$$
$$c_3 = \frac{2c_2}{9} = \frac{2^3 c_0}{5\cdot 7\cdot 9}, \ldots, \; c_n = \frac{2^n c_0}{5\cdot 7\cdot 9\cdot \ldots \cdot (2n+3)}$$

მაშასადამე, $\rho_2 = \dfrac{1}{2}$ -ისათვის შესაბამისად მეორე კერძო ამონახსნი არის

$$y_2 = \sqrt{x}\left(1 + \frac{2}{5}x + \frac{2^2 x^2}{5\cdot 7} + \frac{2^3 x^3}{5\cdot 7\cdot 9} + \ldots + \frac{2^n x^n}{5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+3)} + \ldots\right) \quad \text{(აქ ჩავთვალეთ, რომ } c_0 = 1\text{)}$$

მოცემული განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ განტოლებას, ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{ე.ი.} \quad y = c_1 \frac{\ell^x}{x} + c_2\sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+3)}\right)$$

ეს არის მოცემული დიფერენციალური განტოლების საბოლოო ამონახსნი.

II თავის დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები.

1. სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტთათვის მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების არასტანდარტული ხერხებით ამოხსნისას ლექტორმა უნდა შეძლოს სტუდენტთა მოტივაციის შექმნა ამოცანების ამოსახსნელად და პრაქტიკული მეცადინეობები დადებით ემოციურ ფონზე წარმართოს. მიზანშეწონილია მუშაობა წარიმართოს სქემით: „ამოცანა$\to$თეორია$\to$ამოცანა“. სტუდენტებმა უნდა შეძლონ სრულად გაიაზრონ და გაანალიზონ მწკრივთა თეორიის ამოცანის პირობაში მოცემული ინფორმაცია, გამოავლინონ ამოცანაში მოცემული ცნობილი და უცნობი კომპონენტები, გაიაზრონ ამოცანის მთავარი კითხვა და ამოცანის შინაარსი შეუფარდონ იმ ცოდნას და გამოცდილებას, რომელიც მათ გააჩნიათ ამოცანების ამოხსნით, ამის საფუძველზე სტუდენტებმა უნდა გამოთქვან ვარაუდები ამოხსნის შესაძლო ხერხის შესახებ. ლექტორმა უნდა მოახდინოს ამოხსნის ამა თუ იმ გზის თითოეული ბიჯის მართებულობის კრიტიკული გააზრება, მიღებული შედეგის სისწორის შემოწმება, რადაგან შემოწმებამ შესაძლოა ამოცანის უფრო რაციონალური ამოხსნის გზის პოვნაში დაგვეხმაროს.

2. მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების არასტანდარტული ხერხებით ამოხსნის სასწავლო პროცესის წარმართვა სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური თვალსაზრისით გამართლებულია და მეტად მნიშვნელოვანია წარმართოს ემოციაზე დაფუძნებით. სტუდენტის შემეცნებითი მიმართულება შერჩევით ხასიათს ატარებს. როდესაც ესა თუ ის საგანი, მოვლენა ან ცნება მისთვის მნიშვნელოვანია, მაშინ უფრო მეტი ხალისითა და ინტერესით სწავლობს. ამიტომ უმაღლესი სკოლის ლექტორის ძირითადი ფუნქცია არის არა მხოლოდ პროფესიული ცოდნის გადაცემა, არამედ ამ ცოდნის მიმართ განსაზღვრული ემოციური დამოკიდებულების შექმნა. სასწავლო პროცესის ასეთი წარმართვა ხელს უწყობს სტუდენტებში შემეცნებითი ინტერესების აღძვრას.

3. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ჩვენს მიერ შემუშავებული სწავლების მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას უმაღლეს სკოლაში სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან, როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

4. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ განხილული ამოხსნის სპეციალური ხერხებით სწავლება ხელს უწყობს სტუდენტების მათემატიკურ კულტურის ჩამოყალიბებას, ეხმარება მათ განათლების მიღებაში, ამაღლებს ინტელექტს;

5. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია უმაღლეს სკოლაში მწკრივთა თეორიის ამოცანები დავყოთ მსგავსების და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები სტუდენტებს საშინაო დავალებად მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია სტუდენტთათვის სწავლების პროცესში მწკრივთა თეორიის ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება სტუდენტთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთ უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანათა ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ქმედითუნარიანობა, სტუდენტებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს.

III თავი

ფურიეს მწკრივის და ფურიეს ინტეგრალის სწავლება

§1. ორთოგონალური სისტემები. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების სწავლება

დავუშვათ, რომ [a,b] სეგმენტზე მოცემულია ისეთი $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები, რომელთა ნამრავლი არის ამ მონაკვეთზე ინტეგრებადი ფუნქცია. $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს უწოდებენ ორთოგონალურს [a,b] სეგმენტზე, თუ $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$

ფუნქციათა უსასრულო სისტემას — $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x), \dots$ (რომელსაც შემოკლებულად ავღნიშნავთ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$) უწოდებენ ორთოგონალურს [a,b] მონაკვეთზე, თუ $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0$

ნებისმიერი m და n-ისათვის, რომლისთვისაც $m \neq n$. აქ ვვარაუდობთ, რომ $\varphi_m(x)\cdot\varphi_n(x)$ ნამრავლი ინტეგრებადია [a,b] სეგმენტზე.

მოვიყვანოთ ორთოგონალური სისტემის რამოდენიმე მაგალითი.

1) ფუნქციის სიმრავლე $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ წარმოქმნის ფუნქციის ორთოგონალურ სისტემას $[0,\pi]$ სეგმენტზე, რადგანაც, როდესაც $m \neq n$ $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$

2) ფუნქციათა სიმრავლე $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \cos nx, \sin nx$ (რომელიც შემოკლებულად აღინიშნება $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ და უწოდებენ ფუნქციის ტრიგონომეტრიულ სისტემას, განსაზღვრულს $[-\pi;\pi]$ სეგმენტზე.

ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx dx; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\sin nx dx; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx dx; \quad m \neq n$$

და აღმოვაჩინოთ, რომ ისინი ყველა ნულის ტოლია.

3) ფუნქციათა სიმრავლე $\left\{\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right\}_{n=0}^{\infty}$ წარმოქმნის ორთოგონალურ სისტემას $[-\ell,\ell]$ სეგმენტზე.

4) ლეჟარდის პოლინომების სიმრავლე $\{P_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, სადაც $p_0(x)=1$

და $p_m(x)=\frac{1}{m!2^m}\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^m, \quad m=1,2,3,...$

წარმოქმნის [-1;1] მონაკვეთზე ფუნქციის ორთოგონალურ სისტემას, რადგანაც

$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx=0$, როცა $m\neq n$

ფუნქციის ორთოგონალობის ცნებასთან ერთად განიხილავენ გაცილებით ფართოდ მიღებულ ცნებას, წონით ორთოგონალობას.

დავუშვათ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ინტეგრებადია [a,b] მონაკვეთზე. $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს უწოდებენ ორთოგონალურს [a,b] სეგმენტზე წონით $\rho(x)$, თუ $\int_a^b f(x)\varphi(x)\rho(x)dx=0$

$\rho(x)$ ფუნქციას უწოდებენ წონას.

ფუნქციათა სისტემას $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ უწოდებენ [a,b] მონაკვეთზე ორთოგონალურს წონით $\rho(x)>0$, თუ $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx=0 \quad m\neq n$ (2)

მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითები:

1) ჩებიშევის მრავალწევრის სიმრავლე $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, სადაც $T_n(x)\cos(n\arccos x)$, $n=0,1,2,...$ წარმოქმნის [-1;1] მონაკვეთზე ფუნქციის ორთოგონალურ სისტემას წონით $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ცხადია, $\int_{-1}^{1}\frac{\cos(m\arccos x)\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cdot\cos n\varphi\cdot d\varphi=0$

(აქ $\varphi=\arccos x$, მაშინ $x=\cos\varphi$, $d\varphi=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, როცა $x=-1$, $\varphi=\arccos(-1)=\pi$; როცა $x=1$, $\varphi=\arccos 1=0$. მინუს ნიშანი გამოიყენება ინტეგრების საზღვრების გადანაცვლებისას).

2. ბესელის ფუნქციის სიმრავლე $\left\{J_P\left(\frac{\mu_n x}{\ell}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ P მთელი რიგით, სადაც

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{K!(K+P)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2K+P}$$

ხოლო μ_n $J_P(x)$ ფუნქციის დადებითი ფესვი წარმოქმნის $[0,\ell]$ სეგმენტზე ორთოგონალურ სისტემას წონით $\rho(x)=x$, რადგანაც $\int_0^{\ell} J_P\left(\frac{\mu_m x}{\ell}\right)\cdot J_P\left(\frac{\mu_n x}{\ell}\right)x dx=0, \quad m\neq n$

შენიშვნა. თუ $\rho(x)$ მასის მქონე $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციის სისტემა ორთოგონალურია $[a,b]$ მონაკვეთზე, მაშინ $\left\{\varphi_n(x)\sqrt{\rho(x)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციის სისტემაც ორთოგონალურია ამავე მონაკვეთზე მასით $\rho(x)=1$.

დავუშვათ მოცემულია ორთოგონალური სისტემის ნამრავლი $[a,b]$ მონაკვეთზე (1) ფუნქციისა. მწკრივს $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+...+c_n\varphi_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$

სადაც c_n, $n=1,2,...$ თავისუფალი რიცხვითი კოეფიციენტებია, უწოდებენ (1) ფუნქციის ორთოგონალური სისტემის მწკრივს.[101]

პირველ რიგში ჩვენ განვიხილავთ ტრიგონომეტრიული სისტემის მწკრივებს შემდეგი ფუნქციისა $\{\cos x,\sin x\}_{n=0}^{\infty}$, რომლის ორთოგონალობა $[-\pi,\pi]$ მონაკვეთზე განხილულ იქნა მე-3 მაგალითში. მწკრივს ფუნქციის მითითებულ სისტემაში ეწოდება ტრიგონომეტრიული და ჩაიწერება ასეთნაირად: $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin x)$ (3)

მოვიყვანოთ თეორემა, რომელიც გამოსახავს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთან კრებადობის საკმარის ნიშან-თვისებას.

თეორემა 1. თუ რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ კრებადია, მაშინ (3) ტრიგონომეტრიული მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია მთელს ox ღერძზე.

რაღაც პირობებში შესაძლებელია ტრიგონომეტრიული მწკრივების დიფერენცირება. შემდეგი ნიშანი იძლევა დიფერენცირებადობის საკმარის პირობებს.

თუ (3) ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები აკმაყოფილებს უტოლობას:

$|a_n|\le\frac{\alpha}{n^{P+K}}$ $\quad$ $|b_n|\le\frac{\beta}{n^{P+K}}$

სადაც K რაიმე ნატურალური რიცხვია, P>1

α და β — ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია, მაშინ შესაძლებელია (3) მწკრივის წევრობრივი დიფერენცირება ნებისმიერ x წერტილში არანაკლებ K-ჯერ.

დავუშვათ, რაღაც მონაკვეთში მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. დავსვათ კითხვა: არ შეიძლება ავაგოთ ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც ამ მონაკვეთზე კრებადი იქნება $f(x)$ ფუნქციისაკენ? როგორ ვიპოვოთ ამ მწკრივის a_n და b_n კოეფიციენტები? ამ კითხვების გადაჭრაში გვეხმარება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. თუ $f(x)$ ფუნქცია გაშლადია მთელს რიცხვით ღერძზე თანაბრად კრებად ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin x)$ (4)

მაშინ ამ მწკრივის კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,3,\ldots \quad (5)$$

აღსანიშნავია, რომ თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ $[-\pi,\pi]$ მონაკვეთზე, ან საერთოდ სხვა მონაკვეთზე $[a,\ a+2\pi]$ — სიგრძით 2π, ხოლო ტრიგონომეტრიული მწკრივი ამ მონაკვეთზე თანაბრად კრებადია. ამასთან, ინტეგრების საზღვრები (5) ფორმულებში იცვლება a-თი და $(a+2\pi)$-ით.

მწკრივს, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin x)$, რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრება (5) ფორმულით, მიუხედავად იმისა, კრებადია თუ არა იგი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, ეწოდება ფურიეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციისათვის და ეს ჩაიწერება ასე:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin x)$$

a_0, a_n და b_n კოეფიციენტებს, რომელიც განისაზღვრება (5) ფორმულებით, უწოდებენ ფურიეს კოეფიციენტებს.

ფორმალურად $[-\pi,\pi]$ მონაკვეთზე ინტეგრებად ყველა ფუნქციისათვის შეიძლება შევადგინოთ ფურიეს მწკრივები. თუმცა ფუნქციას და მწკრივს შორის ყოველთვის არ შეიძლება ტოლობის ნიშნის დასმა.

შემდეგი თეორემა (რომელსაც უწოდებენ დირიხლეს თეორემას) გვაძლევს ფუნქციების გაშლის პირობებს ფურიეს მწკრივში.

