საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ივანე გოქაძე

ზოგიერთი სახის მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებები

დისერტაცია

განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

პროფესორი გიორგი ბერძულიშვილი

ქუთაისი

2018

სარჩევი

I თავი

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები

II თავი

საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლება მათემატიკის სასკოლო კურსში

შესავალი

მათემატიკა, როგორც სასკოლო დისციპლინა, წამყვანი საგანია საშუალო სკოლაში მრავალი კუთხით: ის ხელს უწყობს ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებას, კრიტიკული აზრის განვითარებას, მოსწავლეებს ეხმარება სივრცითი წარმოდგენების ფორმირებაში და წარმოადგენს საკვანძო დისციპლინას საბუნებისმეტყველო საგნების ათვისებისათვის, რადგან უმრავლეს შემთხვევაში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით ხდება საბუნებისმეტყველო ციკლის სასწავლო დისციპლინებში კვლევები. უნდა შევნიშნოთ, რომ საბუნებისმეტყველო ციკლის სასწავლო დისციპლინებში მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ძალზე ხშირად ხდება კონკრეტული მათემატიკური ამოცანების დემონსტრირებით, რაც ამაღლებს მოსწავლეთა დაინტერესებას მათემატიკური ამოცანების შესწავლისადმი და გარკვეულად აფართოებს მათემატიკის სასწავლო პროგრამებში ამოსახსნელი ამოცანების თემატიკას.

მათემატიკის დაწყებითი კურსის სწავლების თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ ამ ეტაპზე ძირითადად ხდება ამოცანების ამოხსნა და თეორიული მასალის შესწავლა მინიმუმამდეა დაყვანილი. ასეთი მიდგომა მოსწავლეებს უყალიბებს პოზიტიურ დამოკიდებულებებს ამოცანების ამოხსნის მიმართ და მათში განმტკიცებულია შეხედულება, რომ მათემატიკის შესწავლა უნდა ხდებოდეს ამოცანების საშუალებით. ასეთი მიდგომის საფუძვლების შერყევას ახდენს მათემატიკის კურსში გეომეტრიული შინაარსის მასალის სისტემატიური კურსის სწავლების დაწყება და არა მხოლოდ ასეთი შინაარსის მათემატიკური მასალის შესწავლა. საჯარო სკოლების მეორე საფეხურზე ამოცანების ამოხსნის პროცესის წარმართვა ეყრდნობა სასწავლო პროგრამით გათვალისწინებულ თეორიული მასალიდან მიღებულ ცოდნას და რეალურად იკვეთება თეორიული საკითხების სწავლებისათვის განკუთვნილი დროის და ამოცანების ამოხსნისათვის განკუთვნილი დროის თანაფარდობის მაჩვენებელი, რომელიც თეორიული ცოდნის ათვისებისათვის გამოყოფილი დროის მეტობით არის გამოხატული არა ამარტო მეორე, არამედ მესამე საფეხურზეც.

ჩვენ ვთვლით, რომ სასკოლო განათლების მეორე და მესამე საფეხურებზე მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა შეუძლებელია თეორიული ცოდნის გარეშე, მაგრამ აუცილებლად მიგვაჩნია, რომ მათემატიკური ამოცანების ამოხსნისათვის განკუთვნილი დროის ხანგრძლივობა მინიმუმ ორჯერ მეტი მაინც უნდა იყოს თეორიული მასალის სწავლებასთან შედარებით. სხვა სიტყვებით რომ ვთვათ, მათემატიკის სწავლებაში ჩვენ უპირატესობას ვანიჭებთ ამოცანებით სწავლებას, რაც ცხადია არ გულისხმობს იმას, რომ მოსწავლეები სრულად მოვწყვიტოთ თეორიულ ცოდნას.

ჩვენი აზრით, მოსწავლეებისათვისმათემატიკის გაკვეთილებზე თეორიული ცოდ-ნის გადაცემა უნდა მოხდეს იმავე მეთოდებით და ფორმებით, როგორც დღემდე ხდებოდა, მაგრამ განსაკუთრებული აქცენტი არ უნდა იქნეს გადატანილი თეორემების და მათემატიკური დებულებების მკაცრ დამტკიცებებზე და მტკიცების პროცესის დეტალებზე. საკითხების ახსნა უნდა მოხდეს მათემატიკური ფაქტების და დებუ-ლებების კონსტატირების საფუძველზე, რის შემდეგაც ცოდნის განმტკიცების პროცესი უნდა წარიმართოს სპეციალურად თემისათვის შერჩეული ამოცანების საშუალებებით. ზოგჯერ მიზანშეწონილად ვთვლით, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსის კონკრეტული თეორემის ან დებულების დამტკიცება მოსწავლეებს მივაწოდოთ ამოცანების სახით, რაც ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს და აძლიერებს მათემატიკის გამოყენებით შესაძლებლობებს როგორც შიგასაგნობრივი, ისე საგანთაშორისი კავშირების კუთხით.

საერთაშორისო ორგანიზაციების კვლევებით დადასტურებულია, რომ სკოლის მოსწავლეები 12-13 წლის ასაკიდან მოყოლებული, ვიდრე საშუალო სკოლის დამთავრე-ბამდე (ეს ასაკი შეესაბამება საქართველოს საგანმანათლებლო სივრცის მეორე და მესამე საფეხურებს) შედარებით უკეთ ფლობენ მათემატიკის თეორიულ საკითხებს, ვიდრე გავლილი და უკვე შესწავლილი თემატიკის შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს. მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ერთ-ერთი აქტუალური პრობლემაა მოიძებნოს ის ოქროს შუალედი, რომელიც უნდა დამყარდეს თეორიული მასალის და მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის თანაფარდობის სახით. საქართველოს სკოლებისათვის განათლე-ბის სამინისტროს მიერ რეკომენდირებულ მათემატიკის სახელმძღვანელოების ავტორე-

ბი არსად არ ამბობენ თუ როგორი უნდა იყოს ეს თანაფარდობა, მაგრამ პრაქტიკულად დასტურდება, რომ სასწორის ისარი სკოლის მეორე და მესამე საფეხურზე იხრება თეორიული სწავლების სასარგებლოდ. ჩვენ არ ვეთანხმებით ასეთ მიდგომას და ვთვლით, რომ სასკოლო მეცადინეობაზე არანაკლებ ორჯერ მეტი დრო უნდა დაეთმოს ამოცანების ამოხსნას, ვიდრე თეორიული მასალის შესწავლას. მიგვაჩნია, რომ თეორიული საკითხები ამოცანების სახით უნდა ჩავრთოთ სასწავლო პროცესში და თავი ავარიდოთ მკაცრი მათემატიკური მსჯელობებით თეორემებისა და მათემატიკური დებულებების დეტალებზე ყურადღების გამახვილებას.

მათემატიკის სასკოლო კურსის სწავლება ამოცანების საშუალებით უნდა განხორციელდეს სპეციალურად შერჩეული მათემატიკური ამოცანების საშუალებით მხოლოდ ამოცანების ამოხსნის დროს. ამასთან გათვალისწინებული უნდა იქნეს ის გარემოება, რომ პრობლემის გადაჭრა შეუძლებელია მხოლოდ ამოცანათა დიდი რაოდენობით ამოხსნით, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ამოცანების შინაარსს და მათი ამოხსნის ხერხებს.

ბოლო წლებში ქართველი მათემატიკის მეთოდისტები გ.ბერძულიშვილი, გ.ბრეგაძე, ნ.ონიანი-საღინაძე, ზ.ბაკურაძე, ი.გოგიბერიძე, თ.წერეთელი და სხვები თვლიან, რომ მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის ათვისებაში, მათ გონებრივ განვითარებასა და პიროვნებად ფორმირებაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს საშუალო სკოლის სამივე საფეხურზე მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლება. მათ მიერ დამუშავებულია მათემატიკის კონკრეტული თემების შემცველი სპეციალური ხერხების გამოყენებით ამოხსნადი ამოცანების ამოხსნის და შედგენის სწავლების სპეციალური მეთოდიკები საშუალო სკოლის საფეხურების მიხედვით, რომელთა ეფექტურობა სასწავლო პროცესში ჩართვით დადასტურებულია სათანადო პედაგოგიური ექსპერიმენტებით.

მათემატიკის სწავლების მეთოდიკაში ამოცანათა ამოხსნის უნარების ჩამოყალიბების და შესაბამისი უნარ-ჩვევების გამომუშავებისათვის განიხილება ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული მიდგომა: მოსწავლეებმა უნდა ამოხსნან რაც შეიძლება ბევრი ამოცანები,

ან უნდა დაეუფლონ მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს ან/და ხერხებს, სადაც მნიშვნელოვანია ამოცანის შინაარსიც.

ჩვენთვის მიუღებელია ისეთი მიდგომა, რომ მოსწავლეებს ვასწავლოთ ამოცანების ამოხსნა ამოცანების ამოხსნის გარეშე, მაგრამ ვთვლით, რომ მათემატიკური ამოცანებით მათემატიკის სწავლების დროს მნიშვნელოვანია ამოცანების შინაარსი და მისგან გამომდინარე ამოხსნის მეთოდი ან/და ხერხი, რომელმაც უნდა უზრუნველყოს მოსწავლეებში ამოცანის თემატიკის შესაბამისი ცოდნა-ჩვევების განვითარება და აუცილებელი უნდა იყოს განმავითარებელი სწავლებისათვის.

ჩვენ ცოდნა-ჩვევების სრულფასოვნების მაჩვენებლად მიგვაჩნიაარა მარტო ის, თუ რამდენად გააზრებულია ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და ხერხების ცოდნა მოსწავლეთა მიერ, არამედ ისიც, თუ რამდენად ღრმად, საფუძვლიანად და მტკიცედ აქვს ათვისებული ის მოსწავლეს. ამიტომ, ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და ხერხების ცოდნის დაუფლება სწავლების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა და ამავე დროს სწავლების ზოგადმეთოდოლოგიური დიდაქტიკური პრინციპის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია. ეს პრინციპი გულისხმობს, უპირველეს ყოვლისა სასწავლო მასალის ისე მიწოდებას, რომ მოსწავლე იმახსოვრებდეს და ამის საფუძველზე უნარი შესწევდეს თავისუფლად აღადგინოს თავის მეხსიერებაში ის, რაც მან ადრე სწავლების პროცესში აღიქვა და აითვისა [108].

ჩვენ ვთვლით, რომ სასკოლო კურსში მათემატიკის სწავლება სპეციალურად შერჩეული ამოცანების საშუალებით უნდა განხორციელდეს სწავლების სამივე საფეხურზე, მაგრამ რადგან დაწყებით საფეხურზე სწავლების სპეციფიკიდან გამომდინარე ეს საკითხი ნაწილობრივ გადაწყვეტილია, ამიტომ ჩვენ დისერტაციაში ძირითადი აქცენტი გადატანილი გვაქვს სწავლების მეორე და მესამე საფეხურებზე, სადაც მათემატიკის სწავლება უნდა განხორციელდეს სასკოლო მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვით საგაკვეთილო პროცესში და დამუშავდეს მათი ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებები. ცხადია, რომ ერთი დისერტაციის ფარგლებში შეუძლებელია ყველა სახის სასკოლო მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების განხილვა, რომელთა ჩართვა შესაძლე-

ბელია მათემატიკის სასკოლო კურსში, ეს თემა ამოუწურავია და შემდგომ კვლევებს საჭიროებს.ჩვენ შემოვიფარგლებით მათემატიკის სასკოლო კურსის ისეთი თემებით, როგორებიცაა:საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდური თავისებურებები, ზოგიერთი სახის საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით, მთელ რიცხვთა სიმრავლეში საოლიმპიადო შინაარსის მქონე განტოლებების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ზოგიერთი სახის ალგებრული ამოცანების ამოხსნა გეომეტრიული ინტერპრეტაცით, ფუნქციებთან დაკავშირებული საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი და სხვ. დისერტაციას აქვს დანართი, რომელიც შეიცავს ორასზე მეტ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპადო შინაარსის მქონე ამოცანას, რომლებიც ჩვენს მიერ რეკომენდირებულია შესაბამისი თემატიკის გავლის დროს მასწავლებლის მიერ ჩართული იქნეს საგაკვეთილო პროცესში ან მიეცეს მოსწავლეებს საშინაო დავალებად, რაც დაეხმარება მათ მათემატიკის ფართო და ღრმა განათლების მიღებაში, არ საჭიროებს დამატებითი სასწავლო დროის გამოყოფას. დანართში მოცემული ამოცანების მსგავსი ამოცანების შედგენა სასწავლო პროცესიდან გამომდინარე სხვადასხვა თემატიკის მიხედვით დამოუკიდებლად შეუძლია მათემა-ტიკის მასწავლებელს, რომელსაც ჩართავს საგაკვეთილო პროცესში ან/და გამოიყენებს საშიანაო დავალებად მისაცემად. ასეთი ამოცანების განხილვა საგაკვეთილო პროცესზე დიდი განმავითარებელი ეფექტის მომცემია შემაჯამებელი განმეორებითი მეცადინეო-ბების, განვლილი და ახალი მასალის ურთიერთკავშირის დამყარებისას და სხვ.

მოსწავლეთა ცოდნა-ჩვევების განმტკიცება მჭიდროდ უკავშირდება გავლილი და ახალი მასალის ურთიერთკავშირს, ამისათვის აუცილებელია დიდაქტიკის პრინციპებისდაცვა, კერძოდ, მასწავლებელმა საოლიმპიადო ამოცანის ამოხსნისსაძიებო მეთოდების და ხერხების სწავლება არ უნდა დაიწყოს მანამ, ვიდრე მოსწავლეები საფუძვლიანად არ შეისწავლიან ამოცანების ამოხსნის ალგორითმულ ხერხებს, ამავე

დროს უნდა დაიცვას გავლილი მასალიდან ახალ მასალაზე გადასვლის დიდაქტიკური მოთხოვნები, რომელთა შორის მთავარია ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული ხერხების სისტემაში მოყვანა და უმთავრესის გამოყოფა მეორეხარისხოვნისაგან, ამოცანის დასმა და ახალი საკითხის ფაბულის ისეთი მოხაზვა, რომ მოსწავლე ნათლად ხედავდეს საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების აუცილებლობას. ყოველივე ამით მასწავლებელი მოსწავლეებში შექმნის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეცია-ლური მეთოდების და ხერხების შესწავლის მოტივაციას და მათი ადვილად დამლევი-სათვის ფსიქოლოგიურ განწყობას განწყობას.

საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების ეფექტურად და დროის მცირე მონაკვეთში დაუფლებისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება სისტემატიურ ვარჯიშს, რომელიც უნდა შეუფარდდეს ამოცანების სპეციალური მეთოდებით და ხერხებით ამოსახსნელი ამოცანების სიძნელე-სიადვილეს და მის სპეციფიკას.

მასწავლებელმა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ, გაცნობიერებულ შეთვი-სებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან მოსწავლისაგან ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა რიგ სხვა ღონისძიებებთან ერთად მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო პროგრამები განსაზღვრავს თუ რომელი თემები უნდა შეისწავლოს მოსწავლემ თითოეულ კლასში, ე.ი. განსაზღვრულია ალგო-რითმულად ამოხსნადი სავარჯიშოების ტიპები და სახეები. აშკარაა, რომ მხოლოდ ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანების სწავლებით შეუძლებელია მოსწავლეთა მათემატიკური მომზადების მაღალი დონის მიღწევა.

მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი არ ზღუდავს მასწავლე-ბელს ამოცანების ამოხსნის ალგორითმული და სპეციალური ხერხების სწავლების არჩე-ვისას. „სტანდარტი არ განსაზღვრავს ცალსახად მათემატიკის სასკოლო კურსის

შინაარსს, იგი მხოლოდ იმ საკითხებს მოიცავს, რომელთაც აუცილებლად უნდა შეიცავდეს კურსი (გაცნობის თუ სისტემატიური კურსის სახით) ამიტომ, სტანდარტის მოთხოვნები შეიძლება პროგრამების და სახელმძღვანელოების სხვადასხვა ვარიანტმა დააკმაყოფილოს"[35].

საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამებში [23], [24]და მათემატიკის სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტში [35] მკაფიოდ არის ჩამოყალიბებული ის მოთხოვნები, რომელსაც უნდა ფლობდეს მოსწავლე კონკრეტული კლასის მათემატიკის კურსის გავლის შემდეგ. მასში მითითებულია, რომ მოსწავლეს მოეთხოვება არა მარტო ის მათემატიკური ცოდნა და უნარ-ჩვევები, რომლებიც მიიღწევა ალგორითმულად ამოხსნადი ამოცანებით, არამედ მან უნდა შეძლოს ისეთი ამოცანების ამოხსნაც, რომლებიც დაიყვანება ალგორითმულ ამოცანებზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მოსწავლეებმა ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებით უნდა შეძლონ არაალგორითმულად ამოხსნადი საოლიმპიადო ამოცანები დაიყვანონ ისეთი სახის ამოცანებზე, რომელთა ამოხსნა მოსწავლეთათვის ცნობილია–ალგორითმულია.

მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების ჩამოყალიბებაში ძლიერ გავლენას ახდენს ისეთი ამოცანები, რომლებიც უშუალოდ არ ამოიხსნება ცნობილი ალგორითმების გამოყენებით. ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესი მოითხოვს შემეცნებით აზროვნებას, რაც მოსწავლეებში აძლიერებს ამოცანის ამოხსნის გზის აღმოჩენის სიხარულს, ეს ემოციურ ფაქტორს წარმოადგენს და მოსწავლის ქცევის მძლავრი ბერკეტია. ემოციური ფაქტორის სწორად მართვას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს ადამიანის მოქმედების ყველა სფეროში, მოსწავლის სრულყოფილ პიროვნებად ფორმირებისა და სწავლების პროცესშიც.

მოსწავლის ემოციები, განცდები, როგორც მისი სუბიექტური მდგომარეობის გამომხატველი, უმთავრესად დაკავშირებულია სწავლების პროცესთან, ამიტომ ემოციებისათვის სწორი მიმართულების მიცემა და იმავე დროს მათი, როგორც ფსიქოლოგიური ფაქტორის გამოყენება ამოცანის დასაძლევად პირველ ყოვლისა სკოლისა და

მასწავლებლის საქმეა. მოსწავლეთა ემოციების თვისობრივი გარდაქმნა-განვითარება ძირითადად სწორედ აღზრდისა და სწავლების საშუალებებით ხორციელდება.

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნით გამოწვეული ემოციები მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს როგორც აღმზრდელობითი პროცესის შემადგენელი ნაწილი. ამიტომ მასწავლებელმა წინასწარ უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტული გზები და ღონისძიებები, რომელთა საშუალებითაც უზრუნველყოფს მოსწავლეებში დადებითი ემოციების და განცდების აღზრდას, ამასთანავე მიმზიდველს და სახალისოს გახდის სასწავლო პროცესს. მასწავლებელი თავადაც უნდა განიცდიდეს მოსწავლის სიხარულს, თანაგრძნობით და გულისხმიერებით ეხმარებოდეს მოსწავლეს ყოველი დაბრკოლების და სიძნელის გადალახვაში, უნდა იცნობდეს მოსწავლეების მისწრაფებებს, მათ ემოციებს, უნდა აკვირდებოდეს და სწავლობდეს ემოციების გარდაქმნა-განვითარებას სწავლა-აღზრდის პროცესში, თითოეული მოსწავლისადმი ინდივიდუალური მიდგომით ახორციელებდეს მოსწავლის განვითარებას სწორი მიმართულებით.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში ამოსახსნელი ამოცანებისანალიზი ცხადყოფს, რომ მასში ისეთ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნამოითხოვს საძიებო მეთოდების და ხერხების გამოყენებას ეთმობა მცირე დრო, რის გამოც ჩვენ ვთვლით, რომ საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურის მათემატიკის არსებულ სასწავლო სახელმძღვანელოებში მოცემული ამოცანები ნაკლებგანმავითარებელი ეფექტის მქონეა და არ აკმაყოფილებს თანამედროვე მოთხოვნებს. ეს ტენდენცია ახალი არ არის, ასე იყო წარსულშიც და გრძელდება დღესაც. მართლაც, თუ გადავავლებთ თვალს ახლო წარსულს ვნახავთ, რომ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის სპეციალისტთა საერთო აღიარებით საშუალო სკოლის მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში არსებულ ამოცანათა სისტემებს მრავალ ნაკლზე საუბრობენ. ერთი მთავარი ნაკლი, რომელზეც ჩვენ ზემოთ გავამახვილეთ ყურადღება არის თეორიის მოწყვეტა პრაქტიკისაგან. ა.სტოლიარი აღნიშნავდა[91], რომ მათემატიკის გაკვეთილებზე ძირითადად მიმდინარეობს მათემატიკურ ტერმინებში ჩამოყალიბებული განყენებული ამოცანების საწვრთნელი ამოხსნა; ი.კოლიაგინი, ვ.ოგანესიანი და სხვ., მიიჩნევენ [70], რომ სასკოლო მათემატიკის კურსის სავარჯიშოები მწირია სააზროვნო ხასიათის და შინაარსის მხრივ,

ი.გრუდიონოვი [57], აღნიშნავს მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა ერთტიპიურობას, ა.დოგრაშვილი თვლიდა, რომ სასკოლო სახელმძღვაოები არ შეიცავს ალბათური და კომბინატორული შინაარსის მქონე ამოცანებს [22], თ.მორალიშვილს მიაჩნდა, რომ [30], მათემატიკის სასკოლო კურსის სავარჯიშოთა სისტემა არ არის სტრუქტურულად სრული,თ.წერეთელი და გ.ბერძულიშვილი თვლიან[39], [40], [41] რომ სასკოლო კურსი არ შეიცავს გეომეტრიული შინაარსის ისეთ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნის დროს აუცილებელია სპეციალური მეთოდების გამოყენება, გ.ბერძულიშვილი თვლის, რომსასწავლო პროცესში ჩართული უნდა იყოს საგანთაშორსისი და შიგა-საგნობრივი კავშირის შინაარსის მქონე ამოცანები, ნ.ონიანი-საღინაძე და ზ.ზაკურაძე თვლიან [1], რომ ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი დაწყებით და საშუალო სკოლაში სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის შინაარსის მქონე ამოცანა სისტემებს, ნ.ნახუცრიშვილი თვლის, რომ დაწყებითი სკოლის საფეხურზე საჭიროა პრობლემურ-განმავითარებელი შინაარსის მქონე ამოცანების წინა პლანზე დაყენება[33], გ.ნოზაძე და მ.ოჩხიკიძე თვლიან, რომ სასკოლო მათემატიკის სახელმძღვანელოები განიცდის განმავითარებელი ამოცანების სიმცირეს [34], ი.ჩხიკვაძე თვლის, რომ, განმავითარებელი სწავლებისათვის დაწყებითი კლასებისსასწავლო პროცესში საჭიროა ტექსტური ამოცანების უფრო მეტი დოზით ჩართვა [38] და სხვ.

ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოთა სისტემები ფუნქციური დანიშნულების მიხედვით შეესაბამება ტრადიციულ სქემას „თეორია→ამოცანები“. ჩვენ ვემხრობით ბოლო პერიოდში დამუშავებულ იმ მოსაზრებას, რომ სწავლება მიმდინარეობდეს სქემით „ამოცანები→ თეორია→ამოცანები“. ამგვარი მიდგომა საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში აუცილებელია განმავითარებელი სწავლების პრინციპების ასამოქმედებლად, როცა სწავლება მიმდინარეობს ძირითადად ამოცანების საშუალებით. სქემა „ამოცანები→ თეორია→ამოცანები“ საშუალებას იძლევამოსწავლეებს მივაწოდოთ და განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა,არამედ მისი გამოყენების საშუალებით დავეხმაროთ მოსწავლეებს ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვებაში.

სწავლების შეცვლილი სქემა საჭიროებს მისთვის შესაფერის სავარჯიშოთა სისტემას, რომელიც შეიცავს არსებულისაგან განსხვავებული ფუნქციური დანიშნულების მქონე სავარჯიშოებსაც. რისთვისაც გაანაალიზებული იქნა არა მარტო ქართული და პოსტსაბჭოთა სივრცის, არამედ ევროპული გამოცდილებაც [102],[103], [104], 105], [106].

ქართველი მათემატიკის მეთოდისტები ბოლო პერიოდში სისტემატიურად ამუშავებენ და სრულყოფენ ამოცანათა სისტემებს, რომლებიც დაფუძნებულია სქემაზე „ამოცანები→თეორია→ამოცანები",გ.ბერძულიშვილი, გ.ბრეგაძე, ნ.ნახუცრიშვილი, ზ.ბაკურაძე, ლ.ქურჩიშვილი, გ.ჯინჯიხაძე, ლ.ბაბუნაშვილი, ნ.ონიანი-საღინაძე, ლ.ციბაძე, მ.გოგაძე, ი.გოგიბერიძე, და სხვ.

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ჩართვა უნდა განხორციელდეს განმავითარებელი სწავლების შესაბამისი სქემის „ამოცანები→ თეორია→ამოცანები" გამოყენებით, რომელიც მოითხოვს საგაკვეთილო პროცესში განსახილავი ამოცანათა სისტემის ახლებურად აგებას.

ყოველივე ზემოთთქმული საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ ერთი არსებითი ხასიათის შენიშვნა: მათემატიკის სწავლება სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებითდაფუძნებულია განმავითარებელი სწავლების პრინციპებზე და ეფექტურია გამოყენების თვალსაზრისით. ისეთი სასკოლო შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანების ნაკლე-ბობა, რომელთა ჩართვა მიზანშეწონილია სასწავლო პროცესში გარკვეულ ბარიერს უქმნის საშუალო სკოლაში მათემატიკის სრულფასოვან სწავლებას, განსაკუთრებით კი ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას.

სასწავლო მასალის რაოდენობრივი და ხარისხობრივი კვლევები მსოფლიო მასშტაბით ადასტურებს, რომ საშუალო სკოლების მათემატიკის კურსი შესასწავლი თემებით და შესაბამისი სავარჯიშოებით გადატვირთულია თითქმის ყველა ქვეყანაში, რის გამოცმასწავლებლებს საშუალება არ აქვთ საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლება განახორციელონ მთელ კლასთან [107],[109]. როგორც წესი ასეთი ამოცანების ამოხსნა ხდება ფაკულტატიურ ან მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. ე.ი. მოსწავლეთა მხოლოდ მცირე ნაწილთან. მაშასადამე, ის მოსწავლეები, რომლებიც შედარებით უკეთ

ითვისებენ ტრადიციულ სასკოლო კურსს იღებენ უფრო მეტ გონებრივ დატვირთვას აზროვნების განვითარებისათვის, ვიდრე საშუალო და სუსტი მოსწავლეები. ამის მიზეზია ის, რომ სკოლის კურსდამთავრებულთა დიდი უმრავლესობა ვერ ხსნის მარტივ ალგორითმულ ამოცანებსაც კი.

მეთოდურად დამუშავებულია ამოცანათა ამოხსნის ზოგადი მეთოდები [28],[29], [37],[76], [77],[78],[90], [101] და სხვა, მაგრამ კერძომეთოდიკურ ასპექტებს ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი, ასევე დამუშავებულია ზოგიერთი კლასის ამოცანათა ამოხსნის ხერხები [1],[2], [3], [4], [5],[32],[38],[53], [55], [58], [59], [62], [67] და სხვ. რომლებიც არასისტემატიზირებულია, რადგან საშუალო სკოლაში არ ხდებასაოლიმ–პიადო ამოცანების სისტემის კლასიფიკაცია, არ არის დამუშავებული მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები, რომლებიც მათემატიკის გაღრმავებული სისტემის სპეციფიკასთან არის დაკავშირებული, რაც პირველ რიგში განპირობებულია იმით, რომ უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებთან სათანადო ყურადღება არ ეთმობა საოლიმპიადო ამოცანათა ამოხსნისსწავლების თეორიულ და მეთოდიკურ თავისებურებებს.

აღნიშნული პრობლემის გადასაჭრელად საჭიროდ მიგვაჩნია:

- განისაზღვროს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების არსი, სპეციფიკა, დანიშნულება და ფუნქცია;
- დამუშავდეს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის კლასიფიკაციის კრიტერიუმები;
- დამუშავდეს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების კერძო მეთოდიკა.

სასკოლო მათემტიკის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების პრობლემის კვლევა მრავალ ასპექტს მოიცავს, კერძოდ: ფსიქოლოგიურ, ზოგად და კერძო მეთოდიკურ ასპექტებს და სხვ.

ფსიქოლოგიური ასპექტების კვლევისას განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, აზროვნების პროცესის თავისებურებანი მოსწავლეთა ფსიქიკური განვითარების

სხვადასხვა ასაკობრივ საფეხურზე და როგორია ცოდნის დაუფლების შესაძლებლობები ამა თუ იმ ასაკის მოზარდთან. ამ პრობლემის კვლევას საგანგებო შამოკვლევები მიუძღვნეს ქართველმა ფსიქოლოგებმა დ.უზნაძემ [36], რ.ნათაძემ [71], შ.ნადირაშვილმა [26], ი.კოტეტიშვილმა [27], ზ.ვახანიამ [25] და სხვებმა. საბჭოთა და პოსტსაბჭოთა სივრცეში ჩატარებული კვლევებიდან შეიძლება გამოვყოთ ს.რუბენშტეინის [84],[85],ე.კაბანოვა-მელერის, ი.იაკიმენსკაიას [100], ვ.კრუტეცკის, ი.კალიუტკინას, ნ.მენჩინ–სკაიას, ნ.ტალიზინას, ლ.ფრიდმანის, ა.რახიმოვის [83], დ. ელკონინისა [98], [99], ვ.დავიდოვის [58]და სხვათა შრომები. დასავლეთელი მკვლევარებიდან ამ საქმეში დიდი დამსახურება მიუძღვის ჟ.პიაჟეს [79],[80]. ის ბავშვის ინტელექტუალური განვითარების შესახებ ორიგინალური თეორიის ავტორია. ამ საკითხების კვლევას დიდი ღვაწლი დასდო ამერიკელმა ფსიქოლოგმაჯ.ბრუნერმა, რომელმაც დაადასტურა, რომ ბავშვს ყოველთვის გაცილებით მეტის გაგება შეუძლია ვიდრე ეს ერთი შეხედვით ჩანს, თუ სასწავლო მასალას მისი აზროვნების ფორმის შესაბამისად მივაწვდით [49].

სასკოლო მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანათა ამოხსნის სწავლების კერძომე-თოდიკური ასპექტები ნაკლებად დამუშავებულია. ამ საკითხებზე გამოკვლევები აქვთ დ.პოიას [76], [77], [78], ა.სტოლიარს [90], [91], თ.მორალიშვილს [29], [30], [31], [32],ნ.ალფუტოვას [44], გ.ბერძულიშვილს [1], [2], [3], [4], [5],გ.ბრეგაძეს [2], [3], [5], ბ.ბაკურაძეს [1], ვ.ლიტვინოვს [68],ი.პერელმანს [73], [74], ვ.პრასოლოვს [81], ა.სგიბიევს [86], ა.სპივაკს [88], ნ.ონიანი-საღინაძეს [1], გ.ჯინჯიხაძეს [42], [43] მ. ლომთაძეს და სხვ.

სამეცნიერო შრომები, რომლებიც სხვადასხვა ასპექტით ეხებიან დასახელებულ პრობლემას, განხილულია ამოცანათა ამოხსნის ზოგიერთი ცალკეული მეთოდის ან/და ხერხის გამოყენება,მათში ასახული არ არის საერთო თეორიული და მეთოდიკური კონცეფციები. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპაიდო ამოცანების ამოხსნის საკითხების კვლევას ნაკლები ყურადღება ექცევა. ბოლო პერიოდში არა მარტო საქართველოში, არამედ პოსტსაბჭოთა სივრცეშიც არ დაცულა არცერთი დისერტაცია ამ თემატიკაში. დაწყებითი კლასების საოლიმპიადო ამოცანების სწავლებას ფუნდამენტური კვლევები მიუძღვნეს გ.ბერძულიშვილმა და გ.ბრეგაძემ [2], [3], [4], [5]. მათვე დაამუშავეს საშუალო

სკოლაში საოლიმპიადომათემატიკურამოცანათა ამოხსნის პრაქტიკული ჩვევების მაფორმირებელი ამოცანათა სისტემები. გარდა ამისა, ქვეყნდება მხოლოდ ერთეული შრომები, რომლებიც უკავშირდება ცალკე არსებული რომელიმე სპეციალური ხერხის სწავლებას, რაც ქმნის იმის შთაბეჭდილებას, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანათა ამოხსნის ხერხების ზოგადი და კერძომეთოდიკური საფუძვლების დამუშა–ვებაპრობლემებთან არის დაკავშირებული. ასეთი მოსაზრებები მცდარია და შორს არის ჭეშმარიტებისაგან.

ჩამოყალიბებული მოსაზრებებიდან ნათლად ჩანს არჩეული სადისერტაციო თემის „ზოგიერთი სახის მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდი-კური თავისებურებები“ აქტუალობა.

ჩვენს მიერ დასმული ამოცანების გადასაჭრელად განისაზღვრა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების საგაკვეთილო პროცესში ჩართვის აუცილებლობა, მათი სწავლების დანიშნულება და ფუნქცია, დამუშავდა ზოგიერთი სახის მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები ან/და ხერხები, ასეთი ამოცანების კლასიფიკაციის კრიტერიუმები და სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელიც გადმოცემულია დისერტაციის მეორე თავში და შრომებში[15],[16],[17], [18], [19], [20], [21]. მათი გამოყენება მასწავლებელს შეუძლია ჩვეულებრივ საგაკვეთილო პროცესში საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვით, არ მოითხოვს დამატებით სასწავლო დროს, ეფექტურია თავისი განმავითარებელი ფუნქციით, ამაღლებს მოსწავლეთა მათე-მატიკური მომზადების დონეს, ზოგადად ინტელექტს, რაც დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

კვლევის ობიექტი. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს მათემატიკის სასკოლო საოლიმ-პიადო ამოცანების სწავლების მეთოდიკის დამუშავება. რისთვისაც გავეცანით და კრიტიკულად გავაანალიზეთ პრობლემასთან დაკავშირებული სამეცნიერო-პედაგო-გიური და მეთოდიკური ლიტერატურა. მოსწავლეებთან ანკეტური გამოკითხვისა და პრაქტიკოს-ნოვატორ მასწავლებელთან საუბრების შედეგად დავადგინეთ, რომ დაუმუ-შავებელია მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების,

თეორიული და მეთოდიკური საფუძვლები. მასწავლებელთათვის გამოცემულ დამხმარე მეთოდურ სახელმძღვანელოებსა და მოსწავლეთათვის გამოცემულ ამოცანათა კრებულებში ნაკლები ყურადღება აქვს დათმობილი მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლებისთეორიული და პრაქტიკული საკითხების გაშუქებას.