თეორემა 3. თუ $f(x)$ პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია პერიოდი $T=2\pi$ და იგი უბან-უბან გლუვია, ან უბან-უბან მონოტონურია, მაშინ უწყვეტობის ყოველ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია გაიშლება ფურიეს მწკრივად. ამასთან, ეს მწკრივი კრებადია $f(x)$ ფუნქციის ყოველ x_n წყვეტის წერტილში ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა საზღვრების საშუალო არითმეტიკულისკენ ამ წერტილში, ე.ი. $\frac{1}{2}\left(f(x_n-0)+f(x_n+0)\right)$ რიცხვისკენ.

შენიშვნა. ფურიეს მწკრივად შეიძლება გაიშალოს არაპერიდული უბან-უბან გლუვი ფუნქცია $f(x)$, რომელიც მოცემულია მხოლოდ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტის იმ წერტილებში, სადაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია. უფრო მეტიც: მიღებული მწკრივი კრებადია მთელს რიცხვით ღერძზე, ხოლო მისი ჯამი იქნება $f(x)$ ფუნქციის პერიოდული გაგრძელება მთელ ox ღერძზე. გამონაკლისს წარმოადგენს მხოლოდ წყვეტის წერტილები, სადაც მწკრივის ჯამი ტოლია მოცემული ფუნქციის პერიოდული გაგრძელების მარჯვენა და მარცხენა საზღვრების საშუალო არითმეტიკულის.[48],[50].

გავიხსენოთ, რომ $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც ემთხვევა $f(x)$-ს ფუნქციის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და თითოეული $[-\pi,\pi]$-ისათვის აკმაყოფილებს პირობას $F(x+2\pi)=F(x)$, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პერიოდული გაგრძელება მთელს x ღერძზე.

ყოველი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომლის კვადრატის ინტეგრალი არსებობს $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, სამართლიანია ტოლობა $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2dx$

რომელსაც პარსევალ-ლიაპუნოვის ტოლობას უწოდებენ. ტოლობის მარცხენა ნაწილში მყოფი მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები $f(x)$ ფუნქციისათვის მიისწრაფის 0-ისაკენ, მაშინ, როცა $n\to\infty$. საიდანაც $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0$

განვიხილოთ ფუნქციის გაშლადობის კერძო შემთხვევები ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივში.

1. თუ $f(x)$ არის $\left(f(-x)=f(x)\right)$-ის ლუწი ფუნქცია, მაშინ $f(x)\cos nx$ ფუნქციაც იქნება ლუწი, ხოლო $f(x)\sin nx$ ფუნქცია — კენტი. შესაბამისად მივიღებთ:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \text{ და } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0$$

ამიტომ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

მივიღეთ $f(x)$ ფუნქციის ორთოგონალური გაშლა ფურიეს მწკრივში $[0,\pi]$ სეგმენტზე $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ ფუნქციებად.

2. თუ $f(x)$ არის $(f(-x)=-f(x))$-ის კენტი ფუნქცია, მაშინ $f(x)\cos nx$ ფუნქციაც კენტია, ხოლო $f(x)\sin nx$ ფუნქცია — ლუწი და მივიღებთ:

$$a_n=0,\ \text{და}\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx \qquad \text{ამიტომ} \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

მივიღეთ $f(x)$ ფუნქციის ორთოგონალური გაშლა ფურიეს მწკრივად $[0,\pi]$ შუალედში $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ ფუნქციებად.

შენიშვნა 1. ფუნქცია, რომელიც მოცემულია $(0,\pi)$ ინტერვალში, შეიძლება გაშლილი იქნას მოთხოვნის მიხედვით, ან კოსინუსების მწკრივად, ან მხოლოდ სინუსების მწკრივად.

2. ფუნქცია, რომელიც მოცემულია $[0,\pi]$ ინტერვალში, შეიძლება გაშლილი იქნას ფურიეს უსასრულო რიცხვით მწკრივად, იმის მიხედვით, თუ როგორ არის აგებული მისი გაგრძელება $[-\pi,0]$ სეგმენტზე.

ფურიეს (4) ტრიგონომეტრიული მწკრივი $f(x)$ ფუნქციისათვის შეიძლება გარდაიქმნას და მიიღოს შემდეგი სახე:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\ell^{inx}=\ldots+c_{-n}\ell^{-inx}+\ldots+c_{-2}\ell^{-2ix}+c_{-1}\ell^{-ix}+c_0+c_1\ell^{ix}+c_2\ell^{\frac{2}{x}}+\ldots c_n\ell^{inx}+\ldots \qquad (6)$$

სადაც $$c_0=\frac{a_0}{2};c_n=\frac{a_n-ib_n}{2};c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2};n=1,2\ldots$$

ანუ $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ell^{-inx}dx,\qquad n=\ldots-2,-1,0,1,2,..$$

ფურიეს ტრიგონომეტრული მწკრივის ჩაწერის ასეთი ფორმა ცნობილია კომპლექსური ჩაწერის სახელწოდებით. იგი ძალიან მოსახერხებელია თავისი სიმოკლით.

განვიხილოთ ფურიეს მწკრივები ფუნქციის ორთოგონალურ სისტემაში

$$\left\{\cos\frac{\pi nx}{\ell};\ \sin\frac{\pi nx}{\ell}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

თუ $f\left(\mathrm{x}\right)$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია $\mathrm{T}=2\ell$, ასევე აკმაყოფილებს მესამე თეორემის პირობებს, $f\left(\mathrm{x}\right)$ ფუნქციის უწყვეტობის ყველა წერტილში იგი ორთოგონალურად განშლადია ფურიეს მწკრივში $\left[-e,e\right]$ მონაკვეთზე ფუნციის სისტემაში. $\left\{\cos\frac{\mathrm{n}\pi\mathrm{x}}{\ell};\ \sin\frac{\mathrm{n}\pi\mathrm{x}}{\ell}\right\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$

ამ გაშლას აქვს სახე: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{e}+b_n\sin\frac{n\pi x}{e}\right)$ (7)

სადაც $a_n=\frac{1}{e}\int_{-e}^{e}f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx; a_n=\frac{1}{e}\int_{-e}^{e}f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx$

ყოველი x_0 წყვეტის წერტილში (7) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგარი მწკრივი კრებადია $f\left(\mathrm{x}\right)$ ფუნქციის მარჯვნა და მარცხენა ზღვარის საშუალო არითმეტიკულისაკენ x_0 წერტილში.

თუ $f\left(\mathrm{x}\right)$ ფუნქცია ლუწია, (7) ღებულობს სახეს $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{e}$

სადაც $a_n=\frac{2}{e}\int_{0}^{e}f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx, n=0,1,2...$

ხოლო კენტი ფუნქციის შემთხვევაში: $f\left(\mathrm{x}\right)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{b}_\mathrm{n}\sin\frac{\mathrm{n}\pi\mathrm{x}}{\ell}$

სადაც $\mathrm{b}_\mathrm{n}=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f\left(\mathrm{x}\right)\sin\frac{\mathrm{n}\pi\mathrm{x}}{\ell}\mathrm{dx}, \quad \mathrm{n}=1,2,3,\ldots$

(7) გაშლა შეიძლება ჩაიწეროს კომპლექსური ფორმით: $f\left(\mathrm{x}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{c}_\mathrm{n}\ell^{\frac{\mathrm{in}\pi\mathrm{x}}{\ell}}$

სადაც $\mathrm{c}_\mathrm{n}=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f\left(\mathrm{x}\right)\ell^{-\frac{\mathrm{in}\pi\mathrm{x}}{\ell}}\mathrm{dx}, \quad \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\ldots$

მაგალითი 1. $f\left(\mathrm{x}\right)=\begin{cases}\pi, & -\pi<\mathrm{x}<0\\ \pi-\mathrm{x}, & 0\le\mathrm{x}<\pi\end{cases}$

ფუნქცია გავშალოთ ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $\left(-\pi;\ \pi\right)$ სეგმენტზე.

მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს უბან-უბან გლუვ ფუნქციას $\left(-\pi;\ \pi\right)$ სეგმენტზე. მისი პერიოდული გაგრძელება $f\left[\left(2k-1\right)\pi\right]=\frac{\pi}{2}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ დამატებით პირობით აკმაყოფილებს მესამე თეორემის ყველა პირობას.

გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები:

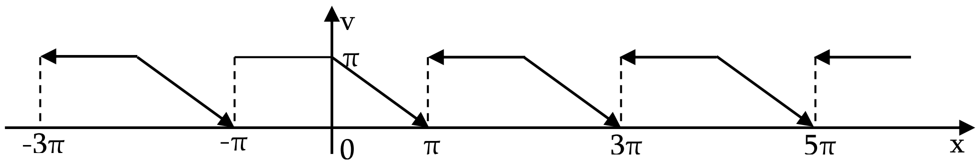
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\pi-x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{3}{2}\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}+1}{\pi n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$$

ეს კოეფიციენტები ჩავსვათ (4) ფორმულაში $f\left(x\right)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(-1\right)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\sin nx\right]$

მიღებულ გაშლას ადგილი აქვს x-ის ნებისმიერი მნიშვნელისათვის $\left(-\pi;\,\pi\right)$ სეგმენტზე.[45] ფუნქცია კრებადია ნებისმიერი x-თვის და მის გრაფიკს აქვს სახე:



მაგალითი 2. $\left[-\pi,\,\pi\right]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f\left(x\right)=x$ ფუნქცია. დავშალოთ ეს ფუნქცია ფურიეს მწკრივად.

ამისათვის ვიპოვოთ ფურიეს კოეფიციენტები. რადგანაც მოცემული ფუნქცია კენტია, ამიტომ $a_n=0 \qquad \left(n=0,1,\ldots\right)$

შემდეგ, $n\sin x$ ფუნქცია ლუწია და მაშასადამე

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{2\cos n\pi}{n}$$

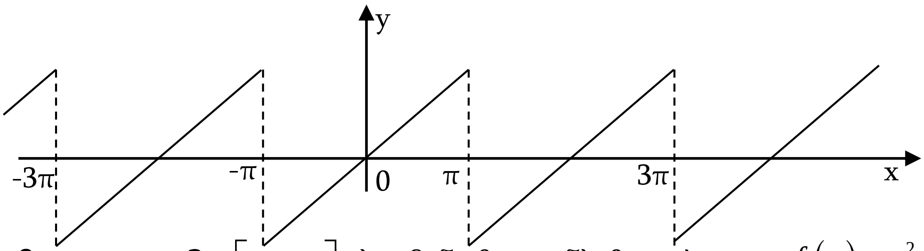
მაგრამ $\cos n\pi=\left(-1\right)^n$, ამიტომ $b_n=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{2}{n} \qquad \left(n=1,2,\ldots\right)$

რაკი $f\left(x\right)=x$ ფუნქცია დიფერენირებადია $\left[-\pi,\,\pi\right]$ სეგმენტზე, ამიტომ, როდესაც $-\pi<x<\pi$ გვექნება: $x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right) \qquad (8)$

თუ (8) ტოლობაში ვიგულისხმებთ $x=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

ახლა ვთქვათ, რომ $0<x<\pi$ და (8) ფორმულაში x-ის ნაცვლად ავიღოთ $\pi-x$, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შემდეგ გვექნება $\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin Kx}{K}=\frac{\pi-x}{2}$

(8) მწკრივის $S(x)$ ჯამის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



მაგალითი 3. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)=x^2$ ფუნქცია დავშალოთ ფურიეს მწკრივად.

ამისათვის ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები. რაკი $x^2\cos nx$ $(n=0,1,...)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$

შემდეგ, ნაწილობითი ინტეგრებით მოვძებნოთ $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}$

და ბოლოს, რაკი $f(x)=x^2$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $b_n=0$ $(n=1,2,...)$ ამის გარდა, მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და $f(-\pi)=f(\pi)$. მაშასადამე $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-...\right)$ (9)

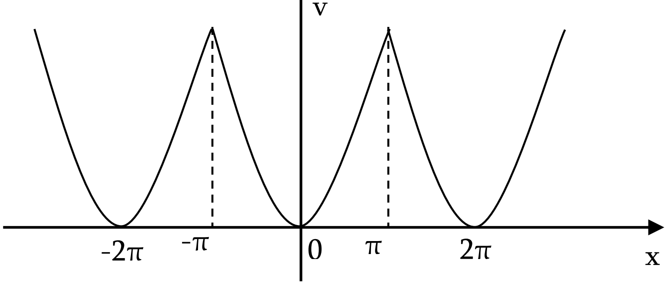
სადაც $-\pi\le x\le\pi$. თუ $x=\pi$, გვექნება $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\right)$

აქედან $\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ (10)

ახლა ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავყოთ 4-ზე. გვექნება: $\frac{\pi^2}{24}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+...$

ეს ტოლობა გამოვაკლოთ (10) ტოლობას, მივიღებთ $\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...$

(9) მწკრივის $S(x)$ ჯამი უწყვეტი ფუნქციაა.[73]. მის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



§2. ფურიეს მწკრივები ნებისმიერი ორთოგონალური სისტემის მიმართ

$[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ორთოგონალური $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_K(x)dx = 0$ როდესაც $i \neq K \quad (i, K = 0,1,\dots)$

აგრეთვე ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda_K = \int_a^b \varphi_k(x)dx > 0 \qquad K = 0,1,2,\dots$

$[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად $\omega_0(x),\ \omega_1(x),\dots,\omega_n(x),\dots$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება ორთონორმირებული $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ეს სისტემა ორთოგონალურია და $\int_a^b \omega_K^2(x)dx = 1 \qquad (K = 0,1,\dots)$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dots,\frac{\cos Kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin Kx}{\sqrt{\pi}} \tag{1}$$

ორთონორმირებული სისტემაა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ცხადია, თუ $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\dots,\ \varphi_n(x),\dots$ სისტემა ორთოგონალურია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ $\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{\lambda_0}},\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\lambda_1}},\dots,\frac{\varphi_K(x)}{\sqrt{\lambda_K}},\dots$ ორთონორმირებული სისტემაა იმავე სეგმენტზე.