კვლევის საგანი. კვლევის საგანს შეადგენს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების კერძო მეთოდიკის შემუშავება და მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებისსისტემების შედგენა, რომელთა ჩართვასმიზანშეწონილად ვთვლით საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე მათემატიკის საგაკვეთილო მეცადინეობაზე კონკრეტული თემების გავლის დროს.

შევარჩიეთ ისეთი საკითხები, რომლებიც სრულ შესაბამისობაშია საშუალო სკოლაში შესასწავლ საკითხებთან. განსახილავი საკითხებიდან გამოვყავით და დავამუშავეთ შემდეგი თემები:

- საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდური თავისებურებები;
- ზოგიერთი სახის საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა საგანთა–შორისი კავშირების გამოყენებით;
- მთელ რიცხვთა სიმრავლეში საოლიმპიადო შინაარსის მქონე განტოლებების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები;
- საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ზოგიერთი სახის ალგებრული ამოცანების ამოხსნა გეომეტრიული ინტერპრეტაცით და მათი სწავლების მეთოდიკა;
- ფუნქციებთან დაკავშირებული საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკა.

კვლევის მიზანი. საშუალო სკოლაში სწავლების პროცესზედაკვირვებით, კოლეგებისა და საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილების განზოგადებით პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებით მიზნად დავისახეთ ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების

ამოხსნის სწავლებით აგვემაღლებინა სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის დონე. შეგვედგინა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სისტემები და დაგვემუშავებინა მათი სწავლების მეთოდიკა.

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების მიზანია მოსწავლეებში ისეთი უნარების განვითარება, როგორიცაა მიღებული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოძიება და შექმნა.

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ არსებობს მეთოდისტების, მათემატიკოსების, პედაგოგების, ფსიქოლოგების მიერ გამოვლენილი გარკვეული კანონზომიერებები, რომლებიც არასისტემატიზირებულია. ჩვენ მათგან გამოვყავით სადისერტაციო თემისათვის გამოსაყენებელი მომენტები დადავამუშავეთმათი სწავლების კერძო მეთოდიკა.

მოსწავლეთათვის სწავლა-აღზრდისადმი შეგნებულ დამოკიდებულება, ზნეობრივი და ინტელექტუალური ფორმირების გაუმჯობესება და მოქალაქეობრიობის ჩამოყალიბება წარმოადგენს საშუალო სკოლის მუშაობის ძირითად მიზანს.რომლის მისაღწევად საჭიროა მოსწავლეებს ჩამოუყალიბდეთ ლოგიკური აზროვნება, შემეცნებითი აქტივობა, ობიექტური სინამდვილის აღქმის უარი, რაც მოითხოვს მოსწავლეთა სპეციალურ გონებრივ ვარჯიშს, ამიტომ ასათვისებელი მასალისათვის დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით შევარჩიეთმათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ისეთი სისტემები, რომელთა ამოხსნის სწავლების შინაარსი შესაბამისობაშია მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებებთან, ხოლო მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებით სასწავლო მასალის გაღრმავება-გაფართოებახდება მოსწავლეთა ინტელექტუალური განვითარების დონის შესაბამისად.

ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს იმაში, რომ

- დამუშავებულია მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების სპეციალური მეთოდიკა;

- დასაბუთებულია, რომ სასწავლო პროცესის ეფექტიანობას საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურებზე მნიშვნელოვნადამაღლებს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სწავლება;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანათა სისტემების ჩართვა საგაკვეთილო პროცესშიიწვევს მოსწავლეთა დაინტერესებას არა მარტო მათემატიკისშესწავლისადმი, არამედ ამაღლებს მოსწავლეთა ინტერესს საბუნებისმეტყველო-მათემატიკური დისციპლინების შესწავლისადმი;
- საშუალო სკოლის მეორე და მესამე საფეხურების მათემატიკის კურსისათვის შედგენილია სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანათა სისტემები, რომელთა ჩართვა მიზანშეწონილია საგაკვეთილო პროცესში კონკრეტული თემების ან/და ამოხსნის მეთოდის შესწავლის დროს;
- ფსიქოლოგიური და პედაგოგიური კანონზომიერებების ანალიზის საფუძველზე შემუშავებულია შესაბამისი მეთოდიკური რეკომენდაციები.

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების სრულყოფის ერთ-ერთ პერსპექტიულ გზას წარმოადგენს მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების სისტემის შექმნა. მათემატიკის გაღრმავებული სისტემის შექმნა უკავშირდება მათემატიკაში კლასგარეშე მუშაობას, რომლის თეორიული და მეთოდიკური საფუძვლები დაუმუშავებელია. დისერტაციაში სრულყოფილად არის დამუშავებული მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობასთან დაკავშირებული საკითხები. სკოლაში კლასგარეშე მუშაობას ჩვენ ვთვლით როგორც სწავლების ფორმას, განვიხილეთ კლასგარეშე მუშაობის მიზნები და ამოცანები, მოვახდინეთ მისი შედარება საგაკვეთილო პროცესთან, დავამუშავეთ კლასგარეშე მუშაობის მეთოდური საფუძვლები და ჩატარების ფორმები, მეცნიერულად გამოვიკვლიეთ მათემატიკის ფაკულტატიური კურსების და მათემატიკის საგნობრივი წრეების დანიშნულებები და მათი ჩატარების მეთოდიკური თავისებურებები.

ჩვენს მიერ გამოკვლეული კლასგარეშე მუშაობის ფორმები და მეთოდები მნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მათ ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კერძოდ, კონსტრუქციული და კრიტიკული აზროვნების

ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას და სხვ.

ნაშრომის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ კვლევის შედეგების გამოყენება სასწავლოპრაქტიკაში ხელს უწყობს სწავლების ეფექტურობის ამაღლებას, მოსწავლეთა მიერ მტკიცე ცოდნის დაუფლებას და მათ დაინტერესებას მათემატიკის საფუძვლიანი შესწავლისათვის. ნაშრომის თეორიული მნიშვნელობა გამოხატულია მეცნიერულ კონცეფციაში სასწავლო პროცესის მიზანმიმართულად წარმართვის შესახებ, ხოლო მისი პრაქტიკული მნიშვნელობა ითვალისწინებს მათემატიკის სწავლებაში რიგი მეთოდიკური სიახლეების დანერგვას, კერძოდ,დადასტურებულია, რომ სასწავლო პროცესში მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვა აძლიერებს მათემატიკის შესწავლის მოტივაციას, ხელს უწყობს ლოგიკური აზროვნების განვითარებას, ამაღლებს ინტელექტს.

კვლევის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძველს წარმოადგენს ფილოსოფიურ-ფსიქოლოგიური დებულებები პიროვნების ინტელექტუალურ შესაძლებლობათა გახსნისა და განვითარების შესახებ.

პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, სსიპ ქუთაისის ანდრია რაზმაძის სახელობის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, სსიპ იოსებ ოცხელის სახელობის ქუთაისის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ ქუთაისის №34 საჯარო სკოლაში, შპს ქუთაისის სკოლა XXI საუკუნე,სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ წყალტუბოს საჯარო სკოლაში,სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ ბანოჯას საჯარო სკოლაში,სსიპ ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ სამტრედიის №12 საჯარო სკოლაში,სსიპ ბაღდადის მუნიციპალიტეტის სოფელ როკითის საჯარო სკოლაში, სსიპ ვანის მუნიციპალიტეტის სოფელ სალომინაოს საჯარო სკოლაში, სსიპ ტყიბულის №1 საჯარო სკოლაში და ქუთაისის მოსწავლე-ახალგაზრდობის სასახლეში.

ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო და დამოუკიდებელი სამუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც ეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2011-2013 წლები) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის პროცესში ზოგიერთი არაარსებითი ხასიათის ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2013-2017 წლები) დადასტურდა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სასწავლო პროცესში ჩართვის და მათი ამოხსნის სწავლების შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის სტატისტიკური შეფასება მოვახდინეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით. ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა გვიჩვენა, რომ სწავლების ეფექტურობის ამაღლებაში მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვს მეთოდიკურად სწორად შერჩეულ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვას საგაკვეთილო პროცესში. სწავლების წარმართვა ამ ფორმით და იმ მეთოდიკით, რომელიც ჩვენს მიერ იქნა შემუშავებულიმნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა ინტელექტს, ანვითარებს ლოგიკურ აზროვნებას, ზრდის მათ დაინტერესებას დაშემეცნებით ინტერესებს მათემატიკის შესწავლისადმი.

თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევის პროცესში მიღებული იქნა ასეთი შედეგები:

- გაანალიზებულია მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები და მეცნიერულად გამოკვლეულია მათი პრაქტიკული მნიშვნელობა;
- დამუშავებულიამათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სასწავლო პროცესში ჩართვის აუცილებლობა და მათი ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები კონკრეტული თემების გავლის დროს;

- თითოეული ნიშნის მიხედვით გამოყოფილ იქნა შესაბამისი სავარჯიშოთა სისტემები, რომელთა განხილვა შესაძლებელია მთელ კლასთან, ფაკულტატიურ, მათემატიკის საგნობრივ წრეზე და ინდივიდუალური მუშაობისათვის. ამ ნიშნის მიხედვით დაყოფილი ამოცანების თითოეული კლასისათვის დამუშავებულია მათი სწავლების სპეციალური მეთოდიკა, რომელშიც გათვალისწინებულია ამოხსნის ცალკეული ეტაპების განხილვა, მათი თანმიმდევრობა, მათემატიკური მოდელების შესაბამისი ტიპების გამოყენებით.

დასაცავად გამოგვაქვს შემდეგი დებულებები და დასკვნები:

- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვა საგაკვეთილო სას-წავლო პროცესში, როგორც მოსწავლეთაგონებრივი და ინტელექტუალური ფორმი-რების საშუალება;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების როლისა და ადგილის გარკვევა ზოგად განათლებაში;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნისმეთოდური თავისებურებების გამოკვლევა;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სისტემების შედგენა;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების დამუშავებული მეთოდიკის ექსპერიმენტული გამოკვლევა.

ნაშრომის აპრობაცია და პუბლიკაცია. დისერტაციაში განხილულ საკითხებზე მოხსენებებით გამოვდიოდი საუნივერსიტეტო, რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო-პედაგოგიურ კონფერენციებზე. გამოკვლევის შედეგები სისტემატურად ეცნობოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა დეპარტამენტთან არსებულ სამეცნიერო სემინარს. დისერტა–ციაში მიღებული ძირითადი შედეგები მოხსენდა იაკობ გოგებაშვილის სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტის განათლების ფაკულტეტის სამეცნიერო სემინარს. დასრულებული სახით ნაშრომი განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი

წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური ფაკულტეტის სწავლების მეთოდიკათა და პედაგოგიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი სამეცნიერო შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. გოქაძე ი. ბაკურაძე ზ., ბერძულიშვილი გ.-განტოლებების მთელ რიცხვთა სიმრავ–ლეში ამოხსნის ერთი არასტანდარტული ხერხის შესახებ. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(56). თბილისი. 2015 წ. გვ. 139–143.

2.გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნისას გამოყენებული ზოგიერთი ხერხის შესახებ. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(56). თბილისი. 2017 წ. გვ. 139–143.

3. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნისას გამოყენებული ზოგიერთი ხერხის შესახებ. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(55). თბილისი. 2017 წ. გვ. 159–163.

4. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., საგანთაშორისი კავშირების გამოყენება ერთი სახის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის დროს. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(57). თბილისი. 2017 წ. გვ. 123–127.

5. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., საგანთაშორისი კავშირების გამოყენება ერთი სახის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის დროს. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(57). თბილისი. 2017 წ. გვ. 118–122.

6. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-საოლიმპიადო ალგებრული ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(59). თბილისი. 2017 წ. გვ. 20–24.

7. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-საოლიმპიადო ალგებრული ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(59). თბილისი. 2017 წ. გვ. 25–29.

I თავი

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები

§1.1.მათემატიკის სასკოლო ოლიმპიადები

ოლიმპიადა საბერძნეთში წარმოიშვა როგორც საზრიანობის, მოხერხებულობის, ძალის და სილამაზის შეჯიბრებები. პირველი ოლიმპიადა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 776 წელს ჩატარდა. ოლიმპიადები ტარდებოდა ქალაქ ოლიმპიაში ყოველ ოთხ წელიწადში ერთხელ ჩვენი წელთაღრიცხვით 394 წლამდე. ოლიმპიური თამაშები აკრძალა რომის იმპერატორმა თეოდოსიუს პირველმა 394 წელს, როგორც წარმართული რიტუალი. ერთი წლის შემდეგ მდინარე ალფეოსის ნაპირთან მოხდა ბრძოლა რომაელებსა და გოთებს შორის. ოლიმპია დაინგრა. 426 წელს იმპერატორ თეოდოსიუს მეორის ბრძანებით, ოლიმპიის წარმართული ტაძრის ნანგრევები საბოლოოდ გაანადგურეს. თანამედროვობის ოლიმპიური თამაშების აღდგენა და ჩატარება ხდება 1896 წლიდან, როცა პირველი ოლიმპიური თამაშები ჩატარდა ათენში.

მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარებას წინ უსწრე–ბდა სხვადასხვა დაუსწრებელი კონკურსები რაიმე მათემატიკური ფაქტის დამტკიცე–ბაში ან ამოცანების ამოხსნაში. მაგალითად, რუსეთში ასეთი კონკურსები ამოცანების ამოხსნაში ტარდება 1886 წლიდან. ისტორიულად ცნობილია უფრო წინა პერიოდის მათემატიკოსების შეჯიბრებებიც. საკმარისია გავიხსენოთ 1535 წლის ცნობილი მათემა–ტიკური შეჯიბრება ფიორესა და ტარტალიეს შორის, რომლის მოსამზადებელ პერიოდ–ში ტარტალიემ მიიღო კუბური განტოლების ფესვების ამოსახსნელი ფორმულა. ამ პერიოდის ევროპელი მათემატიკოსებისთვის ჩვეულებრივ მოვლენას წარმოადგენდა შეეთავაზებინა კოლეგებისათვის ,,ამოცანები მოფიქრებისათვის“, რომელიც რაღაც ფორმით თამაშობდა იგივე როლს რომელიმე მათემატიკური შედეგის მისაღებად, რასაც სადღეისოდ ასრულებს სამეცნიერო პუბლიკაციებში გამოქვეყნებული ახალი მათემატი–კური ფაქტები და თეორემები, ან მათში მეცნიერის ან მეცნიერთა ჯგუფის მიერ

დასმული რაიმე ახალი მათემატიკური პრობლემა. ამ პერიოდებში ჩატარებული ყველა მათემატიკური შეჯიბრება ატარებდა მხოლოდ სპორტულ ხასიათს.

მათემატიკის ოლიმპიადებს დიდი ხნის ისტორია აქვს. პირველი მათემატიკური კონკურსი ლიცეუმების კურსდამთავრებულთათვის მოეწყო რუმინეთში 1886 წელს, ხოლო თანამედროვე გაგებით პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა 1894 წელს უნგრეთში, უნგრეთის ფიზიკა–მათემატიკური საზოგადოების ინიციატივით, რომლის მაშინდელი თავმჯდომარე იყო შემდგომში ფიზიკაში ნობელის პრემიის ლაურეატი ლორანდ ეტვეში. უნგრეთის მათემატიკური ოლიმპიადების გამარჯვებულები იყვნენ შემდეგში მსოფლიოში ცნობილი მათემატიკოსები: ლიპოტ ფეინერი, თეოდორ ფონ კარმენი, ალფრედ ხაარი, მარსელ რისი, გაბორ სეგე და სხვ.

1894 წლიდან ზოგიერთი წლების გამოკლებით, რაც გამოწვეული იყო ორი მსოფლიო ომით, მათემატიკური ოლიმპიადები ტარდება ყოველწლიურად.

საბჭოთა კავშირის მასშტაბით საქართველოს დედაქალაქში–თბილისში 1933 წლის 3 ნოემბერს ჩატარდა მოსწავლეთა პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა. ოლიმპიადის ჩატარების ინიციატორები იყვნენ საქართველოს დამსახურებული მასწავლებლები ს.ვაშაკიძე და ტ.პეტრაკოვი. ოლიმპიადის ჩატარების ადგილი იყო თბილისის 26–ე საცდელ–საჩვენებელი სკოლა. იმავე 1933 წლის 28 ნოემბერს ჩატარდა მოსწავლეთა რაიონული ოლიმპიადა მათემატიკაში. ქართველმა საზოგადოებამ და პრესამ დიდი დაინტერესება და ყურადღება გამოიჩინეს ამ წამოწყების მიმართ. ოლიმპიადების ჩატარებას დიდი მოცულობის სტატიები მიუძღვნეს გაზეთებმა ,,ახალგაზრდა კომუნის–ტი“, ,,Тифлисский рабочий“ და სხვ. ოლიმპიადის ენერგიული მხარდამჭერი დადგე–ნილება იქნა მიღებული საქართველოს კომკავშირის ცეკას მიერ, რომელიც ეხებოდა ქვეყანაში მათემატიკური განათლების გაუმჯობესების საკითხებს. დადგენილება გამოქვეყნდა 1933 წლის 25 დეკემბერს გაზეთში ,,ახალგაზრდა კომუნისტი“. სამწუხა–როა, რომ ჩვენთვის უცნობია მათემატიკის პირველ ოლიმპიადაზე მოსწავლეებისათვის დავალებად მიცემული ამოცანები, ასევე უცნობია ოლიმპიადის პირველი გამარჯვებუ–ლების სახელები და მათი შემდგომი ისტორიები.

მოსწავლეთა საქალაქო მათემატიკური ოლიმპიადა საბჭოთა კავშირის მასშტაბით პირველად ჩატარდა თბილისში 1934 წლის 18 ივლისს. ოლიმპიადის გამარჯვებულები მიწვეული იყვნენ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ოლიმპიადაზე, რომლის ორგანიზატორები იყვნენ ცნობილი ქართველი მათემატიკოსები ა.ხარაძე, ლ.გოკიელი, დ.დოლიძე, მ.კონიაშვილი, კ.სულაქველიძე. საბჭოთა კავშირის მასშტაბით საქართვე–ლოში ჩატარდა მოსწავლეთა პირველი რესპუბლიკური ოლიმპიადა მათემატიკაში. საქართველოს ნორჩ მათემატიკოსთა რესპუბლიკური ოლიმპიადა 1957 წელს გაიმართა, რომლის საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე იყო საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ–კორესპონდენტი ვლადიმერ ჭელიძე.

მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების ისტორია ისე წარიმართა, რომ საქარ–თველო 1967 წელს კიდევ ერთხელ გახდა მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების ყურადღების ეპიცენტრში. ამ წელს თბილისში გაიმართა მოსწავლეთა პირველი საკავშირო ოლიმპიადა მათემატიკაში. განმეორებით 1981 წელს საქართველომ ისევ უმასპინძლა მოსწავლეთა საკავშირო ოლიმპიადას მათემატიკაში. ამ ოლიმპიადის საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე იყო საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ–კორესპონდენტი თ.გეგელია, ამ ოლიმპიადის წარმატებით ჩატარებაში აქტიური როლი ითამაშეს ცნობილმა ქართველმა მათემატიკოსებმა, შემდგომში აკადემიკოსმა ი.კიღურაძემ, პროფესორებმა ლ.გოგოლაძემ, ზ.ჭანტურიამ, ტ.ჭანტურიამ და რომლებიც შემდგომშიც აქტიურად მონაწილეობდნენ საქართველოში მოსწავლეთა რესპუბლიკური ოლიმპიადების ჩატარებაში.

საბჭოთა კავშირის მასშტაბით საქართველოს შემდეგ მათემატიკური ოლიმპიადა ჩატარდა რუსეთში. სადაც პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა ორგანიზებული იქნა ლენინგრადში (ახლანდელი პეტერბურგი) 1934 წელს შემოდგომაზე, შესანიშნავი გეომეტრის, საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ–კორესპონდენტის, პროფესორ ბ.დელონეს მიერ. ოლიმპიადის ჩატარებაში აქტიურად მონაწილეობდნენ ო.ჟიტომირსკი, ვ.ტარტაკოვსკი, დ.ფადეევი და გ.ფიხტენგოლცი. ეს ოლიმპიადა მაშინ ჩატარდა რამდენიმე ეტაპად (ღია დაუსწრებელი ეტაპი, შემდეგ წერითი დასწრებული

ეტაპი და დასკვნითი დასწრებული ეტაპი), ოლიმპიადა ჩატარდა მხოლოდ მაღალი კლასის მოსწავლეებისათვის. მოგვიანებით, 1939 წლიდან ოლიმპიადაში მონაწილეობას ღებულობენ მეცხრეკლასელებიც, ხოლო 1940 წლიდან მერვეკლასელებიც. 1969 წლიდან ოლიმპიადა ტარდება მეხუთე–მეათე კლასის მოსწავლეებისათვის. ლენინგრადის ოლიმპიადების განსაკუთრებულობა, რომელიც შენარჩუნებულია ბოლო პერიოდამდე არის ის, რომ დასკვნითი ეტაპი ტარდება ზეპირი ფორმით, რომელზეც მოსწავლეები ჟიურის წევრებს აცნობენ ამოცანების ამოხსნას. ლენინგრადში ჩატარებულიმოსწავლე-თა მათემატიკური ოლიმპიადიდან მომდევნო,1935 წელს წელს ჩატარდა პირველი საქა-ლაქო ოლიმპიადა მოსკოვში.საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე იყო აკადემი-კოსი პ.ალექსანდროვი, საორგანიზაციო კომიტეტის შემადგენლობაში შედიოდნენ ცნო-ბილი მათემატიკოსები, მოსკოვის უნივერსიტეტის პროფესორები ა.კოლმოგოროვი, ლ.ლიუსტერნიკი, ლ.შნირეკმანი, ვ.კოგანი, ს.იანოვსკაია. პირველი მათემატიკური ოლიმპიადის წარმატებამ ორგანიზატორებს უბიძგა მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსი-ტეტში შეექმნათ სასკოლო მათემატიკური წრე, რომლის შექმნიდან სისტემატურად ხდება მოსწავლე–მათემატიკოსებისათვის სპეციალური ლიტერატურის შექმნა.

მოგვიანებით მოსკოვისა და ლენინგრადის უნივერსიტეტებმა დაიწყეს ოლიმპიადე–ბის ჩატარება ფიზიკასა და ქიმიაში. მეორე მსოფლიო ომში საბჭოთა კავშირის ჩართვამ–დე ეს ოლიმპიადები ტარდებოდა ყოველწლიურად და სწრაფად მოიპოვეს პოპულარო–ბა. მეორე მსოფლიო ომის დამთავრებიდან მალე აღდგენილი იქნა ოლიმპიადების ჩატარება. პირველ წლებში ოლიმპიადები ტარდებოდა მხოლოდ დიდ ქალაქებში, სადაც იყო ძლიერი უნივერსიტეტები, ხოლო მეოცე საუკუნის 50–იანი წლების ბოლოს და 60–იანი წლების დასაწყისში მათემატიკური ოლიმპიადები ტრადიციული გახდა თითქმის მთელი ქვეყნისათვის. ოლიმპიადებს ატარებდნენ უნივერსიტეტები და პედაგოგიური ინსტიტუტები სახალხო განათლების ორგანოებთან ერთად.

სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის იდეამ ერთად გააერთიანა უნივერსიტეტის პროფესორები, სამეცნიერო კვლევითი ინსტიტუტების მეცნიერ–მუშაკები, სპეციალი–ზირებული სკოლების მასწავლებლები, ასპირანტები, სტუდენტები, რომლებიც ცდი–

ლობდნენ გამოევლინათ განსაკუთრებული ნიჭით დაჯილდოებული ახალგაზრდები და დახმარებოდნენ მათ პროფესიულ სრულყოფაში. ეს საზოგადოებრივი აქტიურობა სახელმწიფოს მიერ მხარდაჭერილი იყო მრავალმხრივ, მათ შორის ფინანსურადაც.

1960 წელს მოსკოვში ჩატარდა პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა, რომელშიც მონაწილეობა მიიღო რუსეთის ფედერაციის რამდენიმე მხარემ. ამ ოლიმპიადას ხშირად რუსეთის ფედერაციის მოსწავლეთა ,,ნულოვან“ მათემატიკურ ოლიმპიადასაც უწოდე–ბენ, რადგან ოფიციალური ნუმერაცია 1961 წლიდან დაიწყო. სრულიად რუსეთის პირველ მათემატიკურ ოლიმპიადაზე მონაწილეობა მიიღო რუსეთის თითქმის ყველა მხარემ, ასევე მიწვეული იყო მაშინდელ საბჭოთა კავშირში შემავალი ყველა მოკავშირე რესპუბლიკის ნაკრები გუნდები 4–4 მონაწილით, რომელთა შემადგენლობაში გამოდი–ოდნენ მოკავშირე რესპუბლიკების მათემატიკური ოლიმპიადების გამარჯვებულები. პირველ წლებში სრულიად რუსეთის მათემატიკური ოლიმპიადები ტარდებოდა მოსკოვში, ხოლო მოგვიანებით მისი ჩატარების პატივი სხვა ქალაქებსაც ერგო. ოლიმ-პიადამ მიიღო გარკვეული დამოუკიდებლობა. 1967 წლიდან ოლიმპიადას ეწოდა ოფი-ციალური სახელწოდება–,,მოსწავლეთა საკავშირო ოლიმპიადა მათემატიკაში“.

დაახლოებით იმავე პერიოდში ჩატარდა მოსწავლეთა პირველი საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა, რომლის ინიციატორი იყო რუმინეთის მათემატიკური და ფიზიკური საზოგადოება. 1959 წლის ზაფხულში ბუქარესტში მოსწავლეთა პირველ საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადაზე შეიკრიბა აღმოსავლეთ ევროპის შვიდი ქვეყნის მოსწავლეები. მოგვიანებით ოლიმპიადის მონაწილე ქვეყნების რაოდენობა გაიზარდა. მაგალითად, მექსიკის საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადაზე მონაწი–ლეობა მიიღო მსოფლიოს 98 ქვეყანამ. საბჭოთა კავშირის არსებობის დროს მოკავშირე რესპუბლიკების, სრულიად რუსეთის და საკავშირო მათემატიკური ოლიმპიადები საშუალებას იძლეოდა საორგანიზაციო კომიტეტებს შეერჩიათ საბჭოთა კავშირის წარმომადგენლობითი ნაკრები მოსაწავლეთა მათემატიკურ საერთაშორისო ოლიმპია–დებზე, მათ შორის არაერთგზის ღირსეულად იყო წარმოდგენილი ქართველი მოსწავლეები საქართველოს ნაკრებიდან. ტრადიციულად, ჩვენი მოსწავლეები ძალიან

მაღალ შედეგებს აჩვენებდნენ მოსწავლეთა საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპია–დებზე და ყველა ოლიმპიდაზე გუნდურ ჩათვლაში ლიდერებს შორის იყვნენ.

სრულიად რუსეთის მათემატიკის მოსწავლეთა ოლიმპიადები ორგანიზაციულად გაფორმდა 1974 წელს, როცა რუსეთის განათლების სამინისტრომ, რუსეთის უმაღლესი განათლების სამინისტრომ, რუსეთის საზოგადოება ,,ცოდნამ“ და საკავშირო კომკავში–რის ცენტრალურმა კომიტეტმა ერთობლივად შექმნეს სრულიად რუსეთის მათემატიკის და ქიმიის მოსწავლეთა ოლიმპიადების ჩასატარებელი ცენტრალური საორგანიზაციო კომიტეტი. მათემატიკის მიმართულების პირველი ხელმძღვანელები იყვნენ მოსკოვის უნივერსიტეტის პროფესორი, საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ–კორესპოდენტი (შემდგომში წევრი) ვ.არნოლდი და მოსკოვის ფიზიკა–ტექნიკური ინსტიტუტის დოცენტი ა. სავინი.

მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების მონაწილეთა რაოდენობის მკვეთრმა ზრდამ შექმნა ოლიმპიადების ჩატარების გარკვეული საორგანიზაციო სირთულეები, ამიტომ 1975 წლიდან საკავშირო ოლიმპიადების სტრუქტურის ზოგიერთი მხარის ცვლილება მოხდა, რაც ძირითადად გამოიხატა იმაში, რომ ოლიმპიადების საკონკურსო ეტაპები გაიზარდა, ხოლო დასკვნითი ეტაპის მონაწილეთა რაოდენობა შემცირდა. მწვერვალისაკენ მიმავალ გზაზე ნორჩ მათემატიკოსებს უნდა გადაელახათ სასკოლო, რაიონული ან/და საქალაქო, სამხარეო, რესპუბლიკური და საკავშირო ეტაპები. ოლიმპიადების თითოეული ტურის საპრიზო ადგილებზე გასული მოსწავლეები დაიშვებოდნენ შემდეგ ტურში მონაწილეობის მისაღებად. ამრიგად, ორგანიზაციულად ჩამოყალიბდა ოლიმპიადის მონაწილეთა საკმაოდ მკაცრი შესარჩევი სისტემა.

საბჭოთა კავშირის დაშლის შემდეგ 1991 წლიდან ტარდება ყოფილი მოკავშირე რესპუბლიკების მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადები, მათ შორის საქართველოს მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადები. ამჟამად საქართველოს მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარება ხდება შემდეგ ეტაპებად: სასკოლო, რაიონული და საქალაქო, სამხარეო და რესპუბლიკური.

საბჭოთა კავშირის დაშლის შემდეგ საკავშირო ოლიმპიადების ნაცვლად ტარდება რესპუბლიკათაშორისი ოლიმპიადები. სრულიად რუსეთის პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა 1993 წელს ჩატარდა ქალაქ ანაპაში (კრასნოდსარია მხარე).

საქართველოში განათლების სისტემაში მიმდინარე რეფორმა გულისხმობს ჩვენი ქვეყნის განათლების დონის საერთაშორისო სტანდარტებთან გათანაბრებას და ახალგაზრდებში ისეთი ცოდნის მიღებას და უნარების განვითარებას, რომელიც პასუხობს თანამედროვე სამყაროს გამოწვევებს და მოთხოვნებს. აღნიშნული მიზნის მიღწევის ერთ-ერთი ეფექტური საშუალებაა მოსწავლეთა საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადებში მონაწილეობა. საერთაშორისო ოლიმპიადებს ყოველწლიურად სხვადასხვა ქვეყნები მასპინძლობენ.

საქართველოს ხელისუფლება დიდ ყურადღებას უთმობს მათემატიკის საერთა–შორისო სასწავლო ოლიმპიადისათვის მოსწავლეთა შერჩევას, მათ მომზადებას და მონაწილეთა სხვა ორგანიზაციული და ფინანსური საკითხების გადაწყვეტას. ამ პროცესებს 1993 წლიდან 2008 წლამდე ახორციელებდა საქართველოს განათლების სამინისტრო, ხოლო2009 წლიდან ახორციელებს რუსთაველის სამეცნიერო ფონდი. ფონდი ახდევს საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადებისათვის საქართველოს ნაკრები გუნდების წევრთა შერჩევის, მომზადებისა და მონაწილეობის ადმინისტრირებას შემდეგ საგნებში: ფიზიკა, მათემატიკა და ინფორმატიკა. 2011 წლიდან დაემატა მეოთხე დისციპ-ლინა და საქართველოს ნაკრები ბიოლოგიის საერთაშორისო ოლიმპიადაშიც ჩაერ-თო. ადმინისტრირების I ეტაპზე ტარდება ეროვნული ნაკრები გუნდების წევრების შესარჩევი ტურები. შესარჩევ ტურებში მონაწილეობის მიღება შეუძლია იმ მოსწავლეს, რომელიც ეროვნული ოლიმპიადის დასკვნით ტურში გავიდა და თავისი ასაკობრივი ჯფუფის პირველ ათეულში მოხვდა. ამის შემდეგ იწყება გუნდების დაკომპლექტება და მისი მომზადება საერთაშორისო ოლიმპიადებზე გასამგზავრებლად.

2017 წელს, მათემატიკის შესარჩევ ტურში 43 მოსწავლე მონაწილეობდა. სასწავლო ოლიმპიადებში მონაწილე მოსწავლეთაგან გამარჯვებულები, ეროვნული ნაკრების წევრობის კანდიდატები გახდნენ, ნაკრების შესარჩევი 4 წერის შედეგად კი გამოვლინდა

ექვსი საუკეთესო და ისინი გაემგზავრნენ მოსწავლეთა საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადაზე, ჩვენი ქვეყნის სახელის დასაცავად. ჩვენმა მოსწავლეებმა 2017 წელს მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადაზე მოიპოვეს 1 ოქროს, 2 ვერცხლის და 3 ბრინჯაოს მედალი, ეს შედეგი ჩვენი ქვეყნისთვის წარმოადგენს საუკეთესოს, ყველა ოლიმპიადას შორის რომელზეც მიგვიღია მონაწილეობა 1993 წლიდან. კერძოდ, გუნდურ ჩათვლაში საქართველოს ნაკრებმა 110 მონაწილე ქვეყანას შორის დაიკავა მე-12-ე ადგილი და გაუსწრო მათემატიკური თვალსაზრისით ისეთი ისტორიის და კულტურის მქონე ქვეყნებს როგორებიცაა: იტალია, საფრანგეთი, გერმანია,რუმინეთი და ა.შ.

საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადაზე 1993 წლიდან 2017 წლის ჩათვლით ჩვენი ქვეყნის მონაგარია: 3 ოქროს, 18 ვერცხლის და 57 ბრინჯაოს მედალი , ამასთან 48 საპატიო სიგელი.