მრავალწევრებს $P_0(x)=1,\ P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1),\dots,\ P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},\dots \qquad (2)$

ეწოდება ლეჟანდრის პოლინომები. ცხადია, რომ $P_n(x)$ წარმოადგენს n ხარისხის მრავალწევრს: $P_n(x)=\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n+\dots$

ვთქვათ მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემა.

$\omega_0(x),\ \omega_1(x),\dots,\omega_n(x),\dots$ განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქცია. რიცხვებს $c_K = \int_a^b f(x)\omega_K(x)dx \qquad (K = 0,1,\dots)$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\omega_K(x)\}$ სისტემის მიმართ, ხოლო მწკრივს $c_0\omega_0(x)+c_1\omega_1(x)+...+c_n\omega_n(x)+...$ (5)

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი მოცემული სისტემის მიხედვით და წერენ $f(x) \sim \sum_{K=0}^{\infty} c_K\omega_K(x)$ (6)

ამ მწკრივს ეწოდება აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის ორთოგონალური მწკრივი.

(6) ფორმულაში $\sim$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ c_K კოეფიციენტები გამოთვლილია $f(x)$ ფუნქციის მიხედვით (4) ფორმულის თანახმად, მაგრამ არ იგულისხმება, რომ მწკრივი (5) კრებადია.

თეორემა 1. თუ ორთონორმირებული (3) სისტემის ყოველი ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქცია იშლება თანაბრადკრებად ორთოგონალურ მწკრივად, მაშინ ეს მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივია.

განსაზღვრა 1. $[a,b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა $\{\varphi_K(x)\}$ სისტემას სრული ეწოდება, თუ არ არსებობს ამ სეგმენტზე იგივურად ნულისაგან განსხვავებული უწყვეი ფუნქცია, რომელიც მოცემული სისტემის ყოველი ფუნქციის ორთოგონალურია.[66].

განსაზღვრა 2. $[a,b]$ სეგმენტზე ორთონორმირებულ $\{\omega_K(x)\}$ სისტემას ეწოდება ჩაკეტილი მოცემულ სეგმენტზე, თუ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ტოლობა

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{K=0}^{\infty} c_K^{\,2} \qquad (7)$$

სადაც c_K $(K=0,1,...)$ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს მოცემული სისტემის მიმართ.

(7) ტოლობას ეწოდება პარსევალის ტოლობა. მას უწოდებენ აგრეთვე ჩაკეტილობის პირობას.

თეორემა 2. თუ $[a,b]$ სეგმენტზე (3) სისტემა ჩაკეტილია, მაშინ იგი სრულიც იქნება.

თეორემა 3. $[a,b]$ სეგმენტზე (3) სისტემის ჩაკეტილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს ტოლობას: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f(x)-\sum_{K=0}^{n} c_K\omega_K(x)\right]^2 dx = 0$

სადაც c_K $(K=0,1,\dots)$ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია მოცემული სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, $f_1(x),\ f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციათა მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა ეს მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია კვადრატით ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left[f(x)-f_n(x)\right]^2dx=0$

მწკრივს ეწოდება საშუალოდ კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ, თუ მისი კერძო ჯამთა მიმდევრობა საშუალოდ კრებადია $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

ახლა თეორემა 3 შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ასე:

$[a,b]$ სეგმენტზე ფუნქციათა ორთონორმირებული $|\omega_K(x)|$ სისტემის ჩაკეტილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს საშუალოდ კრებადი $f(x)$ ფუნქციისაკენ.

შევნიშნოთ რომ, ფუნქციათა მიმდევრობის საშუალოდ კრებადობიდან $f(x)$ ფუნქციისაკენ, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს ფუნქციათა მიმდევრობის კრებადობა $f(x)$ ფუნქციისაკენ. მართლაც განვიხილოთ

მაგალითი 1. ვთქვათ $[0,2]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია $f_m(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$f_m(x)=\begin{cases} m^2x, & \text{როდესაც } 0\le x\le \dfrac{1}{m} \\ -m^2x+2, & \text{როდესაც } \dfrac{1}{m}<x\le\dfrac{2}{m} \\ 0, & \text{როდესაც } \dfrac{2}{m}<x\le 2 \qquad (m=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

ყოველი $f_m(x)$ ფუნქცია უწყვეტია [0,2] სეგმენტზე. ცხადია, [0,2] სეგმენტის ყოველ x წერტილში $\lim\limits_{m\to\infty}f_m(x)=0$, მაგრამ $\int_0^2 f_m^2(x)dx>\int_0^{\frac{1}{m}} f^2(x)dx=\dfrac{m}{3}$

მაშასადამე, $\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^2 f_m^2(x)dx=+\infty$

ამრიგად, ფუნქციათა მიმდევრობა $\left(f_m(x)\right)_{m>1}$ ნულისაკენ კრებადია [0,2] სეგმენტზე, მაგრამ იგი საშუალოდ კრებადი არაა.

თეორემა 4. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს განზოგადებული პოლინომი $S_n(x) = \sum_{K=0}^{n} a_K \omega_K(x)$

ისეთი, რომ $\int_a^b \left[f(x) - S_n(x)\right]^2 dx < \varepsilon$ (10)

მაშინ (3) სისტემა ჩაკეტილია.

$[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე ყოველი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისა და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული პოლინომი $t_n(x)$, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f_n(x)\right]^2 dx < \varepsilon \qquad (11)$$

თეორემა 5. ტრიგონომეტრიული (1) სისტემა ჩაკეტილია $[-\pi; \pi]$ სეგმენტზე.

ყველა ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც $[a; b]$ სეგმენტზეა, ეწოდება $c[a; b]$ კლასი, ან მოკლედ c კლასი.

ყველა ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლებიც შემოსაზღვრულია $[a; b]$ სეგმენტზე და გააჩნია ამ მონაკვეთზე სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები, ეწოდება $c[a; b]$ კლასი, ანუ მოკლედ c' კლასი. c' კლასიდან ორი ფუნქცია შეიძლება ჩაითვალოს.

ახლა განვიხილოთ ფურიეს მწკრივების გამოყენებით ზოგიერთი სახის რიცხვითი მწკრივის ჯამის გამოთვლა.[48],[50].

მოვიყვანოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ ჯამი.

ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{როცა } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{როცა } 0 < x \le \pi \\ 0, & \text{როცა } x = 0 \end{cases}$

ეს ფუნქცია კენტია, ამიტომ ეს დაიშლება ფურიეს სინუს მწკრივად

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (12)$$

სადაც

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\frac{1}{\pi}} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}\cdot(\cos n\pi - \cos 0x) = -\frac{2}{\pi n}\cdot\left((-1)^n - 1\right) = \tag{13}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2K-1)}, \text{ როცა } \quad n = 2K-1 \\ 0, \qquad\qquad \text{როცა } \quad n = 2K \end{cases}$$

(12) და (13)-დან მივიღებთ: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{(2n-1)}$ (14)

(14) ტოლობიდან, როცა $x = \frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1$

აქედან $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ ჯამი.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = |x|$, რომელიც ინტეგრებადია $x \in [-\pi; \pi]$ სეგმენტზე. ეს არის ლუწი ფუნქცია, ამიტომ ის გაიშლება ფურიეს კოსინუს მწკრივად:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{15}$$

სადაც $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi$ (16)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(2K-1)^2}, \quad \text{როცა} \quad n = 2K-1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{როცა} \quad n = 2K \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

(15), (16) და (17) ფორმულებიდან მივიღებთ: $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(2n-1)^2}$

(2) ტოლობიდან, როცა x=0, მივიღებთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივის ჯამი.

ავიღოთ $f(x)=x^2$, $-\pi\le x\le\pi$ და რადგან ფუნქცია ლუწია, გავშალოთ ფურიეს კოსინუს მწკრივად. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ (18)

სადაც $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$ (19)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2x^2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$
$$=\frac{4x}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nxdx= \tag{20}$$
$$=\frac{4}{n^2}\cos n\pi-\frac{4}{\pi n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

(18), (19) და (20) ფორმულებიდან ყოველი $x\in[-\pi;\pi]$ სეგმენტში

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \tag{21}$$

საიდანაც, როცა $x=\pi$ მივიღებთ $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2-\frac{1}{3}\pi^2=\frac{2}{3}\pi^2$ აქედან $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ მწკრივის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ჯამი. (21) ტოლობაში დავუშვათ x=0, მივიღებთ: $\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=0$ საიდანაც $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ მწკრივის ჯამი.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=x(\pi-x)$ $0\le x\le\pi$ სეგმენტში. გავშალოთ ფურიეს სინუს მწკრივად: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, სადაც

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\sin nxdx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\pi x - x^2\right)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(\pi - 2x\right)\cos nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(\pi - 2x\right)\cos nxdx = \frac{2}{\pi n^2}\left(\pi - 2x\right)\sin nx\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nxdx = -\frac{2}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^3}\left[\left(-1\right)^n - 1\right] = \frac{4}{\pi\left(2K-1\right)^2}$$

n კენტია, ამიტომ $x\left(\pi - x\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^3}$ ამ ტოლობიდან, როცა $x = \frac{\pi}{2}$,

მივიღებთ $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^3} = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ აქედან $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^3} = \frac{\pi^3}{16}$

§3. ფურიეს ინტეგრალი და ფურიეს გარდაქმნები. მათი გამოყენებები და მეთოდიკური თავისებურებები

თუ f ფუნქცია მოცემულია მთელს R' რიცხვით წრფეზე და არ არის პერიოდული არავითარი სასრული პერიოდით, ასეთი ფუნქციის გაშლა, ბუნებრივია, ვერ მოხერხდება ტრიგონომეტრიული მწკრივის სახით. მათი წარმოდგენა შესაძლებელია ე.წ. ფურიეს ინტეგრალით.

ვთქვათ $\left[-\ell, \ell\right]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია აბსოლუტურად ინტეგრებადი $f\left(x\right)$ ფუნქცია. გარკვეულ პირობებში ეს ფუნქცია შეგვიძლია დავშალოთ ტრიგონომეტრიულ მწკრივად: $f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ (1)

სადაც $a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dt; (n = 0,1...); b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dt; (n = 0,1...)$

თუ a_n და b^n კოეფიციენტების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მაშინ მივიღებთ $f\left(x\right) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f\left(t\right)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f\left(t\right)\cos\frac{n\pi}{\ell}\left(t - x\right)dt$

ახლა ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში. ამ შემთხვევაში, როგორიც გინდა იყოს x, შესაბამისი $f(x)$ მნიშვნელობა გამოისახება (1) დაშლით ნებისმიერი ℓ-სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\ell>|x|$. ვგულისხმობთ, რომ არსებობს ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$

მაშინ, როცა $\ell\to+\infty$, მივიღებთ $f(x)=\lim_{\ell\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}(t-x)dt$

ამ ზღვრის მოსაძებნად შემოვიღოთ აღნიშვნები

$\lambda_1=\frac{\pi}{\ell},\ \lambda_2=\frac{2\pi}{\ell},...,\lambda_K=\frac{K\pi}{\ell},...\quad \Delta\lambda_K=\lambda_{K+1}-\lambda_K=\frac{\pi}{\ell}$ მაშინ

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{K\pi}{\ell}(t-x)dt= \\ =\frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\Delta\lambda_K\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\lambda_K(t-x)dt \tag{2}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმადგენს ინტეგრალურ ჯამს λ-ს შემდეგი ფუნქციისათვის $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt$

შედგენილს $[0,+\infty]$ შუალედისათვის. ამიტომ, ბუნებრივია, მოველოდეთ, რომ, როდესაც $\ell\to+\infty$ (2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გადავა არასაკუთრივ ორმაგ ინტეგრალში და გვექნება: $$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \tag{3}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ფურიეს ინტეგრალი ეწოდება, ხოლო (3) ფორმულას — ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა.

თუ ვისარგებლებთ ორი კუთხის სხვაობის კოსინუსის ფორმულით, (3) ფორმულა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ: $$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \tag{4}$$

სადაც $$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t dt;\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t dt \tag{5}$$

(4) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ფურიეს მწკრივის ანალოგიურია: ჯამის ნიშანი შეიცვალა ინტეგრალის ნიშნით, ხოლო K პარამეტრის ნაცვლად გვაქვს უწყვეტად ცვალებადი პარამეტრი. $a(\lambda)$ და $b(\lambda)$ მოგვაგონებს ფურიეს კოეფიციენტებს.