რაც შეეხება, საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადებზე საქართველოს ყველა ნაკრებ გუნდს (მათემატიკა, ინფორმატიკა, ფიზიკა, ქიმია, ბიოლოგია) ბოლო 10 წლის მანძილზე ერთად მოპოვებული აქვს 3ოქროს, 12 ვერცხლის და 57 ბრინჯაოს მედალი. საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადებისათვის საქართველოს ნაკრები გუნდის წევრების შერჩევა ხდება ეროვნული სასწავლო ოლიმპიადის მესამე ტურის შედეგებისა და შესარჩევი ტურების შედეგად.

საქართველოს მათემატიკოსთა ნაკრები გუნდი რეზერვისტებთან ერთად საერთა–შორისო სასწავლო ოლიმპიადაზე დადგენილი წესის შესაბამისად გადიან მომზადებას თბილისში. ხოლო, შემდეგ საქართველოს ნაკრები გუნდი მათემატიკაში გადიან მომზადებას ქალაქგარეთ–ხან ბაკურიანში, ხან ქობულეთში.

წვრთნების დასრულების შემდეგ საქართველოს ნაკრები გუნდი მათემატიკაში მონაწილეობას ღებულობს მათემატიკის საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადაზე. წელს მათემატიკის 58-ე საერთაშორისო სასწავლო ოლიმპიადა გაიმართა ბრაზილიაში, ქ. რიო დე ჟანეიროში 12-23 ივლისს.

საქართველოს მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების პარალელურად ტარდე–ბა აგრეთვე სხვა მრავალრიცხოვანი მათემატიკური ოლიმპიადები, რომელთაც ატარებენ როგორც არასამთავრობო, ისე საერთაშორისო ორგანიზაციები. ეს მათემატიკური ოლიმ–პიადები ტარდება სხვადასხვა ასაკის მოსწავლეებისათვის, ზოგიერთი მათგანი განსხვავებით ტრადიციული საოლიმპიადო ამოცანებისაგან ტესტების სახით მიცემულ დავალებებს შეიცავს და შეფასების კრიტერიუმებიც ზოგჯერ ტრადიციული ოლიმპი–ადებისაგან განსხვავებულია. მაგალითად, ,,კენგურუ", მათემატიკური ოლიმპიადა „ევერესტი", რომელიც ტარდება ორ სეზონად: შემოდგომა–ზამთრის სეზონი (ოქტომ-ბერი–დეკემბერი) და გაზაფხული–ზაფხულის სეზონი (თებერვალი–მაისი). თითოეუ-ლი სეზონი ტარდება სამ ტურად. I ტური (შესარჩევი), II ტური (ნახევარფინალი) და III ტური (ფინალი).ოლიმპიადაში მონაწილეობას იღებენ II, III, IV, V და VI კლასის მოსწავლეები და სხვ.

მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადა ,,ევერესტის" თითოეულ ტურში ამოსახ–სნელი ამოცანების რაოდენობა, ამოხსნისათვის განკუთვნილი დრო, შეფასების სისტემა ერთნაირი არ არის. მაგალითად, I ტურში (შესარჩევი ტური) ოლიმპიადის მონაწილეებს ამოსახსნელად ეძლევათ 10 ამოცანა. I ტური გრძელდება 40 წუთი. II ტურში (ნახევარ–ფინალი) ოლიმპიადის მონაწილეებს ამოსახსნელად ეძლევათ 12 ამოცანა. ნახევარფინა–ლი გრძელდება 60 წუთი. III ტურში (ფინალი) ოლიმპიადის მონაწილეებს ამოსახსნე–ლად ეძლევათ 14 ამოცანა. ფინალი გრძელდება 1 საათი 20 წუთი. თითოეულ ტურში პირობებს თან ახლავს 3 ან 4 სხვადასხვა სირთულის შეკითხვა, რომლებიც ფასდება: 2; 5 ან 7 ბალით. ტესტში ასევე მოცემულია პირობები, რომლებსაც დასმული აქვს მხოლოდ ერთი შეკითხვა. ასეთი ამოცანები სირთულის მიხედვით ფასდება: 5; 7; 8 ან 10 ბალით. ყოველი ამოცანის თითოეულ კითხვას, რამდენიმე სავარაუდო პასუხი აქვს, მათგან სწორია მხოლოდ ერთი. თითოეულ ტურში ბალების მაქსიმალური რაოდენობაა 120.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის უმაღლესი მათემა-ტიკის კათედრასთან არსებობდა ფიზიკა–მათემატიკის დაუსწრებელი სკოლა, რომელ-საც წლების განმავლობაში ხელმძღვანელობდა პროფესორი თემურ ვეფხვაძე. ამ სკოლამ

დიდი დახმარება გაუწია სოფლად მაცხოვრებელ ახალგაზრდებს, რომლებიც ტერიტო-რიული სიშორის გამო ვერ ახერხებდნენ მათემატიკის სპეციალიზირებული სკოლების კურსის გავლას, ან უნივერსიტეტებში მათემატიკის გაძლიერებული კურსების შესწავლას.

ოლიმპიადების ჩატარების ერთ–ერთი მნიშვნელოვან მიზანს წარმოადგენს მოსწავლეთა მათემატიკით დაინტერესება და მათი აქტიური ჩართვა მათემატიკის გაღრმავებულად შესწავლაში, რაც ხორციელდება მოსწავლეების მიერ მათემატიკის ფაკულტატიური კურსის გავლით, მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობით, მათემატიკის საგნობრივ წრეებში ჩართვით. მეტად მნიშვნელოვანია ამ დროს მათემატიკის მასწავლებელმა აპელირება გააკეთოს იმაზე, რომ მოსწავლეებს დიდი სურვილი აქვთ შეამოწმონ თავიანთი შესაძლებლობები და მათემატიკური უნარები–შეუძლიათ თუ არა მათ ამოხსნან მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანები. მათ მოსწონთ ნებაყოფილობითი მონაწილეობა შეჯიბრებებში, ის გარემო, რომელიც ახლავს ოლიმპიადების ჩატარებას და ამასთანავე ოლიმპიადის პრინციპი, რომ მთავარია მონაწილეობა და არა გამარჯვება.

მოსწავლეებისათვის მათემატიკით დაინტერესებაში ასევე მნიშვნელოვანია ოლიმ–პიადაში მონაწილეთა სპორტული აზარტი. ეს განსაკუთრებით უმცროსი ასაკის მოსწავ–ლეებისათვისა არის დამახასიათებელი. მათემატიკური ოლიმპიადები პაექრობის სულისკვეთებით აღანთებს მოსწავლეებს და უღვივებს სურვილს თავიანთ თანატოლებს შეეჯიბრონ საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნაში. ოლიმპიადების უფრო მაღალ საფეხუ–რებზე, სადაც უფროსკლასელები მონაწილეობენ, სპორტული ჟინი უფრო ნაკლებ როლს ასრულებენ, მაგრამ მათი სრული იგნორირება ამ სტადიაზეც არ შეიძლება.

მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარება ემსახურება მათი მათემატი–კური შესაძლებლობების გამოვლენას და შემდგომში მათ გაღრმავებას. ხშირია შემთხვე–ვები, როცა მოსწავლე მათემატიკის გაკვეთილზე სრულიად დამსახურებულად იღებს დამაკმაყოფილებელ შეფასებებს, ზოგჯერ უფრო მაღალს, იშვიათად არადამაკმაყო–ფილებელსაც. ერთ მშვენიერ დღეს ასეთი მოსწავლე მონაწილეობას იღებს მათემატიკის

სასკოლო ოლიმპიადაზე, რათა გამოსცადოს თავისი ძალები და აღფრთოვანებული რჩება–ეს რა საინტერესოა! ამის შემდეგ ვამჩნევთ, რომ ის არც თუ ისე სუსტად ხსნის ისეთ მათემატიკურ ამოცანებს, რომლებიც ღრმა გააზრებას და ანალიზს მოითხოვენ, რომლებსაც ზოგჯერ წარჩინებული მოსწავლეებიც კი ჩიხში შეჰყავს. აშკარა ხდება, რომ ოლიმპიადის შემდეგ მოსწავლემ სერიოზულად მოჰკიდა ხელი მათემატიკის შესწავლას. მასწავლებელი უნდა დაეხმაროს ასეთ მოსწავლეებს არა მარტო მათემატიკის გაკვეთილებზე, არამედ უნდა გამოძებნოს მასთან ინდივიდუალური მუშაობისათვის საჭირო დრო, რეკომენდაცია გაუწიოს მისთვის საჭირო მათემატიკურ ლიტერატურას, მასთან ერთად ამოხსნას საინტერესო მათემატიკური ამოცანები და სხვ.

მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადის გამარჯვებულის სურვილია მომავალ ოლიმპიადაზე გამარჯვება, ხოლო ოლიმპიადის მონაწილე ნებისმიერი მონაწილეს მო–მავალ ოლიმპიადაზე უკეთესი შედეგის მიღწევა სურს, რისთვისაც ისინი ხსნიან სხვადასხვა თემატიკის მქონე ამოცანებს, კითხულობენ რეკომენდირებულ ლიტერა–ტურას, უფრო სიღრმისეულად სწავლობენ მათემატიკიდან მათთვის საინტერესო სხვადასვა საკითხს, აქტიურად მონაწილეობენ მათემატიკის საგნობრივი წრის მუშაო–ბაში. ხვდებიან, რომ მათემატიკურ ოლიმპიადაზე წარმატების მისაღწევად აუცილე-ბელია მათ შეეძლოთ ამოცანების ამოხსნა სხვადასხვა ხერხით, ამოცანების ამოხსნისათ-ვის საჭირო ანალიზური უნარები, მოძებნონ ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტული გზები, შეამჩნიონ ერთი შეხედვით მოულოდნელი კავშირები ამოცანის პირობაში მოცემულ სიდიდეებს შორის. მოსწავლეების მიერ ოლიმპიადის თითოეულ ეტაპზე უკეთესი შედეგის მიღწევა სტიმულს აძლევთ გაიღრმაონ ცოდნა მათემატიკაში და მიაღწიონ უკეთეს შედეგებს სწავლაში.

მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარება საშუალებას იძლევა გამოვავლინოთ ისეთი მოსწავლეები, რომლებიც განსაკუთრებული მათემატიკური ნიჭით არიან დაჯილდოე–ბული და იჩენენ ინტერესს მათემატიკის შესწავლისადმი, რაც ხელს უწყობს მომავალი მათემატიკოსების და სამეცნიერო–მეთოდური კადრების გაზრდას და მნიშვნელოვანია ქვეყანაში მეცნიერების და ტექნიკის განვითარებისათვის.

მათემატიკური ოლიმპიადები ეხმარება სკოლების მათემატიკის მასწავლებლის პროფესიულ სრულყოფას. იმისათვის, რომ მოამზადოს და ჩაატაროს ოლიმპიადა მათემატიკის მასწავლებელმა უნდა შექმნას მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრე, ჩაატაროს მეტად შრომატევადი მოსამზადებელი სამუშაოები, შეარჩიოს და ამოხსნას სხვადასხვა მათემატიკური ამოცანები, დეტალურად გაეცნოს მათემატიკის სხვადასხვა საკითხს, ახალ მათემატიკურ და მეთოდურ ლიტერატურას. მათემატიკის საგნობრივი წრის მუშაობისათვის და მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადისათვის მასალების შეგროვება, მათი დამუშავება და სწავლება წარმოადგენს მათემატიკის მასწავლებლის სამეცნიერო–მეთოდური აქტივობის ერთ–ერთ ფორმას, რადგან მათემატიკის საგნობ–რივი წრის მუშაობის და მოსწავლეთა მათემატიკის ოლიმპიადისათვის ამოცანების შერჩევა მოითხოვს მათემატიკის და მისი სწავლების მეთოდიკის საკმაოდ ღრმა ცოდნას. წრის ხელმძღვანელი ზედმიწევნით გააზრებულად უნდა არჩევდეს წრეზე განსახილავი თითოეული ამოცანის ამოხსნის მეთოდიკას. წრეზე უნდა მოხდეს კლასში შესწავლილი მათემატიკური მასალის გაფართოება და განხილული საკითხების სიღრმისეული შესწავლა, რომელიც ზოგჯერ სცილდება კიდეც სასკოლო პროგრამას. იმისათვის, რომ მათემატიკის მასწავლებელმა ასეთი საკითხები განიხილოს საწრეო მუშაობაზე მას უნდა ჰქონდეს გადასაცემი მასალის სიღრმისეული ცოდნა და ზედმიწევნით მაღალ დონეზე ფლობდეს მოსწავლეებისათვის გადასაცემი მასალის სწავლების მეთოდიკას. მეორეს მხრივ, მათემატიკის საგნობრივი წრის ხელმძღვანელობა, მოსწავლეთა მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარება მასწავლებლებს ესთეტიკურ სიამოვნებასაც ანიჭებს. საწრეო მუშაობის დროს მასწავლებელი დაკავებულია თავისი საყვარელი საქმით, მათთან არჩევს საინტერესო საკითხებს, რომელთა გადაჭრაში გაცილებით მცოდნე, დაინტერე-სებული და აქტიური აუდიტორია მონაწილეობს, ვიდრე ჩვეულებრივ კლასშია.

მათემატიკის სასკოლო ოლიმპიადები ახდენენ მთლიანად სკოლაში, რაიონში, რეგიონში და ქვეყანაში ჩატარებული მათემატიკის მთელი კლასგარეშე მუშაობის შეჯამებას. სასკოლო და რაიონული ოლიმპიადები საშუალებას იძლევა შევაფასოთ

რაიონის მოსწავლეთა მათემატიკური აზროვნების, მათი მომზადების, აგრეთვე ცალკეული კლასებში მათემატიკის სწავლების მდგომარეობა.

მოსწავლეთა მათემატიკის სამხარეო და რესპუბლიკური ოლიმპიადები საშუალებას იძლევა შევაფასოთ მათემატიკური განათლების დონე ქვეყნის ცალკეულ მხარეებში და რესპუბლიკაში მთლიანად. საერთაშორისო ოლიმპიადები საშუალებას იძლევა დინამიკაში დავაკვირდეთ სხვადასხვა სახელმწიფოში მათემატიკური განათლების დონის ცვლილებებს. ცვლილებების დადგენა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, რადგან თანამედროვე პირობებში ის ოლიმპიადებზე მონაწილე ქვეყნებს შესაძლებლობას აძლევს დაუყოვნებლივ მიიღონ საჭირო ზომები და ცვლილებები განახორციელონ მოსწავლეთა მათემატიკური განათლების შინაარსში, რომელთანაც მჭიდრო კავშირშია მათემატიკის მომავალი სპეციალისტების მომზადება.

§1.2.მათემატიკის საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ამოცანები და მათემატიკის სასკოლო კურსი

მათემატიკურ ლიტერატურაში ამოცანის ცნების განმარტების სხვადასხვანაირი განსაზღვრება არსებობს. ეს განსაზღვრებები საკმაოდ რთულია და არ შეესაბამება სიტყვის ინტუიციურ გეგებას, რა მნიშვნელობითაც იგი გამოიყენება, ამიტომ უმჯობესია დავკმაყოფილდეთ ამ ცნების ინტუიციური მნიშვნელობით. მათემატიკის შესწავლისას, განსაკუთრებით იქ სადაც საქმე გვაქვს ამოცანებთან, ინტუიციურად სავსებით გასაგებია რა გვაქვს მხედველობაში როცა ამოცანის შესახებ ვლაპარაკობთ.

ყოველი ამოცანა შედგება ორი ნაწილისაგან:

1. რომელიც წარმოადგენს ობიექტების ერთობლიობას და მათ შორის მიმართებას, იგი მოცემულია აღწერით;
2. მოთხოვნა (კითხვა) თუ რა უნდა ვიპოვოთ მოცემული პირობების მეშვეობით.

იმისდა მიხედვით, თუ როგორაა დასმული ამოცანის კითხვა, შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ როგორი შეიძლება იყოს პასუხი, რას უნდა წარმოადგენდეს იგი. ამ მიზნით ამოცანები იყოფა სამ კლასად:

ა. პირველ კლასს მიეკუთვნება ამოცანები, რომლებშიც კითხვას აქვს სახე: ,,აქვს თუ არა“, ,,გადაკვეთს თუ არა“, ,,არსებობს თუ არა“ და ა.შ. ასეთი ამოცანების პასუხია ,,კი“ ან ,,არა“. ასეთ ამოცანებს უწოდებენ ამოცანებს არსებობაზე, რადგან გასარკვევია არსებობს თუ არა განსაზღვრული თვისების ობიექტი, რომელიც ამოცანის პირობებშია აღწერილი.

ბ. მეორე კლასს მიეკუთვნება ამოცანები, რომლებშიც ამოცანის კითხვას აქვს სახე: ,,რას უდრის“, ან შეიცავს მოთხოვნას ,,იპოვეთ“, ,,განსაზღვრეთ“, ,,გამოთვალეთ“, ,,ააგეთ“, და ა.შ. ასეთი ამოცანის პასუხი არის რაიმე ობიექტი, რომელიც ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს. ასეთი სახის ამოცანებს ჩვეულებრივ უწოდებენ ,,ამოცანებს გამოთვლაზე“, ,,ამოცანებს გამოანგარიშებაზე“, ,,ამოცანებს აგებაზე“.

გ. მესამე კლასს მიეკუთვნება ამოცანები, რომლებშიც ამოცანების კითხვას აქვს სახე: ,,დაამტკიცეთ“. ასეთი ამოცანების პასუხი არის გარკვეული სახის მსჯელობა, რომელსაც დამტკიცება ეწოდება. ასეთი სახის ამოცანებს ეწოდება ამოცანები დამტკიცებაზე.

პირველი კლასის ამოცანები (ამოცანები არსებობაზე) განსხვავდება მეორე კლასის ამოცანებისაგან (ამოცამები აგებაზე, ამოცანები გამოანგარიშებაზე, ამოცანები გამოთვლაზე და ა.შ.). პირველ შემთხვევაში გამოსარკვევია არსებობს თუ არა ისეთი ობიექტი, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას, მეორე შემთხვევაში კი თვით ამ ობიექტის პოვნაა საჭირო.

მესამე კლასის ამოცანები (ამოცანები დამტკიცებაზე) იმით განსხვავდება პირველი და მეორე კლასის ამოცანებისაგან, რომ აქ საჭიროა ლოგიკური ბუნების სპეციალური ობიექტის აგება, რომელსაც მტკიცება ეწოდება.

განსაზღვრული თვისების ობიექტის არსებობა ან არარსებობა ყოველთვის მოითხოვს დამტკიცებას, ამიტომ ამოცანები არსებობაზე ხშირად ცამოყალიბებულია, როგორც ამოცანები დამტკიცებაზე ,,დაამტკიცეთ, რომ არსებობს“, ან ,,დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს“. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ დამტკიცება. პირველი კლასის ამოცანებში კი ჩვენ თვითონ უნდა ვიპოვოთ სწორი პასუხი ,,კი“ ან ,,არა“, ცხადია დამტკიცებასთან ერთად.

მეორე კლასის ამოცანებშიც საჭიროა აგრეთვე დამტკიცება იმისა, რომ მიღებული ობიექტი არის ერთადერთი პასუხი და სხვა ამონახსნები არა გვაქვს. ამრიგად, გარდა იმ ამოცანებისა, რომლებიც ჩამოყალიბებულია როგორც ამოცანები დამტკიცებაზე (მესამე სახის ამოცანები) ამოცანები დამტკიცებაზე გვხვდება როგორც პირველი, ისე მეორე კლასის ამოცანების ამოხსნის დროს.

არსებობს ამოცანის ცნების განმარტების სხვაგვარი განმარტებებიც. ზოგჯერ ამოცა–ნებს სხვადასხვანაირ ფუნქციებს მიაწერენ მკვლევარები [1], [2], [3], [31],[42],[43] და სხვ. ჩვენ ვემხრობით ამოცანის ინტუიციურ გაგებას, რომელსაც იზიარებენ ქართველი მათემატიკის მეთოდისტები გ.ბერძულიშვილი, გ.ბრეგაძე, ბ.ბაკურაძე, ნ.ონიანი–საღი–ნაძე, ლ.ციბაძე, თ.წერეთლი და სხვ. ჩვენ ამოცანის ინტუიციური გაგება უკვე დეტალუ–რად განვიხილეთ და აქ აღარ შევჩერდებით.

ამოცანის ამოხსნის ქვეშ იგულისხმება ისეთი აზრობრივი ქმედება-პროცესი, რაც იწვევს იმ შედეგის დადგომას, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს.

ზოგჯერ სპეციალისტები ამოცანის და მისი მათემატიკური ამოხსნის ქვეშ გულისხმობენ არა მარტო წმინდა მათემატიკური ხასიათის ამოცანებს, არამედ ზოგადად ამოცანას და მის ამოხსნას. მაგალითად, მათემატიკურ ამოცანაში ავტორები [70], გამოყოფენ შემდეგ კომპონენტებს: საწყისი მდგომარეობა–ამოცანის პირობა; საბოლოო მდგომარეობა–ამოცანის დასკვნა; ამოხსნა–პირობის გარდაქმნა საძიებლის პოვნის მიზნით; ამოხსნის ბაზისი–მისი თეორიული დახასიათება.

მათემატიკურად ითვლება ყველა ამოცანა, რომლებშიც საწყისი მდგომარეობიდან საბოლოო მდგომარეობამდე გადასვლა მათემატიკური აპარატით ხორციელდება. ავტორი ამ ჯგუფს აკუთვნებს წმინდა მათემატიკურ ამოცანებს, რომელთა ყველა კომპონენტი მათემატიკურ ობიექტებს წარმოადგენს და ისეთ ამოცანებსაც, რომელთა ამოხსნა ხდება მათემატიკური აპარატის გამოყენებით. [70].

ჩვენ ვთვლით, რომ ამოცანების ამოხსნა არის მოქმედებათა თანმიმდევრული შესრულების პროცესი ან მიზნის მიღწევისათვის მიზანმიმართული აზრობრივი ოპერაციები, რომლებიც ემსახურება ამოცანის პრობლემური სიტუაციის გადაწყვეტას. ამოცანის ამოხსნის პროცესი წარმოადგენს აზროვნების შემადგენელ ნაწილს. კოგნიტური მიდგომის თვალსაზრისით ამოცანათა ამოხსნის პროცესი წარმოადგენს ინტელექტის ფუნქციებიდან ყველაზე რთულს და განისაზღვრულია როგორც უფრო მაღალი რიგის კოგნიტური პროცესი, რომელიც მოითხოვს ელემენტარული და ფუნდამენტური უნარ-ჩვევების შეთანხმებულობას და მართვას.

ამოცანის ამოხსნის პროცესი შედგება ისეტი ქვეპროცესებისაგან, როგორიცაა:

- პრობლემური სიტუაციის აღმოჩენა;
- ამოცანის დასმა: მოცემულობის (პირობის) ელემენტებს და მათ შორის დამოკიდებულებების და მოთხოვნის (მიზნის) გამოვლენა;
- ამოცანის ამოხსნის გზის პოვნა.

ეს ეტაპები გამოიყენება მრავალი სახის ამოცანათა ამოხსნის თეორიებში. ამოცანის დასმის სტადია და მისი ამოხსნის გზის პოვნა განსაკუთრებულად ხაზგასმულია ვიცბურგის სკოლის წარმომადგენლის ოტო ზელცის, გენშტალფსიქოლოგის კ.დუნკე–

რის, კოგნიტივისტ გრინოს თეორიებში მიუხედავად იმისა, რომ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ამასთან, ამოცანის დასმაში შეიძლება იგულისხმებოდეს როგორც გაცნობიერებული ისე გაუცნობიერებელი ინფორმაციების გადამუშავების პროცესები.

ამოცანის ამოხსნა წარმოადგენს მიმდევრობით გადასვლას ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, ამის მერე შემდეგ მდგომარეობაში და სხვ. სანამ არ იქნება მიღწეული საბო–ლოო მდგომარეობა, ანუ არ მოხდება ამოცანის საბოლოო ამოხსნა. ასეთი გადასვლები ხორციელდება ოპერატორების გამოყენებით, რომელთა საშუალებით ხდება ერთი მდგომარეობიდან უშუალოდ მის მომდევნო მდგომარეობაზე გადასვლა. ამოცანების ამოხსნის უმთავრესი სიძნელე დაკავშირებულია საჭირო ოპერატორების პოვნასთან.

არსებობს ამოხსნის ორი სტრატეგია: პირდაპირი და შებრუნებული ძიება.

1. პირდაპირი ძიების დროს ამომხსნელი ცდილობს ამოცანის ამოხსნას რაიმე მეთოდით, ხოლო შემდეგ აკვირდება გამოყენებული მეთოდით მოხდა თუ არა ამოცანის ამოხსნის პროცესის წინ წაწევა.
2. შებრუნებული ძიების დროს ამომხსნელი აკვირდება მიღებულ ამონახსნს და სვამს კითხვებს: რომელია ის საწყისი ნაბიჯი, რომელიც უნდა გადაიდგას იმისათვის, რომ მივიდეთ ამოცანის ამოხსნამდე? ასეთი ნაბიჯის პოვნის შემდეგ უნდა განისაზღვროს უშუალოდ პირველი ნაბიჯის მომდევნო ნაბიჯი, შემდეგ უშუალოდ მისი მომდევნო ნაბიჯი და ა.შ. სანამ არ მივალთ ამოცანის ამოხსნამდე.

შებრუნებული ძიების პროცესი ეყრდნობა მიზნის და საშუალებების შეჯერებას: ყოველ ნაბიჯზე შუალედურ მიზანს ადარებენ საბოლოოს და პოულობენ ოპერატორს, რომელიც ამცირებს ამოცანის ამოხსნის გზის სიგრძეს.

არსებობს ოპერატორების ორი სახე: ალგორითმული და ევრისტიკული.

1. ალგორითმი (წესების ერთობლიობა, რომელსაც მივყავართ გარანტირებულ შედეგამდე);
2. ევრისტიკული (საკმაოდ რთული ამოვანებისთვის, რომლისთვისაც ალგო–რითმები ნაპოვნი არ არის ან არ არსებობს).

სასკოლო მათემატიკური ამოცანების დაყოფა პირობითად ხდება ალგებრული და გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებად. ზოგადად, სასკოლო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და ხერხები ემყარება მათემატიკურ მეთოდებსა და მათემატიკური ობიექტების თვისებებს.

ჩვეულებრივ, მათემატიკურ ამოცანებს ყოფენ სტანდარტულ და არასტანდარტულ ამოცანებად. სტანდარტულად ითვლება ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნის ალგორითმი ცნობილია, ხოლო არასტანდარტული ამოცანისათვის ამოხსნის ალგო–რითმი ცნობილი არ არის. ზოგჯერ საოლიმპიადო ამოცანებს მიაკუთვნებენ არასტან–დარტულ ამოცანათა კლასს, ჩვენ არასტანდარტული ამოცანების ქვეშ ვგულისხმობთ უფრო ფართო კლასს, კერძოდ იმ ამოცანებს, რომლებიც სტანდარტული არ არის.

მეთოდურ ლიტერატურაში მათემატიკური ამოცანების ამოხსნას ზოგიერთი მკვლევარი გამოყოფს სამ ეტაპს:1. ამოცანის ფორმალიზაცია; 2. პრაქტიკული რეალი–ზაცია; 3. ინტერპრეტაცია. [1], [22].

დ.პოიას ამოცანის ამოხსნის პროცესის განსხვავებულ სქემას განხილავს [77], კერძოდ ის გამოყოფს შემდეგ ოთხ ეტაპს: 1. დასმული ამოცანის გაგება; 2. ამოცანის გეგმის შედგენა; 3. შედგენილი გეგმის შესრულება; 4. შემოწმება (მიღებული ამონახსენის შესწავლა).

თ.მორალიშვილი [29] თვლიდა, რომ „მეოთხე ეტაპი (მიღებული ამონახსნის შესწავლა) უმრავლეს შემთხვევაში არ სრულდება. ამოხსნის გეგმის შესრულების შემდეგ ამოცანის ამოხსნა სრულდება და ამოხსნის ძიებას არ უბრუნდებიან (დროის ნაკლე–ბობის გამო)“.

ეს ტენდენცია გრძელდება და არც თუ ისე სასარგებლო შედეგები მოაქვს სასწავლო პროცესში. როცა საქმე ეხება ისეთ მათემატიკურ ამოცანებს, რომელთა ამონახსნის შემოწმება მარტივად არის შესაძლებელი, მაშინ მოსწავლეები ამას დამოუკიდებლად ახერხებენ და ამოწმებენ კიდეც. მაგალითად, განტოლების ან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი/ამონახსნები, ირაციონალური განტოლების ამონახსნები და მისთ. ზოგჯერ შემოწმების პროცესი რთულია და მოსწავლეები გვერდს უვლიან მას, მაშინაც კი როცა

დამუშავებულია შემოწმების მეთოდები ტრიგონომეტრიული განტოლებების, უტოლო–ბების და მათი სისტემებისათვის [6]. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამონახსნების შემოწმებას, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება საკმაოდ რთულია, დიდ დროს მოითხოვს და მოსწავლეები ხშირად ცდილობენ გვერდი აუარონ ამ პროცედურებს, მაგრამ გამოცდილმა მასწავ–ლებელმა სასწავლო პრაქტიკაში უნდა დანერგოს მიღებული ამონახსნის/ამონახსნების შემოწმების სათანადო მექანიზმები და ამას მოსწავლეები უნდა შეაჩვიოს მიღებული ამონახსნის შემოწმებას.

ვთვლით, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანები მასწავლებელმა უნდა ჩართოს საგაკვეთილო პროცესში კონკრეტული თემის გავლის დროს. ხაზგასმით გვინდა აღვნიშნოთ, ჩვენ არ ვითხოვთ, რომ ამისათვის სპეციალურად გამოიყოს სასწავლო დრო. სასწავლო თემების განხილვისას, მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ თემის შესაბამისი საოლიმპიადო ამოცანები, ამასთან სასწავლო პროცესი ისე უნდა წარვმარ-თოთ, რომ გათვალისწინებული იყოს მოსწავლეთა ასკობრივი თავისებურებები.

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვა საგაკვეთილო პროცესში ხასიათდება ზოგიერთი თავისებურებებით, კერძოდ,

1. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის დროს;

2. უმრავლეს შემთხვევაში მასწავლებელმა არ უნდა მოახდინოს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების მზა რეცეპტების სახით მიწოდება, მან უნდა ისარგებლოს ისეთი მითითებებითა და კითხვებით, რომლებიც საშუალებას მისცემს მოსწავლეებს თვითონ მივიდნენ ამოხსნის სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის „აღმოჩენამდე“;

3. მასწავლებელმა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების პროცესი უნდა წარმართოს ისე, რომ მასში მონაწილეობა მიიღოს მთელმა კლასმა, მოსწავლეებს საშუალება უნდა ჰქონდეთ გამოთქვან თავისი შეხედულებები,

შესაძლოა ეს შეხედულებები მცდარიც იყოს და დაიცვან საკუთარი მიდგომები. მასწავლებლებმა პატივი უნდა სცენ მოსწავლეთა მიერ გამოთქმულ აზრებს;

4. მასწავლებელმა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანის ამოხსნის შემდეგ უნდა მოახდინოს გამოყენებული მეთოდის ან/და ხერხის სრულყოფილი მეთოდური ანალიზი და თუ ამოხსნილი ამოცანის სახე იძლევა ამის შესაძლებლობას, მოახდინოს მისი/მათი განზოგადება სხვა უფრო ფართო კლასის ამოცანების მიმართ;

5. მომდევნო ეტაპებზე, როცა მოსწავლეები მიიღებენ საკმაო გამოცდილებას, დახელოვნდებიან მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებაში, მასწავლებლის ჩარევა უნდა შემცირდეს, როგორც ამოხსნის მეთოდის ან/და ხერხის შერჩევისას, ასევე ამოხსნის პროცესშიც. მან ყურადღება უნდა გადაიტანოს იმ მოსწავლეებზე, რომლებსაც შედარებით უძნელდებათ ამოხსნის მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენება.

§1.3.1.კლასგარეშე მუშაობა, მისი ჩატარების მეთოდოლოგიური და მეთოდიკური საფუძვლები

1.3.1.კლასგარეშე მუშაობა მათემატიკაში, როგორც სწავლების ფორმა

კლასგარეშე მუშაობა წარმოადგენს სკოლის სასწავლო–აღმზრდელობითი მუშაო–ბის შემადგენელ ნაწილს, რომელიც მოსწავლეთა თავისუფალი დროის ორგანიზების ერთ–ერთი აქტიური ფორმაა, ფართო შესაძლებლობებს უქმნის მოსწავლეთა მრავალ–მხრივ განვითარებას და მათ მომზადებას ცხოვრებისათვის. კლასგარეშე მუშაობა მოიცავს სხვადასხვა სახის აქტივობებს და ხელს უწყობს პიროვნების სწავლების და აღზრდის პროცესს. კლასგარეშე მუშაობა ხასიათდება შემდეგი ნიშნებით:

- სხვადასხვაგვარი არასაგაკვეთილო მოქმედებები ეხმარება მოსწავლეს უფრო მრავალმხრივ გახსნას და გამოავლინოს ინდივიდუალური შესაძლებლობები;
- სხვადასხვა სახის კლასგარეშე მუშაობაში ჩართვით მოსწავლე იმდიდრებს პიროვნულ გამოცდილებას, ითვისებს რა, კაცობრიობის მიერ დაგროვილი მრავალფეროვან ცოდნას, მოსწავლის აღჭურვა ხდება საჭირო პრაქტიკული უნარ–ჩვევებით;
- სხვადასხვა სახის კლასგარეშე მუშაობა მოსწავლეს უღვივებს ინტერესს, აქტიურად ჩაერთოს საზოგადოებისათვის სასარგებლო სახის მოქმედებებში;
- სხვადასხვა სახის კლასგარეშე მუშაობაში ჩართვით მოსწავლეები არა მარტო ავლენენ თავიანთ ინდივიდუალურ შესაძლებლობებს, არამედ სწავლობენ გუნ–დური მუშაობის პრინციპებს, ეჩვევიან და თანამშრომლობენ ერთმანეთთან, პატივისცემით ეპყრობიან სხვების აზრებს, თავის თავს აყენებენ სხვის ადგილზე, ზრუნავენ მეგობრებზე, გუნდის წევრებზე და სხვ.

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობა ყველა მოსწავლისათვის სავალდებულო არ არის, მაგრამ სასურველია მასწავლებელმა სისტემატიურად ჩაატაროს კლასგარეშე მეცადინეობები, რომელიც თავის მხრივ ექნება სხვადასხვა დატვირთვა. კერძოდ:

ა) ჩამორჩენილ მოსწავლეებთან მუშაობა, ანუ დამატებითი მეცადინეობები;

ბ) ისეთ მოსწავლეებთან მუშაობა, რომლებიც ავლენენ მათემატიკურ უნარ–ჩვევებს, აქვთ ნიჭი და მათემატიკის გაძლიერებულად შესწავლის ინტერესი.

უნდა არსებობდეს მჭიდრო ურთიერთკავშირი საგაკვეთილო და კლასგარეშე მუშაობის დროს მასწავლებლის მიერ განხორციელებულ სასწავლო–აღმზრდელობით მუშაობებს შორის. სასწავლო მეცადინეობები, რომლებიც მოსწავლეებში აღძრავს სასწავ–ლო საგნის ინტერესს, განაპირობებენ კლასგარეშე მუშაობის ჩატარების საჭიროებას და პირიქით, კლასგარეშე მუშაობებზე მოსწავლეები ახდენენ სასწავლო საგანში მიღებული ცოდნის გაფართოებას და გაღრმავებას, სწავლობენ ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების უნარ–ჩვევებს, რაც ამაღლებს მოსწავლეთა აკადემიურ მოსწრებას და მათ ინტერესს მათემატიკის შესწავლისადმი. ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ დაუშვებელია კლასგა–რეშე მუშაობა წარმოადგენდეს საკლასო მუშაობის დუბლირებას.

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის მიზნებია:

1. მოსწავლეთა ინტერესის გაზრდა მათემატიკის და მისი გამოყენებების შესწავლი–სადმი;
2. მოსწავლეთათვის სასწავლო პროგრამით გათვალისწინებული მათემატიკური ცოდნის გაფართოება და გაღრმავება;
3. მოსწავლეებს ჩამოუყალიბოს მათემატიკური აზროვნების სტილი;
4. განავითაროს მოსწავლეებში სამეცნიერო–კვლევითი ხასიათის უნარ–ჩვევები;
5. აამაღლოს მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის დონე;
6. განუვითაროს მოსწავლეებს სასწავლო სახელმძღვანელოსთან და სამეცნიერო–პოპულარულ ლიტერატურასთან დამოუკიდებლად და შემოქმედებითად მუშაო–ბის უნარ–ჩვევები;
7. მათემატიკური ცოდნის ტექნიკაში, წარმოებასა და სახალხო მეურნეობაში პრაქტიკული გამოყენებების შესახებ მოსწავლეთა ცოდნის გაფართოება და გაღრმავება;
8. გააცნოს მოსწავლეებს მათემატიკის კულტურულ–ისტორიული ღირებულებები, მათემატიკური სკოლების წამყვანი როლი მსოფლიო მეცნიერებებში ;

9. ხელი შეუწყოს მათემატიკის მასწავლებელსა და მოსწავლეებს შორის უფრო მჭიდრო კონტაქტების დამყარებას, რაც გულისხმობს მათემატიკის მასწავლებლის მიერ მოსწავლეთა მოწოდებების და შემეცნებითი ინტერესების უფრო ღრმა და საფუძვლიან შესწავლას;
10. მათემატიკის ეფექტური სწავლებისათვის მოსწავლეთა გუნდის შექმნა, რომელიც მათემატიკის მასწავლებელს დაეხმარება სასწავლო თვალსაჩინოების, პლაკატების, სადემონსტრაციო გეომეტრიული სხეულების, მათემატიკური ხელნაკეთი ნივთების დამზადებაში. ასევე, მასწავლებელს დაეხმარებიან შედარებით ჩამორჩენილ მოსწავლეებთან მუშაობაში, სხვა მოსწავლეებთან მათემატიკური ცოდნის პროპაგანდაში და სხვ.
11. მოსწავლეებში განავითაროს გუნდური მუშაობის და ინდივიდის გუნდში მუშაობის უნარ–ჩვევები.

იგულისხმება, რომ ჩამოთვლილი თითოეული მიზნის ნაწილი ხორციელდება გაკვეთილზე, მაგრამ საკლასო მეცადინეობის დროს, როცა მასწავლებელი შეზღუდულია საგაკვეთილო დროით და სასწავლო პროგრამით, ჩამოთვლილი მიზნების სრულ რეალიზებას ის ვერ ახერხებს. ამიტომ, ამ მიზნების საბოლოო და სრული რეალიზება უნდა განხორციელდეს კლასგარეშე მუშაობის დროს.

მოსწავლის დამოკიდებულება საგნის მიმართ განპირობებულია სხვადასხვა ფაქტორებით:

- პიროვნების ინდივიდუალური თავისებურებებით (მასწავლებელი, მოსწავლე);
- საგნის თავისებურებებით;
- საგნის მეთოდიკით და მისი პრაქტიკული სწავლებით.

მათემატიკასთან მიმართებაში ყოველთვის არსებობენ მოსწავლეთა სხვადასხვა კატეგორიები:

- მოსწავლეები, რომლებიც ავლენენ მათემატიკის შესწავლის მიმართ გაძლიერებულ ინტერესს;

- მოსწავლეები, რომლებიც მათემატიკას სწავლობენ აუცილებლობიდან გამომდინარე, მაგრამ მისი შესწავლის მიმართ ინტერესს არ ავლენენ;
- მოსწავლეები, რომლებსაც მათემატიკა არ უყვართ და არც სწავლობენ. ისინი მათემატიკას თვლიან მოსაწყენ, მშრალ საგნად და ვერ ხედავენ მისი შესწავლის საჭიროებას.

მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის კურსის დამუშავებისას უნდა ხდებოდეს მოსწავლეთა თითოეული ჯგუფის ინტერესების გათვალისწინება. დასამუშავებელია მათემატიკის მასწავლებლის მუშაობის ფორმები და მეთოდები თითოეული ჯგუფის მოსწავლეებთან როგორც საკლასო, ისე კლასგარეშე მუშაობისათვის. გამოყოფილი სამი ჯგუფის რიცხობრივი თანაფარდობები პირდაპირ დამოკიდებულებაშია კლასთან ჩატარებულ მთელ სასწავლო სააღმზრდელო მუშაობის ხარისხთან. მათემატიკის ყველა მასწავლებლის გაზრდილ ინტერესს წარმოადგენს შეცვალოს ეს თანაფარდობა ჩვენს მიერ გამოყოფილი პირველი ჯგუფის სასარგებლოდ. ამიტომ ამ თანაფარდობის სასარგებლოდ გადადგმული ყოველი ნაბიჯი, იქნება ეს მოსწავლეებზე პედაგოგიური ზემოქმედების სხვადასხვა ფორმები და სწავლების მეთოდები უნდა ჩაითვალოს პრობლემის გადაჭრის ერთ–ერთ მნიშვნელოვან ეფექტურ და მიზანმიმართულ კრიტერიუმად. ამიტომ, მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობაზე უნდა გადაწყდეს შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

- მოხდეს მათემატიკის შესწავლით დაინტერესებულ მოსწავლეთა თეორიული ცოდნის გაღრმავება, მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა სპეციალური ხერხების სწავლება, ამოცანების ამოხსნის პრაქტიკული უნარ–ჩვევების გაფართოება, მათემატიკური აზროვნების დონის ამაღლება.
- სათანადოდ შერჩეული მათემატიკური ლიტერატურის განხილვით (სახალისო ამოცანები, სოფიზმები, მათემატიკური ვიქტორინები და სხვ.) ხელი შევუწყოთ, რომ მოსწავლეებში მათემატიკის შესწავლისადმი ინტერესის გაჩენას, მოვახდინოთ ზოგიერთი მოსწავლის გადაყვანა ჩვენს მიერ შერჩეული მეორე კატეგორიიდან პირველ კატეგორიაში.

- მოსწავლეებისათვის სასწავლო პროცესიდან თავისუფალ დროს მოვაწყოთ შეხვედრები, რომლებზეც მოსწავლეებს გავაცნობთ მათემატიკური ცოდნისიმ სიმდიდრეს, რომელიც კაცობრიობას დაუგროვებია უძველესი დროიდან დღემდე.

პირველი ამოცანის ამოხსნა დაკავშირებულია დაკმაყოფილდეს პირველი ჯგუფის მოსწავლეთა გამოწვევები და მოთხოვნები, დანარჩენი ორი ამოცანის ამოხსნისათვის უნდა დაკმაყოფილდეს დამატებითი პირობები, რომლებიც წარმოშობს გარანტიებს და გააღრმავებს დარჩენილი ორი ჯგუფის უმრავლესობის ინტერესს მათემატიკის შესწავ–ლისადმი.

საკამათო არ არის, რომ კლასგარეშე მუშაობის მეორე და მესამე ამოცანების ამოხსნა ნაკლებად წარმატებულად ხდება, ვიდრე პირველი ამოცანის, რადგან კლასგარეშე მუშაობის ძირითადი ფორმები, რომლებსაც სისტემატიური ხასიათი აქვს გარსშე–მორტყმულია მხოლოდ მათემატიკის შესწავლის მოყვარულებით. დანარჩენ მოსწავლე–ებზე ყველაზე ხშირად მოდის მათემატიკის მოყვარული მოსწავლეების ირიბი ზემოქმე–დება, ასევე ეპიზოდურად ჩატარებული ღონისძიებები (მათემატიკური საღამოების, კონკურსების, ვიქტორინების და სხვ.), რომელთა ორგანიზებაც სასწავლო წლის განმავლობაში ხდება 1–2–ჯერ და მათ არ აქვთ იმდენი ზემოქმედების ძალა, რომ გავლენა მოახდინოს მეორე და მესამე ჯგუფის მოსწავლეებზე.

არ ვეთანხმებით არსებულ ტენდენციას იმის შესახებ, რომ კლასგარეშე მუშაობა მათემატიკაში უნდა წარიმართოს მხოლოდ იმ მოსწავლეებთან, რომლებიც წარმატე–ბულად სწავლობენ მათემატიკას და მათ გამოავლინეს მათემატიკის შესწავლისადმი განსაკუთრებული დაინტერესება. კლასგარეშე მუშაობაში სისტემატურად უნდა ჩავრთოთ კლასის მოსწავლეთა უმრავლესობა. კლასგარეშე მუშაობაში უნდა ჩავრთოთ არა მარტო ის მოსწავლეები, რომლებსაც უყვართ და წარმატებით სწავლობენ მათემატიკას (ისინი კლასგარეშე მუშაობაში აუცილებლად უნდა იქნენ ჩართული), არამედ ის მოსწავლეებიც, რომლებიც ჯერ კიდევ არ ავლენენ მათემატი-კისადმი აშკარა

მიზიდულობას, ჯერ კიდევ არ გამოუვლენიათ მათემატიკის შესწავლი-სადმი თავიანთი მისწრაფებები და შესაძლებლობები.

ასეთი მიდგომის განხორციელება უნდა მოხდეს II-III კლასიდან. ამ ასაკში ხდება მოზარდების ინტერესების ფორმირება სასწავლო საგნების მიმართ, უმრავლეს შემთხვე–ვაში, ამ ასაკში მოსწავლეებში ფორმირებული აზრები სასწავლო საგნების მიმართ საბოლოოა და აღარ იცვლება. ამ პერიოდში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი და საჭიროა ყველა მოსწავლეს ვაჩვენოთ მათემატიკის მიმზიდველი მხარეები, ამ მიზნისათვის მიზანშეწონილია მასწავლებელმა გამოიყენოს მის ხელთ არსებული ყველა შესაძლებლობა, საუბარი, დარწმუნება, ცხოვრებისეული მაგალითი, წარმატებული ბიზნესმენების და მეცნიერების ბიოგრაფიები, უნდა მოახდინოს მოსწავლეთა მშობლების ინფორმირება და დარწმუნება. მასწავლებელს დარწმუნებისათვის შეუძლია გამოიყენოს მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის თავისებურებებიც.

მართლაც, განათლების თანასწორობისა და ხელმისაწვდომობის პრინციპს ხომ არ ეწინააღმდეგება, რომ მხოლოდ ძლიერი მოსწავლეებისათვის არის ხელმისაწვდომი ელემენტარული მათემატიკის სხვადასხვა შინაარსის მასალები, მათემატიკის გამოყე–ნების და ისტორიის საინტერესო საკითხები, რომლებიც ცხადია სრულად ვერ აისახება სასკოლო პროგრამაში და რომლითაც ძალზედ მდიდარია მათემატიკა. რატომ უნდა იყოს ხელმისაწვდომი მხოლოდ ისეთი მოსწავლეებისათვის ვინც უკვე დაინტერე–სებულია მათემატიკის შესწავლით საინტერესო, განმავითარებელი ამოცანები–ამოცანები, რომლებიც მოითხოვენ სერიოზულ, ღრმა და სისტემურ აზროვნებას, რომლის ამოხსნის დაწყების შემდეგ ძნელია თავი დაანებო მის ამოხსნას და არ მიიყვანო ამოხსნის პროცესი ბოლომდე? ამ კითხვებზე პასუხი ცალსახად უარყოფითია, ცხადია არა, მაგრამ ასევე დიდ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული იმის მიღწევა, რომ აღსაზრდელთა უმრავლესობა განიცდიდეს და აღიქვამდეს მათემატიკის თვალწარმტაც მხარეებს, მათემატიკის როლს მოსწავლეთა გონებრივი შესაძლებლობების ფორმი–რებაში, იმას, რომ ადამიანებს უყვარდეთ ფიქრი, სიძნელეების გადალახვა და სხვ. რომლებიც მათემატიკის სწავლა/სწავლებასთან არის დაკავშირებული.

ცხადია, ეს ამოცანა გაცილებით ადვილი გადასაწყვეტია პირველი ჯგუფის მოსწავ–ლეების მიერ, რადგან მათ ინტერესს შეიძლება დავუკავშიროთ გადასაჭრელი საკითხის შინაარსი, რომელიც გამომდინარეობს მათემატიკის შემოქმედებითი ხასიათიდან. გაცილებით რთულია ამ ამოცანის გადაწყვეტა მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის, რომლებიც დარჩენილ ორ ჯგუფს ეკუთვნიან. მათ მათემატიკისადმი ინტერესი უყა–ლიბდება მისი სწავლების მეთოდიკიდან, იმისაგან, თუ რამდენად ფაქიზად და უნარიანად იქნება აგებული და წარმართული მათემატიკის სასწავლო პროცესი.

განმავითარებელი ამოცანების, მათემატიკური პარადოქსების, ფოკუსების, თავსა–ტეხების ამოხსნის, სოფიზმების გონებამახვილური გაშიფვრის სილამაზე უნდა განიცადოს ყველა მოსწავლემ. ზოგჯერ გართობითი ხასიათის მასალები შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს იმისათვის, რომ მოსწავლე დარწმუნდეს სასწავლო საგანი არ არის ზედმეტად მშრალი და უინტერესო, გააჩნია გამოყენებითი ფუნქციები. უნდა ვიზრუ-ნოთ იმისათვის, რომ ყველა მოსწავლემ იმუშაოს აქტიურად, გატაცებით და ეს გამოვიყენოთ როგორც საყრდენი წერტილი მოსწავლეებში მაძიებლობის უნარის ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში. აგრეთვე იმისათვის, რომ მოსწავლეებს აღეძრათ მათემატიკის შესწავლისადმი ცნობისმოყვარეობა და გაუჩნდეთ ღრმა შემეცნებითი ინტერესები.

კლასგარეშე მუშაობა დაფუძნებულია ნებაყოფილობით პრინციპზე, რომელიც სწორი ორგანიზაციის შემთხვევაში უნდა ემსახურებოდეს ზემოთ ჩამოყალიბებული ამოცანების გადაწყვეტას. ის უნდა გახდეს მთლიანი პედაგოგიური პროცესის განუყო-ფელი ნაწილი. საჭიროა მუდმივად აღვზარდოთ ბავშვებში სწავლისადმი მისწრაფების გრძნობა, დაჟინებით დაძლიოს წინააღმდეგობები და გამოხატოს ინტერესი კვლევის შემცველი საძიებო სამუშაოების მიმართ.

ყველაფერი ამისათვის კლასგარეშე მუშაობა იძლევა შემოქმედებითი მოღვაწეობის ფართო შესაძლებლობებს.

1.3.2. მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის შედარება საგაკვეთილო სასწავლო პროცესთან

კლასგარეშე მუშაობის საკლასო–საგაკვეთილი ფორმასთან შედარება ხასიათდება რიგი განსხვავებებით:

- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობა მთელი თავისი შინაარსით არარეგლამენ–ტირებულია სასწავლო პროგრამით;
- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობაზე შესასწავლი მასალა მოსწავლეებს მიე–წოდებათ მათი მათემატიკური ცოდნის და უნარების შესაბამისად;
- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობისათვის დავალებების შერჩევის დროს სასურველია და არააუცილებელი არსებობდეს მჭიდრო კავშირი საკლასო მეცადინეობაზე განხილულ მასალასთან, ხოლო კლასგარეშე მუშაობაზე მიცემული დავალებების ფორმა სავალდებულო არ არის ზუსტად ისეთივე იყოს, რაც საკლასო მეცადინეობაზე;
- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობები თავისი შინაარსით და ჩატარების ფორმით შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს. ასევე შეიძლება განსხვავდებოდეს მუშაობის დროის ხანგრძლივობითაც;
- საკლასო–საგაკვეთილო ფორმა მოითხოვს მოსწავლეთა მუდმივ კონტინ–გენტს, რომლებიც კლასში გაერთიანებული არიან ასაკობრივი ნიშნით. მათე–მატიკის კლასგარეშე მუშაობისათვის ერთ ჯგუფში ნებაყოფილობით არიან გაერთიანებული ერთი და იმავე სკოლის მხოლოდ ერთი კლასის ან სხვადა-სხვა კლასის მოსწავლეები;
- მათემატიკის კლასგარეშე სამუშაო ჯგუფის მოსწავლეთა შემადგენლობა სტაბილური არ არის და ნებისმიერი მეცადინეობის დროსაც კი შეიძლება შეიცვალოს, ჯგუფიდან გავიდეს რომელიმე წევრი/წევრები, ან დაემატოს სხვა წევრი/წევრები;

- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობა ხასიათდება ჩატარების ფორმებისა და სახეების მრავალფეროვნებით: ჯგუფური მუშაობა, წრეები, ვიქტორინები, ოლიმპიადები, მათემატიკური ექსკურსიები და სხვ.;
- მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის განსაკუთრებულობა ვლინდება განსახილავი თემების ფორმებსა და შინაარსში. კლასგარეშე მუშაობაზე მოსწავლეები შედარებით თავისუფლად გამოთქვამენ თავიანთ აზრებს, თამამად გამოხატავენ განცდებს, კლასგარეშე მუშაობაზე უფრო ხშირად გამოიყენება თამაშის ფორმები, მუშაობის ჩატარების დროს ხშირია შეჯიბრებითობა ჯგუფის წევრებს შორის;
- კლასგარეშე მუშაობაზე არ ხდება მოსწავლეთა შეფასება ნიშნით, რაც მის მონაწილეებს უფრო თამამებს და გამბედავებს ხდის და ხელს უწყობს თამამი აზრების (ზოგჯერ მცდარის) გამოთქმას, რასაც მონაწილეები პატივისცემით და ზოგჯერ კრიტიკითაც ხვდებიან.

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობას საკლასო–საგაკვეთილო სწავლებასთან აქვს საერთო თვისებებიც:

- როგორც ერთ, ისე მეორე შემთხვევაში სწავლების მეთოდოლოგიურ საფუძ–ველს წარმოადგენს დიდაქტიკის პრინციპები;
- ორივე სახის სამუშაოს დროს მოსწავლეთა სწავლება ემორჩილება ერთსა და იმავე დიდაქტიკურ პრინციპებს. კერძოდ: მეცნიერულობის, შეგნებულობის და მოსწავლეთა აქტიურობის, თვალსაჩინოების და ინდივიდუალური მიდ–გომის პრინციპებს:
- ორივე სახის სამუშაო წარმოადგენს ერთი და იმავე სასწავლო–სააღმზრდე-ლო პროცესის ნაწილებს, რომლებიც გავლენას ახდენენ საზოგადოების მომავალი სრულუფლებიანი წევრის მორალურ აღზრდაზე, ეხმარება მათ მათემატიკური ცოდნის მიღებაში და უყალიბებს შესაბამის უნარ–ჩვევებს, უღვივებს მათემატიკის სიყვარულს.

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის მნიშვნელობა შემდეგში მდგომარეობს:

1. მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის სხვადასხვა სახე და მათი ერთობლიობები გავლენას ახდენს მოსწავლეთა შემეცნებით აქტიურობებზე: აღქმაზე, წარმოდგე–ნაზე, ყურადღებაზე, მეხსიერებაზე, აზროვნებაზე, მეტყველებაზე, ფანტაზიაზე და სხვ.არც ერთი აღმზრდელს არ უნდა დაავიწყდეს, რომ მისი უმთავრეს მოვალეობას შეადგენს აღსაზრდელებს ასწავლოს გონებრივი შრომა და ეს მოვალეობა ბევრად მნიშვნელოვანია, ვიდრე თვითონ საგნის სწავლება.
2. კლასგარეშე მუშაობა ეხმარება მოსწავლეებს შემოქმედებითი უნარების განვითა–რებაში, რომლის ელემენტები ვლინდება:
    - ამოცანების ყველაზე უფრო რაციონალური გზით ამოხსნის შერჩევის პროცესში;
    - მათემატიკურ ან ლოგიკურ საზრიანობაში;
    - შესაბამისი თამაშების ჩატარების დროს;
    - სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურების კონსტრუირების დროს;
    - თავისი ამხანაგებისაგან ისეთი ჯგუფის ორგანიზება, რომ მათ შეძლონ რიამე სამუშაოს მაქსიმალური ეფექტურობით შესრულება, ან ჩაატარონ რაიმე შემეცნებითი თამაში და ა.შ.
3. კლასგარეშე მუშაობის ზოგიერთი სახე მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს სიღრმისეულად აღიქვან მათემატიკის როლი რეალურ ცხოვრებაში:
    - ქარხნებში, ფაბრიკებში ან საწარმოებში ექსკურსიებზე რიცხვითი მონაცე-მების შეგროვების დროს;
    - შეგროვებული რიცხვითი მონაცემებით ამოცანების შედგენის დროს;
    - გარე სამყაროში მიმდინარე სხვადასხვა პროცესების დროს მოცემული ნაკვეთების ფართობების ცვლილების დროს დასხვ.
4. მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობა მოსწავლეებში ავითარებს სხვადასხვა ასაკის ადამიანებთან ურთიერთობის ფორმებს (ფლაერებზე ერთობლივი მუშაობისას, წრის გაზეთის გამოშვებისას, კლასგარეშე მეცადინეობებზე ჯგუფური შეჯიბრე-ბების ორგანიზებისას, საჭირო მასალების შეგროვებისას და სხვ.);

5. კლასგარეშე მუშაობის ზოგიერთი სახე მოსწავლეებში ავითარებს სამართლია–ნობის, ღირსების და პასუხისმგებლობის გრძნობებს და მათგან გამომდინარე კმაყოფილების ან უკმაყოფილების, სიხარულის და მწუხარების, სიამაყის და დამწუხრების და სხვ. გრძნობებს. მოსწავლეები თავიანთ მოქმედებებში ჩვეულებ–რივ ხელმძღვანელობენ არა ლოგიკური განსჯებით, არამედ გრძნობე–ბით. ამიტომ კლასგარეშე მუშაობისას ყურადღება უნდა გამახვილდეს ასეთი გრძნობების აღზრდაზე, რომელთაგან ბევრი დაკავშირებულია მოსწავლის გონებრივ მოქმე–დებებთან, რომლებსაც ხშირად ფსიქოლოგები ინტელექტუა–ლურ გრძნობებსაც უწოდებენ.
6. კლასგარეშე მუშაობის მთავარი არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ის ეხმარება მოსწავლეებში მათემატიკის შესწავლის ინტერესის გაძლიერებას და აძლიერებს მოსწავლეთა მათემატიკურ შესაძლებლობებს.

1.3.3. მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის ფორმები

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის ფორმებია:

1. მათემატიკის სხვადასხვა ასაკობრივი საგნობრივი წრეები: (დაწყებით კლასებში II-III კლასები, ან III-IV კლასები, ან V-VI კლასები; საბაზო სკოლა VII-IX კლა–სები; საშუალო სკოლა X-XII კლასები. შესაძლებელია იყოს სხვა დაჯგუფებებიც კლასების მიხედვით);
2. მათემატიკური შეჯიბრებები, ვიქტორინები, კონკურსები, საზრიანთა და გონებამახვილთა კლუბების შეჯიბრება;
3. მათემატიკის თემატური საათი (საუბრები, ლექციები);
4. მათემატიკური დილა–საღამოები;
5. მათემატიკური წარმოდგენები;
6. მათემატიკური ოლიმპიადები;
7. მათემატიკის ფაკულტატიური კურსები;

8. მათემატიკური ექსკურსიები;
9. მათემატიკური კვირეული (დეკადა);
10. ბეჭდური (ხელნაწერი) მათემატიკური გაზეთები (მათემატიკის საგნობრივი წრის გაზეთები);
11. მათემატიკური შინაარსის მქონე მხატვრული, სამეცნიერო–პოპულარული ლი–ტერატურის კლასგარეშე კითხვა;
12. მათემატიკური რეფერატები და თხზულებები;
13. სასკოლო სამეცნიერო მათემატიკური კონფერენციები;
14. მათემატიკური მოდელების კონსტრუირება და დამზადება.

მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის ჩატარება და მეცადინეობებზე განხილული მაგალითები უნდა აკმაყოფილებდნენ გარკვეულ მოთხოვნებს, კერძოდ:

- უნდა იყოს მრავალფეროვანი;
- შერჩეული უნდა იყოს მოსწავლეთა ასაკობრივი და ფსიქო–ფიზიოლოგიური თავისებურებების გათვალისწინებით;
- გათვლილი უნდა იყოს მოსწავლეთა სხვადასხვა კატეგორიაზე: მათთვის, ვინც დაჯილდოებულია მათემატიკური ნიჭით და ამავე დროს აინტერესებს მათემატიკა და იმ მოსწავლეებისთვის, რომლებსაც ჯერ არ გამოუჩენიათ რაიმე განსაკუთრებული ინტერესი მათემატიკის შესასწავლად;
- კლასგარეშე მუშაობა დიდად უნდა განსხვავდებოდეს გაკვეთილის ჩატარე–ბის ფორმისაგან და სხვა სავალდებულო ღონისძიებისაგან: კლასგარეშე მუშაობა აგებულია ნებაყოფილობით პრინციპზე, მეცადინეობები ტარდება ან გაკვეთილების შემდეგ, ან საღამო საათებში, როცა მოსწავლეებს შესრულებული აქვთ საშინაო დავალება, ე.ი. მრავალსაათიანი გონებრივი შრომის შემდეგ.

ეს აუცილებელი მოთხოვნები ზოგჯერ არ სრულდება და მას სათანადო ყურადღე–ბას არ აქცევენ. კვლევებით დასტურდება, რომ საწრეო მუშაობის, მათემატიკური საღამოების, როგორც უმცროსკლასელთა, ისე უფროსკლასელთა მათემატიკური

შეჯიბრებების ჩატარების ფორმები ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავდებიან. უფრო მეტიც, V-VII კლასების მათემატიკის საგნობრივი წრეების მუშაობა ფორმით თითქმის არ განსხვავდება გაკვეთილისაგან. კლასგარეშე მუშაობის დროს გაკვეთილისაგან განსხვავებით მასში შეტანილია ზოგიერთი ახალი თეორიული საკითხი, ყურადღება გადატანილია ისტორიული მასალის განხილვაზე, განმავითარებელი და ამაღლებული სირთულის მქონე ამოცანების ამოხსნაზე, მცირედროიან მათემატიკურ თამაშებზე, სოფიზმებზე, თავსატეხებზე და სხვა მათემატიკურ გასართობებზე.

ჩვენი დაკვირვებებით, არც მათემატიკური საღამოების ორგანიზებაა დაზღვეული ხარვეზებისაგან. მათემატიკური საღამოებზე ვხვდებით ფასადურობას და მრავალ–სიტყვაობას. ასეთ საღამოებზე მოსწავლეები ბევრს ისმენენ, მაგრამ ცოტას აკეთებენ.

ძირითადი წესების დარღვევას მივყავართ იმ სავალალო შედეგამდე, რომ სკო–ლებში მათემატიკის საგნობრივი წრეები ხშირად იშლება. მათემატიკური კონკურსები, მათემატიკური დილა–საღამოები მეტად მცირერიცხოვანია და ერთი შეხედვითაც ჩანს, რომ ტარდება იმიტომ, რომ უნდა ჩატარდეს, მასში მოსწავლეები ნაკლებად აქტიურობენ. ამიტომ, მიგვაჩნია, რომ კლასგარეშე მუშაობის ორგანიზაციის დროს არსებითია არა მარტო სერიოზულად დავფიქრდეთ მათ შინაარსზე, არამედ სავალდე–ბულოდ მიგვაჩნია, მათი ჩატარების ფორმის, განსაკუთრებით კი მეთოდიკის ცოდნა. კლასგარეშე მეცადინეობაზე გამოყენებული უნდა იქნეს ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნის მეთოდები საინტერესო იქნება და დააკმაყოფილებს მეცადინეობაზე დამსწრე ყველა მოსწავლის ინტერესებს და მოთხოვნებს.

კლასგარეშე მუშაობა წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ მოსწავლეთათვის მათე–მატიკის სასწავლო პროგრამით გათვალისწინებული გაკვეთილზე მიღებული ცოდნის გაღრმავებისათვის. აქ ვგულისხმობთ ისეთ ცოდნას, რომელიც მოსწავლეებში აყალიბებს ლოგიკურ აზროვნებას, სივრცით წარმოდგენებს, კვლევის უნარ–ჩვევებს, საზრიანობას, სწორ ზეპირ და წერით მათემატიკურ მეტყველებას, მოსწავლეებში წარმოშობს მათე–მატიკური ლიტერატურის კითხვის სურვილს, უღვივებს მათემატიკის ისტორიის საკითხებისადმი სიყვარულს.

საჭიროდ მიგვაჩნია აღვნიშნოთ, რომ სკოლაში განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს კლასგარეშე მუშაობას მათემატიკაში, რადგან მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობა ბევრი მოსწავლისათვის არც თუ ისე იშვიათად წარმოადგენს მათემატიკის გაღრმავე–ბული შესწავლის პირველ ეტაპს, რომელიც შემდგომში განაპირობებს მოსწავლეების ჩართვას მათემატიკის ფაკულტატიურ კურსში ან მოსწავლეთა ჩარიცხვას მათემატიკურ კლასში, შემდგომში უნივერსიტეტში მათემატიკის სპეციალობაზე შესვლას და სხვ.

დისერტაციის სპეციფიკიდან გამომდინარე ჩვენ განვიხილავთ ხოლოდ მათემა–ტიკის ფაკულტატიურ მეცადინეობებს და მათემატიკის საგნობრივ წრეებს. ასევე შევე–ხებით მათი ჩატარების მეთოდკურ თავისებურებებს, საორგანიზაციო და მეთოდურ საკითხებს.

1.3.4. ფაკულტატიური მეცადინეობები მათემატიკაში და მისი ჩატარების მეთოდიკა

მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობის მთავარ მიზანს წარმოადგენს საგანში მიღებული ცოდნის გაღრმავება და გაფართოება,მოსწავლეთა საგნის მიმართ ინტერესის განვითარება, მათემატიკური უნარ–ჩვევების ფორმირება, მოსწავლეთა მათემატიკის დამოუკიდებელი მეცადინეობების თემატიკისადმი გემოვნების ჩამოყალიბება, მათი ინიციატივების და შემოქმედების განვითარება, გონებრივი აღზრდადა სხვ.

მათემატიკის ძირითადი კურსი ფაკულტატიურ კურსთან ერთად წარმოადგენს მოცემული კლასისათვის მათემატიკის გაძლიერებული შესწავლის კურსს.

მათემატიკის ფაკულტატიური კურსი ისეა შედგენილი, რომ ყველა კითხვა, რომე–ლიც დაისმება ფაკულტატიური კურსის შესწავლის დროს სინქრონულად შეისწავლე–ბოდეს სასკოლო მათემატიკის ძირითად კურსში. იმ შემთხვევაში, როცა მათემატიკის ძირითად საკლასო მეცადინეობას უძღვება ერთი მასწავლებელი, ხოლო ფაკულტატიურ კურსს–მეორე მასწავლებელი, მაშინ ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე განიხილული თემები დამოუკიდებელია მათემატიკის საპროგრამო ძირითადი კურსის თემატიკისაგან

(ამ შემთხვევაში შესასწავლი თემები შესაძლოა ჩატარდეს რამდენადმე დაგვიანებით მათემატიკის ძირითად კურსთან შედარებით). უნდა შევნიშნოთ, რომ დაუშვებელია ფაკულტატიურ კურსში განხილული თემების შესწავლა წინ უსწრებდეს ანალოგიური თემატიკის შესწავლას ძირითად სკოლაში.

იმისათვის, რომ მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობები იყოს ეფექტური, აუცილებელია მათი ორგანიზება მოხდეს იქ სადაც არის:

1. მაღალკვალიფიციური მასწავლებლები ან სხვა სპეციალისტები, რომლებსაც შეუძლიათ მეცადინეობების ჩატარება მაღალ სამეცნიერო–მეთოდურ დონეზე;
2. არანაკლებ 15 მოსწავლე, რომლებსაც აქვთ სურვილი ისწავლონ მოცემული ფაკულტატიური კურსი.

თუ სკოლაში არის მცირეკომპლექტიანი კლასები, (ასეთი კლასები დამახასია–თებელია ძირითადად კერძო სკოლებისათვის), მაშინ ფაკულტატიური მეცადინე–ობისათვის ჯგუფების შედგენა შესაძლებელია პარალელური კლასებისაგან, ან სხვადა–სხვა კლასების მოსწავლეებისაგან, მაგალითად, მე–8 და მე–9 კლასებისაგან, მე–10 და მე–11 კლასებისაგან და ა.შ.