თუ $g(t)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში, მაშინ მართებულია ტოლობები

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin\lambda t dt = 0 \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos\lambda t dt = 0$$

ამ ლემის დახმარებით დავამტკიცოთ შემდეგი:

ჟორდანის ნიშანი: თუ $f(x)$ ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში და აქვს სასრული ვარიაცია რაიმე $[x-h, x+h]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]\frac{\sin At}{t}dt \qquad (6)$$

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს, მაშინ

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (7)$$

სადაც $a(\lambda)$ და $b(\lambda)$ განისაზღვრებიან (5) ტოლობებით.

თუ $f(x)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ $\quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt \quad b(\lambda) = 0$

მაშასადამე, ფურიეს ინტეგრალი (10) მიიღებს სახეს

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x d\lambda \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt \qquad (8)$$

ეს არის ფურიეს ინტეგრალი ლუწი $f(x)$ ფუნქციისათვის.

ახლა ვთქვათ, რომ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, მაშინ

$$a(\lambda) = 0, \qquad b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt$$

მაშასადამე (8) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x d\lambda \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt \qquad (9)$$

ეს არის ფურიეს ინტეგრალი კენტი ფუნქციისათვის.

ფურიეს ინტეგრალის კომპლექსური სახე. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჟორდანის თეორემის პირობებს. განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$

ეს ინტეგრალი წარმოადგენს λ -ს კენტ ფუნქციას, ამიტომ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)dt=0 \qquad (10)$$

მეორე მხრივ, ინტეგრალი $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt$

არის λ -ს ლუწი ფუნქცია, ამიტომ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \qquad (11)$$

საბოლოოდ მივიღებთ: $$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\ell^{i\lambda(x-t)}dt \qquad (12)$$

ფურიეს გარდაქმნა. 1. დავუშვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე. წარმოადგენს უბან-უბან გლუვს ყოველ სასრულ ინტერვალში და აბსოლუტურად ინტეგრებადია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში, მაშინ იგი წარმოდგება შემდეგი ფორმულით: $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\ell^{i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha \qquad (13)$$

ეს ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\ell^{-i\alpha t}dt\right]\ell^{i\alpha x}d\alpha \qquad (14)$$

აქ გავითვალისწინოთ, რომ $\varphi(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\ell^{-i\alpha t}dt$

მაშინ $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\ell^{i\alpha x}d\alpha \qquad (15)$$

$\varphi(\alpha)$-ს ეწოდება $f(t)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა.

2. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია, მაშინ

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha+dt\right)\cos\alpha x dx$$

ეს ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით: $$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right]\cos\alpha x d\alpha$$

დავუშვათ, რომ $$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt \qquad (16)$$

მაშინ $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}F\left(\alpha\right)\cos\alpha x d\alpha$ (17)

ფუნქცია $F\left(\alpha\right)$-ს ეწოდება $f\left(t\right)$ ფუნქციის ფურიეს კოსინუს-გარდაქმნა.

3. დავუშვათ $f\left(x\right)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ

$$f\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\infty}b\left(\alpha\right)\sin\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\infty}f\left(t\right)\sin\alpha+dt\right)\sin\alpha x d\alpha$$

ეს ტოლობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}f\left(t\right)\sin\alpha t dt\right]\sin\alpha x d\alpha$

აქ გავითვალისწინოთ, რომ $\Phi\left(\alpha\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}f\left(t\right)\sin\alpha t dt$ (18)

მაშინ $f\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi\left(\alpha\right)\sin\alpha x d\alpha$ (19)

$\Phi\left(\alpha\right)$-ს ეწოდება $f\left(t\right)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს-გარდაქმნა.

ფორმულათა წყვილები (16), (17) და (18), (19) ამყარებენ შემდეგ ურთიერთდამოკიდებულებას:

თუ $F\left(x\right)$ არის ფურიეს კოსინუს-გარდაქმნა $f\left(x\right)$ ფუნქციისა, მაშინ $f\left(x\right)$ ფუნქცია არის ფურიეს კოსინუს-გარდაქმნა $F\left(x\right)$ ფუნქციისა, ანალოგურად თუ $\Phi\left(x\right)$ არის $f\left(x\right)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს-გარდაქმნა, მაშინ $f\left(x\right)$ არის ფურიეს სინუს გარდაქმნა $\Phi\left(x\right)$ ფუნქციისა.

უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ ფურიეს გარდაქმნა. ის ფაქტი, რომ $\varphi\left(\alpha\right)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (17) ფორმულით, წარმოადგენს $f\left(t\right)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას და ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\varphi\left(\alpha\right)=F\left[f\left(t\right)\right]\left(\alpha\right)$

ანუ უფრო მოკლედ $\varphi=F\left[f\right]$

თუ განვიხილავთ (19) ტოლობას, როგორც ჩვენთვის ცნობილ $f\left(t\right)$ ფუნქციის ინტეგრალურ ტოლობას, მაშინ ამ ტოლობის ამოხსნა შესაძლებელია (18) ფორმულით, რომლის მარჯვენა ნაწილში x იცვლება (-x)-ით. მაშინ (18) ფორმულა ასე გამოისახება:

$f\left(x\right)=F\left[\varphi\left(\alpha\right)\right]\left(-x\right)$ (20)

(20) წარმოადგენს ფურიეს უკუგარდაქმნას, რომელიც შეიძლება ასე აღვნიშნოთ:

$F^{-1}\left[\varphi(\alpha)\right](x)$

ამგვარად $F^{-1}\left[\varphi(\alpha)\right](x)=F\left[\varphi(\alpha)\right](-x)$

ფურიეს გარდაქმნას გააჩნია შემდეგი ძირითადი

$$\begin{aligned}
&1)\ F\left[cf(t)\right](\alpha)=cF\left[f(t)\right](\alpha), \qquad c=\text{const}\\
&2)\ F\left[f_1(t)+f_2(t)\right](\alpha)=F\left[f_1(t)\right](\alpha)+F\left[f_2(t)\right](\alpha)\\
&3)\ F\left[f'(t)\right](\alpha)=i\alpha F\left[f(t)\right](\alpha)\\
&4)\ F\left[f(h)(t)\right](\alpha)=(i\alpha)^n F\left[f(t)\right](\alpha)
\end{aligned} \tag{21}$$

(1) და (2) თვისებიდან გამომდინარეობს ტოლობის მართობულობა

$$F\left[\sum_{K=1}^{n} c_K f_K(t)\right](\alpha)=\sum_{K=1}^{n} c_K F\left[f_K(t)\right](\alpha) \tag{22}$$

ფურიეს გარდაქმნის ზემოთ აღნიშნული თვისებები შეიძლება გამოვიყენოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნისათვის, რომელთაც გააჩნიათ მუდმივი კოეფიციენტები.

დავუშვათ მოცემულია წრფივი დიფერენციალური განტოლება $\sum_{K=0}^{\infty} a_K y^K(x)=f(x)$ (23)

რომელსაც გააჩნია მუდმივი კოეფიციენტი a_K

მისი ორივე ნაწილისათვის გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნა

$$F\left[\sum_{P=0}^{n} a_K y^{(K)}(x)\right](\alpha)=F\left[f(x)\right](\alpha) \tag{24}$$

(24) განტოლების მარჯვენა მხარე ავღნიშნოთ $\varphi(\alpha)$ და ვისარგებლოთ თვისებებით, მაშინ ფორმულა შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\sum_{K=0}^{n} a_K F\left[y^{(F)}(x)\right](\alpha)=\varphi(\alpha) \quad \text{ან} \quad \sum_{K=0}^{n} a_K (i\alpha)^K F\left[y(x)\right](\alpha)=\varphi(\alpha)$$

აქედან ვპოულობთ საძიებელი $y(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას

$$F\left[y(x)\right](\alpha)=\frac{\varphi(\alpha)}{\sum_{K=0}^{n} a_K (ia)^K}$$

თუ გამოვიყენებთ ფურიეს შებრუნებულ გარდაქმნას (უკუგარდაქმნას) (24)-ს, უცნობი $y(x)$ ფუნქციისათვის მაშინ მივიღებთ $y(x)=F\left[\dfrac{\varphi(\alpha)}{\sum\limits_{K=0}^{n} a_K (i\alpha)^K}\right](-x)$

ფორმალურად (23) განტოლება ამოხსნილია, თუმცა აღნიშნული მეთოდის გამოყენება ძლიერ შეზღუდულია შემდეგი გარემოებების გამო: როგორც წესი მუდმივი კოეფიციენტების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლებების კერძო ამოხსნა შეიცავს შემდეგი სახის შესაკრებებს: ℓ^{Kx}, $\ell^{Kx}\cos\beta x$, $\ell^{Kx}\sin\beta x$ და ა.შ., რომლებიც უსასრულო ხდებიან, მაშინ, როცა $x\to\pm\infty$ შესაბამისი არასაკუთრივი ინტეგრალები მათი ტოლფასი არ არიან და ამიტომ ამ ფუნქციებისათვის ფურიეს გარდაქმნებს აზრი არ აქვს. მოცემული შეზღუდვის თავიდან აცილება შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ მათ როგორც განზოგადოებულ ფუნქციებს.

ფურიეს გარდაქმნები ზოგიერთ შემთხვევაში გამოყენებულია განხილული კლასიკური ფორმით. ხშირად ეს ეხება კერძო წარმოებულის მქონე დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნას.

მაგალითი 1. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{როცა } |x|>1\\ 1, & \text{როცა } 0<x<1\\ -1, & \text{როცა } -1<x<0\end{cases}$

ფუნქცია წარმოვადგინოთ ფურიეს ინტეგრალის სახით. გამოვიყენოთ $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^3 t}{t}dt$ ინტეგრალი. $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს კენტ ფუნქციას, ამიტომ

$$a(\alpha)=0;\qquad b(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\alpha t dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\alpha t dt=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\alpha t}{\alpha}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$$

მოცემული ფუნქციისათვის ფურიეს ინტეგრალს ექნება სახე:

$$f(x)=\int\limits_0^\infty b(t)\sin\alpha x d\alpha=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\sin\alpha x d\alpha=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha x\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (25)$$

ახლა გამოვთვალოთ $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^3 t}{t}dt$ (24) ფორმულიდან გვაქვს $\int\limits_0^\infty \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha x\dfrac{d\alpha}{\alpha}=\dfrac{\pi}{4}\cdot f(x)$

აქ დავუშვათ $x=\dfrac{1}{2}$, გავითვალისწინოთ, რომ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, მივიღებთ: $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha}d\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

დავუშვათ $\dfrac{\alpha}{2}=t$, საბოლოოდ მივიღებთ $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^3 t}{t}dt=\dfrac{\pi}{4}$

მაგალითი 2. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } |x|<1\\ 0, & \text{როცა } |x|>1\end{cases}$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ კომპლექსური სახის ფურიეს ინტეგრალის სახით. გვაქვს $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\alpha)\ell^{-i\alpha x}d\alpha$

სადაც $c(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ell^{-i\alpha t}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\ell^{-i\alpha t}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\ell^{i\alpha}-\ell^{-i\alpha}}{i\alpha}\right]=\frac{1}{\pi\alpha}\sin\alpha$

მაშასადამე, $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\ell^{-i\alpha x}d\alpha$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt=\begin{cases}\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha, & 0\le\alpha\le\pi\\ 0, & \alpha>\pi\end{cases}$$

უნდა ვიპოვოთ $f(x)$, როცა $0\le\alpha\le\pi$ ინტეგრალური განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt$

მივიღეთ (21) განტოლების მსგავსი, რომლისთვისაც $\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha$ მისი ამონახსნი მოიცემა (22) ფორმულით. გვაქვს $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\sin\alpha x d\alpha=\int\limits_{0}^{\pi}\sin\alpha\sin\alpha x d\alpha$,

რომლის ინტეგრებით მივიღებთ $f(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x^2}$

§4. პედაგოგიური ექსპერიმენტი

მწკრივთა თეორიის ელემენტების სწავლების მეთოდიკამ უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე., რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალი-ბებული იყო დისერტაციის I, II და III თავებში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული მაგალითების განხილვის საფუძველზე, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა ექვსი წლის (2007-2013 წლებში) განმავლობაში აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა და ბიზნესის, სამართლისა და სოციალურ მეცნიერებათა ფაკულტეტებზე და ქუთაისის უნივერსიტეტის ბიზნესის მართვის ფაკულტეტზე. სულ ექსპერიმენტში მონაწილეობდა 306 სტუდენტი.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე, ჩვენს მიერ შესწავლილი იქნა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა და სამართლის, ბიზნესის და სოციალურ მეცნიერებათა ფაკულტეტების და ქუთაისის უნივერსიტეტის ბიზნესის მართვის ფაკულტეტის სტუდენტთა აკადემიური მოსწრება მათემატიკურ ანალიზსა და უმაღლეს მათემატიკაში, შუალედური და ფინალური გამოცდების ნაშრომები, რომლებიც დისერტაციაში განხილული საკითხებს ეხებოდა.

ანალიზმა ცხადყო, რომ სტუდენტთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმო-ადგენს ისეთი მაგალითების ამოხსნა რომელიც ეხება მწკრივთა თეორიის იმ საკითხებს, რომლებიც მოითხოვს სპეციალური, არასტანდარტული ხერხების ცოდნას, რომელთა გამოყენებით დასმული ამოცანები ამოიხსნება მარტივად, ზედმეტი სირთულეების გარეშე.

უმაღლესი სკოლის სპეციალურ ფაკლტეტებზე მათემატიკური ანალიზის კურსი და არასპეციალურ ფაკლტეტებზე უმაღლესი მათემატიკის კურსები ისეა აგებული, რომ მათში კონკრეტული საკითხის გადაწყვეტისათვის საჭირო თეორიული საკითხები ნაკლებად არის შეტანილი, ამიტომ ჩვენს მიერ ძირითადი ყურადღება უნივერსიტეტის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე გადატანილი იყო მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის მეთოდურ თავისებურებებზე. ამოცანები სირთულის მიხედვით განსხვავდებოდა სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის პროცესში ბუნებრივად მონაწილეობდა სპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის მათემატიკური ანალიზის კურსის სილაბუსით გათვალისწინებულ სავალდებულო და დამხმარე ლიტერატურიდან აღებული ამოცანები და ასევე არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის უმაღლესი მათემატიკის კურსის სილაბუსით გათვალისწინებულ სავალდებულო და დამხმარე ლიტერატურიდან აღებული ამოცანები ჩვენს მიერ სპეციალურად შერჩეულ ამოცანებთან ერთად.[71].

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ ის ამოცანები და თეორიული საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებასთან სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის განკუთვნილი მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსების სილაბუსით გათვალისწინებულ სავალდებულო და დამხმარე ლიტერატურაში ან სულ არ განიხილება, ან განიხილება მცირე რაოდენობით. მეორეს მხრივ, სადაც მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნა არასტანდარტული ხერხის გამოყენებით ხორციელდება, არ ხდება ამოხსნის პროცესში გამოყენებული საძიებო ხერხის სრულფასოვანი მეცნიერული ახსნა.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

I ეტაპი - მოსამზადებელი ექსპერიმენტი - რომელიც ტარდებოდა ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებ-ზე. სპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან მათემატიკური ანალიზის კურსში და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან უმაღლესი მათემატიკის კურსში. ლექცი-ებზე იხილებოდა მწკრივთა თეორიის თეორიული საკითხები, პრაქტიკულ მეცადინეო-ბებზე და სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე კი ვიხილავდით მწკრივთა თეორიის პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ, არასტანდარტულ ხერხებს.

II ეტაპი-სასწავლო ექსპერიმენტი რომელიც ტარდებოდა ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე. სპეცია-ლური ფაკულტეტის სტუდენტებთან მათემატიკური ანალიზის კურსში და არასპეცია-ლური ფაკულტეტის სტუდენტებთან უმაღლესი მათემატიკის კურსში.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა სპეციალური და არასპე-ციალური ფაკულტეტის სტუდენტების საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმე-ბა. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ მწკრივთა თე-ორიის ამოცანების ამოხსნის ხერხებს.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა სამი წლის (2007-2010 წლები) განმავლობაში და მასში მონაწილეობა მიიღო აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსი-ტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის, ამავე უნივერსიტე-ტის ბიზნესის, სამართლის და სოციალურ მეცნიერებათა ფაკულტეტის და ქუთაისის უნივერსიტეტის ბიზნესის მართვის ფაკულტეტის სტუდენტებმა

სტუდენტებთან მუშაობის ძირითადი ფორმა იყო ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცა-დინეობებზე, სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე მწკრივთა თეორი-ის თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების განხილვა. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახი-ლავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

სტუდენტებს ეძლეოდათ მათემატიკური ანალიზის (სპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებს) და უმაღლესი მათემატიკის კურსებიდან (არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებს) მწკრივთა თეორიის ამოცანები[29],[16]. სილაბუსში მითითებული სახელ-მძღვანელოებიდან და კრებულებიდან, აგრეთვე ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილი ამოცანები.

განსაკუთრებული სიძნელე წარმოშვა ისეთმა ამოცანებმა, რომელთა ამოხსნა მო-ითხოვს მწკრივთა თეორიის სპეციალური საკითხების ცოდნას, რომელიც მოითხოვს ამომხსნელისაგან არასტანდარტულ მიდგომას.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

1) კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით აჩვენეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\cdot 3^n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n_x}{5^n}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n_x-\cos(n+1)x}{n}$.

2) გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი და დაადგინეთ კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2q^n$; ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$; ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

3) შედარების ნიშნების გამოყენებით გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$;

ე) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$, $a>0$; ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$.

4) დალამბერის ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$; ე) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

5) კოშის ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell n^2(n+1)}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

6) კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ell n^2 n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$; დ) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ell_n n}{n(\ell_n^4 n+1)}$.

7) დაამტკიცეთ, რომ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ კრებადია, როცა P>1 და განშლადია, როცა $P\le 1$.

8) რააბის, ბერტრანის და გაუსის ნიშნების გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივების კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{9\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(4n+5)}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{3/2}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{\ell}\right)^n$;

ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{p}\cdot\frac{1}{n^{q}}$; $p,\ q\in R$

9) გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა კოშის შედარების ნიშნის გამოყენებით

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$; ბ) $\sum_{n=2}^{\infty} n\ell_n n\ell_n\ell_n n$.

10) დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}}=0$; ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{n^{n}}=0$; გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{n}}{n^{n^{3}}}=0$.

11) გამოიკვლიეთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა:

ა) $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{2}+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^{5}}dx$; ბ) $\int_{1}^{x}\sqrt{x^{2}\cdot 2^{-x}}dx$; გ) $\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\Gamma(2x+1)}$.

12) გამოარკვიეთ მოცემული ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$; გ) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ell_n n}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^{n}}$; ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2m}{3n+5}\right)^{n}$; ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot(1)^{n-1}}{n(n+2)}$; ზ) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ell_n n\left(\ell_n\ell_n n\right)^{p}}$; თ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^{2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)n}$; ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!(-1)^{n-1}}{n^{n}}$.

13) გამოარკვიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა დილიხლეს ნიშნის მიხედვით:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n}{\sqrt{n}}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin a_n}{n}$, სადაც $a=\text{const}$.

14) გამოთვალეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი მოცემული β სიზუსტით:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$, $\beta=10^{-4}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6}}$, $\beta=10^{-6}$.

15) შეაფასეთ მწკრივების ნაშთში $n,\ \alpha$ სიზუსტით და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი β სიზუსტით.

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}$ $\alpha=0,0002,\ \beta=0,01$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ $\alpha=\ \beta=0,001$;

გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^{3}}$ $\alpha=0,0001,\ \beta=0,01$.

16) დაამტკიცეთ, რომ ორი განშლადი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ მწკრივების სხვაობა კრებადია.

17) დაამტკიცეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+n^4\cdot 2^{-n}}{2n}\right]$ მწკრივის კრებადობა, მისი რამდენიმე მწკრივის ჯამად გაშლით და გამოიკვლიეთ თითოეული მწკრივის კრებადობა.

18) დაამტკიცეთ ტოლობის სამართლიანობა: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

19) გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{2\pi n}{3}$

20) იპოვეთ პირველი ხუთი წევრი მწკრივთა ნამრავლის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

21) დაამტკიცეთ ტოლობა: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

22) გამოთვალეთ მწკრივთა ნამრავლი:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ და $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n(n+1)}$ და $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$

23) შემდეგი მწკრივები აიყვანეთ კვადრატში: ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

24) მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ გაყავით $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ მწკრივზე და იპოვეთ პირველი ხუთი წევრი.

25) გაყავით $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ მწკრივზე.

26) იპოვეთ კრებადობის არე შემდეგი მწკრივების:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot(nx)^n$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\ln^n\left(1+x^2\right)$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\left(3-x^2\right)^n$; ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n$; ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$;

ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$; თ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n^3}{x^n}$; ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot x^n}}$; კ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$; ლ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot 2^n\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{3^n}$; მ) $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{x^n}{1-x^n}$.

27) ფუნქციონალური მწკრივის განსაზღვრიდან გამომდინარე გამოთვალეთ ჯამი შემდეგი ფუნქციონალური მწკრივების და დაადგინეთ ის შუალედი, სადაც არის განსაზღვრული:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(2x-1)}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha$.

28) მწკრივის თანაბრადკრებადობის განსაზღვრიდან საფუძველზე დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების თანბრადკრებადობა მოცემულ შუალედში:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n;\ \left[-\frac{1}{2},0\right]$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n-1};\ (-1;1)$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}};\ [0;10]$.

29) ვაიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების თანაბრადკრებადობა მითითებულ შუალედში:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2};\ [-1,1]$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2};\ (-\infty;+\infty)$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{\cos nx}}{n\ln^2 n};\ (-\infty;+\infty)$;

დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^3}};\ (-\infty;+\infty)$; ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+5^n};\ (-5;+\infty)$;

ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x^2+n^4};\ (-\infty;+\infty)$; ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3};\ [-3;3]$

30) იპოვეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის რადიუსი:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$; ბ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$; გ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)(n+6)^{2n+1}}{(2n)!}x^{2n+1}$; დ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}}$;

ე) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{3^{n^3}}$; ვ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; ზ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$; თ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$; ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$;

კ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; ლ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$; მ) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{arctg}^n\frac{n^2+3}{n^2+1}$

31) შეასრულეთ მითითებული მოქმედებები ხარისხოვან მწკრივებზე:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n x^n}{n!}$; ბ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\ln^n 2}{n!}(x-a)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}(x-a)^n$; გ) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}\right)^2$;

დ) $\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]^2$; ე) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}\right):\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}\right)$

32) მწკრივთა დიფერენცირებისა და ინტეგრების გათვალისწინებით გამოთვალეთ შემდეგი მწკრივთა ჯამები და იპოვეთ კრებადობის მიდამო:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-1}}{3n-1!}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$; დ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-2n+1\right)x^n$; ე) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^3-1\right)^{n+1}}{n+1}$.

33) დაამტკიცეთ ტოლობა $\frac{1}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}x^{n-1}-1}{1+x^{2n-1}}=\frac{1}{1-x}$, როცა $-1<x<1$

34) გამოთვალეთ რიცხვითი მწკრივის ჯამი:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

35) გამოიყენეთ აბელის II თეორემა და დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

36) $f(x)=\sin\frac{x^2}{3}$ ფუნქცია გაშალეთ x-ის ხარისხოვან მწკრივად.

37) $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ ფუნქცია გაშალეთ cosx-ის ხარისხოვან მწკრივად.

38) შემდეგი ფუნქციები გაშალეთ ტეილორის მწკრივად x-ის ხარისხებად და დავადგინეთ კრებადობის არე.

ა) $\cos 5x$; ბ) $\sin x^2$; გ) ℓ^{3x}; დ) 5^x; ე) $\frac{2}{1-3x^2}$; ვ) $x^3\operatorname{arctg}x$; ზ) $\ln(1-x)$; თ) $\ln\frac{1+x}{1-x}$;

39) სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}$; ბ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; გ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; დ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+2}}{n}$.

40) გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x-\sin x}$; ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$; გ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

41) მიცემული ფუნქციის მაკლრენის მწკრივად გაშლის საშუალებით იპოვეთ x=0 წერტილში მოცემული ფუნქციის მითითებული წარმოებული

ა) $\ell^{-\frac{x^2}{2}}$; $f^{(10)}(0)=?$;ბ) $\frac{2x}{1+x^2}$; $f^{(6)}(0)=?$; გ) $x^2\sqrt[4]{1+x}$; $f^{(5)}(0)=?$; დ) $\sqrt[3]{8+x}$; $f^{(5)}(0)=?$

42) ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მითითებული რიგის წარმოებული

ა) $(x-1)^2\ln x$; $f^{(5)}(1)=?$; ბ) $\frac{x-2}{\sqrt{x}}$; $f^{(6)}(4)=?$; გ) $\frac{1}{x^2-4x+7}$; $f^{(6)}(-2)=?$.

43) შემდეგი ინტეგრალები წარმოადგინეთ მწკრივის სახით:

ა) $\int_0^1 x^2\ell^{-x^2}dx$; ბ) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$; გ) $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

44) გამოვთვალოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები α სიზუსტით:

ა) ℓ ; $\alpha=0,0001$; ბ) $\sqrt{\ell}$; $\alpha=0,0001$; გ) $\frac{1}{\sqrt{\ell}}$; $\alpha=0,001$; დ) $\sin 1^0$; $\alpha=0,0001$;

ე) $\cos 10^0$; $\alpha=0,0001$; ვ) $\sqrt{1,3}$; $\alpha=0,001$; ზ) $\sqrt[3]{80}$; $\alpha=0,001$; თ) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$; $\alpha=0,001$;

ი) $\ln 10$; $\alpha=0,0001$; კ) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\alpha=0,001$.