მოსწავლეთა ჩაწერა ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე ხდება ნებაყოფილობით, მათი ინტერესების შესაბამისად. მიუღებელია მოსწავლეებს დავაძალოთ, რომ აუცილებლად შეისწავლონ ფაკულტატიური საგნები. განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დავუთმოთ იმ მოსწავლეებს, რომლებსაც სირთულეები აქვთ მათემატიკის შესწავლის დროს ან სკოლაში სწავლის პარალელურად დაკავებული არიან სხვა სახის მეცადინეობებით (სპორტი, მუსიკა, ხატვა, ხელოვნების დარგები და სხვ.). მოსწავლეები ფაკულტატიური კურსის დასრულების შემდეგ აბარებენ ჩათვლას (შეფასებით), რომელიც გავლენას არ ახდენს მოსწავლის საერთო შეფასებაზე. მათემატიკის მასწავლებელს აკისრია სრული პასუხიმგებლობა ფაკულტატიური მეცადინეობის ჩატარების ხარისხზე. რადგან დღეისათვის ფაკულტატიური კურსები შემოღებულია კერძო სკოლებშიც, ამიტომ ასეთ სკოლებში ფაკულტატიური მეცადინეობების ანაზღაურების საკითხი კონფიდენციალუ-რია და ხორციელდება კერძო სკოლასა და მათემატიკის მასწავლებელს შორის გაფორმე-

ბული ხელშეკრულების საფუძველზე, ხოლო საჯარო სკოლებში ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე ჩატარებული საათები ანაზღაურდება მასწავლებლის ჩვეულებრივი დატვირთვის შესაბამისად ერთი მეცადინეობა-ერთი აკადემიური საათი..

მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობების ჩატარება არ ნიშნავს, რომ უარი თქვას სკოლამ სხვა კლასგარეშე მუშაობაზე (მათემატიკის საგნობრივი წრეები, მათემა-ტიკური დილა–საღამოები, ვიქტორინები და სხვ.) მათ უნდა შეავსონ მათემატიკით დაინტერესებულ მოსწავლეებთან მუშაობის ფორმები. მათემატიკის მასწავლებლებმა უნდა დახვეწონ და სრულყონ იმ მოსწავლეებთან მუშაობის ფორმები და მეთოდები, რომლებიც ავლენენ მათემატიკის მიმართ გაძლიერებულ ინტერესს.

კვირაში 1 ან 2 საათის დამატებითი მუშაობა იმ მოსწავლეებთან, რომლებიც დაინტერესებული არიან მათემატიკის შესწავლით და დაჯილდოებული არიან მათემატიკური ნიჭით, წარმოადგენს მათემატიკის დიფერენცირებული სწავლების ერთ–ერთ სახეს.

რა ფორმით და როგორი მეთოდების გამოყენებითაც არ უნდა ტარდებოდეს ფაკულტატიური მეცადინეობები მათემატიკაში, მათი აგება უნდა მოხდეს ისე, რომ საინტერესო და მიმზიდველი იყოს მოსწავლეებისათვის და ჰქონდეს განმავითარებელი ფუნქცია.

თანამედროვე პირობებში მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობების ჩატარე–ბის ძირითადი ფორმებია ლექციური მეთოდი, სემინარები, საუბრები, დისკუსია, ამოცა–ნების ამოხსნა, მოსწავლეთა რეფერატები, რომლების შეიძლება ეხებოდეს როგორც მათემატიკის თეორიულ საკითხებს, ისე ამოცანათა ციკლების ამოხსნას, მათემატიკური თხზულებები, მოსწავლეთა სამეცნიერო მოხსენებები და სხვ. ფაკულტატიური მეცა–დინეობის ჩატარების ფორმის და მეთოდის მიუხედავად მისი მიზანი უცვლელია, ის ემსახურება მათემატიკის არჩეული ფაკულტატიური კურსის საკვანძო საკითხების გადაცემას და მის სწავლებას.

გასათვალისწინებელია ის, რომ მასწავლებელმა უპირატესობა არ უნდა მინიჭოს საკითხის ახსნის (გადაცემის) რომელიმე ფორმას ან მეთოდს. ამასთან მუდმივად უნდა

გვახსოვდეს, რომ მათემატიკის ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე უპირატობა უნდა მივანიჭოთ მოსწავლეტთა დამოუკიდებელ მუშაობას, რისთვისაც ხშირად უნდა ჩავრთოთ ფაკულტატიურ მეცადინეობის თემატიკაში ამოცანების ამოხსნა, რეფერა-ტების და მოხსენებათა პრეზენტაციები, სემინარები და დისკუსიები, მათემატიკის სასწავლო და სამეცნიერო–პოპულარული ლიტერატურის კითხვა და სხვ.

მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობის ჩატარების ერთ შესაძლო ფორმად შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს მეცადინეობის გაყოფა ორ ნაწილად. პირველ ნაწილი ეთმობა ახალი მასალის გაცნობას და მოსწავლეთა დამოუკიდებელ მუშაობას, რომელიც ეხება თეორიული ან/და პრაქტიკული ხასიათის საკითხებს. ამ ნაწილის დასრულების შემდეგ მოსწავლეებს ეძლევათ საშინაო დავალებად თეორიული მასალის შესწავლა და მისი პრაქტიკული გამოყენებები.

ყოველი მეცადინეობის მეორე განყოფილება ეთმობა ამაღლებული სირთულის მქონე ამოცანების ამოხსნას და განსაკუთრებით რთული და საინტერესო ამოცანების ამოხსნების გარჩევას. ფაკულტატიური მეცადინეობის ჩატარების ეს ფორმა წარმატებით შეიძლება გამოყენებული იქნეს სკოლაში სწავლების ფორმებიდან და მეთოდებიდან უმაღლეს სასწავლებელში სწავლების ფორმებზე და მეთოდებზე გადასვლისათვის.

ბუნებრივია, რომ ფაკულტატიური მეცადინეობის ჩატარების დროს ძირითადად გამოიყენება მათემატიკის სწავლის მეთოდები და ხშირად მიზანშეწონილია სწავლების პრობლემური მეთოდის გამოყენება. კერძოდ, პრობლემური მეთოდი შეიძლება გამოვი-ყენოთ, მაშინ, როვა ფაკულტატიური კურსი შედგება თანმიმდევრობით დალაგებული ამოცანების სერიისაგან. მაგალითად, თუ მოცემული გვაქვს პირობა: ამოხსენით თანმიმდევრობით ყველა ამოცანა დამოუკიდებლად და ა.შ.

ფაკულტატიური კურსების მეცადინეობებზე თეორემები მოსწავლეებს უნდა შევთავაზოთ ამოცანების სახით. თუ მოსწავლეების მიერ დასამტკიცებელი თეორემა მოცულობით დიდია, ან რთული, მაშინ ის უნდა დავყოთ რამდენიმე ამოცანად ისე, რომ წინა ამოცანის ამოხსნა ემსახურებოდეს მომდევნო ამოცანის ამოხსნას. განსაზღვრებებს, რომლებიც მოსწავლეებს ამოცანის ამოხსნაში ეხმარება, ან ჩართულია მასწავლებლის

მიერ ამოცანის ტექსტში, ან საგანგებოდ აცხადებს. საჭიროების შემთხვევაში მასწავლე-ბელი ამოცანის ამოხსნის დაწყებამდე წინასწარ ატარებს საჭირო საუბარს. ფურცლებზე დაბეჭდილ დავალებებს ყოველ მეცადინეობაზე მასწავლებელი ინდივიდუალურად ურიგებს მოსწავლეებს.

სასარგებლოა აგრეთვე პრობლემური ხასიათის ამოცანების გამოყენება.

მათემატიკის ფაკულტატიური მეცადინეობები ძირითადად ორი მიმართულებით ტარდება:

ა) კურსების შესწავლა პროგრამით ,,მათემატიკის დამატებითი თავები და საკითხები“;

ბ) მათემატიკის სპეციალური კურსების შესწავლა.

პროგრამის ,,მათემატიკის დამატებითი თავები და საკითხები“ შინაარსი მათე–მატიკის სისტემატიურ სასკოლო კურსის შინაარს უმატებს ახალ საკითხებს და აფარ–თოებს და აღრმავებს საპროგრამო მასალას, აცნობს მოსწავლეებს თანამედროვე მათემა–ტიკის ზოგად იდეებს, ასწავლის მათემატიკის პრაქტიკულ გამოყენებებს და სხვ.

განსაკუთრებული ფაკულტატიური მეცადინეობის შესწავლის თემებად შესაძლე–ბელია შევარჩიოთ:

ა) არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა;

ბ) კომბინატორიკისა და ალბათობის თეორიების ელემენტების გამოყენება მათე-მატიკური ამოცანების ამოხსნის დროს;

გ) არასტანდარტული პლანიმეტრიული ამოცანების ამოხსნა;

დ) ტოლდიდობა და ტოლშედგენილობა გეომეტრიაში:

ე) არასტანდარტული სტერეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა;

ვ) პროგრამირების ელემენტები;

ზ) მოსწავლეთა მიერ შერჩეული ელემენტარული მათემატიკის აქტუალური საკით-ხების შესახებ ინდივიდუალური შემოქმედებითი ნაშრომები და სხვ.

ფაკულტატიური მუშაობის ჩასატარებლად არასტანდარტული ამოცანების შერჩევა უნდა მოვახდინოთ ჯგუფის სიძლიერიდან გამომდინარე საოლიმპიადო ამოცანების

ჩართვით, რისთვისაც მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ამოცანები სხვადასხვა თემატიკის მიხედვით ამოცანათა კრებულებიდან და სხვადასხვა დონის სასკოლო ოლიმპიადები–დან [46], [48], [50], [51] [52], [66], [69], [75], [82], [92], [93], [94], [95], [96], [97] და სხვ. ასევე შესაძლებელია ჩავრთოთ მათემატიკის საგნობრივი წრის მუშაობისათვის განკუთვნილი ამოცანები [45], [47], [54], [60], [61], 63], [64], [65], [72], [87], [89] და სხვ. კარგ შედეგს იძლევა ინტერნეტსაიტებიდან ამოცანების მოძიება და გამოყენება [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116], [117], [118], [11], [120], [121], [122], [123], [124], [125] და სხვ.

მთავარია, რომ მათემატიკის ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე აკადემიურად ჩამორ–ჩენილი მოსწავლეები დავარწმუნოთ, რომ მათ შეუძლიათ შეთავაზებული ამოცანების ამოხსნა. თუნდაც დასაწყისში ამისათვის საჭირო იქნეს მოსწავლეს დაეხმაროს მასწავ–ლებელი, შემდგომში ეს დახმარება თანდათან უნდა შესუსტდეს და ბოლოს მოსწავ–ლეებმა დამოუკიდებლად უნდა შეძლონ შეთავაზებული ამოცანების ამოხსნა.

1.3.5.მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობა და მისი ჩატარების მეთოდიკური თავისებურებები

ჩვენ მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობისათვის ვიყენებთ პრაქტიკაში აპრობირებულ მეთოდს, რომელიც უკავშირდება მოსწავლეებისათვის დავალებად მისაცემი ამოცანების მიწოდებას ფურცლებზე დაბეჭდილი სახით. ამასთან, ფურცელზე დაბეჭდილია მხოლოდ ერთი მეცადინეობისათვის განკუთვნილი ამოცანები. ფურცელ-ზე ნაბეჭდი ამოცანების რაოდენობა უნდა იყოს 8-10 და ისე უნდა იყოს შერჩეული, რომ მოსწავლეებმა მოასწრონ მათი ამოხსნა ერთ მეცადინეობაზე. მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობა არ უნდა გაგრძელდეს ორ აკადემიურ საათზე მეტი დროის განმავლობაში, რადგან ამ დროის გასვლის შემდეგ მოსწავლეებს ეტყობათ გადაღლა და მათი დაინტერესება იკლებს, ბუნებრივია, თუ კვლავ გავაგრძელებთ მეცადინეობას, ის ნაკლებად ეფექტური იქნება.

მათემატიკის საგნობრივი წრის პირველ ორ მეცადინეობაზე წრის ხელმძღვანელმა უნდა დაადგინოს მოსწავლეთა საერთო მომზადების დონე მათემატიკაში და აგრეთვე მათი მზაობა ცალკეული თემების მიხედვით. ამისათვის მიზანშეწონილია მასწავლე-ბელმა მათემატიკის საგნობრივი წრის დასაწყისში ე.წ. ,,ნულოვან“ მეცადინეობებზე უნდა ჩაატაროს წერითი მუშაობა, რომელშიც შეტანილი იქნება ამოცანები სხვადასხვა თემატიკებიდან და ნაშრომების გასწორების შემდეგ უნდა შეადგინოს სტატისტიკური მონაცემები, რომელშიც ასახული იქნება არა მარტო ყველა მოსწავლის მიერ თემების მიხედვით მიღებული შედეგები, არამედ თითოეული მოსწავლის მიერ ამოცანების ამოხსნის შედეგად მიღებული შედეგები. სტატისტიკური მონაცემების დამუშავების შემდეგ მასწავლებელს ნათელი წარმოდგენა ექმნება მათემატიკის საგნობრივი წრის წევრთა მათემატიკაში საერთო მომზადების დონეზეც და თემების მიხედვით მათი ცოდნის დონის შესახებ. რაც შემდგომში მასწავლებელს დაეხმარება მეცადინეობაზე განსახილავი ამოცანების და კონკრეტული თემების შერჩევაში.

პირველ მეცადინეობაზე მოსწავლეებს დაურიგდებათ გასწორებული ნაშრომები. მასწავლებელმა უნდა მოახდინოს ტიპიური შეცდომების ანალიზი და გაარჩიოს ის დაფასთან, რომელშიც აქტიურად ჩართავს მოსწავლეებს. ამის შემდეგ მასწავლებელი მეცადინეობას წარმართავს ჩვეულებრივი სქემით, რომლის მეთოდური აღწერა მოყვანილი გვაქვს ქვემოთ. მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობის დასაწყისში მასწავლებელი ხსნის ახალ თემას, რომელი თემიდანაც აღებული ამოცანები შემდგომ ნაბეჭდი ფურცლის სახით დავალებად მიეცემათ მოსწავლეებს. თემების გადაცემისას მათემატიკის საგნობრივი წრის მასწავლებელმა უნდა დაიცვას გარკვეული მეთოდური მიდგომები. კერძოდ:

- თუ მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე გადასაცემი თემა მათემა-ტიკის სასკოლო პროგრამასთან ახლოს დგას და არ საჭიროებს რაიმე დამატე-ბით ცოდნას, მიზანშეწონილია, მასწავლებელმა მოსწავლეებს მაინც შეახსე-ნონ თემის ირგვლივ აუცილებელი განმარტებები და ისეთი საჭირო ფაქტები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება ამოცანების ამოხსნაში;

- მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობის დასაწყისში მოსწავლეებს არა მარტო უნდა გავაცნოთ თეორიული მასალა თემის ირგვლივ, არამედ მასწავლებელმა უნდა მოახდინოს ორი-სამი საშუალო სირთულის მქონე ამოცანის ამოხსნა. ეს ამოცანები მასწავლებელმა უნდა შეარჩიოს ისე, რომ მოახდინოს ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდის ან/და ამოხსნის ახალი გზის დემონსტრირება;
- მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობისათვის ზოგიერთი ნაბეჭდი ფურცელი შეიძლება შეიცავდეს რომელიმე კონკრეტული თემატიკიდან თეორემების ფორმულირებასაც. მიზანშეწონილია ამ თეორემების პრაქტი-კული გამოყენებები ამოცანების ამოხსნის დროს ნაჩვენები იქნეს მეცადინეო-ბის დასაწყისში. ამ თეორემების დამტკიცება მეცადინეობის დასაწყისში სავა-ლდებულო არ არის, უფრო მეტიც, ზოგჯერ საზიანოც კია, რადგან ხშირად მტკიცების პროცესს მიაქვს მეცადინეობისათვის განკუთვნილი დროის უმეტესი ნაწილი. ნაბეჭდ ფურცლებზე მოთავსებული თეორემებიდან ზოგიერთის დამტკიცება ხდება მათემატიკის სასკოლო კურსში. ზოგიერთი თეორემის დამტკიცება განიხილება როგორც კონკრეტული ამოცანა. ზოგჯერ ასეთი ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ამოიხსნას ამ ამოცანის წინ მდგომი რამდენიმე ამოცანა, ამიტომ ასეთი ამოცანები რიგითობის თვალსაზრისით ფურცლის ბოლო ამოცანებად გვხვდება ხოლმე. მიზანშეწონილად ვთვლით, რომ პირველ რიგში უმჯობესია არა თეორემის დამტკიცების დეტალებში გაცნობიერება, არამედ ამ თეორემის გამოყენება ამოცანების ამოხსნის პროცესში.

მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობა ნაბეჭდი ფურცლების გამოყენებით მიმდინარეობს შემდეგი მეთოდური სქემის გამოყენებით:

- მეცადინეობის დაწყებამდე აუცილებელია წრის ხელმძღვანელმა ამოხსნას და დაწეროს ფურცლებზე დაბეჭდილი ყველა ამოცანა, რის შემდეგ კიდევ ერთხელ

გულდასმით წაიკითხოს და კრიტიკულად შეაფასოს თავისივე ამოხსნები (ხომ არ არსებობს ამოხსნის სხვა უკეთესი გზა ან/და მეთოდი);

- მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობის დაწყების შემდეგ მოსწავლეებს ინდივიდუალურად დაურიგდებათ ნაბეჭდი ფურცლები და მოსწავლეები დამოუკიდებლად დაიწყებენ დავალებად მიცემული ამოცანების ამოხსნას. პირველ მეცადინეობაზე მოსწავლეებს წრის ხელმძღვანელი განუმარტავს, რომ დავალებად მიცემული ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია ნებისმიერი თანმიმდევრობით. მას შემდეგ, რაც მოსწავლის აზრით ამოცანის ამოხსნა დამთავრებულია, მან უნდა ასწიოს ხელი, რაც ნიშნავს, რომ მოსწავლე მომზადებულია მის მიერ ამოხსნილი ამოცანა ზეპირად, მსჯელობით აუხსნას წრის ხელმძღვანელს. მათემატიკის საგნობრივი წრის მასწავლებლები მაღალი კვალიფიკაციის არიან და მათ შეგნებული აქვთ რომ წრის მეცადინეობა არ არის წერითი მათემატიკური ოლიმპიადა, რაც მოსწავლეებსაც უნდა განვუმარტოთ, ეს კი მოსწავლეებს შეაჩვევს იმას, რომ მათ მიერ ამოცანების ამოხსნა არ უნდა იწყებოდეს თეორიული მასალის მოყოლით, რადგან წრის ხელმძღვანელის მიერ შედგენილი ამოცანები ნაბეჭდი ფურცლებზე ისე უნდა იყოს შედგენილი, რომ მოსწავლეები თვითონ დამოუკიდებლად მივიდნენ და გახსნან ფურცლზე მოცემული ამოცანების საკვანძო იდეები. ამასთან ზოგჯერ, როცა ამის აუცილებლობა წარმოიშვება (წრის წევრებს აქვთ დაუკმაყოფილებლობის გრძნობა რომელიმე ამოცანის ამოხსნის მიმართ, ან გვთავაზობენ ამოხსნის განხილული გზისგან განსხვავებულ გზას და სხვ.) საწრეო მეცადინეობაზე ფურცლების დარიგებამდე მეთოდურად უნდა გაირჩეს წინა მეცადინეობაზე განხილული ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა.
- საწრეო მუშაობის დროს მოსწავლეები ხსნიან დავალებად მიცემულ, ფურცლებზე დაწერილ ამოცანებს და ცდილობენ ,,ჩათვალონ“ ის წრის მასწავლებელთან. მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე მასწავლებელი შესაძლოა რამ–დენიმე იყოს. სასურველია, რომ თითოეულ მასწავლებელზე შვიდ მოსწავლეზე

მეტი არ მოდიოდეს, რადგან მასწავლებელმა მოასწროს თითოეულ მოსწავლეს–თან ინდივიდუალურად განიხილოს მათ მიერ ამოხსნილი ამოცანები.

- თუ მოსწავლის მიერ ამოცანა ამოხსნილია სწორად, მაშინ მიზანშეწონილია მივულოცოთ მოსწავლეს ამოცანის ამოხსნა, შევაქოთ და დავუსვათ ,,პლუსი" სპეციალურ ცხრილში;
- თუ მოსწავლის მიერ ამოცანა ამოხსნილია არასწორად, მაშინ სასურველია მოსწავლემ გააგრძელოს ამოცანის ამოხსნა. ზოგჯერ მიზანშეწონილია მასწავლე-ბელმა მისცეს მოსწავლეს მითითება.

მათემატიკის საგნობრივი წრის მთავარ დანიშნულებად მიგვაჩნია მოსწავლეების მიერ მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის სიხარულის განცდა და მის საფუძველზე მოსწავლეთა საზრიანობის განვითარება და მათი თვალთახედვის გაფართოება. ამიტომ ჩვენი პრაქტიკიდან გამომდინარე, კატეგორიულად წინააღმდეგი ვართ მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე:

- მოვახდინოთ შეფასებების და ნიშნების დასმა;
- ჩავატაროთ მათემატიკის საგნობრივი წრის მუშაობაზე საკონტროლო წერები;
- სავალდებულო გავხადოთ მოსწავლეთა გამოცხადება საწრეო მუშაობაზე;
- გარდა განსაკუთრებული შემთხვევებისა, ფურცლებზე დაბეჭდილ ყველა ამოცანაზე მითითებების მიცემა. მოსწავლე დიდ სიხარულს განიცდის და მისი დაინტერესება იზრდება მაშინ, როცა თვითონ დამოუკიდებლად ხსნის ამოცანას. სხვისი იდეით და მითითებით ამოხსნილი ამოცანა მოსწავლესსიხარულს ვერგანაცდევინებს;
- ჩვენ მიზანშეწონილად არ ვთვლით მათემატიკის საგნობრივი წრის წევრებს მეცადინეობებზე სავალდებულოდ მივცეთ საშინაო დავალებები.
- არ მიგვაჩნია მიზანშეწონილად მათემატიკის საგნობრივ წრეს დავუსახოთ მიზნად რომელიმე დონის სასკოლო ოლიმპიადისათვის ან სხვა სახის მათემა-ტიკური შეჯიბრებისათვის მომზადება, მიუხედავად იმისა, პრაქტიკით დასტურებულია, რომ მათემატიკის საგნობრივი წრის წევრები ჩვეულებრივი

სკოლის მოსწავლეებზე გაცილებით უკეთეს შედეგებს აღწევენ საგნობრივ ოლიმპიადებზე.

ჩვენიაზრით, თუმოსწავლეთაუმრავლესობამვერამოხსნესერთიდაიმავეამოცა-ნები, მაშინამამოცანებისგარჩევაუმჯობესიამოვახდინოთარაიმმეცადინეობაზე, რომელზეცის მოსწავლეებს დავალებად მივეცით, არამედ, მომდევნო მეცადინეობის დაწყებისას, რადგან მოსწავლეებს ექნებათ დრო სახლში კიდევ დაფიქრდნენ ამოცანაზე (ამ შემთხვევაში ამოცანაზე ფიქრი შესაძლებელია განხილული იქნას როგორც არასა-ვალდებულო საშინაო დავალება).

თუ მოსწავლეთა მცირე ნაწილმა ვერ შეძლო მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცა-დინეობაზე მიცემული რომელიმე კონკრეტული ამოცანის ამოხსნა, მაშინ მიზანშეწო-ნილად ვთვლით, რომ ამოცანის ამოხსნა ინდივიდუალურად იქნეს განხილული მოსწავ-ლესთან, ან მასწავლებლის მიერ გარჩეული იქნეს ეს ამოცანა დაფასთან იმ მოსწავ-ლეებთან, რომლებმაც ის სწორად ვერ ამოხსნეს.

ჩვენ ვთვლით, რომ თუ მათემატიკის საგნობრივი წრის წევრი მეცადინეობაზე დამოუკიდებლად ხსნის 2-3 ამოცანას და 1-2 ამოცანის ამოხსნის მცდელობა აქვს, მაშინ ეს კარგი შედეგია. ხანდახან ხდება, რომ წრის წევრისათვის მიცემული ამოცანები მათთვის საკმაოდ რთული აღმოჩნდება ხოლმე. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილი არ არის საწრეო მუშაობა გადავაქციოთ დაფასთან ამ ამოცანების გარჩევის გაკვეთილის მსგავს მეცადინეობად. ამის ნაცვლად წრის წევრებს უნდა მივცეთ მითითებები როგორც ინდივიდუალურად, ისე ჯგუფურად. თუ როგორი შინაარსის და მოცულობის უნდა იყოს საგნობრივი წრის მასწავლებლის ეს მეთოდური მითითებები, მასწავლებელი გადაწყვეტს თვითონ განსახილავი ამოცანების შინაარსის, სტრუქტურის და სირთულის მიხედვით, სადაც ის გაითვალისწინებს წრის წევრთა ასაკობრივ და გონებრივ შესაძლებლობებს.თუ საბოლოოდ, საგნობრივი წრის მეცადინეობაზე მასწავლებლის მიერ წრის წევრებისათვის ფურცლებზე დაბეჭდილი ამოცანები მაინც ძალზედ რთული აღმოჩნდა, მაშინ ჩვენი რეკომენდაციები ასეთია:

- შევადგინოთ თითოეული მეცადინეობისათვის ანალოგიური თემატიკის მქონე შედარებით მარტივი ამოცანები, რომლებსაც საჭიროების შემთხვევაში, სიტუაციიდან გამომდინარე გამოვიყენებთ უკიდურეს შემთხვევაში საწრეო მუშაობის ჩატარების დროს.

მათემატიკის საგნობრივი წრის მასწავლებლებმა წრის მეცადინეობაზე ამოცანების შერჩევისათვის უნდა იხელმძღვანელონ პირველ რიგში საკუთარი გემოვნებით და თავისი მოსწავლეების ასაკობრივი და გონებრივი შესაძლებლობებით, მუდამ უნდა ახსოვდეთ, რომ ამოცანების შინაარსი და ამოხსნის გზები და/ან ხერხები მოსაწონი უნდა იყოს პირველ რიგში მასწავლებლებისათვის და ამავე დროს უნდა იყოს საინტერესო და მოსწავლეთათვის ხელმისაწვდომი იყოს მათი ამოხსნა.

1.3.6. სასკოლო მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების შედგენის ორგანიზაცია და მეთოდოლოგია

მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანებს ადგენენ ადამიანები, რომელთაც სხვაგვარად ამოცანების კომპოზიტორებსაც უწოდებენ. საოლიმპიადო ამოცანების შედგენა საკმაოდ რთულია და მასში ჩართულია მათემატიკის საკმაოდ მაღალი ცოდნის დონის მქონე ადამიანები. საქმე იმაშია, რომ მათემატიკას აქვს თავისი ესთეტიკა, ეთიკა, ჰარმონია, მუსიკა, სილამაზე და ყოველივე ამის გათვალისწინება ხდება ამოცანის შედგენის დროს. როგორც წესი, მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანებს შედგენაში მონაწილეობენ ის ადამიანები, რომლებიც ადრე თვითონ აქტიურად და წარმატებულად მონაწილეობდნენ მათემატიკის ოლიმპიადებში და შეყვარებული არიან მათემატიკაზე. ფორმალურად კი ამას აკეთებს სპეციალური მეთოდური კომისია.

სამწუხაროდ, ბევრს მიაჩნია, რომ მათემატიკურ ოლიმპიადებში მონაწილეობა-ეს არის მოსწავლეების შემოწმება, თუ ვის უკეთესად შეუძლია ამა თუ იმ სახის მათემატიკური გამოთვლების ჩატარება. გავრცელებული წარმოდგენების საწინააღმდეგოდ გვინდა ვთქვათ, რომ მართალია, ზოგიერთი საოლიმპიადო ამოცანის პირობა იწყება სიტყვით ,,დაამტკიცეთ“ და ფორმალურად ოლიმპიადის მონაწილეები ამტკიცებენ

მათემატიკურ ამოცანას, მაგრამ რეალურად ისინი აკეთებენ პატარ-პატარა მეცნიერულ აღმოჩენას, რომელიც უკავშირდება ამოცანის პირობაში ჩადებული მთემატიკური ფაქტის დამტკიცებას. ამოცანის მოფიქრების შემოქმედებითი პროცესი ზოგჯერ საკმაოდ რთულად მიმდინარეობს, ზოგიერთი ამოცანის შედგენისას ეს პროცესი მარტივიც შეიძლება აღმოჩნდეს. ამოცანების შედგენის ზოგადი სქემა ასე შეიძლება გამოვხატოთ:

ავიღებთ რომელიმე კონკრეტულ მათემატიკურ კონსტრუქციას, განვიხილავთ მის გარდაქმნებს და თუ აღმოვაჩენთ მათემატიკურ სიდიდეებს, ან ფაქტებს შორის ისეთ საინტერესო დამოკიდებულებას ან დამოკიდებულებებს, რომლებმაც შეიძლება მიიღოს კანონზომიერების ან კანონზომიერებების სახე, ამის შემდეგ გამოვთქვამთ ჰიპოთეზას, ხომ არ აქვს ადგილი ჩვენს მიერ მიღებულ დამოკიდებულებებს კანონზომიერების სახე? ბოლო ეტაპს წარმოადგენს გამოთქმული ჰიპოთეზის დამტკიცება მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით.მოვიყვანოთ ერთი ლამაზი და რთული ამოცანის მაგალითი, რომელიც თავისი ფორმულირებით ცხადია ნებისმიერი ადამიანისათვის. ავიღოთ პირამიდა, რომლის ფუძე ნებისმიერი მრავალკუთხედია, სავალდებულო არ არის ფუძე კვადრატი იყოს, როგორც მაგალითად ხეოფსის პირამიდა. წარმოვიდგინოთ, რომ პირამიდის კედლები ჩაინგრა პირამიდის შიგა არეში ისე, რომ პირამიდის ფუძე უძრავად დარჩა ადგილზე. აღმოჩნდება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს ეს მრავალკუთხედი, ჩამონგრეული კედლები სრულად დაფარავენ პირამიდის ფუძეს. ცხადია, რომ ამის დამტკიცებას რაიმე მათემატიკური მოდელის გაკეთება და გამოთვლების ჩატარება არ ჭირდება.

ზოგჯერ მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების შესადგენად ამოცანების კომპოზიტორები იკრიბებიან სექციების მიხედვით: ცალკე გეომეტრები, ცალკე კომბინატორიკის სპეციალისტები, ცალკე ალბათობის და სიმრავლეთა თეორიის სპეციალისტები, ცალკე ალგებრაისტები, ცალკე რიცხვთა თეორიის სპეციალისტები და სხვ. საქმე იმაშია, რომ ყველა მათემატიკოსს აქვს დამოკიდებულება და ჩამოყალიბებული აქვს საოლიმპიადო ამოცანების სახეების მიხედვით თავისი გემოვნება და პრიორიტეტები. არიან ავტორები, რომლებიც ადგენენ საინტერესო გეომეტრიულ ამოცანებს, არიან ისეთები, რომლებიც განსაკუთრებული კომბინატორული აზროვნებით გამოირჩევიან და სხვ. ეს არ ნიშნავს,

რომ ეს ადამიანები მხოლოდ ერთი რომელიმე კონკრეტული სფეროსთვის ადგენენ მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანებს, არიან ამოცანების კომპოზიტორები, რომლების თანაბარი წარმატებით ადგენენ სხვადასხვა სირთულის მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანებს სხვადასხვა განყოფილებებისათვის და მათემატიკური ოლიმპიადების სხვადასხვა დონეებისათვის.

ამოცანების შედგენის შემდეგ ხდება მათი ამოხსნა კომისიის სხვა წევრების მიერ და ამოცანების სირთულის დადგენა. ამის შემდეგ ხდება მათი განხილვა, რის საფუძველზეც დადგინდება, რომელი ამოცანებია მათ შორის საუკეთესო, თითოეული ამოცანისათვის კომისიის წევრები ადგენენ რეკომენდაციებს, თუ რომელი დონის, რომელი კლასის დავალებებში შეიძლება მათი შეტანა. ამ პროცესის დროს გათვალისწინებულია გარკვეული ჰარმონიის დაცვა-დავალებების შედგენისას თითოეული ვარიანტი უნდა შეიცავდეს სხვადასხვა სირთულის ამოცანებს შესაბამისი კლასის სასკოლო პროგრამის სხვადასხვა თემებიდან.

კომისიის შემადგენლობაში გაერთიანებულია 10-12 ადამიანი. ძირითადად, საქართველოს წამყვანი ოლიმპიადების (რესპუბლიკური და ზონური ოლიმპიადები) მეთოდური კომისიის შემადგენლობაში წევრების ნახევარი უნივერსიტეტების ბაკალავრიატის დამათავრებელი კურსების, მაგისტრატურის და დოქტორანტურის ის სტუდენტები არიან, რომლებმაც სკოლაში სწავლის პერიოდში გამარჯვევები მოიპოვეს სხვადასხვა მაღალი დონის მათემატიკურ ოლიმპიადებზე-მეორე ნახევარს წარმოადგენენ უნივერსიტეტების პროფესორები და თანამშრომლები. ბოლო წლებში ძალზე იშვიათია მეთოდურ კომისიებში სკოლის მათემატიკის მასწავლებლების ჩართვა (არ ვგულისხმობთ მათ, ვინც უნივერსიტეტებში მუშაობის პარალელურად სკოლებშიც მუშაობენ), რისი მიზეზიც იმაში მდგომარეობს, რომ საქართველოში განათლების მიმდინარე რეფორმის მოთხოვნათა შესაბამისად საშუალო სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებს უხდებათ უამრავი ანგარიშის და დოკუმენტის (ელექტრული და ნაბეჭდი ფორმის) შედგენა და სხვა არაშემოქმედებითი, უსარგებლო, ბიუროკრატიული სახის სამუშაოების შესრულება, რაც მათ დიდ დროს ართმევთ და ფიზიკურად აღარ რჩებათ დრო შემოქმედებითი

მუშაობისათვის და თვითგანვითარებისათვის. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანის შედგენა ხომ არც თუ ისე მცირე ზომის სამეცნიერო შრომაა, ის არ ანაზღაურდება ფინანსურად, მისი საზღაური მხოლოდ ავტორის მათემატიკისადმი სიყვარული და ოლიმპიადის მონაწილე მოსწავლეთა გაღიმებული და ბედნიერი სახეებია, რომელთაგან ზოგიერთი შემდეგში შესაძლოა საოლიმპიადო ამოცანების შემდგენი კომპოზიტორის კოლეგაც კი გახდეს.

I თავის დასკვნები და მეთოდური რეკომენდაციები

1. მათემატიკის სასკოლო სწავლების პროცესში დარღვეულია თანაფარდობა დროის განაწილების თვალსაზრისით თეორიული საკითხების სწავლებასა და ამოცანების ამოხსნას შორის. ამ პრობლემის გამოსასწორებლად საჭიროდ მიგვაჩნია, რომ მოსწავლეებისათვის მათემატიკის გაკვეთილებზე თეორიული ცოდნის გადაცემისას განსაკუთრებული აქცენტი არ უნდა იქნეს გადატანილი თეორემების და მათემატიკური დებულებების მკაცრ დამტკიცებებზე და მტკიცების პროცესის დეტალებში ჩარღმავებაზე. საკითხების ახსნა უნდა მოხდეს მათემატიკური ფაქტების და დებულებების კონსტატირების საფუძველზე, რის შემდეგაც ცოდნის განმტკიცების პროცესი უნდა წარიმართოს სპეციალურად თემისათვის შერჩეული ამოცანების საშუალებებით. მიზანშეწონილად ვთვლით, რომ მათემატიკის სასკოლო კურსის კონკრეტული თეორემის ან დებულების დამტკიცება მოსწავლეებს მივაწოდოთ ამოცანების სახით, რაც ამაღლებს მოსწავლეთა ცოდნის დონეს და აძლიერებს მათემატიკის გამოყენებით შესაძლებლობებს როგორც შიგასაგნობრივი, ისე საგანთაშორისი კავშირების კუთხით.

2. სწავლების ეფექტურობის გაზრდას იწვევს სასწავლო პროცესის ისე დაგეგმვა, რომ მათემატიკის საგაკვეთილო დროის არანაკლებ ორი მესამედი უნდა დაეთმოს ამოცანების ამოხსნას, ვიდრე თეორიული მასალის შესწავლას. ჩვენი რეკომენდაციაა, თეორიული საკითხები ამოცანების სახით ჩავრთოთ სასწავლო პროცესში და თავი ავარიდოთ მკაცრი მათემატიკური მსჯელობებით თეორემებისა და მათემატიკური დებულებების დეტალებზე ყურადღების გამახვილებას. ამასთან, მათემატიკის სასკოლო კურსის სწავლება ამოცანების საშუალებით უნდა განხორციელდეს სპეციალურად შერჩეული მათემატიკური ამოცანების საშუალებით მხოლოდ ამოცანების ამოხსნის დროს და გათვალისწინებული უნდა იქნეს ის, რომ პრობლემის გადაჭრა შეუძლებელია მხოლოდ ამოცანათა დიდი რაოდენობით ამოხსნით, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ამოცანების შინაარსს და მათი ამოხსნის ხერხებს. დასახული მიზნის გადაჭრა

ეფექტურად ხდება მათემატიკის საგაკვეთილო პროცესში კონკრეტული თემების მიხედ-ვით სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ჩართვით.

3. მასწავლებელმა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავ-ლების პროცესის აგება უნდა მოახდინოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრე-ბულ, გაცნობიერებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრე-ბაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან მოსწავლისაგან ყოველმხრივ განვითარებული ადამიანის აღზრდა რიგ სხვა ღონისძიებებთან ერთად მოითხოვს ისეთ სწავლებას, რომელიც უზრუნველყოფს მოსწავლის მიერ მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებას.

4. მოსწავლეთა შემოქმედებითი აზროვნების ჩამოყალიბებაში ძლიერ გავლენას ახდენს ისეთი ამოცანები, რომლებიც უშუალოდ არ ამოიხსნება ცნობილი ალგორითმე-ბის გამოყენებით. ასეთი ამოცანების ამოხსნის პროცესი მოითხოვს შემეცნებით აზროვ-ნებას, რაც მოსწავლეებში აძლიერებს ამოცანის ამოხსნის გზის აღმოჩენის სიხარულს, ეს ემოციურ ფაქტორს წარმოადგენს და მოსწავლის ქცევის მძლავრი ბერკეტია. ემოციური ფაქტორის სწორად მართვას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს ადამიანის მოქმედების ყველა სფეროში, მოსწავლის სრულყოფილ პიროვნებად ფორმირებისა და სწავლების პროცესშიც. მოსწავლის ემოციები, განცდები, როგორც მისი სუბიექტური მდგომარეო-ბის გამომხატველი, უმთავრესად დაკავშირებულია სწავლების პროცესთან, ამიტომ ემოციების სწორი მიმართულების მიცემა და იმავე დროს მათი, როგორც ფსიქოლო-გიური ფაქტორის გამოყენება ამოცანის დასაძლევად პირველ ყოვლისა სკოლისა და მასწავლებლის საქმეა. მოსწავლეთა ემოციების თვისობრივი გარდაქმნა-განვითარება ძირითადად სწორედ აღზრდისა და სწავლების საშუალებებით ხორციელდება. მათემა-ტიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლებით გამოწვეული ემოციები მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს როგორც აღმზრდელობითი პროცესის შემადგენელი ნაწილი. ამიტომ მასწავლებელმა წინასწარ უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტული გზები და ღონისძიებები, რომელთა საშუალებითაც უზრუნველყოფს მოსწავლეებში დადები-

თი ემოციების და განცდების აღზრდას, ამასთანავე მიმზიდველს და სახალისოს გახდის სასწავლო პროცესს.

5. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში ამოცანები შეესაბამება სქემას „თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“. მიგვაჩნია, უმჯობესია სწავლებაში დამკვიდრდეს სქემა „ამოცანები $\rightarrow$ თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“, რომელიც საშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში დაამკვიდრებს განმავითარებელი სწავლების პრინციპებს და საშუალებას მოგვცემს განვამტკიცოთ არა მარტო თეორიული მასალის ცოდნა, არამედ დავეხმაროთ მოსწავლეებს შეძლონ ახალი ცოდნის დამოუკიდებლად მოპოვება.

6. საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლებაში სქემის „ამოცანები $\rightarrow$ თეორია $\rightarrow$ ამოცანები“ დამკვიდრება ეფექტურად ხდება მაშინ, როცა მათემატიკის საგაკვეთილო პროცესთან ერთად მოსწავლეები აქტიურად არიან ჩართული კლასგარეშე მუშაობაში: გაერთიანებული არიან მათემატიკის საგნობრივი წრეში მოსწავლის ასაკის შესაბამისად, მონაწილეობენ მათემატიკურ შეჯიბრებებში, ვიქტორინებში, კონკურსებში, საზრიანთა და გონებამახვილთა კლუბების შეჯიბრებაში, ესწრებიან მათემატიკის თემატურ საათებს (საუბრებს, ლექციებს), მათემატიკურ დილა–საღამოებს, ცართული არიან მათემატიკურ ოლიმპიადებში, ესწრებიან მათემატიკის ფაკულტატიურ კურსებს, აწყობენ მათემატიკურ ექსკურსიებს, მათემატიკურ კვირეულებს (დეკადებს), უშვებენ ბეჭდურ (ხელნაწერ) მათემატიკურ გაზეთებ (მათემატიკის საგნობრივი წრის გაზეთებს), აწყობენ მათემატიკური შინაარსის მქონე მხატვრული, სამეცნიერო–პოპულარული ლი–ტერატურის კლასგარეშე კითხვას, წერენ მათემატიკურ რეფერატებს და თხზულებებს, აწყობენ სასკოლო სამეცნიერო მათემატიკურ კონფერენციებს, კონსტრუირებას უკეთებენ და ამზადებენ მათემატიკურ მოდელებს და სხვ.

II თავი

გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდები და მათი სწავლების მეთოდიკა მათემატიკის სასკოლო კურსში

§2.1.საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათაამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში მოსწავლეთათვის ცნობილი ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების უმარტივესი სახეების და მათი ამოხსნის სტანდარტული ხერხების გარდა, არსებობს ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების საცეები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს ამოხსნის სპეციალური ხერხების გამოყენებას, ასეთისახის ტრიგონომეტრიული განტოლებები და უტოლობები თავისი ფორმით და შინაარსით შესაძლებელია ჩართული იქნეს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების სასწავლო პროცესში, არ მოითხოვს დამატებითი სასწავლო დროის გამოყოფას და მოსწავლეთათვის მარტივად აღსაქმელია. მათი ჩართვა სასწავლო პროცესში ყოველგვარი ხელოვნურობის გარეშე, ბუნებრივად ხდება, ამოხსნის პროცესი საგრძნობლად მარტივია და მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს დაინახონ ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების ამოხსნის განხილული ხერხების ორიგინალურობა და ის სილამაზე, რომელიც ასეთი ამოცანების ამოხსნას თან ახლავს. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

- **რიცხვითი უტოლობების გამოყენება**

ხშირად, ტრიგონომეტრიული განტოლების ან უტოლობის ამოხსნის დროს, როცა ვახდენთ ამ განტოლების ორივე, ან რომელიმე ერთ ნაწილში მოთავსებული გამოსახულების შეცვლას ამა თუ იმ რიცხვითი უტოლობის გამოყენებით, ვღებულობთ მოცემული ტრიგონომეტრიული განტოლების ან უტოლობის ისეთ ტოლფას გამოსახულებას, რომელიც მოცემულთან შედარებით მარტივია და გვეხმარება ამოხსნის გზის მიგნებაში. ასეთი უტოლობები ხშირად მოსწავლეთათვის კარგად ცნობილი ე.წ.

„საშუალო“ სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებია. საშუალო სიდიდეებს შორის არსებული დამოკიდე–ბულებები მოსწავლეთათვის კარგად ცნობილია. განვიხილოთ მათი ზოგიერთი გამოყენება.

ამოცანა 1. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\frac{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{3\cos x+1}}{2}=\sqrt[4]{6\sin x\cos x+2\sin x+3\cos x+1}.$$

რადგან ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებისათვის სამართლიანია უტოლობები,

$$\sqrt{2\sin x+1}\ge 0 \text{ და } \sqrt{3\cos x+1}\ge 0\,.$$

ამიტომ არითმეტიკულ და გეომეტრიულ საშუალოებს შორის $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, დამოკი–დებულებიდან, სადაც $a\ge 0, b\ge 0$, გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{3\cos x+1}}{2}\ge\sqrt[4]{6\sin x\cos x+2\sin x+3\cos x+1}.$$

რადგან ტოლობა $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=b$ ($a\ge 0, b\ge 0$), ამიტომ მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლების:

$$\sqrt{2\sin x+1}=\sqrt{3\cos x+1}.$$

საიდანაც,

$$2\sin x=3\cos x.$$

რადგან $\cos x=0$, არ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნებს, ამიტომ:

$$tgx=\frac{3}{2}.$$

ე.ი.მოცემული განტოლების ამონახსნებია

$$x=arctg\frac{3}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

ამ ამონახსნებიდან პირობებს $\sqrt{2\sin x+1}\ge 0, \sqrt{3\cos x+1}\ge 0$ აკმაყოფილებს მხოლოდ $arctg\frac{3}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ ამონახსნები. შემოწმებითშეგვიძლია დავადგინოთ, რომ მოცემული განტოლების ფესვებია $arctg\frac{3}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

ამოცანა 2. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}\le 2-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{4}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f(x)=|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|},\ g(x)=2-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{4}.$$

მაშინ გვექნება უტოლობა:

$$f(x)\le g(x).$$

$f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $\sin x=0$ წერტილებისა. ე.ი. $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $R\setminus\{\pi k, k\in z\}$ წერტილები, ხოლო $g(x)$ ფუნქცია განსა–ზღვრულია ყველგან.რადგან $f(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს ორი დადებითი ურთიერთ-შებრუნებული გამოსახულების ჯამს, ამიტომ

$$f(x)=|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}\ge 2\cdot$$

უტოლობას ამონახსნი რომ ჰქონდეს

$$g(x)=2-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{4}$$

ფუნქციამაც უნდა მიიღოს მნიშვნელობები, რომლებიც 2-ზე ნაკლები არ არის. ე.ი. უნდა შესრულდეს პირობა:

$$2-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{4}\ge 2.$$

საიდანაც, მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ, რომ

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\le 0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}.$$

რადგან $x=\dfrac{\pi}{2}$ შედის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეში და აკმაყოფილებს პირობას $f(x)=\left|\sin\dfrac{\pi}{2}\right|+\dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi}{2}\right|}=2$, ამიტომ უტოლობის ამონახსნია $x=\dfrac{\pi}{2}$.

ეს მეთოდი შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს არა მარტო ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და უტოლობებისათვის, არამდ ყველა ისეთი ფუნქციების შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის დროსაც, რომლებიც აკმაყოფილებენ განხილული ამოხსნის ხერხის საწყის პირობებს.

- **ფუნქციათა განსაზღვრის არეების შედარება**

ზოგჯერ ტრიგონომეტრიულ განტოლებაში ან უტოლობაში შემავალი ფუნქციებისათვის შესაძლებელია დავადგინოთ, რომ მათი განსაზღვრის არე ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ განტოლებას ან უტოლობას ამონახსნი არ ექნება, ზოგჯერ განსაზღვრის არეს წარმოადგენს ერთი ან რამდენიმე წერტილი. ამ შემთხვევაში განტოლების ან უტოლობის ამოსახსნელად საჭირო არ არის რაიმე გარდაქმნების ჩატარება, უბრალოდ უნდა მოვახდინოთ განტოლების ან უტოლობის მნიშვნელობათა პოვნა განსაზღვრის არის ამ წერტილებზე, რის შემდეგაც მნიშვნელობათა შედარებით დავადგენთ განსაზღვრის არის რომელი წერტილებია ტრიგონომეტრიული განტოლების ან უტოლობის ამონახსნი ან ამონახსნები.

ამოცანა 3. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2018\sqrt{x^2-5x+6}+2019\sqrt{3x-2-x^2}=tg\frac{\pi x}{2}.$$

განტოლების მარცხენა ნაწილში მოთვსებული ფუნქციებისათვის განსაზღვრის არეა:

$$\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 \\ 3x-2-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 \\ x^2-3x+2\leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=2.$$

ე.ი. ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება ერთი წერტილისაგან. ამიტომ განტოლების ამონახსნი შეიძლება იყოს ცვლადის ეს მნიშვნელობა, ან არ ჰქონდეს განტოლებას ამონახსნი. შემოწმებით დავადგენთ, რომ $x=2$ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსნს. მართლაც,

$$2018\sqrt{2^2-5\cdot 2+6}+2019\sqrt{3\cdot 2-2-2^2}=0=tg\frac{2\cdot\pi}{2}.$$

ამოცანა 4. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$\arccos x \le \pi - \sqrt{|x|-1}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ უტოლობა განსაზღვრულია, როცა $x = \pm 1.$

როცა $x = 1$-ის ჩასმით ვღებულობთ ჭეშმარიტ უტოლობას: $\arccos 1 = 0 < \pi.$

როცა $x = -1$-ის ჩასმით ვღებულობთ ჭეშმარიტ ტოლობას: $\arccos(-1) = \pi = \pi.$

ე.ი. უტოლობის ამონახსნებია $x = \pm 1.$

ეს მეთოდი შესაძლებელია გამოყენებული იქნეს არა მარტო ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და უტოლობებისათვის, არამდ ყველა ისეთი ფუნქციების შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის დროსაც, რომლებიც აკმაყოფილებენ განხილული ამოხსნის ხერხის საწყის პირობებს.

- **ფუნქციათა შემოსაზღვრულობა**

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $f(x) = g(x)$ სახის ტრიგონომეტრიული განტოლება. განტოლებაში შემავალი ფუნქციები განსაზღვრულია რაიმე D არეზე და ამ არის ნებისმიერ x წერტილზე სრულდება უტოლობები: $f(x) \ge A$ და $g(x) \le A$, სადაც A - რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. მაშინ მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებათა სისტემისა

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

ამოცანა 5. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\cos^{2017} x + \sin^{2019} x = 1.$$

რადგან $\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$ ამიტომ განტოლება შესაძლებელია გადავწეროთ სახით:

$$\cos^{2017} x + \sin^{2019} x = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

ანუ,

$$\cos^2 x\left(\cos^{2015} x - 1\right) = \sin^2 x\left(1 - \sin^{2017} x\right).$$

რადგან ნებისმიერი ნამდვილი x-თვის გვაქვს

$$\sin^2 x \ge 0, \cos^{2015} x - 1 \le 0, 1 - \sin^{2017} x \ge 0,$$

ამიტომ მიღებული განტოლება ტოლფასია განტოლებათა სისტემისა:

$$\begin{cases} \cos^2 x\left(\cos^{2015} x-1\right)=0, \\ \sin^2 x\left(1-\sin^{2017} x\right)=0. \end{cases}$$

სისტემა ტოლფასია განტოლებათა სისტემის ერთობლიობისა

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x=0, \\ \sin x=1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x=0, \\ \cos x=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

პირველი სისტემის ამონახსნებია

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$$

მეორე სისტემის

$$x=2\pi m,\ m\in Z.$$

ყველა ამ ამონახსნების გაერთიანება იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნები.

ამოცანა 6. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin 3x+\cos\frac{12x}{5}=2.$$

რადგან

$$\sin 3x+\cos\frac{12x}{5}\le 2,$$

ამიტომ ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე შესაკრები 1-ის ტოლია. ე.ი.

$$\begin{cases} \sin 3x=1 \\ \cos\frac{12x}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \\ \frac{12x}{5}=2\pi n,\ n\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z \\ x=\frac{5\pi n}{6},\ n\in Z. \end{cases}$$

ვიპოვოთ x-ის ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებს ორივე განტოლებას. გვაქვს:

$$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}=\frac{5\pi n}{6}, k\in Z \Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{2k}{3}=\frac{5n}{6}, k\in Z \Rightarrow 5n=4k+1, k\in Z \Rightarrow n=\frac{4k+1}{5}, k\in Z.$$

რადგან n მთელი რიცხვია, ამიტომ $4k+1$ უნდა იყოს 5-ის ჯერადი. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $k=5m+1, m\in Z.$ საიდანაც

$$x=\frac{5\pi n}{6}=\frac{5\pi(4k+1)}{6}=\frac{5\pi(4(5m+1)+1)}{6}=\frac{5\pi}{6}+\frac{10\pi}{3}m, m\in Z.$$

ამოცანა 7. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sqrt{12-25x^2+20x}=4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

რადგან კვადრატული ფესვის ქვეშ ცვლადის კვადრატის წინ უარყოფითი ნაშანია, ეს გვიბიძგებს იქითკენ, გავარკვიოთ ხომ არ არის შემოსაზღვრული კვადრატული სამწევრი ზემოდან. რისთვისაც გარდავქმნათ კვადრატული ფესვის ქვეშ მოთავსებული სამწევრი, გვაქვს:

$$\sqrt{12-25x^2+20x}=\sqrt{16-\left(25x^2-20x+4\right)}=\sqrt{16-(5x-2)^2}.$$

მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sqrt{16-(5x-2)^2}=4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

განტოლების ამოხსნისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f(x)=\sqrt{16-(5x-2)^2},\ g(x)=4-\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

მაშინ გვექნება განტოლება:

$$f(x)=g(x).$$

რადგან $\forall x\in D(f)\bigcap D(g)$ წერტილისათვის სამართლიანია უტოლობები:

$$f(x)=\sqrt{16-(5x-2)^2}\le 4,\ g(x)=4-\cos^2\frac{15\pi x}{4}\ge 4.$$

ამიტომ, მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებათა სისტემის:

$$\begin{cases} \sqrt{16-(5x-2)^2}=4, \\ 4-\cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=4. \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლების ერთადერთი ამონახსენია $x=\dfrac{2}{5}$, რომელიც ასევე აკმაყოფილებს სისტემის მეორე განტოლებესაც. ამიტომ $x=\dfrac{2}{5}$ არის მოცემული განტოლების ერთადერთი ამონახსნი.

განხილული ხერხის შესახებ შეიძლება ითქვას იგივე, რაც წინა ხერხის შემთხვევაში. მისი გამოყენებაც შესაძლებელია სხვა სახის განტოლებების ამოხსნის დროსაც, რომლე-ბიც აკმაყოფილებენ შესაბამის საწყის პირობებს.

- **სინუს და კოსინუს ფუნქციათა თვისებების გამოყენება**

განვიხილოთ განტოლებები, რომელთაც აქვთ სახე:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\pm1,$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\pm1,$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\pm1,$$

$$A(\sin\alpha x)^n+B(\cos\beta x)^m=|A|+|B|, \qquad (1)$$

$$A(\sin\alpha x)^n+B(\sin\beta x)^m=|A|+|B|,$$

$$A(\cos\alpha x)^n+B(\cos\beta x)^m=|A|+|B|.$$

სადაც α,β,A,B – მოცემული, ნულისგან განსხვავებული რიცხვებია, ხოლო m,n – მოცემული ნატურალური რიცხვებია.

(1) სახის განტოლებები სინუს და კოსინუს ფუნქციების შემოსაზღვრულობის თვისების გამოყენებით დაიყვანება განტოლებათა სისტემების ერთობლიობების ამოხსნაზე. განსახილავი (1) სახის განტოლებების ყველა სახის განხილვა ძალზედ შრომატევადია და დიდ დროს მოითხოვს. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი, რაც თვალსაჩინო წარმოდგენას შეგვიქმნის განსახილავ ხერხზე.

ამოცანა 8. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin x \cos 8x = 1.$$

რადგან $|\sin x| \le 1,$ $|\cos 8x| \le 1,$ ამიტომ მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებათა სისტემის:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 8x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos 8x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

ამის შემდეგ უნდა ვიპოვოთ განტოლებათა ერთობლიობის პირველი სისტემის ამონახსენი, შემდეგ მეორე სისტემის ამონახსენი. მათი გაერთიანებით მივიღებთ მოცემული განტოლების ამონახსნებს. მარტივი გარდაქმნების ჩატარების შედეგად მივიღებთ, რომ მოცემული განტოლების ამონახსნებია

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

ამოცანა 9. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2\sin^{2016} 2x - 5\cos^{2017} 4x = 7.$$

განტოლებაზე დაკვირვებით მარტივად მივალთ დასკვნამდე, რომ მოცემული განტო–ლების ამონახსნია შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამონახსნი და პირიქით:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 1, \\ \cos 4x = -1. \end{cases}$$

ე.ი. მოცემული განტოლების და მისგან მიღებული განტოლებათა სისტემა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მიღებული სისტემის ამონახსენია:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

ამოცანა 10. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$5\sin^{2018} 2x - 8\cos^{2017} 4x \ge 13.$$

თუ დავაკვირდებით უტოლობის მარცხენა მხარეში მოთვსებულ გამოსახულებას, შევნიშნავთ, რომ მარცხენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულების უდიდესი

მნიშვნელობააა 13. ამიტომ მოცემული უტოლობის ამონახსნია შემდეგი განტოლებათა სისტემის ამონახსნი და პირიქით:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 1, \\ \cos 4x = -1. \end{cases}$$

ე.ი. მოცემული უტოლობა და მისგან მიღებული განტოლებათა სისტემა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მიღებული სისტემის ამონახსენია:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

ამოცანა 1. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 y - 4 = 0, \\ \cos x - 2\cos^2 y - 1 = 0. \end{cases}$$

სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს:

$$2\cos^2 y = \cos x - 1 \le 0,$$

მეორეს მხრივ $\cos^2 y \ge 0,$ ამიტომ გვაქვს $\cos^2 y = 0, \sin^2 y = 1.$ ამის შემდეგ სისტემის პირვე–ლი განტოლებიდან მივიღებთ $x = 0.$

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ სისტემის ამონახსნებია:

$$x = 0, y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

- $f(\varphi(x)) = f(\phi(x))$ **სახის განტოლებები**

თუ განტოლება ან უტოლობა შეიცავს ისეთ $f(t)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია და მკაცრად მონოტონურია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე R სიმრავლეზე, მაშინ $f(\varphi(x)) = f(\phi(x))$ სახის განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$\varphi(x) = \phi(x).$$

თუ განტოლება ან უტოლობა შეიცავს ისეთ $f(t)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $-a \le x \le a$ შუალედზე და ზრდადია ან კლებადია $0 \le x \le a$

სიმრავლეზე, მაშინ $f\left(\varphi(x)\right)=f\left(\phi(x)\right)$ სახის განტოლება ტოლფასია განტოლებათა ერთობლიობისა:

$$\begin{cases}\varphi(x)=\phi(x),\\ \varphi(x)=\phi(x).\end{cases}$$

ამოცანა 12. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin x+\sin^3 x+2018\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2018\cos^5 4x.$$

$f(t)=t+t^3+2018t^5$ ფუნქცია განსაზღვრულია და მონოტონურია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე R სიმრავლეზე, ამიტომ მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$\sin x=\cos 2x.$$

რომლის ამონახსნებია $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

ამოცანა 13. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sqrt{3+4x+4x^2}\cdot arct(2x+1)=\sqrt{6-4x+x^2}\cdot arct(x-2)$$

მოცემული განტოლებაში ფესვქვეშა გამოსახულებები გარდავქმნათ და გადავწეროთ სახით:

$$\sqrt{(2x+1)^2+2}\cdot arct(2x+1)=\sqrt{(x-2)^2+2}\cdot arct(x-2).$$

განვიხილოთ ფუნქცია $f(t)=\sqrt{t^2+2}\cdot arctgt$, რომელიც კენტია და ზრდადია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე, ამიტომ შესრულდება ტოლობა

$$f(2x+1)=f(x-2),$$

თუ $2x+1=x-2,$ საიდანაც $x=-3.$ ე.ი. განტოლების ამონხსენია $x=-3.$

ამოცანა 14. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2018\cos\left(x^2\right)+(9-8x)^4=x^8+2018\cos(9-8x).$$

განტოლება გადავწეროთ სახით:

$$x^8-2018\cos\left(x^2\right)=(9-8x)^4-2018\cos(9-8x)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=f(9-8x),$$

სადაც

$$f(t)=t^4-2018\cos t.$$

f ფუნქცია ლუწია და $t>0$ რიცხვებისათვის $f'(t)>0$. ამიტომ f ფუნქცია იზრდება დადებით ნახევარღერძზე, რაც ნიშნავს, რომ ის თავის მნიშვნელობას ღებულობს ნულის მიმართ სიმეტრიულ ორ წერტილში. ამის გამო მოცემული განტოლება ტოლფასია განტოლებისა:

$$x^2=\pm\left(9-8x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+8x-9=0,\\ x^2-8x+9=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\pm\sqrt{7},\\ \left(x-1\right)\left(x+9\right)=0.\end{array}\right. \quad x=1;-9;\,4\pm\sqrt{7}.$$

ამოცანა 15. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin\frac{x}{x^2+1}+\sin\frac{1}{x^2+x+2}=0.$$

ვთქვათ, $f(x)=\sin x,\ g(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ h(x)=\dfrac{1}{x^2+x+2}$. მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ფუნქციონალური სახით:

$$f\left(g\left(x\right)\right)+f\left(h\left(x\right)\right)=0.$$

რადგან $f(x)=\sin x$ ფუნქცია კენტია, ამიტომ

$$-f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(-h\left(x\right)\right).$$

ამ შემთხვევაში ვღებულობთ განტოლებას:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(-h\left(x\right)\right).$$

განვიხილოთ, $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ფუნქცია. გვაქვს:

$$\left(x-1\right)^2=x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow x^2+1\ge 2x\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2},$$

ანუ

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|g\left(x\right)\right|\le\frac{1}{2}.$$

რადგან

$$h(x)=\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}},$$

ამიტომ $h(x)$ ფუნქციაუდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს მაშინ, როცა

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

და ეს მნიშვნელობაა $\frac{4}{7}$. მეორეს მხრივ ნებისმიერი x -თვის

$$h(x)=\frac{1}{x^2+x+2}>0,$$

მაშასადამე,

$$0<h(x)\le\frac{4}{7}.$$

ე.ი. რადგან

$$\left|g\left(x\right)\right|\le\frac{1}{2},\ 0<h(x)\le\frac{4}{7}$$

და

$$f(x)=\sin x$$

ფუნქცია მონოტონურია $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ამიტომ განტოლება

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(-h\left(x\right)\right)$$

ტოლფასია განტოლებისა

$$g\left(x\right)=-h\left(x\right).$$

ანუ

$$\frac{x}{x^2+1}=-\frac{1}{x^2+x+2}.$$

ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი $x=-1$, რომელიც განტოლების ამონახსენია.

- **სუპერპოზიციის შემცველი ტრიგონომეტრიული განტოლებები.**

ამოცანა 16. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right)=-\frac{1}{2}.$$

განტოლება ტოლფასია ორი განტოლების ერთობლიობისა:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi}{2}\cos x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z,\\ \frac{3\pi}{2}\cos x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{9}+\frac{4n}{3}, n\in Z,\\ \cos x=-\frac{5}{9}+\frac{4n}{3}, n\in Z;\end{array}\right.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $-1\le\cos x\le 1,$ გვაქვს:

$$-1\le-\frac{1}{9}+\frac{4n}{3}\le 1,\quad -\frac{8}{9}\le\frac{4n}{3}\le\frac{10}{9},\quad -\frac{2}{3}\le n\le\frac{5}{6}.$$

$$n=0\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{9},\ x_1=\pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)+2\pi n, n\in Z.$$

$$-1\le-\frac{5}{9}+\frac{4n}{3}\le 1, -\frac{4}{9}\le\frac{4n}{3}\le\frac{14}{9}, -\frac{1}{3}\le n\le\frac{7}{6}.$$

$$n=0\Rightarrow\cos x=-\frac{5}{9},\ x_2=\pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right)+2\pi k, k\in Z.$$

$$n=1\Rightarrow\cos x=\frac{7}{9},\ x_3=\pm\arccos\frac{7}{9}+2\pi m, m\in Z.$$

ე.ი. საბოლოოდ, განტოლების ამონახსნებია:

$$\pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)+2\pi n, n\in Z,\ \pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right)+2\pi k, k\in Z,\ \pm\arccos\frac{7}{9}+2\pi m, m\in Z.$$

ჩვენს მიერ განხილული ხერხების გარდა არსებობს ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების ამოხსნის სხვა არასტანდარტული ხერხები, რომელთა გამოყენებით მარტივად არის შესაძლებელი საკმაოდ რთული საოლიმპიადო ტრიგონო–მეტრიული განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნა.

ვთვლით, რომ მასწავლებელი სრულყოფილად უნდა იყოს დაუფლებული ამოცანების ამოხსნის არასტანდარტულ ხერხებს, რომლებსაც შემდგომში საკუთარი შეხედულე-ბების მიხედვით საჭიროების შემთხვევაში ჩართავს სასწავლო პროცესში, რაც იძლევა მოსწავლეთა კარგ განმავითარებელ ეფექტს.

§2.2.ზოგიერთი სახის საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით

საგანთაშორისი კავშირების კვლევას ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მაღალ კლასებში და უმაღლეს სკოლაში ხანგრძლივი ისტორია აქვს და წარმატებით ხორციელდება პრაქტიკაში. საგანთაშორისი კავშირების დამყარების პროცესს ჩვენ განვიხილავთ როგორც შემეცნებით მოღვაწეობას, რომელიც ხორციელდება სამ ეტაპად: 1. მოსამზადებელი; 2. შედეგობრივი; 3. განმტკიცებითი.

პირველი ეტაპი-ოპტიმალური პირობების უზრუნველყოფა მოსწავლეთა აზროვნების და შთაგონების აქტიური, დამოუკიდებელი და შემოქმედებითი მუშაობისათვის. ამ ეტაპს მიეკუთვნება საგანთაშორისი დავალების შესრულებისათვის მიზანდასახულობა, აღქმის, ყურადღების და მეხსიერების ორგანიზება.

მეორე ეტაპი-აზროვნებისა და წარმოდგენის ანალიტიკურ-სინთეზური მუშაობის ორგანიზება და მის საფუძველზე მოსწავლეთა ახალი საგანთაშორისი დავალებების და ინტელექტუალური უნარების ჩამოყალიბება.

მესამე ეტაპი-საგანთაშორისი შემეცნებითი მოღვაწეობისათვის კომპონენტების გამყარება და ავტომატიზაცია. ამ ეტაპს მიეკუთნება ერთი და იმავე ტიპის ამოცანების ამოხსნა, სასწავლო ტექსტის ანალიზი, თვალსაჩინოების გამოყენება და ა.შ.

მოქმედი მათემატიკის სასწავლო პროგრამა აღარ ითვალისწინებს ალგებრული და გეომეტრიული შინაარსის მქონე მასალების სწავლებას ცალ-ცალკე, მაგრამ ჭეშმარიტება მოითხოვს ვაღიაროთ, რომ მეთოდური მიდგომები და შინაარსი ალგებრული და გეომეტრიული მასალების სწავლებისა მკვეთრად განსხვავებულია. ჩვენ ვთვლით, რომ საგანთაშორის კავშირებთან გვაქვს საქმე, როცა ვიხილავთ თეორიულ საკითხს ან ამოცანას, რომელსაც ალგებრული შინაარსი აქვს და მას ვწყვეტთ გეომეტრიული მიდგომებით, ან პირიქით. ამავე დროს ასეთ კავშირებს ვუწოდებთ პირდაპირ საგანთაშორის კავშირებს,

სასწავლო პროცესის რეგულირება უშუალოდ გაკვეთილზე ხდება. სასწავლო პროცესში საგანთაშორისი კავშირების რეალიზების მართვა მიზნობრივი, საინფორმაციო და სტიმულირების არხებით ხორციელდება.პროცესს აკონტროლებს მასწავლებელი. სასწავლო პროცესის კონტროლი და რეგულირება გულისხმობს მოსწავლეთა შემეცნებითი მოღვაწეობის ორგანიზებას საგაკვეთილო პროცესში, რომელიც მოიცავს:

1. საგანთაშორისი კავშირების შინაარსის პრობლემური კითხვების სისტემას, რომლებიც მოსწავლეებს ზოგად მსოფლხედველობას უნვითარებს. კითხვების რაოდენობა და მათი გადანაწილება განისაზღვრება გაკვეთილზე განხილული თითოეული საკითხის აქტუალობის ხარისხის მიხედვით, თუ რამდენად „საგანთაშორისი“ იყო განხილული თემა.