45) შემდეგი ინტეგრალები გამოთვალეთ 0,001 სიზუსტით:

ა) $\int_1^{\frac{1}{4}}\ell^{-x^2}dx$; ბ) $\int_1^2\frac{\ell^x}{x}dx$; გ) $\int_0^{\frac{1}{4}}\sin x^2dx$; დ) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$;

ე) $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx$; ვ) $\int_2^4\ell^{\frac{1}{x}}dx$; ზ) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}dx$.

46) განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი

1) $y''=y$; 2) $y''+2xy=0$; 3) $y''-x^2y=0$; 4) $y''+xy'+y=0$.

47. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის გამოყენებით ვიპოვოთ მწკრივის ჯამი:

ა. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; $f(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } 0<x<\pi\\ -1, & \text{როცა } -\pi<x<0\end{cases}$

ბ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; $f(x)=|x|$ როცა $-\pi\le x\le\pi$

გ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; $f(x)=x^2$ როცა $-\pi \le x \le \pi$

48. $f(x)=1$ ფუნქცია დაშალეთ სინუსების მიხედვით $(0;\, \pi)$ ინტერვალში.

49. $f(x)=x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(0;\, 2\pi)$ ინტერვალში.

50. $f(x)=x^2$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(0;\, 2\pi)$ ინტერვალში.

51. $f(x)=\ell^x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(-\pi;\, \pi)$ ინტერვალში.

52. $f(x)=\cos\alpha x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(-\pi;\, \pi)$ ინტერვალში (α მთელი არ არის).

53. $f(x)=x\sin x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $\left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right)$ ინტერვალში.

მოსამზადებელმა ექსპერიმენტმა საშუალება მოგვცა გაგვეკეთებინა დასკვნები:

1. მწკრივთა თეორიის თეორიული საკითხების და შესაბამისი პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლებას უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე საკმარისი ყურადღება არ ექცევა;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო სტუდენტთა უმრავლესობა ვერ ფლობს მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის იმ არასტანდარტულ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ზევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. სტუდენტთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხები, მარტივად ახერხებენ მწკრივთა თეორიის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნას.

4. მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის რომელი არასტანდარტული ხერხების სწავლებაა აუცილებელი?

ბ) უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე სწავლების პროცესში მწკრივთა თეორიის რომელი პრაქტიკული ამოცანების განხილვაა მიზანშეწონილი?

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის შემცველი ის მწირი მეთოდიკური ლიტერატურა, რომელიც არსებობს. შევარჩიეთ ჩვენთვის მისაღები მწკრივთა თეორიის ის ამოცანები, რომელებიც ამოიხსნებიან ჩვეულებრივი ტრადიციული მიდგომებით, მაგრამ მოითხოვს დიდი მოცულობის მათემატიკურ გარდაქმნებს და ამავე დროს მათი ამოხსნა მარტივად და ეფექტურად შეიძლება არასტანდარტული ხერხების გამოყენებით, რაც გვაძლევს დროში საგრძნობ ეფექტს და სტუდენტებს უვითარებს ლოგიკურ აზროვნებასა და მიხვედრილობის უნარს. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ თეორიული საკითხები, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მათემატიკური ანალიზის კურსში (სპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის) და უმაღლესი მათემატიკის კურსში (არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის). მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ გაგვეხილა შემდეგი საკითხები:

1. რიცხვითი მწკრივი და მისი ჯამი
2. დადებითწევრებიანი მწკრივის კრებადობა
3. მწკრივთა თეორიის ზოგიერთი გამოყენება
4. ნიშანცვლადი მწკრივების კრებადობა
5. რიცხვითი მწკრივის ჯამის მიახლოებითი გამოთვლა
6. მოქმედებები მწკრივებზე
7. ფუნქციათა მწკრივები. მისი კრებადობის და განშლადობის არეები
8. ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობა
9. ხარისხოვანი მწკრივები
10. მწკრივთა დიფერენცირება და ინტეგრება

11. ფუნქციის დაშლა მწკრივებად

12. მწკრივების გამოყენება ზღვრების, წარმოებულების და ინტეგრალების გამოთვლაში

13. მიახლოებითი გამოთვლები მწკრივების საშუალებით

14. მწკრივთა თეორიის გამოყენება დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაში

15. ორთოგონალური სისტემები. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივები

16. ფურიეს მწკრივები ნებისმიერი ორთოგონალური სისტემის მიმართ

17. ფურიეს ინტეგრალი და ფურიეს გარდაქმნები. მათი გამოყენებები

აღნიშნული საკითხები ექსპერიმენტის მსვლელობის პროცესში განიხილებოდა ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე .

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის I, II და III თავებში შემოთავაზებული მეთოდიკა .

აღნიშნული მეთოდიკა შემოწმებას გადიოდა ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე, სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე. რამდენჯერმე მოგვიხდა სწავლების მეთოდიკისა და დასმული ამოცანების კორექტირება მათი დახვეწის მიზნით. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ მწკრივთა თეორიის ყველა ამოცანის პრაქტიკული ამოხსნა რა თქმა უნდა არ ხერხდებოდა, მაგრამ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სემესტრის მანძილზე. ერთ ლექციაზე, პრაქტიკულ მეცადინეობაზე, სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომაზე განიხილებოდა არაუმეტეს ერთი საკითხისა, ხოლო სტუდენტებს დავალების სახით ეძლეოდათ ანალოგიური ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ ამოცანით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში, მათგან ზოგიერთი მათგანი განვიხილეთ ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენტთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომაზე. დანარჩენი სტუდენტებს მივეცით დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. გარდა ამისა ვსარგებ-

ლობდით სხვადასხვა სახელმძღვანელოებითა და კრებულებით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს.

სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება.

სასწავლო ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა სამი სასწავლო წლის (2010-2013 წლები) განმავლობაში აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტტეტის, ამავე უნივერსიტეტის სამართლის, ბიზნესის და სოციალურ მეცნიერებათა ფაკულტეტის და ქუთაისის უნივერსიტეტის ბიზნესის მართვის ფაკულტეტის სტუდენტებთან.

ექსპერიმენტის დაწყების ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს სტუდენტებს უნდა ამოეხსნათ მწკრივთა თეორიის ამოცანები, დაახლოებით იმ სახის, რაც მოცემული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა სტუდენტთა 38-40%. მთელი სემესტრის განმავლობაში მიმდინარეობდა მწკრივთა თეორიის მოცანების ამოხსნის არასატანდარტული ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა სემესტრის ბოლოს. სტუდენტთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად სტუდენტთა 90 %-მდე ასრულებდა.

ზემოთ თქმული ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა ექსპერიმენტში მონაწილე ჯგუფებისა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებსაც.

საკონტროლო და ექსპერიმენტული ჯგუფების სტუდენტთა ცოდნის დონე მათემატიკურ ანალიზში და უმაღლეს მათემატიკაში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,6 და 7,4.

ექსპერიმენტული ჯგუფებისათვის სწავლება მიმდინარეობდა ზემოთ აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით სემესტრის ბოლოს ფინალურ გამოცდაზე მიცემული ამოცანების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა მწკრივთა თეორიის ამოცანის ამოხსნას არასტანდარტული ხერხის გამოყენებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია სხვა ხერხითაც, ოღონდ საჭიროა რთული გამოთვლების ჩატარება.

მოვიყვანოთ მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მიერ ექსპერიმენტის სამი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწმების შედეგები. პირველი შემოწმება ითვალისწინებდა სტუდენტთა საერთო დონის დადგენას, ხოლო დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებზე სტატისტიკურ შეფასებას ვახდენდით ორი ნიშნით:

1. რამდენი სტუდენტი შეეცადა ამოეხსნა მწკრივთა თეორიის ამოცანა არასტანდარტული ხერხით;

2. ამ სტუდენტებიდან რამდენმა ამოხსნა ამოცანა სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1.

ჯგუფები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
სტუდენტთა რაოდენობა	159	159	159	159	159	147	147	147	147	147
ამოხსნა I	133	135	136	137	139	109	111	110	109	111
ვერ ამოხსნა	26	24	23	22	20	48	46	47	48	46
ამოხსნა II	119	121	122	124	124	83	85	86	87	89
ვერ ამოხსნა	14	14	14	13	15	26	26	24	22	22

იმის გამო, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე.

შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [29.გვ.96-106] კრიტერიუმის სტატისტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან[29.გვ.130] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68.

T_o ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის სტუდენტთა შორის შემთხვევითია.

ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის.

ცხრილი 2.

ჯგუფები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
სტუდენტთა რაოდენობა	159	147
ამოხსნა	136	110
ვერ ამოხსნა	23	47
ამოხსნა	122	86
ვერ ამოხსნა	14	24

ჩატარებული ექსპერიმენტის $T_б$ კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_б = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2 \left(O_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \qquad [29.\text{გვ}96.]$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3.

I ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 136$	$O_{21} = 110$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 23$	$O_{22} = 37$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 159$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 147$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 306$

ცხრილი 4.

I ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11}=122$	$O'_{21}=86$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12}=14$	$O'_{22}=24$
	$O'_{11}+O'_{12}=n'_{1}=136$	$O'_{21}+O'_{22}=n'_{2}=110$

სადაც $n'_1+n'_2=N'=246$.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: $T_{\text{ნ}}=11{,}10$;

მეორე ნიშნისათვის: $T_{\text{ნ}}=12{,}08$;

რადგან ორთავე მნიშვნელობა აღემატება $T_{\text{კრ}}$, ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების T_0 ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების სტუდენტები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

მწკრივთა თეორიის თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ზემოთ მოყვანილი პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. სწავლების მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას უმაღლეს სკოლაში სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან, როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

2. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ განხილული ამოხსნის სპეციალური ხერხე-

ბით სწავლება ხელს უწყობს სტუდენტების მათემატიკურ კულტურის ჩამოყალიბებას, ეხმარება მათ განათლების მიღებაში, ამაღლებს ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია უმაღლეს სკოლაში მწკრივთა თეორიის ამოცანები დავყოთ მსგავსების და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები სტუდენტებს საშინაო დავალებად მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია სტუდენტთათვის სწავლების პროცესში მწკრივთა თეორიის ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება სტუდენტთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა, რომელიც საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთ უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანათა ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ხერხების ქმედითუნარიანობა, სტუდენტებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს. ამის დასტური იყო ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტი.

ზოგადი დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები

1. უმაღლესი მათემატიკის შესწავლის მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს, თუ როგორ ვასწავლოთ მათემატიკა კონკრეტულ სპეციალობებზე, რადგან განსხვავებული მიდგომებია სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის როგორც სწავლების სიღრმის, ისე სწავლების მეთოდების მხრივ. პასუხი უნდა გაეცეს შემდეგ კითხვებს:

- რა არის უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის შესწავლის მიზნები და ამოცანები;
- უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის რა თემების განხილვაა მიზანშეწონილი და რა სიღრმით;
- რა შინაარსით წარვმართოთ მწკრივთა თეორიის საკითხების სწავლება უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში;
- უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის თემების რა ფორმებითა და მეთოდებით ვასწავლოთ.

2. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის გადასაჭრელი პრობლემები განხილულ უნდა იქნეს პედაგოგიკასთან, მათემატიკურ ანალიზთან, ალგებრასთან, რიცხვთა თეორიასთან, გეომეტრიასთან, ფსიქოლოგიასთან, ფილოსოფიასთან და სხვა მეცნიერებებთან ურთიერთკავშირში. შემუშავებული მეთოდური რეკომენდაციები შესაბამისობაში უნდა იყოს ფსიქოლოგიის, მათემატიკური ანალიზის, ალგებრის, რიცხვთა თეორიის, გეომეტრიის, პედაგოგიკის და სხვა მეცნიერებათა უახლეს მიღწევებთან და მათი გამოყენების სფეროსთან. სწავლების პროცესის მაღალ მეცნიერულ დონეზე წარმართვისათვის აუცილებელია პედაგოგიური პრობლემების თეორიული კვლევა და შესაძლო შედეგების პროგნოზირება, უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და

უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის საკითხების და პრაქტიკული სავარჯიშოებისათვის ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების სპეციალური მეთოდიკის დამუშავება.