2. პრობლემური სიტუაციების შექმნის მეთოდური ხერხები და მათი გადაწყვეტის გზები, რომლებიც ემყარება მოსწავლეების მიერ სასწავლო საგნებიდან ათვისებული ცოდნის საფუძვლებს.

3. მოსწავლეთა დამოუკიდებელ სამუშაოებს კომპლექსურ დავალებებს მოსწავლეთა კლასგარეშე მუშაობას და მასწავლებლის დახმარების ფორმებსა და მეთოდებს დავალებათა შესრულების დროს.

4. მოსწავლეთა შემეცნებით და პრაქტიკულ უნარებს, რომლებიც აუცილებელია საგანთაშორისი პრობლემური საკითხების დავალებების გადასაწყვეტად და მათი ჩამოყალიბების გზები.

5. მოსწავლეთა ინტერესები საგანთაშორისი დავალებების დადგენის, შესწავლის და შესრულების მიმართ, დადებითი დამოკიდებულების სტიმულირების ხერხების გამოყენება სასწავლო პროცესში, „საგანთაშორისი“ სიტუაციების შექმნა.

მოსწავლეთა გონებრივი მოღვაწეობის მართვის საშუალებების კვლევა საგანთაშორისო კავშირების რეალიზების დროს ხდება ორი მიმართულებით: პირველი გულისხმობს პირდაპირ გზას, რომლის დროსაც მართვა ატარებს უშუალო ხასიათს და

გამოიხატება სხვადასხვა ინტელექტუალური მოქმედების მიზანმიმართულ ჩამოყალიბებაში.

მეორე მიმართულება გულისხმობს გონებრივი მოღვაწეობის მართვის ირიბ გზას სწავლების მეთოდების და შინაარსის მეშვეობით, რომლის დროსაც სწავლება სტიმულირებას უკეთებს მოსწავლეებს დამოუკიდებლად გამოავლინონ გონებრივი მოქმედებების ფუნქციები და სტრუქტურები სასწავლო მოღვაწეობის ზოგად შინაარსში.

საგანთაშორისი კავშირების რეალიზებაზე მომუშავე მასწავლებელთა გამოცდილების შესწავლამ, ხანგრძლივმა დაკვირვებამ გვიჩვენა, რომ მათი აბსოლუტური უმრავლესობა თვლის საგანთაშორისი კავშირების რეალიზებას სწავლების პროცესის ოპტიმიზაციის ერთ-ერთ პირობად, მაგრამ საგნების ამ ურთიერთკავშირებს იყენებენ არასაკმარისად ეფექტურად. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ საგანთაშორისი კავშირების რეალიზება გულისხმობს მოსწავლეთა საძიებო საქმიანობას, რაც თავის მხრივ მოითხოვს ორიენტირებას პრობლემის პირობებში მის მიღებას, ფაქტების ანალიზს. მონაცემთა შორის კავშირის და ურთიერთკავშირის დადგენას. ადრინდელ გამოცდილებაზე დაყრდნობას, არსებითი ნიშნების გამოყოფას და მათ ერთმანეთთან შესაბა-მისობას განზოგადების და დასკვნების ფორმირებას.

ყველა ეს მოქმედება მიმდინარეობს გონებრივი მოღვაწეობის სხვადასხვა ფორმით, რომელიც მოითხოვს ხელმძღვანელობას მასწავლებლის მხრიდან მოსწავლის პიროვნების ფსიქოლოგიური მზადყოფნის მსგავსი სახისქმედებებზე.

სასწავლო საქმიანობა წარმოადგენს გონებრივი და პრაქტიკული მოქმედების სისტემას, რომელთა რეალიზება ხელს უწყობს ცოდნის ათვისებას, უნარ-ჩვევების დაუფლებას და მათ გამოყენებას სხვადასხვა ამოცანის ამოსახსნელად.შემეცნებითი მოღვაწეობის განმავითარებელ ხასიათს უზრუნველყოფს სასწავლო მასალის შინაარსი, მეთოდიკა და ორგანიზაციული ხერხები. სწავლების შინაარსში აუცილებელი გახდა ახალი მეთოდური მიდგომების დამუშავება და სასწავლო პროცესში საგანთაშორისი კავშირების დანერგვა. სასწავლო პროცესში საგანთაშორისი კავშირების რეალიზებისას წამყვანი ადგილი ეკუვნის შემეცნებით ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა ხელს უწყობს

ზოგადი ცნებებისა და მსოფლხედველობითი იდეების მყარ ათვისებას. განათლებაში დიდი დრო ეთმობა თითოეულ სასწავლო დისციპლინაში შემეცნებითი ამოცანების შემუშავებას და დანერგვას.შემეცნებით ამოცანას ჩვენ ვუწოდებთ ისეთ ამოცანას, რომლის ამოხსნა მოითხოვს ძიების ჩატარებას და ამოხსნის პროცესის დამთავრების შემდეგ საშუალებას იძლევა აიხსნას თემის წამყვანი ღერძული ხაზები და უზრუნველ-ყოფს ოპტიმალურ წინსვლას დასახული შინაარსის ჩარჩოებში.საგანთაშორისი ხასია-თის შემეცნებითი მათემატიკური ამოცანების მეთოდური სისტემის შესადგენად ჩვენ გამოვიყენეთ შემეცნებითი ამოცანების დიდაქტიკური სისტემის აგების ძირითადი პრინციპები. მისი თავისებურებები მდგომარეობს შემდეგში:

1. ამოცანების ტიპოლოგიის საფუძვლად აღებულია მათემატიკის სასკოლო კურსის ის თემები, რომლებიც საგანთაშორისი კავშირების შემცველია.

2. ამოცანების შინაარსი შერჩევა ისე ხდებოდა, რომ ამოცანების ამოხსნის აზრი და შედეგი აფართოებს იმ ცნებების საზღვრებს, რომლებიც შეისწავლება მომიჯნავე სასწავლო დისციპლინებში.

3. ყოველ ამოცნაში მომზადებულია შეკითხვების სისტემა მოსწავლეების მიერ ამოცანების საგანთაშორისი შინაარსის გაგების მიზნით და მათ მიერ სხვა სასწავლო დისციპლინებიდან ცოდნის აქტივიზაციისათვის.

არსებული სახის ამოცანების შედგენისათვის ჩვენ გამოვიყენეთ მეთოდიკა, რომელიც შემუშავებულია ალგებრის და გეომეტრიის სასწავლო მასალებზე დაყრდნობითდა სწავლების შემუშავებულ მეთოდიკაზე.

I. მათემატიკის სასწავლო კურსში განვიხილეთ ალგებრული და გეომეტრიული მასალის შემცველი თემები, რომელიც ჩავთვალეთ საგანთაშორისი კავშირების შინაარისის შემცელად;

II. მათემატიკის სასწავლო კურსში არჩეული თემებიდან გამოვყავით ის, რომელთა გამოყენება შესაძლებელია შემეცნებითი ამოცანების შესადგენად.

III. შევადგინეთ საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით ამოცანათა სისტემები ალგებრული და გეომეტრიული მასალების ბაზაზე.

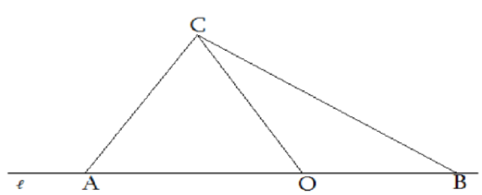
IV. მოსწავლეთა ცოდნის აქტივაციის განმავითარებელი ამოცანათა სისტემის მიზანია ალგებრული და გეომეტრიული მასალის ცოდნის შეძენა და მიღებული ცოდნის გამყარება, რომელსაც მოსწავლეები იღებენ შემეცნებითი ამოცანების ამოხსნის პროცესში და ხელს უწყობს ოპერატიული აზროვნების განვითარებას.

მოვიყვანოთ საგანთაშორისი კავშირების შემცველი შინაარსის მქონე ზოგიერთი ამოცანა, რომლის გამოყენება მიზანშეწონილია მათემატიკის გაკვეთილებზე, უფრო რთული ამოცანების განხილვა მიზანშეწონილია მათემატიკის საგნობრივ წრეებზე ან ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, რადგან განხილული ამოცანების სირთულე აღემატება სკოლაში განსახილავი ამოცანების სირთულეს.

ამოცანა1. მოცემულია $a, b, c > 0$.დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} > a + c$$

ამ ამოცანის შინაარსი ალგებრულია. მისი ამოხსნის დროს რაიმე საგანთაშორისი კავშირის დამყარება უშუალოდ არ ჩანს. ამოხსნის პროცესის დაწყების წინ მიზანშეწონილია წინასწარ მომზადებულიშეკითხვების საშუალებით შევამზადოთ ნიადაგი საგანთაშორისი კავშირების დამყარებისათვის. გამოცდილი მასწავლებლისათვის ეს პრობლემას არ წარმოადგენს. რის შემდეგაც მასწავლებელი უშუალოდ გადადის ამოცანის ამოხსნაზე და მოსწავლეებს ავალებს გაავლონ ℓ წრფე და მასზე აიღონ A, O და B წერტილები ისე, რომ $AO = a$, $OB = c$.



ნახ. 1.

ამის შემდეგ მოსწავლეები გაავლებენ OC სხივს ისე, რომ $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 120°$ (ნახ. 1) და $OC = b$. ΔABC-ში კოსინუსების თეორემის თანახმად იპოვიან, რომ

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - ab},$$

ხოლო ΔBOC-ში იგივე თეორემის თანახმად:

$$CB = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}.$$

ამის შემდეგ გამოიყენებენ რა სამკუთხედის უტოლობას

$$AC + CB > AB,$$

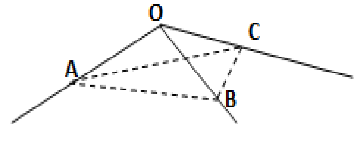
მარტივად მივლენ დასკვნამდე, რომ

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} > a + c.$$

ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეებს შესაძლოა დაებადოთ კითხვა: რატომ არის გეომეტრიული მიდგომა ამ კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის დროს უკეთესი სხვა მიდგომებთან შედარებით? უნდა შევნიშნოთ, რომ დასმული კითხვა ლეგიტიმურია. გამოყენებული მეთოდური მიდგომის უპირატესობის დადგენის მიზნით მოსწავლეებს უნდა შევთავაზოთ ამოხსნილი ამოცანის სხვა ხერხი, ვთქვათ ალგებრული ხერხი. რადგან ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ჩვენმიზანს არ შეადგენს განხილული ამოცანის ამოხსნის ალგებრული ხერხის დემონსტრირება, ამიტომ ამ ხერხის გამოყენებით ამ ამოცანის ამოხსნას არ მოვახდენთ, მაგრამ შევნიშნავთ, რომ ამოხსნის ეს ხერხი გაცილებით მეტ დროს და საკმაოდ რთული გამოსახულებების გარდაქმნას საჭიროებს. ამის შემდეგ მოსწავლეებისათვის თვალნათელი ხდება, რომ საგანთაშორისი კავშირების გამოყენება იძლევა დროის ეკონომიას, ამცირებს ამოცანის ამოხსნის მოცულობას, მოსწავლეებში ახდენს მიღებული ცოდნის განმტკიცებას და მის საფუძველზე ახალი ცოდნის შეძენას.

ამოცანა2. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$



ნახ. 2.

თუ ამ ამოცანის განხილვას ვახდენთ უშუალოდ მას შემდეგ, რაც განხილული გვაქვს წინა ამოცანა, შესაძლოა, რომ მოსწავლეებს თვითონ დაებადოთ აზრი, რომ ამოცანა

ამოხსნან გეომეტრიული მიდგომით. თუ ასეთი სიტუაცია არ გვაქვს, მაშინ საჭიროა მასწავლებელმა დასვას გონებაზამახვილური შეკითხვები და მიიყვანოს მოსწავლეები იმ აზრამდე, რომ მიზანშეწონილი და უფრო მოსახერხებელია ამ ამოცანის ამოხსნა გეომეტრიული მიდგომით. რისთვისაც ის მოსწავლეებს ეუბნება, რომ მათ გაავლონ OA, OB და OC სხივები (ნახ. 2) ისე, რომ $OA = a, OB = b$ და $OC = c$.

ასევე,$\angle AOB = \angle BOC = 60°$ ან$\angle AOC = 120°$. ამის შემდეგ მოსწავლეები დაწერენ კოსინუსების თეორემას AOB, BOC და AOC სამკუთხედებისათვის:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}, BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc},\ \ AC = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$$

მოსწავლეები მსჯელობენ ასე: შესაძლებელია ორი შემთხვევა–A, B და C წერტილები ან ერთ წრფეზე ძევს, ან ადგენენ სამკუთხედს. მაგრამ ორივე შემთხვევაში სამართლია-ნია უტოლობა:

$$AC + BC \geq AC,$$

ე.ი.

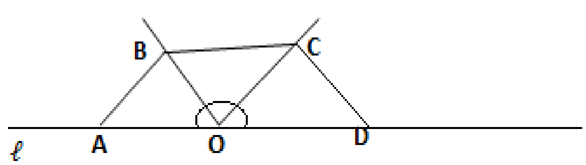
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

გამოყენებული მიდგომის დასაბუთება ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურია და ამიტომ აღარ გავიმეორებთ.

ამოცანა3. მოცემულია $a, b, c, d > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - cd + d^2} > a + d.$$

ფორმით დასამტკიცებელი უტოლობა უფრო რთულია ვიდრე წინა ორი, მაგრამ თუ მოხერხებულად მოვახდენთ დასმული ამოცანის გეომეტრიული მოდელის შექმნას, რაც გამოიხატება წრფის და წერტილების შერჩევით, მაშინ ამოცანა გადაწყდება მარტივად.



ნახ. 3.

მართლაც, გავავლოთ ნებისმიერი ℓ წრფე და მასზე ავიღოთ A, O და D წერტილები ისე, რომ $AO = a$ და $OD = d$. (ნახ. 3). ასევე გავავლოთ OB და OC სხივები ისე, რომ

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60°$$

და

$$OB = b, OC = c.$$

დავწეროთ კოსინუსების თეორემაAOB, BOC და COD სამკუთხედებისათვის:

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}, \qquad BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}, \qquad CD = \sqrt{c^2 + d^2 - cd}.$$

გავიხსენოთ, რომ $ABCD$ოთხკუთხედში ნებისმიერი სამი გვერდის ჯამი მეტია მეოთხეზე, ანუ

$$AB + BC + CD > AD$$

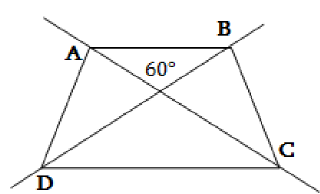
ე.ი.

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - cd + d^2} > a + d\ .$$

ამოცანა4. მოცემულია $a, b, c, d > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 - cd + d^2} > \sqrt{a^2 + ad + d^2}.$$

ზემოთ დამტკიცებულ უტოლობებზე კიდევ უფრო რთული ფორმა აქვს დასამტკიცებელ უტოლობას. თუ აქაც ამოცანის ამოხსნისათვის განვიხილავთ წინა ამოცანების მსგავს მიდგომას, მაშინ სიტუაცია შედარებით გამარტივდება, კერძოდ: თუ განვიხილავთ ორ ურთიერთმკვეთ წრფეს, რომლებიც 60°-ის ტოლი კუთხით კვეთენ ერთმანეთს და მათი გადაკვეთის O წერტილიდან გადავდებთ$OA = a, OB = b, OC = c$ და$OD = d$ მონაკვეთებს ისე, როგორც მე-4 ნახაზზეა ნაჩვენები, გვექნება:



ნახ. 4.

დავწერთ კოსინუსების თეორემასAOB, BOC, COD დაAOD სამკუთხედებისათვის. მივიღებთ:

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + bc + c^2}, CD = \sqrt{c^2 - cd + d^2} \text{და } AD = \sqrt{a^2 + ad + d^2}.$$

თუგავიხსენებთ, რომ $AB + BC + CD > AD$ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

ამოცანა5. მოცემულია $a, b, c, d > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{c^2-cd+d^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\sqrt{a^2+ad+d^2} \geq (a+c)(b+d)$$

ამ ამოცანის ამოხსნისთვისაც გამოგვადგება მე-4 ნახაზი. რომელზეც:

$AB = \sqrt{a^2-ab+b^2}, BC = \sqrt{b^2+bc+c^2},\ CD = \sqrt{c^2-cd+d^2}$და $AD = \sqrt{a^2+ad+d^2}$.

მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ პტოლემეოსის თეორემა: ამოზნექილი ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეების ნამრავლთა ჯამი ნაკლები არარის დიაგონალების სიგრძეთა ნამრავლზე. დავწერთ ამ ფაქტს$ABCD$ ოთხკუთხედისთვის, მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

ამოცანა6. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geq (a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

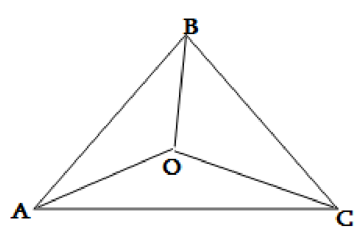
ამ ამოცანის ამოხსნის დროსაც მიზანშეწონილია იგივე მიდგომის გამოყენება, რაც გამოვიყენეთ წინა ამოცანებში, ოღონდ გეომეტრიული წარმოდგენა გვექნება ასეთი:

განვიხილოთ ABC სამკუთხედი და მასში მდებარე O წერტილი ისე, რომ:

$$OA = a, OB = b, OC = c.$$

ამასთან $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ (ნახ. 6).

მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ, რას წარმოადგენს სამკუთხედისათვის ტორიჩელის წერტილი, რომლის შემდეგ მოსწავლეებიO წერტილის არჩევის წესიდან გამომდინარე დაასკვნიან, რომ ის ABC სამკუთხედისათვის ტორიჩელის წერტილია (ანუ სამკუთხე–დის ისწერტილია, რომლიდანაც წვეროებამდე მანძილების ჯამი მინიმალურია). შესაბამისად,$OA + OB + OC = a + b + c \leq 3R$, სადაც R წარმოადგენს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძეს.



ნახ. 6.

ამის შემდეგ მოსწავლეები დაწერენ კოსინუსების თეორემას AOB, BOC დაAOC სამკუთხედებისათვის და შესაბამისად. მიიღებენ:

$$AB^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 + bc,$$

$$AC^2 = a^2 + c^2 + ac.$$

ასევე გასათვალისწინებელია, რომ

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot sin120° = \frac{\sqrt{3}}{4} ab.$$

ანალოგიურად

$$S_{\Delta BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} bc \text{და } S_{\Delta AOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} ac\ .$$

ანუ:

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + ac + bc)$$

შესაბამისად, დასამტკიცებელი უტოლობა გადაიწერება ასე:

$$3 \cdot AB^2 \cdot BC^2 \cdot AC^2 \geq (a + b + c)^2 \cdot \frac{16S^2}{3}, \qquad (S = S_{\Delta ABC}).$$

ანუ დასამტკიცებელია, რომ:

$$a + b + c \leq \frac{3 \cdot AB \cdot BC \cdot AC}{4S},$$

ეს ჭეშმარიტია, რადგან

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = R,$$

ხოლო ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ

$$a + b + c \leq 3R.$$

განხილული ამოცანები საშუალებას იძლევა, რომ მოხდეს მათი განზოგადება, ისე, რომ ამოხსნის გზა არ შევცვალოთ. კერძოდ:

ამოცანა7. მოცემულია $a, b, c, d > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2 + d^2} \geq (a + c)(b + d)$$

ამოცანის ამოხსნა წარიმართება ისე როგორც ამოიხსნება მეხუთე ამოცანა. განსხვავება მხოლოდ ის არის რომ დიაგონალებს შორის კუთხე უნდა იყოს90°.

განხილული მეექვსე ამოცანის განზოგადების შემდეგ მივიღებთ ამოცანებს 8, 9, 10 და 11, რომელთა ამოხსნა განხორციელდება იმავე მიდგომებით, რომლითაც ამოვხსენით მეექვსე ამოცანა, მაგრამ ზოგიერთი ამოცანის განხილვის დროს ვიყენებთ სხვადასხვა სახის გადასვლებს, რაზეც მივუთითებთ კონკრეტულ ამოცანებში.

ამოცანა 8. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2} \geq \frac{3(ab+ac+bc)^2}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}}$$

ამოცანის ამოხსნის საწყისი ეტაპი (ნახაზი და გვერდების სიგრძეები) წარიმართება ზუსტად ისე, როგორც მეექვსე ამოცანაში. ABC სამკუთხედის პერიმეტრი:

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}=\frac{2S}{r}=\frac{\sqrt{3}(ab+ac+bc)}{2r}\geq\frac{\sqrt{3}(ab+ac+bc)}{R}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}(ab+ac+bc)4S}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}}=\frac{3(ab+ac+bc)^2}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}}$$

გამოსახულების გარდაქმნისას ერთ-ერთი გადასვლის დროს გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძის შეფარდება ამავე სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის სიგრძესთან ნაკლები არ არის2-ზე, ანუ

$$\frac{R}{r}\geq 2.$$

შენიშვნა: R და r სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნულია სამკუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსთა სიგრძეები. ამასთან, გამოვიყენეთ ცნობილი ფორმულები:

$$2S=Pr$$

და

$$4SR=\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}$$

ამოცანა 9. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^2(2a^2+2b^2+2c^2+ab+$$
$$+bc+ca).$$

ამოცანის ამოხსნის საწყისი ეტაპი (ნახაზი და გვერდების სიგრძეები) წარიმართება ანალოგიურად როგორც მეექვსე ამოცანაში. ამის შემდეგ თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ ცნობილ ფაქტებს: $4SR = \sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}$

და

$$9R^2 \geq (\sqrt{a^2+ab+b^2})^2 + (\sqrt{b^2+bc+c^2})^2 + (\sqrt{c^2+ca+a^2})^2$$

მივიღებთ,რომ:

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) = 16S^2R^2 = 3(ab+bc+ca)^2R^2 \geq$$
$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2(2a^2+2b^2+2c^2+ab+bc+ca)}{3}.$$

შენიშვნა: $9R^2 \geq (\sqrt{a^2+ab+b^2})^2 + (\sqrt{b^2+bc+c^2})^2 + (\sqrt{c^2+ca+a^2})^2$.

ეს ფაქტი წარმოადგენს შემდეგი თეორემის შედეგს: თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ABC სამკუთხედი, რომლისთვისაც O წარმოადგენს მისი მედიანების გადაკვეთის წერტილს(სიმძიმის ცენტრს) ხოლო, P სიბრტყის ნებისმიერ წერტილს, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$OP^2 = \frac{1}{3}(PA^2+PB^2+PC^2) - \frac{1}{9}(AB^2+BC^2+AC^2).$$

თუ, P წერტილის როლში წარმოვიდგენთ, ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირის ცენტრს მივიღებთ, რომ:

$$OP^2 = \frac{1}{3}(R^2+R^2+R^2) - \frac{1}{9}(AB^2+BC^2+AC^2).$$

და რადგან

$$OP^2 \geq 0.$$

ე.ი.

$$R^2 \geq \frac{1}{9}(AB^2+BC^2+AC^2) .$$

ამოცანა 10. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a+b+c) \leq \sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3bc} + \sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3ac} +$$
$$+\sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3ab}$$

ამოცანის ამოხსნის საწყისი ეტაპი (ნახაზი და გვერდების სიგრძეები) წარიმართება ანალოგიურად როგორც მეექვსე ამოცანაში. თუ გავითვალისწინებთ,რომ O წერტილი

წარმოადგენს ABCსამკუთხედისთვის ტორიჩელის წერტილს ამასთან იმ ფაქტსაც, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება და იყოფა შეფარდებით 2: 1 წვეროს მხრიდან,ე.ი. ადგილი აქვს უტოლობას:

$$a + b + c \leq \frac{2}{3}(m_A + m_B + m_c) \ (1)$$

სადაც, $m_A; m_B; m_c$ წარმოადგენენ სამკუთხედ ABC-ში შესაბამისად $A; B$ და C წვეროებიდანგავლებული მედიანის სიგრძეებს (ნახ. 4.).

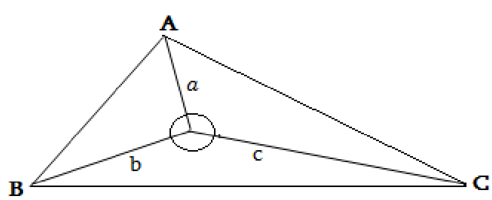
გამოვიყენოთ სამკუთხედში გავლებული მედიანის სიგრძის დასათვლელი ფორმულა.

$$m_a = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+ab+a^2+c^2+ac)-b^2-c^2-bc}{4}},$$

შესაბამისად

$$\frac{2}{3}m_a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+ab+a^2+c^2+ac)-b^2-c^2-bc}{4}} = \frac{1}{3}\sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3bc}$$

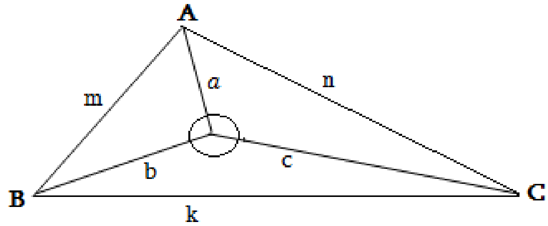
თუ, ანალოგიურ ტოლობებს ჩავწერთ სხვა ორი მედიანისთვისაც და შემდეგ სამივე მათგანს შევკრებთ (1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.



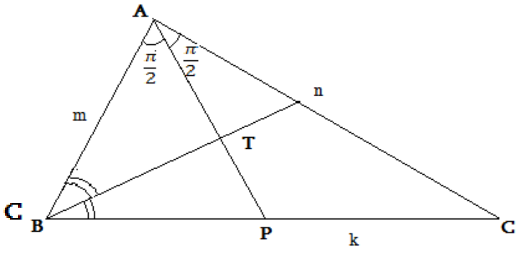
ნახ. 7.

ამოცანა11. ვთქვათ $a, b, c > 0$ და$a^2 + ab + b^2 = m^2$, $a^2 + ac + c^2 = n^2$,$b^2 + bc + c^2 = k^2$. დაამტკიცეთ, რომ საართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{m+n+k} \cdot (a+b+c) \leq \sqrt{mn(m+n-k)} + \sqrt{mk(m+k-n)} + \sqrt{nk(n+k-m)}.$$



ნახ. 8.



ნახ. 9.

ამოცანის ამოხსნის საწყისი ეტაპი (ნახაზი და გვერდების სიგრძეები) წარიმართება ანალოგიურად როგორც მეექვსე ამოცანაში. თუ გავითვალისწინებთ, რომ O წერტილი წარმოადგენს ABC სამკუთხედისთვის ტორიჩელის წერტილს ამასთან ვიგულისხმებთ,რომ სამკუთხედ ABC-ს ბისექტრისები იკვეთებიან Tწერტილში (ნახ.8 და ნახ.9),შევნიშნავთ,რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$a + b + c \leq AT + BT + CT. \quad (1)$$

გამოვთვალოთ AT. ვინაიდან, AP ბისექტრისაა, ამიტომ

$$BP = \frac{mk}{m+n} \text{და } PC = \frac{nk}{m+n},$$

ასევე BT წარმოადგენს ΔABP-ში ბისექტრისას, ანუ

$$\frac{TP}{AT} = \frac{\frac{mk}{m+n}}{m} = \frac{k}{m+n}$$

ე.ი.

$$\frac{TP}{AT} + 1 = \frac{k}{m+n} + 1$$

მივიღეთ,რომ:

$$\frac{AT}{AP} = \frac{m+n}{m+n+k}.$$

გავიხსენოთ APბისექტრისის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა.

$$AP = \frac{2mn}{m+n} cos\frac{\alpha}{2},$$

მაშინ

$$AT = \frac{AP \cdot (m+n)}{m+n+k} = \frac{2mncos\frac{\alpha}{2}}{m+n+k} \qquad (2)$$

ახლა გამოვიანგარიშოთ $cos\frac{\alpha}{2}$ m, n და k-ს საშუალებით.

BAC სამკუთხედში კოსინუსების თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$cos\alpha = \frac{m^2 + n^2 - k^2}{2mn}$$

ასევე $cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ ე.ი. $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2} = \frac{1+\frac{m^2+n^2-k^2}{2mk}}{2} = \frac{(m+n-k)(m+n+k)}{4mn}$, და რადგან $cos\frac{\alpha}{2} > 0$ ე.ი. $cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(m+n-k)(m+n+k)}{mn}}$. (2) ტოლობა გავიხსენოთ და მივიღებთ, რომ:

$$AT = \frac{2mncos\frac{\alpha}{2}}{m+n+k} = \frac{2mn}{m+n+k}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m+n-k)(m+n+k)}{mn}} = \sqrt{\frac{mn(m+n-k)}{m+n+k}}$$

თუ, ანალოგიურად გამოვიანგარიშებთ BT და CT მონაკვეთების სიგრძეებს, შედმგე შევკრებთ სამივე მიღებულ ტოლობას და გავითვალისწინებთ (1)-ს მივიღებთ,რომ:

$$a+b+c \leq \sqrt{\frac{mn(m+n-k)}{m+n+k}} + \sqrt{\frac{mk(m+k-n)}{m+n+k}} + \sqrt{\frac{kn(k+n-m)}{m+n+k}}$$

რაც წარმოადგენს დასამტკიცებელი უტოლობის ეკვივალენტურ უტოლობას.

განხილული ამოცანების ტიპოლოგიის გამოყენება შესაძლებელია მოსწავლეთა აქტიური, დამოუკიდებელი, შემოქმედებითი აზროვნების განვითარებისათვის. მასწავლებლის მიერ ამოცანების ტიპოლოგიის ცოდნა არის განმავითარებელი სწავლების განხორციელების მნიშვნელოვანი პირობა.

§2.3.მთელ რიცხვთა სიმრავლეში საოლიმპიადო შინაარსის მქონე განტოლებების ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების საშუალო სკოლაში სწავლების ზოგიერთი მეთოდიკური თავისებურება

განტოლებათა ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ცენტრალური ელემენტია მათში მოთავსებული ევრისტიკული ინფორმაციის გამოვლენა და გამოყენება, ე.ი. ისეთი ინფორმაციისა, რომელიც ხელს უწყობს განტოლების ამოხსნის გზის აღმოჩენას. სტანდარტული ფორმის განტოლებებისაგან განსხვავებით, არასტანდარტული განტოლებათა თავისებურებები განსაზღვრავენ ამოხსნის განსხვავებულ კერძო სახეებს.

განტოლებათა ამოხსნა მთელ ან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც შეიცავს ორ ან მეტ უცნობს, ზოგჯერ სტანდარტული, მეთოდებით ძალზედ რთულია ან მათი ამოხსნა საკმაოდ დიდი მოცულობისაა, რაც სირთულეს უქმნის მოსწავლეებს. ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ზოგიერთი სახის განტოლების ამოხსნის ერთ ხერხს, რომელიც დამყარებულია განტოლებებში შემავალი გამოსახულებების შეფასებაზე. უფრო მეტი გარკვეულობისთვის ვიტყვით, რომ განტოლებათა ამოხსნა მასში შემავალი გამოსახულებების შეფასებით გულისხმობს განტოლებაში შემავალი გამოსახულების შეფასებას ნაკლებობით, ან მეტობით, ან ნაკლებობით და მეტობით, ანუ ამ გამოსახულების მნიშვნელობათა არეს დადგენას, მაგრამ როცა ეს არ ხერხდება, საზღვრების დადგენას ნაკლებობით, ან მეტობით, ან ნაკლებობით და მეტობით. განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნა.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^2 = y^2 + 3\,y + 7.$$

როგორც განტოლებიდან ჩანს ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის სრულ კვადრატს შესაბამისად, ტოლობა რომ შესრულდეს მარჯვენა მხარეც უნდა წარმოადგენდეს იგივე ნატურალური რიცხვის კვადრატს. მაგრამ, თუ დავაკვირდებით მარტივად აღმოვაჩენთ რომ ტოლობის მარჯვენა მხარე მოექცევა ორ გამოსახულებას შორის, კერძოდ:

$$(y+1)^2 < y^2 + 3y + 7 < (y+3)^2$$

იმისთვის რომ განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$y^2 + 3y + 7 = (y+2)^2 \text{ და } x = y + 2.$$

განტოლებებიდან მარტივად მივიღებთ,რომ $y = 3$ და $x = 5$.

პასუხი: განტოლების ამონახსნია წყვილი: (5;3).

ამოცანა 2.ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^2 - x = y^2 + 4y + 5.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x^2 - x - 1 = y^2 + 4y + 4,$$

ანუ

$$x^2 - x - 1 = (y+2)^2.$$

განტოლებიდან ჩანს ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის სრულ კვადრატს შესაბამისად, ტოლობა რომ შესრულდეს ტოლობის მარცხენა მხარეც უნდა წარმოადგენდეს იგივე ნატურალური რიცხვის კვადრატს. მაგრამ, თუ დავაკვირდებით, აღმოვაჩენთ რომ ტოლობის მარცხენა მხარე მოთავსებულია შემდეგ ორ გამოსახულებას შორის, კერძოდ:

$$(x-1)^2 < x^2 - x - 1 < x^2 \text{ (როცა } x > 2\text{)}.$$

ანუ, როდესაც $x > 2$ განტოლების მარცხენა მხარე მოთავსებულია ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კვადრატებს შორის, მაშასადამე, ის ვერ იქნება რომელიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი,შესაბამისადგანტოლებას, რომელიც საწყისი განტოლების ტოლფასია ამონახსნი ვერ ექნება, ხოლო ის შემთხვევები როცა x=2 ან x=1 განვიხილოთ ცალკე:

თუ x=1, მაშინ, $x^2 - x - 1 = 1$ ანუ, შესაბამისად $(y+2)^2$=1. ამ განტოლებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს.

თუ x=2, მაშინ,$x^2 - x - 1$=2 ანუ, შესაბამისად $(y+2)^2$=2. ამ განტოლებასაც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს.

პასუხი: მოცემულ განტოლებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ გააჩნია.

ამოცანა 3. იპოვეთ $49x+51y=602$ განტოლებისამონახსნებინატურალურრიცხვთასიმრავლეში.

გვაქვს;

$$x=\frac{602-51y}{49}.$$

რადგან x, y ნატურალური რიცხვებია, ამიტომ

$$x=\frac{602-51y}{49}\geq 1.$$

საიდანაც,

$$1\leq y\leq 10\frac{43}{51}.$$

ყველა ვარიანტის გადარჩევის შედეგად დავადგენთ, რომ განტოლების ამონახსნია x=5, y=7.