3.უნივერსიტეტებში ლექტორად მუშაობის ხანგრძლივი პრაქტიკა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ საუკეთესო ლექტორებიც ვერ აღწევენ წარმატებებს თუ არ არის გამართული სახელმძღვანელო, პროგრამა, სასწავლო გეგმა და არ არის შემუშავებული განსახილავი თემების სწავლების სპეციალური მეთოდიკა. უმაღლესი სკოლა იმ შემთხვევაში მოამზადებს მაღალკვალიფიციურ სპეციალისტს, თუ სწავლების პროცესში ზოგადად გათვალისწინებული იქნა თანამედროვეობის მოთხოვნები განათლების მიმართ. კონკრეტულად კი, ის მოთხოვნები რომლებიც ეხება სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის შემცველი ისეთი საკითხების შეტანას სასწავლო გეგმებში, პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებში, რომლთა გადაწყვეტა მოითხოვს არასტანდარტულ მიდგომებს. აქვე შევნიშნავთ, რომ ამისათვის არ მოვითხოვთ დამატებით სასწავლო დროს, ამ საკითხების სწავლებას ვახორციელებთ ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკით. [16]

4. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემა ერთ-ერთი რთული პედაგოგიური პრობლემაა. ეს გამოწვეულია იმ ობიექტური ფაქტორებით, რომ ზოგადად არ არსებობს უნივერსალური მათემატიკური მეთოდები და ხერხები, რომელთა დაუფლებით შესაძლებელი იქნება ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნა. მიზანშეწონილად მიგვაჩნია უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლება, რომლის ეფექტურობა დადასტურდა ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენტით.

5. სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტთათვის მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების არასტანდარტული ხერხებით ამოხსნისას ლექტორმა უნდა შეძლოს სტუდენტთა

მოტივაციის შექმნა ამოცანების ამოსახსნელად და პრაქტიკული მეცადინეობები დადებით ემოციურ ფონზე წარმართოს. მიზანშეწონილია მუშაობა წარიმართოს სქემით: „ამოცანა$\rightarrow$თეორია$\rightarrow$ამოცანა“. სტუდენტებმა უნდა შეძლონ სრულად გაიაზრონ და გაანალიზონ მწკრივთა თეორიის ამოცანის პირობაში მოცემული ინფორმაცია, გამოავლინონ ამოცანაში მოცემული ცნობილი და უცნობი კომპონენტები, გაიაზრონ ამოცანის მთავარი კითხვა და ამოცანის შინაარსი შეუფარდონ იმ ცოდნას და გამოცდილებას, რომელიც მათ გააჩნიათ ამოცანების ამოხსნით, ამის საფუძველზე სტუდენტებმა უნდა გამოთქვან ვარაუდები ამოხსნის შესაძლო ხერხის შესახებ. ლექტორმა უნდა მოახდინოს ამოხსნის ამა თუ იმ გზის თითოეული ბიჯის მართებულობის კრიტიკული გააზრება, მიღებული შედეგის სისწორის შემოწმება, რადაგან შემოწმებამ შესაძლოა ამოცანის უფრო რაციონალური ამოხსნის გზის პოვნაში დაგვეხმაროს.

6. მათემატიკური ანალიზისა და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების არასტანდარტული ხერხებით ამოხსნის სასწავლო პროცესის წარმართვა სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური თვალსაზრისით გამართლებულია და მეტად მნიშვნელოვანია წარიმართოს ემოციაზე დაფუძნებით. სტუდენტის შემეცნებითი მიმართულება შერჩევით ხასიათს ატარებს. როდესაც ესა თუ ის საგანი, მოვლენა ან ცნება მისთვის მნიშვნელოვანია, მაშინ უფრო მეტი ხალისითა და ინტერესით სწავლობს. ამიტომ უმაღლესი სკოლის ლექტორის ძირითადი ფუნქცია არის არა მხოლოდ პროფესიული ცოდნის გადაცემა, არამედ ამ ცოდნის მიმართ განსაზღვრული ემოციური დამოკიდებულების შექმნა. სასწავლო პროცესის ასეთი წარმართვა ხელს უწყობს სტუდენტებში შემეცნებითი ინტერესების აღძვრას.

7. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მათემატიკური ანალიზის და უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ჩვენს მიერ შემუშავებული სწავლების მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას უმაღლეს სკოლაში სპეციალური და არასპეციალური ფაკულტეტის სტუდენტებთან, როგორც მათემატიკის სწავლების კერძო მეთოდიკა;

8. უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ განხილული ამოხსნის სპეციალური ხერხებით სწავლება ხელს უწყობს სტუდენტების მათემატიკურ კულტურის ჩამოყალიბებას, ეხმარება მათ განათლების მიღებაში, ამაღლებს ინტელექტს;

9. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილია უმაღლეს სკოლაში მწკრივთა თეორიის ამოცანები დავყოთ მსგავსების და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. ლექციებზე, პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და სტუდენთა მათემატიკის სამეცნიერო წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები სტუდენტებს საშინაო დავალებად მივცეთ დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია სტუდენტთათვის სწავლების პროცესში მწკრივთა თეორიის ძალზედ რთული ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება სტუდენტთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს გარკვეული შიშის გრძნობას და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთ უმაღლესი სკოლის სპეციალურ და არასპეციალურ ფაკულტეტებზე მწკრივთა თეორიის ამოცანათა ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების ქმედითუნარიანობა, სტუდენტებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს.

დანართი

I თავის სავარჯიშოები და დამატებითი მასალა

1) კოშის კრიტერიუმის გამოყენებით აჩვენეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\cdot 3^n}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n_x}{5^n}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n_x-\cos(n+1)x}{n}$

2) გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი და დაადგინეთ კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2q^n$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$

ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$ ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$

3) შედარების ნიშნების გამოყენებით გამოიკვლიეთ მწკრივის კრებადობა

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$

დ) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$, $a>0$ ვ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ზ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$

4) დალამბერის ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

5) კოშის ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ell n^2(n+1)}$ დ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$

6) კოშის ინტეგრალური ნიშნის გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა:

ა) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ell n^2 n}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$

გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ დ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ell_n n}{n\left(\ell_n^4 n+1\right)}$

7) დაამტკიცეთ, რომ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ კრებადია, როცა P>1 და განშლადია, როცა $P\le 1$.

8) რააბის, ბერტრანის და გაუსის ნიშნების გამოყენებით გამოარკვიეთ მწკრივების კრებადობა:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{9\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(4n+5)}$ გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{3/2}$

დ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{\ell}\right)^n$ ე) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q};\ \ p,\ q\in R$

9) გამოარკვიეთ მწკრივის კრებადობა კოშის შედარების ნიშნის გამოყენებით

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ბ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\ell_n n\ell_n\ell_n n$

10) დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

ა) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ ბ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}=0$ გ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^3}}=0$

11) გამოიკვლიეთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა:

ა) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^5}dx$ ბ) $\int_1^{x}\sqrt{x^2\cdot 2^{-x}}dx$ გ) $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\Gamma(2x+1)}$

12) გამოარკვიეთ მოცემული ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ გ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ell_n n}$

დ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}$ ე) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2m}{3n+5}\right)^n$ ვ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot(1)^{n-1}}{n(n+2)}$

ზ) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ell_n n\left(\ell_n\ell_n n\right)^p}$ თ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)n}$ ი) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!(-1)^{n-1}}{n^n}$

13) გამოარკვიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა დილიხრეს ნიშნის მიხედვით:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos a_n}{\sqrt{n}}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin a_n}{n}$ სადაც $a=\text{const}$

14) გამოთვალეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი მოცემული β სიზუსტით:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}, \quad \beta=10^{-4}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}, \quad \beta=10^{-6}$

15) შევაფასოთ შემდეგი მწკრივების ნაშთში n, α სიზუსტით და გამოვთვალოთ მწკრივის ჯამი β სიზუსტით.

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \quad \alpha=0,0002, \quad \beta=0,01$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \quad \alpha=\ \beta=0,001$

გ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3} \quad \alpha=0,0001,\ \beta=0,01$

16) დაამტკიცეთ, რომ ორი განშლადი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ მწკრივების სხვაობა არის კრებადი.

17) დაამტკიცეთ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2+n^4\cdot 2^{-n}}{2n}\right]$ მწკრივის კრებადობა, მისი რამდენიმე მწკრივის ჯამად გაშლით და გამოიკვლიეთ თითოეული მწკრივის კრებადობა.

18) დაამტკიცეთ ტოლობის სამართლიანობა:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$$

19) გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{2\pi n}{3}$$

20) იპოვეთ პირველი ხუთი წევრი მწკრივთა ნამრავლის $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

21) დაამტკიცეთ ტოლობა: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$

22) გამოთვალეთ მწკრივთა ნამრავლი:

ა) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ და $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n(n+1)}$ და $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n$

23) შემდეგი მწკრივები ავიყვანოთ კვადრატში:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

24) მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ გაყავით $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ მწკრივზე და იპოვეთ პირველი ხუთი წევრი.

25) გაყავით $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ მწკრივი $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ მწკრივზე.

II თავის სავარჯიშოები და დამატებითი მასალა

1) იპოვეთ კრებადობის არე შემდეგი მწკრივების:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot(nx)^n$ გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\ln^n(1+x^2)$

დ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot(3-x^2)^n$ ე) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n$ ვ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

ზ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$ თ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n^3}{x^n}$ ი) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot x^n}}$

კ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$ ლ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot 2^n \operatorname{tg}\frac{x}{3^n}$ მ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{x^n}{1-x^n}$

2) ფუნქციონალური მწკრივის განსაზღვრიდან გამომდინარე გამოთვალეთ ჯამი შემდეგი ფუნქციონალური მწკრივების და დაადგინეთ ის შუალედი, სადაც არის განსაზღვრული:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(2x-1)}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha$

3) მწკრივის თანაბრადკრებადობის განსაზღვრიდან საფუძველზე დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების თანბრადკრებადობა მოცემულ შუალედში:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n;\ \left[-\frac{1}{2},0\right]$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n-1};\ (-1;1)$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}};\ [0;10]$

4) ვაიერშტრასის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების თანაბრადკრებადობა მითითებულ შუალედში:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};\ [-1,1]$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2};\ (-\infty;+\infty)$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^3}};\ (-\infty;+\infty)$

დ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+5^n};\ (-5;+\infty)$ ე) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^4};\ (-\infty;+\infty)$ ვ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\cdot n^3};\ [-3;3]$

5) იპოვეთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივების კრებადობის რადიუსი:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+3)}$ ბ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$ გ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)(n+6)^{2n+1}}{(2n)!} x^{2n+1}$

დ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}}$ ე) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^{n^3}}$ ვ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$

ზ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$ თ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$ ი) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$

კ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^n}{(n+1)\ln(n+1)}$ ლ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ მ) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg}^n \frac{n^2+3}{n^2+1}$

6) შეასრულეთ მითითებული მოქმედებები ხარისხოვან მწკრივებზე:

ა) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n x^n}{n!}$ ბ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \ln^n 2}{n!}(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{n!}(x-a)^n$ გ) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}\right)^2$

დ) $\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]^2$ ე) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}\right) : \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}\right)$

7) მწკრივთა დიფერენცირებისა და ინტეგრების გათვალისწინებით გამოვთვალოთ შემდეგი მწკრივთა ჯამები და ვიპოვოთ კრებადობის მიდამო:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ ბ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n-1}}{3n-1!}$ გ) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

დ) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2-2n+1)x^n$ ე) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$

8) დაამტკიცეთ ტოლობა

$$\frac{1}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}x^{n-1}-1}{1+x^{2n-1}} = \frac{1}{1-x}\ ,\quad \text{როცა } -1<x<1$$

9) გამოთვალეთ ჯამი შემდეგი რიცხვითი მწკრივების:

ა) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ბ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ დ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

10) გამოვიყენოთ აბელის II თეორემა და დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

11) $f(x)=\sin\frac{x^2}{3}$ ფუნქცია გავშალოთ x-ის ხარისხოვან მწკრივად.

12) $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ ფუნქცია გავშალოთ cosx-ის ხარისხოვან მწკრივად.

13) შემდეგი ფუნქციები გაშალეთ ტეილორის მწკრივად x-ის ხარისხებად და დავადგინეთ კრებადობის არე.

ა) $\cos 5x$ ბ) $\sin x^2$ გ) ℓ^{3x} დ) 5^x
ე) $\frac{2}{1-3x^2}$ ვ) $x^3\text{arctg}x$ ზ) $\ln(1-x)$ თ) $\ln\frac{1+x}{1-x}$

14) სხვადასხვა ხერხის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი მწკრივების ჯამი:

ა) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}$ ბ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ გ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ დ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+2}}{n}$

15) გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x-\sin x}$ ბ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\text{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$ გ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\text{ctg}^2x\right)$

16) მიცემული ფუნქციის მაკლრენის მწკრივად გაშლის საშუალებით იპოვეთ x=0 წერტილში მოცემული ფუნქციის მითითებული წარმოებული

ა) $\ell^{-\frac{x^2}{2}}$; $f^{(10)}(0)=?$ ბ) $\frac{2x}{1+x^2}$; $f^{(6)}(0)=?$

გ) $x^2\sqrt[4]{1+x}$; $f^{(5)}(0)=?$ დ) $\sqrt[3]{8+x}$; $f^{(5)}(0)=?$

17) ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების მითითებული რიგის წარმოებული

ა) $(x-1)^2\ln x$; $f^{(5)}(1)=?$ ბ) $\frac{x-2}{\sqrt{x}}$; $f^{(6)}(4)=?$ გ) $\frac{1}{x^2-4x+7}$; $f^{(6)}(-2)=?$

18) შემდეგი ინტეგრალები წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით:

ა) $\int\limits_0^1 x^2 \ell^{-x^2} dx$ ბ) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$ გ) $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

19) გამოვთვალოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები α სიზუსტით:

ა) ℓ ; $\alpha = 0,0001$ ბ) $\sqrt{\ell}$; $\alpha = 0,0001$

გ) $\frac{1}{\sqrt{\ell}}$; $\alpha = 0,001$ დ) $\sin 1^0$; $\alpha = 0,0001$

ე) $\cos 10^0$; $\alpha = 0,0001$ ვ) $\sqrt{1,3}$; $\alpha = 0,001$

ზ) $\sqrt[3]{80}$; $\alpha = 0,001$ თ) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$; $\alpha = 0,001$

ი) $\ln 10$; $\alpha = 0,0001$ კ) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\alpha = 0,001$

20) შემდეგი ინტეგრალები გამოვთვალოთ 0,001 სიზუსტით:

ა) $\int_1^{\frac{1}{4}} \ell^{-x^2} dx$ ბ) $\int_1^2 \frac{\ell^x}{x} dx$ გ) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$ დ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$

ე) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$ ვ) $\int_2^4 \ell^{\frac{1}{x}} dx$ ზ) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2} dx$

განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი შემდეგი განტოლების:

1) $y'' = y$ 2) $y'' + 2xy = 0$

3) $y'' - x^2 y = 0$ 4) $y'' + xy' + y = 0$

III თავის სავარჯიშოები და დამატებითი მასალა

1. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის გამოყენებით ვიპოვოთ მწკრივის ჯამი:

ა. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{როცა } -\pi < x < 0 \end{cases}$

ბ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; $f(x) = |x|$ როცა $-\pi \le x \le \pi$

გ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; $f(x)=x^2$ როცა $-\pi \le x \le \pi$

2. $f(x)=1$ ფუნქცია დაშალეთ სინუსების მიხედვით $(0;\,\pi)$ ინტერვალში.

3. $f(x)=x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(0;\,2\pi)$ ინტერვალში.

4. $f(x)=x^2$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(0;\,2\pi)$ ინტერვალში.

5. $f(x)=\ell^x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(-\pi;\,\pi)$ ინტერვალში.

6. $f(x)=\cos\alpha x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $(-\pi;\,\pi)$ ინტერვალში (α მთელი არ არის).

7. $f(x)=x\sin x$ ფუნქცია დაშალეთ ფურიეს მწკრივად $\left(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)$ ინტერვალში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Грабарь М.И., Краснянская К.А. - Применения математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. Москва. Педагогика. 1977. 136 с.
2. Никольский С.М. курс математического анализа. М.1973.
3. Никольский С.М. элементы математического анализа. М.1980.
4. Задачи и упражнение по математическому анализу \ Вараненков Г. С. Демидович Б.Р. Ефименко В.А. и д.р. М.1959.
5. Берман Г.Н. С борник задач по курсу математического анализа. М.1977.
6. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дыференсиальные уравнения.Кратные интегралы. Ряди. Функции комрлексного переменного. М.1981.
7. Будак.Б.М. Фомин С.В. Кратные интегралы. Ряди. М. 1965.
8. Виленкин Н.Я. и д.р. задачи по курсу математического анализа. Ч. II. М.1971.
9. Илин В.А. Розняк Э.Г. Основа математического анализа. Ч. II. М.1973.
10. Гелбаум Б. Олместед Дж. Контрпримеры в анализею М.1967.
11. Дваит Г. Б. Таблисы интегралов и другие математические формулы. М. 1973.
12. Кудрявцев Л.Д. курсу математического анализа. М.1981.
13. Демидович Б.П. С борник задач и упражнение по математическому анализу. М.1962.
14. Краснов М.Л.,Киселев А.И.,Макаренко Г.И. . С борник задач по обыкновенным Дыференсиальным уравнениям. М. 1978.
15. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гаи Я.Г. Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах Ч.2. М. 1977.
16. Матеев Н.М. С борник задач и упражнение по обыкновенным Дыференсиальным уравнениям. М. 1962.
17. Олвер Ф.Введин в асимртотические методы испециальные функциию М.,1978.
18. Очан Ю.С. Методи математической физики.М.,1965.
19. Очан Ю. С. С борник зада ро методам Методам математической физики.М.,1967.

20. Романовский П.И. Ряды фуре. М.,1957.
21. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям по математической физикию М.,1968.
22. Толстов Г.П. Ряды фуре. М.,1980.
23. Фихтенголц Г.М. Курс диференциального и интегрального исчисления. М.1966, т.1,т.2.
24. Филирров А.Ф. С борник задач по Дыференсиальным уравнениям. М. 1961.
25. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. Задачи и упражнение по математическому анализу.ч.1.М.,2004.
26. Виноградова Т.А., Олехник С.Н. Садовничий В.А. . Задачи и упражнение по.ч математическому анализу.2.М.,2004.
27. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интеграли и ряды.
28. Воробев Н.Н. Теория рядов .М.,1975.
29. Давидов Н.А.,Коровкин Р.Р. Никольский В.Н. С борник задач по математическому анализую М.,1973.
30. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и уравнениях. М.,»Высшая школа». 1983
31. Зорич В.А. математический анализ,т.1 .Москва.»наука»,1983.
32. Зорич В.А. математический анализ,т.2 .Москва.»наука»,1983
33. Кудряцев Л.А. курс математического анализа.т.1.М.,»наука»1981.
34. Кудряцев Л.А. курс математического анализа.т.2.М.,»наука»1983.
35. Медведева О.С. Методическая основа развития теоретического мышления учащихся в процессе решения математических задачю М.,М ПГУ,2000
36. ონიანი გ. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები ტ.1. ქუთაისი2008.
37. ონიანი გ. მათემატიკური ანალიზის საფუძვლები ტ.2. ქუთაისი2008.
38. ჭელიძე ვ. წითლანაძე ე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ1. თბილისი 1989.
39. ჭელიძე ვ. წითლანაძე ე. მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ2. თბილისი 1983 .
40. ჭელიძე ვ. ლომჯარია ნ. ხახუტია გ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ნაწილიIII თბილისი 1973.
41. ქურჩიშვილი ა. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. ნაწილი II. თბილისი 1985.

42. ბალანჩივაძე რ., ასათიანი ვ. პედაგოგიკის ფილოსოფიური საფუძვლები, თბილისი, „თსუ“. 1997.
43. ვასაძე ნ. პედაგოგიკა, თბილისი, „ცის ნამი“. 2000.
44. იმერლიშვილი ე. მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკა. თბილისი. “თსუ“.2001.
45. ლორთქიფანიძე დ. და სხვები პედაგოგიკა. თბილისი.1969.
46. ჯინჯიხაძე ჯ. დაწყებით სკოლაში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. „განათლება“. 1990.
47. ჯიბლაძე გ. პედაგოგიკა და მეთოდიკა, თბილისი „განათლება“ 1974.
48. ვეფხვაძე თ. მათემატიკის რჩეული თავები. ნაწილიI. თბილისი საქართველოს პედაგოგთა კვალიფიკაციის ამაღლებისა და გადამზადების ინსტიტუტი. 1997.
49. ონიანი გ. ნუცუბიძე ნ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ.1, ქუთაისი.“ქსუ“1996.
50. ონიანი გ. ნუცუბიძე ნ. ნემსაძე ზ. უმაღლესი მათემატიკის კურსი, ტ.2, ქუთაისი. “ქსუ“.1997.
51. ა,ხარაძე, ვლ.ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი.ქარცივაძე, „მათემატიკური ანალიზის კურსი“. ტ.2. თბილისი 1968.
52. ი.ქარცივაძე, „მათემატიკური ანალიზი“ ტ.1. თბილისი 1958.
53. ს. თოფურია, ვ.ხოჭოლავა, მ. გაბიძაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი, „უმაღლესი მათემატიკა“, თბილისი, 1992.
54. გ.ა.ონიანი, „მათემატიკური ანალიზის ძირითადი სტრუქტურები“, ქუთაისი 1998.
55. ვლ. ჭელიძე. „ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია“, თბილისი.1964.
56. ფ. ხარშილაძე.“ზოგადი ანალიზის საფუძვლები“. თბილისი.1971.
57. ნ.ნუცუბიძე, გ.ონიანი, „ანალიზის ზოგიერთი ფუნდამენტალური ცნება და და ცერმელოს აქსიომა. ქუთაისი, „ქსუ“.2001.
58. გ.ონიანი, ნ. ნუცუბიძე. „უმაღლესი მათემატიკის კურსი“, ტ.1. ქუთაისი, “ქსუ“,1996.
59. გ.ონიანი, ნ. ნუცუბიძე. ე.ჯაფარიძე. ტ. ქემოკლიძე.ზ.სოხაძე.. „უმაღლესი მათემატიკისამოცანათა კრებული “, ქუთაისი,“ქსუ“,1997.
60. ს. თოფურია, ვ.ხოჭოლავა, მ. გაბიძაშვილი, ნ. მაჭარაშვილი,

61. გ.ონიანი, ნ. ნუცუბიძე. ზ.ნემსაძე. „უმაღლესი მათემატიკის კურსი“, ტ.2. ქუთაისი, “ქსუ“,1997.

62. ა.გაგნიძე. „ინტეგრალური განტოლებები“, თბილისი,1988.

63. ზ.ვახანია. სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა, სადოქტორო დისერტაციის ავტორეფერატი,თბილისი.1998.

64. У.Рудин, « Основа математического анализа» , «мир»,.Москва.»,1976.

65. П.Романовский.»Ряды Фурьие» .Москва.»наука»,1966.

66. М.Дьяченко, Р.Ульянов, «Мера и интеграл», Москва.»,2002.

67. Г.Фихтенгольц, , « Основа математического анализа» Т.2. »наука»,1968.

68. А.А.Столяр. Педагогика математики. Минск. «Высщая школа».1986..

69. Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев. А.А.Калужина. А.А.Столяр. Современные основы школного курса математики. Москва.»Просвещение».1980.

70. Б.З. Бурбаки. Очерки по истории   математики. Москва. «Мир».1963.

71. Б.З. Вулих. Краткий курс теории функсий вещественной переменной.. Москва. «Мир».1963

72. Н.Данфорд. Д.Ж.Шварц. Линейные опраторы.Обшая теория. Москва. «Мир».1962

73. М.Заманский. Введение в современную алгебру и анализ. . Москва. «Мир».1974.

74. К.Гофман.Банаховы пространства аналитических функций. Москва. «Мир».1963

75. Б.Г. Шабат. . Введение в комплексный анализ.ч.1. Москва.»наука»,1976.

76. В.А. Илин. В.А.Садовничий. Бл.Х.сендов. Математический анализ Т.1 Москва.» «МГУ», 1985.

77. П.Монтель. Нормальные семейства аналитических функций. М.Л. »Мир».1936.

78. А.Зигмунд. Тригонометрические ряди. Т.1. Москва. «Мир».1965.

79. А.Зигмунд. Тригонометрические ряди. Т.2. Москва. «Мир».1965.

80. Б.В.Шабат. Ввевение в комплексный анализ. Ч.2. Москва.1976.

81. Кудрявцев Л.Д. курсу математического анализа.Т.3. М.1983.

82. М.Спивак. Математический анализ на многообразиях. . Москва. «Мир».1968.

83. А.Шварц. анализ.Т.1. Москва. «Мир».1972.

84. А.Шварц. анализ.Т.2. Москва. «Мир».1972.

85. Г.Е.шилов. Математический анализ. Москва. »наука»,1970.
86. Л А Кудряцев. Современная математика и ее преподаваниею .М., »наука»1985.
87. П.С.Александров. Мир ученного-наука и жизнь. 1974.
88. А.Н.Колмогоров. О професии математика. М.»МГУ».1960.
89. Д.Пойя. математика и правдопадобные рассуждения.М.ИЛ.1957..
90. Д.Пойя. математическое откритие.М. .,»наука»1970
91. Дж.Литвуд. Математическая смест. М. .,»наука»1965.
92. В.А. Крутецкий. Психология. математических спосовностей школников. М.,»наука»1968.
93. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные диференциальные уравнения. М. .,»наука»1982.
94. В.И. Арнольд. . Обыкновенные диференциальные уравнения. М. .,»наука»1975.
95. Ф.Э. Харман. Обыкновенные диференциальные уравнения. Москва. «Мир».1970.
96. А.Н. Тихонов. А.Б.Василева. А.Г.Свешников. диференциальные уравнения. М, »наука»1985.
97. J.Garnett. Bounded Analitic Functions. Academic Press, New York, 1980.
98. Hardy G.H., The mean value of the modylus of an analytic function.Proc. London Math. Soc.,1915,14,269-277.
99. Faty P. Series triginimetriges et series de Taylor, Acta Math. 30, 1906, 335-400.
100. Hardy G.H. Littlewood I.E. Some properties of fractional integrals, 2, Math/.Z., 34, 1932, 403-435.

J.Karamata et M. Tomic. Sur la somation des series de fourier, Acta Math. 1953, 206, 5, 83-126.