ამოცანა 4.ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x^2+xy-y-2=0.$$

გამოვსახოთმოცემული განტოლებიდან y ცვლადი, გვაქვს:

$$y=\frac{2-x^2}{x-1}=-(x+1)+\frac{1}{x-1}. \qquad (x\neq 1).$$

რადგან x, y მთელი რიცხვებია, ამიტომ $\frac{1}{x-1}$ აგრეთვე მთელი უნდა იყოს. ამიტომ,

$$x-1=\pm 1.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ განტოლების ამონახსნებია წყვილები: (2, –2) და (0, –2).

ამოცანა 5. ამოხსენით განტოლება მარტივ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x^2-7x-144=y^2-25y.$$

ამოვხსნათ მოცემული განტოლება y ცვლადის მიმართ. მივიღებთ:

$$y=x+9 \text{ ან } y=16-x.$$

რამდენადაც კენტი x–თვის x + 9 ლუწია, ამიტომ ერთადერთი მარტივ რიცხვთა წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას არის (2, 11).

რადგან x, y მარტივი რიცხვებია, ამიტომ ტოლობიდან $y = 16 - x$, გვაქვს:

$$2 \le x \le 16, \quad 2 < y \le 16.$$

ვარიანტების გადარჩევით დავადგენთ განტოლების სხვა ამონახსნებს: (3, 13), (5,11), (11,5), (13,5).

ამოცანა 6.ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

ამოვხსნათ მოცემული განტოლება x ცვლადის მიმართ. მივიღებთ:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0.$$

ამ განტოლების დისკრიმინანტია $-3y^2 + 6y + 1$, რომელიც დადებითია მხოლოდ მაშინ, როცა y=0,1,2. რის შემდეგაც მარტივად დავადგენთ, რომ განტოლების ამონახსნებია: (1,2), (2,1) და (2,2).

ამოცანა 7. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 14 = y^3$$

განტოლების მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის სრულ კუბს. შესაბამისად, ტოლობა რომ შესრულდეს ტოლობის მარცხენა მხარეც უნდა წარმოადგენ-დეს იგივე ნატურალური რიცხვის კუბს. მაგრამ, თუ დავაკვირდებით აღმოვაჩენთ რომ ტოლობის მარცხენა მხარე მოთავსდება ორ გამოსახულებას შორის, კერძოდ:

$$(x+1)^3 < x^3 + 6x^2 + 10x + 14 < (x+3)^3.$$

განტოლებას რომ ჰქონდეს ამონახსნი აუცილებელია შესრულდეს ტოლობა:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 14 = (x+2)^3,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ x=3. ხოლო, y =5.

პასუხი: განტოლების ამონახსნია წყვილი: (3;5).

ამოცანა 8. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^3 + 3x^2 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 6.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ, ასე:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = y^3 + 6y^2 + 12y + 7,$$

ანუ,

$$(x+1)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 7,$$

მიღებული განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის სრულ კუბს. შესაბამისად, ტოლობა რომ შესრულდეს ტოლობის მარჯვენა მხარეც უნდა წარმოადგენდეს იგივე ნატურალური რიცხვის კუბს. მაგრამ, თუ დავაკვირდებით, აღმოვაჩენთ რომ, ტოლობის მარჯვენა მხარე მოთავსებულია ორ გამოსახულებას შორის, კერძოდ:

$$(y+2)^3 < y^3 + 6y^2 + 12y + 7 < (y+3)^3,$$

რაც ნიშნავს რომ, ის მოთავსებულია ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბებს შორის, შესაბამისად ისთავად ვერ იქნება რამე ნატურალური რიცხვის კუბი.

პასუხი: განტოლებას ამონახსნი არ გააჩნია.

ამოცანა 9. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^4 + 6x^2 = y^2 + 4y + 2.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x^4 + 6x^2 + 9 = y^2 + 4y + 11.$$

ანუ,

$$(x^2+3)^2 = y^2 + 4y + 11.$$

აქ,ისევე როგორც ზემოთ, შეიძლება შევნიშნოთ , რომ

$$(y+2)^2 < y^2 + 4y + 11 < (y+4)^2.$$

რადგანსაწყისი განტოლების ექვივალენტური$(x^2+3)^2 = y^2 + 4y + 11$ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის კვადრატს,ტოლობა რომ შესრულ-დეს აუცილებელია მარჯვენა მხარეც წარმოადგენდეს იგივე რიცხვისკვადრატს. შესაბამისად,მარჯვენა მხარის ორმხრივი შეფასებიდან აშკარაა რომ უნდა შესრულდეს ტოლობა:

$$y^2 + 4y + 11 = (y+3)^2 \rightarrow y = 1.$$

ე.ი.

$$(x^2+3)^2 = (y+3)^2 = 4^2 \rightarrow x = 1.$$

პასუხი: განტოლების ამონახსნია წყვილი (1;1).

ამოცანა 10. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^{4m} + 2x^{2m} + 8x^m = 4y^{2n} + 8y^n$$

ამოსახსნელი განტოლება გადავწეროთ ასე :

$$x^{4m} + 2x^{2m} + 8x^m + 4 = 4y^{2n} + 8y^n + 4,$$

რაც იგივეა:

$$x^{4m} + 2x^{2m} + 8x^m + 4 = (2y^n + 2)^2.$$

რადგან ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ნატურალური რიცხვის კვადრატს, ამიტომ ტოლობა რომ შესრულდეს მარცხენა მხარეც უნდა წარმოადგენდეს იგივე რიცხვის კვადრატს, მაგრამ:

$$(x^{2m}+1)^2 < x^{4m} + 2x^{2m} + 8x^m + 4 < (x^{2m}+3)^2$$

ამ ორმაგი უტოლობის მარცხენა მხარის ჭეშმარიტება იოლი საჩვენებელია,ხოლო, მარჯვენა მხარეს რაცშეეხება, თუ გავამარტივებთ, მივიღებთ,რომ :

$$4x^{2m} + 5 > 8x^m,$$

ანუ

$$4x^m(x^m - 2) + 5 > 0,$$

რაც ჭეშმარიტია ცვლადთა ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისთვის.

აქედან გამომდინარე, საწყის განტოლებას რომ ჰქონდეს ამონახსნი აუცილებელია შესრულდეს ტოლობა:

$$x^{4m} + 2x^{2m} + 8x^m + 4 = (x^{2m}+2)^2.$$

საიდანაც ვღებულობთ რომ:

$$2x^{2m} = 8x^m \rightarrow x^m = 4 \rightarrow x = 2 \text{ და } m = 2, \quad \text{ან} \quad x = 4 \text{ და } m = 1.$$

ა) თუ, $x = 2$ და $m = 2$, მაშინ

$$(2y^n + 2)^2 = (x^{2m}+2)^2 = 18^2 \rightarrow y^n = 8 \rightarrow y = 2 \text{ და } n = 3 \text{ ან } y = 8 \text{ და } n = 1.$$

ბ) თუ$x = 4$ და $m = 1$, მაშინ

$$(2y^n + 2)^2 = (x^{2m}+2)^2 = 6^2 \rightarrow y^n = 2 \text{ საიდანაც} y = 2 \text{ და } n = 1.$$

პასუხი: განტოლების ამონახსნებია შემდეგი ოთხეულები:

ა) $x = 2, m = 2, y = 2, n = 3$; ბ) $x = 2, m = 2, y = 8, n = 1$; გ) $x = 4, m = 1, y = 2, n = 1$.

ამოცანა 11. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$\left(x^2+4\right)\left(y^2+1\right)=8xy.$$

რადგან (0, 0) განტოლების ამონახსნს არ წარმოადგენს, ამიტომ განტოლების ორთავე მხარე გავყოთ $xy \neq 0$. გვაქვს:

$$\frac{x^2+4}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}=8,$$

საიდანაც,

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)=8,$$

რადგან x>0, y>0, ამიტომ

$$x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4, \quad y+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}=2.$$

ამიტომ ნამრავლი

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)\geq 4\cdot 2=8.$$

გვაქვს:

$$x+\frac{4}{x}=4, \quad y+\frac{1}{y}=2.$$

საიდანაც მარტივად დავადგენთ, რომ განტოლების ამონახსნია წყვილი (2, 1).

განტოლებების მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამოხსნის ძიების პროცესის წარმართვა გადმოცემული სახით იწვევს მოსწავლეთა დაინტერესებას და ხელს უწყობს ამოხსნის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის განხილული სპეციალური ხერხების პრაქტიკაში დანერგვასა და გამოყენებას.

§2.4.საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ზოგიერთი სახის ალგებრული ამოცანების ამოხსნა გეომეტრიული ინტერპრეტაციით და მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანისაშუალო სკოლაში

მათემატიკის სწავლებას საშუალო სკოლებში თითქმის ერთნაირი პრობლემები აქვს მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში. პირველ რიგში ეს გამოწვეულია იმით, რომ სხვადასხვა ქვეყნებში ასწლეულების მანძილზე მათემატიკის სასკოლო კურსში ისწავლება თითქმის ერთი და იგივე საკითხები, რომელთა სწავლებისადმი ჩამოყალიბდა გარკვეული შტამპები, გამოიკვეთა საკითხთა ნუსხა, რომელთაც ადვილად ძლევს მოსწავლეთა უმრავლესობა, ასევე გამოიკვეთა ის საკითხები, რომელთა სწავლება მოსწავლეებისათ-ვის ტრადიციულად რთულია. ხშირად ასეთი საკითხების სწავლებას მასწავლებლებლე-ბი ან საერთოდ გვერდს უვლიან ან ნაკლებ ყურადღებას უთმობენ. მაგალითად, მათემატიკის სწავლების მდგომარეობის კრიტიკული ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოსწავ-ლეთა უმეტესობა სუსტად ფლობს ამოცანების ამოხსნის ხერხებს, განსაკუთრებით ეს ეხება გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებს. საშუალო სკოლის მათემატიკის მაღალი კლასები სასწავლო სახელმძღვანელოებში საჭიროზე ნაკლები დრო აქვს დათმობილი გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნას, რასაც ვერ ვიტყვით გეომეტრიული მასალის თეორიულ საკითხებზე. საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლებისათვის მნიშვნელოვანია მეცნიერულად დადგენილი სწორი თანაფარდობის დამყარება თეორი-ული და პრაქტიკული საკითხების განხილვას შორის. ეს პრობლემა ცხადია უნდა გადაწყდეს მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის დროს. ამოცანების ამოხსნის უნარი და ჩვევები დამოკიდებულია არა მარტო ამოხსნილი ამოცანების რიცხვზე, არამედ ამოცანების შინაარსსა და ამოხსნის სპეციალურ ხერხებზე.

საშუალო სკოლის მიზნია მოსწავლეებს ჩამოუყალიბოს სწავლა-აღზრდისადმი შეგნებული დამოკიდებულება, მოახდინოს მათი ზნეობრივი და ინტელექტუალური ფორმირება და ხელი შეუწყოს მათში მოქალაქეობრიობის ჩამოყალიბებას. ამ მიზნების მისაღწევად საჭიროა, რომ მოსწავლეებს ჩამოუყალიბდეთ ლოგიკური აზროვნება,

შემეცნებითი აქტივობა, ობიექტური სინამდვილის აღქმის უარი, რაც მოითხოვს სპეციალურ გონებრივ ვარჯიშს. მოსწავლეებში ამ უნარების ჩამოყალიბებაში ყველა სასწავლო საგანს შეაქვს თავისი წვლილი, მაგრამ გადამწყვეტი მნიშვნელობა ამ კუთხით მათემატიკას ენიჭება. მათემატიკის სწავლების დროს მოსწავლეებში ამ უნარების განმტკიცება ყველაზე უკეთ ამოცანების ამოხსნის დროს ხდება. ამიტომ დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით უნდა მოხდეს ისეთი სახის ამოცანების შერჩევა, რომელიც სრულ შესაბამისობაში იქნება მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებებთან, მოახდენს შესასწავლი მასალის გაღრმავება-გაფართოებას, შესაბამისიობაშია მოსწავლეთა ინტე-ლექტუალური განვითარების დონესთან და ამავე დროს აქვს განმავითარებელი ფუნქცია. ასეთი სახის ამოცანათა სისტემების შედგენა მარტივი არ არის და მოითხოვს საკმაოდ მაღალ პროფესიულ მომზადებას როგორც მეთოდიკური, ისე საგნობრივი თვალსაზრისით. სპეციალისტებისათვის სადაო არ არის, რომ დასმული ამოცანების გადაწყვეტას ყველაზე უკეთ ახდენს გეომეტრიული შინაარსის მქონე ამოცანები, რომლებიც მოითხოვენ ამოხსნისათვის სპეციალური სახის ძიებას. მაგრამ ისიც უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ სახის ამოცანების ამოხსნა ჩვეულებრივი სასწავლო პროგრამით მომუშავე სკოლებში დიდი სირთულეებთან არის დაკავშირებული, რაც უმრავლეს შემთხვევაში უკავშირდება მოსწავლეთა მომზადების დაბალ დონეს და ზოგჯერ მასწავ-ლებელთა პროფესიონალიზმსაც. სკოლებში გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისადმი მოსწავლეთა უმრავლესობას უარყოფითი დამოკიდებულება აქვს, რაც პირველ რიგში გამოწვეულია მოსწავლეთა აბსტრაქტული აზროვნების დაბალი დონით, ისინი ვერ ახდენენ დაამყარონ დამოკიდებულებები შესასწავლი კონკრეტული გეომეტრიული ობიექტების ელემენტებს შორის მაშინაც კი, როცა თეორიულად მათ ეს შესანიშნავად იციან და აყალიბებენ კიდეც თეორემებისა თუ თვისებების სახით. მოსწავლეებს რადიკალურად განსხვავებული დამოკიდებულებები აქვთ ალგებრული და არითმეტი-კული მასალის შესწავლის დროს. ისინი ცდილობენ ალგებრული და არითმეტიკული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენონ მათთვის ცნობილი თეორიული მასალა, ადრე ამოხსნილი ამოცანები, მოსწავლეები ეკითხებიან და კონსულტაციებს

გადიან ერთმანეთთან. მოკლედ რომ ვთქვათ, გაცილებით მეტ დაინტერესებას იჩენენ ალგებრული და არითმეტიკული შინაარსის ამოცანების ამოხსნის მიმართ და შედარებით უკეთ გამოსდით, ვიდრე გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნა.

გავითვალისწინეთ, რა აღნიშნული მდგომარეობა, გამოვთქვით ჰიპოთეზა, რომ მოსწავლეთა მათემატიკით დაინტერესებას გააძლიერებდა ისეთი სახის საოლიმპიადო ამოცანები, რომელებიც თავისი შინაარსით ალგებრულია, ხოლო მათი ამოხსნისათვის გაცილებით კარგ შედეგს იძლევა და მიზანშეწონილია გეომეტრიული მეთოდების და მიდგომების გამოყენება, ვიდრე ალგებრული მეთოდები. ასეთი მიდგომით მიზნად დავისახეთ მოსწავლეებისათვის იმ დაძაბულობის მოხსნა, რომელიც თან ახლავს გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას და დავანახეთ გეომეტრიული მასალის შესწავლის აუცილებლობა, რომ ზოგჯერ გეომეტრიული მიდგომებით მარტივად შესაძლებელია ალგებრული ამოცანების ამოხსნა. ასეთი მიდგომებით მარტივად ვახდენთ გადასვლას საოლიმპიადო ალგებრული შინაარსის მასალის განხილვიდან საოლიმპიადო გეომეტ-რიული შინაარსის ამოცანებზე, რაც საშუალებას იძლევა მივიღოთ მაღალი შედეგები ამ კუთხით. ჩვენი ვარაუდების შესამოწმებლად განხილული მიდგომები გამოვიყენეთ მათემატიკის ჩვეულებრივი პროგრამით მომუშავე სკოლებში, რომელთათვისაც შევადგინეთ ისეთი საოლიმპიადი სირთულის მქონე ალგებრული ამოცანები, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური გეომეტრიული მიდგომები და მათი ჩართვა შესაძლებელია სასწავლო პროცესში კონკრეტული სასწავლო თემების გავლის დროს, არ მოითხოვს დამატებით სასწავლო დროის გამოყოფას და აქვს დიდი განმავითარებელი ფუნქცია. დისერტაციაში განხილული გვაქვს ასეთი ამოცანები, რომლებიც ეხება სხვა-დასხვა სასწავლო თემას, მოყვანილია მათი ამოხსნები და ჩამოყალიბებულია მეთოდუ-რი რეკომენდაციები მასწავლებლებისათვის, რომელიც დაეხმარება მასწავლებლებს სასწავლო პროცესის დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით წარმართვაში და შესაძლებლობას მისცემს მათ შეადგინონ მსგავსი ამოცანები სხვადასხვა თემებისათვის. განვიხილოთ ზოგიერთი ასეთი შინაარსის ამოცანა. ამოცანათა შორის გამოვყავით ის კლასი, რომელიც უკავშირდება ალგებრული გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი

მნიშვნელობების პოვნას, რომელიც ჩავთვალეთ პრიორიტეტულად, რადგან ამ სახის საკითხების განხილვა დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტების საშუალო სკოლის პროგრამიდან ამოღების შემდეგ აღარ განიხილება.

ამოცანა 1. ცნობილია, რომ $x+2y+3z=1$. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს გამოსახულებამ $x^2+y^2+z^2$?

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. გავავლოთ α სიბრტყე, რომლის განტოლებაა $x+2y+3z=1$ გამოსახულების $x^2+y^2+z^2$ რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია კოორდინატთა O სათავიდან α სიბრტყეში მდებარე (x,y,z) წერტილამდე მანძილის კვადრატის. რადგან კოორდინატთა სათავიდან α სიბრტყემდე მანძილი არ აღემატება კოორდინატთა სათავიდან $x+2y+3z=1$ სიბრტყემდე მანძილს, ამიტომ $x^2+y^2+z^2$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა პირობით $x+2y+3z=1$ მიიღწევა მაშინ, როცა წერტილი (x,y,z) წარმოადგენს O წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეს. ეს დაშორება გამოითვლება წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულით, კერძოდ $M(x_0,y_0,z_0)$ წერტილიდან $Ax+By+Cz+D=0$ სიბრტყემდე d მანძილის კვადრატი გამოითვლება ფორმულით:

$$d^2=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}.$$

მივიღებთ:

$$\frac{1}{1^2+2^2+3^2}=\frac{1}{14}.$$

ამოცანა 2. იპოვეთ x^2+y^2 გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $|x-y|\le 2$ და $|3x+y|\le 6$.

წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებს

$$\begin{cases}|x-y|\le 2\\|3x+y|\le 6\end{cases}$$

უტოლობათა სისტემას, წარმოადგენს ორი ზოლის თანაკვეთას, რომელიც შედგება პარალელური წრეების ორი წყვილისაგან. ამიტომ უტოლობათა სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს $ABCD$ პარალელოგრამის საზღვარი და მისი შიგა არე, სადაც წვეროს კოორდინატების გამოთვლა ხდება განტოლებათა სისტემების ამოხსნის შედეგად:

პარალელოგრამის A წვეროს კოორდინატები გამოითვლება სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

პარალელოგრამის B წვეროს კოორდინატები გამოითვლება სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

პარალელოგრამის C წვეროს კოორდინატები გამოითვლება სისტემის ამოხსნით:

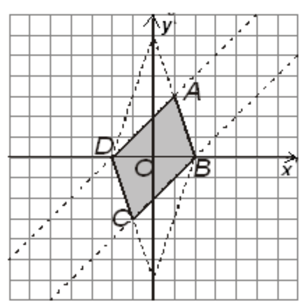
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + y = -6, \end{cases}$$

პარალელოგრამის D წვეროს კოორდინატები გამოითვლება სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x + y = -6. \end{cases}$$

ამ სისტემების ამოხსნით მარტივად ვიპოვით, რომ პარალელოგრამის წვეროების კოორდინატებია:

$$A(1,3), B(2,0), C(-1,-3), D(-2,0).$$



ნახ.10.

ჩვენი ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს აგებული პარალელოგრამის საზღვრის ან მისი შიგა არის ყველაზე დაშორებული (x, y) წერტილიდან/წერტილებიდან კოორდი-

ნატთა O სათავემდე მანძილის კვადრატი (ნახ.10). ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი წერტილებია A და C წვეროები.

$$OA^2 = OC^2 = 1^2 + 3^2 = 10.$$

ამოცანა 3. ვთქვათ x, y, z –დადებითი რიცხვებია და $xyz(x+y+z)=1$. იპოვეთ $(x+y)(x+z)$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$a = y+z, \quad b = x+z, \quad c = x+y, \quad p = x+y+z.$$

განვიხილოთ სამკუთხედი, რომლის გვერდებია a, b და c. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი სამკუთხედი არსებობს, რადგან შესრულებულია სამკუთხედის უტოლობა. ამ სამკუთხედის პერიმეტრია $2p$. მისი ფართობი აღვნიშნოთ S –ით. ჰერონის ფორმულის თანახმად:

$$S^2 = p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right) = \left(x+y+z\right)xyz = 1,$$

ამიტომ

$$(x+y)(x+z) = bc \geq 2S = 2.$$

ტოლობა მიიღწევა მართკუთხა სამკუთხედისათვის. მაგალითად,

$$b = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad c = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad a = \frac{5\sqrt{6}}{6}, \quad \left(a^2 = b^2 + c^2\right).$$

შესაბამისად,

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

ამოცანა 4. არაუარყოფითი x, y, z რიცხვები აკმაყოფილებენ უტოლობებს: $5 \leq x, y, z \leq 8$. იპოვეთ $S = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4$ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

გამოსახულება გარდავქმნათ ასე:

$$S=4x^2y^2-\left(x^2+y^2-z^2\right)^2=\left(2xy-x^2-y^2+z^2\right)\left(2xy+x^2+y^2-z^2\right)=$$
$$=\left(\left(x+y\right)^2-z^2\right)\left(z^2-\left(x-y\right)^2\right)=\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)\left(x-y+z\right)\left(y+z-x\right).$$

განვიხილოთ სამკუთხედი გვერდებით x, y, z. ასეთი სამკუთხედი არსებობს, რადგან სამკუთხედის უტოლობა შესრულებულია $5 \le x, y, z \le 8$ პირობებით. ვთქვათ, მისი ფართობია s. მაშინ, ჰერონის ფორმულიდან გვაქვს:

$$S=\left(x+y+z\right)\left(x+y-z\right)\left(x-y+z\right)\left(y+z-x\right)=2p\left(2p-2z\right)\left(2p-2y\right)\left(2p-2x\right)=$$
$$=16p\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left(p-z\right)=16s^2.$$

მოვახდინოთ შეფასება ზემოდან. ვთქვათ, x–სამკუთხედის უმცირესი გვერდია. მაშინ გვერდებს შორის კუთხეები არ აღემატება 60^0–ს და უდიდესი ფართობი ექნება 8–ის ტოლი გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედს, ანუ როცა $x=y=z=8.$

ამ შემთხვევაში S გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა ტოლია:

$$S=\left(8+8+8\right)\left(8+8-8\right)\left(8+8-8\right)\left(8+8-8\right)=24\cdot 8\cdot 8\cdot 8=12288.$$

მოვახდინოთ შეფასება ქვემოდან. ვთქვათ, x–სამკუთხედის უდიდესი გვერდია. თუ მის პირდაპირ მდებარე კუთხე მახვილია, მაშინ ის 60^0–ზე ნაკლები არ არის, რაც ნიშნავს, რომ უმცირესი ფართობი ექნება 5–ის ტოლი გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედს, ანუ როცა $x=y=z=5$.

ამ შემთხვევაში S გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა ტოლია:

$$S=\left(5+5+5\right)\left(5+5-5\right)\left(5+5-5\right)\left(5+5-5\right)=15\cdot 5\cdot 5\cdot 5=1875.$$

თუ სამკუთხედის უდიდესი x გვერდის პირდაპირ მდებარე კუთხე ბლაგვია, მაშინ კოსინუსების თეორემიდან მივიღებთ, რომ ამ კუთხისათვის უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება მაშინ, როცა $x=8$, ხოლო $y=z=5$. ამ შემთხვევაში x, y, z–ის მიღებული მნიშვნელობებისათვის S გამოსახულების მნიშვნელობა ტოლია:

$$S=\left(8+5+5\right)\left(5+5-8\right)\left(8+5-5\right)\left(8+5-5\right)=18\cdot 2\cdot 8\cdot 8=2304>1875.$$

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ S გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა ტოლია 1875, ხოლო უდიდესი მნიშვნელობაა 12288.

ამოცანა 5. იპოვეთ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ გამოსახულება $\sqrt{1-x^2}$, რომელიც განსაზღვრულია $[-1;1]$ სეგმენტზე. რაც ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი φ კუთხე, რომ $x=\cos\varphi$. საიდანაც, $\sqrt{1-x^2}=\sin\varphi$. ანალოგიურად, $y=\cos\psi$, $\sqrt{1-y^2}=\sin\psi$.

ცხადია, რადგან $x=\cos\varphi$, $\sqrt{1-x^2}=\sin\varphi$, $y=\cos\psi$, $\sqrt{1-y^2}=\sin\psi$, ამიტომ გვაქვს:

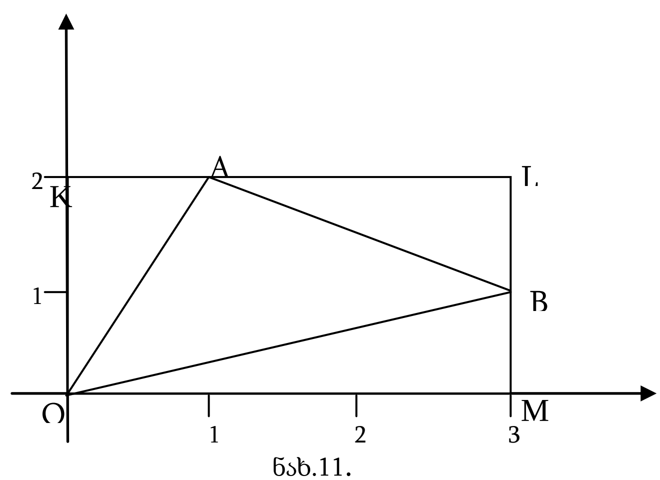
$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi=\sin(\varphi+\psi)\le 1.$$

ამიტომ მოცემული გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობაა 1. x და y –ის მნიშვნე–ლობებად შეიძლება ავიღოთ: $x=0$, $y=1$. ამ შემთხვევაში მოცემული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობაა 1.

ამოცანა 6. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$arctg1+arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.$$

განვიხილოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე და ავაგოთ $OKLM$ მართკუთ–ხედი, სადაც $O(0,0), K(0,2), L(3,2), M(3,0)$. $OKLM$ მართკუთხედში ჩავხაზოთ OAB სამკუთხედი, სადაც $A(1,2), B(3,1)$. (ნახ.11).



ნახ.11.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$AK=1, OK=2, BM=1, OM=3, OA=\sqrt{5}, AB=\sqrt{5}, OB=\sqrt{10}.$$

ასევე, OAB სამკუთხედი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედია მართი OAB კუთხით.

მართკუთხა OKA სამკუთხედიდან

$$tg\angle KOA = \frac{AK}{OK} = \frac{1}{2}.$$

საიდანაც,

$$\angle KOA = arctg\,\frac{1}{2}.$$

ანალოგიურად, ტოლფერდა მართკუთხა OAB სამკუთხედიდან

$$tg\angle AOB = \frac{OA}{AB} = 1.$$

საიდანაც,

$$\angle AOB = arctg 1.$$

ასევე, მართკუთხა OMB სამკუთხედიდან

$$tg\angle BOM = \frac{BM}{OM} = \frac{1}{3}.$$

საიდანაც,

$$\angle BOM = arctg\,\frac{1}{3}.$$

რადგან,

$$\angle KOM = \angle KOA + \angle AOB + \angle BOM = \frac{\pi}{2}.$$

ამიტომ,

$$arctg\,\frac{1}{2} + arctg 1 + arctg\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

ამოცანა 7. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$ctg 30^0 + ctg 75^0 = 2.$$

განვიხილოთ ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფერდებს შორის B კუთხე 30^0. A და C კუთხეები 75^0. (ნახ. 12).

სამკუთხედის A წვეროდან BC ფერდზე დავუშვათ AK სიმაღლე. მართკუთხა AKB სამკუთხედიდან

$$ctg30^0 = \frac{BK}{AK}.$$

ანალოგიურად, მართკუთხა AKC სამკუთხედიდან

$$ctg75^0 = \frac{KC}{AK}.$$

გვაქვს,

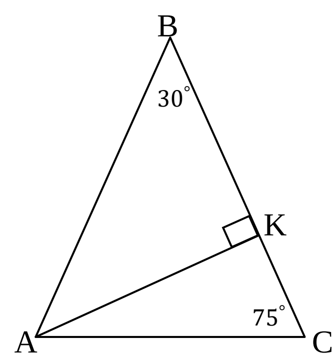
$$ctg30^0 + ctg75^0 = \frac{BK}{AK} + \frac{KC}{AK} = \frac{BK+KC}{AK} = \frac{BC}{AK} = \frac{AB}{AK}.$$

რადგან მართკუთხა სამკუთხედში 30^0–იანი კუთხის პირდაპირ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ამიტომ

$$AB = 2\cdot AK.$$

საბოლოოდ გვაქვს:

$$ctg30^0 + ctg75^0 = \frac{AB}{AK} = \frac{2\cdot AK}{AK} = 2.$$



ნახ. 12.

ამოცანა 8. იპოვეთ $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$ $(a>0,\quad b>0,\quad c>0)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ b სიგრძის DE მონაკვეთი. აღვმართოთ მისი ბოლოებიდან $DA=a$ და $EB=c$ მართობები ისე, რომ A და B წერტილები DE წრფის სხვადასხვა მხარეს იყოს (ნახ.13).

ვთქვათ, C წერტილი DE მონაკვეთის წერტილია და $DC = x.$ მაშინ $EC = b - x$. მართკუთხა ACD და BCE სამკუთხედებიდან მივიღებთ:

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad BC = \sqrt{(b - x)^2 + c^2}.$$

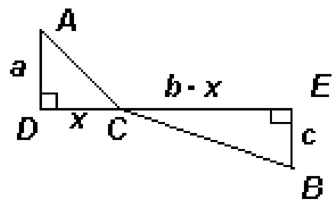
რადგან

$$AC + BC \geq AB,$$

მაშინ მოცემული ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა ტოლია

$$AB = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}.$$

უმცირესი მნიშვნელობა მიიღწევა მაშინ, როცა C წერტილი ძევს AB მონაკვეთზე.



ნახ. 13.

ამ ამოცანაში შესაძლებელია ფუნქციის არა მარტო უმცირესი მნიშვნელობის პოვნა, არამედ ვიპოვოთ არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომელზეც მიიღწევა ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

მართლაც, რადგან ACD და BCE სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ

$$\frac{x}{b - x} = \frac{a}{c}.$$

საიდანაც,

$$x = \frac{ab}{a + c}.$$

ამოცანა 9. გამოთვალეთ $\cos 36^0$ და $\cos 72^0$.

განვიხილოთ ტოლფერდა ABC სამკუთხედი $BC = 1$-ის ტოლი ფუძით და A წვეროსთან 36^0 -ის ტოლი კუთხით. გავავლოთ BK და შევნიშნოთ, რომ

$$\angle ABK = \angle A = 36^0, \quad \angle BKC = \angle C = 72^0.$$

რაც ნიშნავს $AK = BK = BC = 1$, ხოლო $AB = 2\cos 36^0 = 2x$. ე.ი. $x = \cos 36^0$. (ნახ. 14).

სამკუთხედის ბისექტრისის თვისების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC},$$

ანუ

$$2x = \frac{1}{2x-1}.$$

საიდანაც მივიღებთ განტოლებას: $4x^2 - 2x - 1 = 0$. რომლის ფესვებიდან გამოდგება ის, რომელიც დადებითია, რადგან $\cos 36^0 > 0$. ე.ი.

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos 36^0.$$

ასევე,

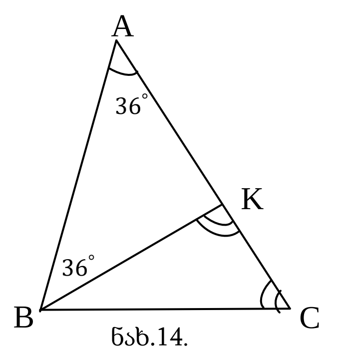
$$BC = 2AB\cos 72^0.$$

ანუ გვაქვს:

$$4\cos 36^0 \cos 72^0 = 1.$$

საიდანაც

$$\cos 72^0 = \frac{1}{4\cos 36^0} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

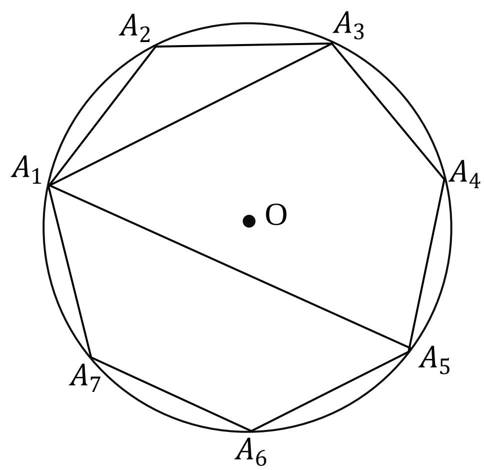


ნახ.14.

ამოცანა 10. დაამტკიცეთ რიცხვითი ტოლობა

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

წრეწირში ჩავხაზოთ წესიერი $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ შვიდკუთხედი. განვიხილოთ $A_1A_3A_4A_5$ ოთხკუთხედი. მონაკვეთები A_1A_3, A_3A_4, A_4A_5 და A_1A_5 წარმოადგენენ წრეწირში ჩახაზული $A_1A_3A_4A_5$ ოთხკუთხედის გვერდებს, ხოლო A_1A_4 და A_3A_5 ამავე ოთხკუთხედის დიაგონალებს (ნახ. 15).



ნახ. 15.

პტოლემეოსის თეორემის თანახმად წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის დიაგონალების ნამრავლი მისი მოპირდაპირე გვერდების ნამრავლის ტოლია, ამიტომ გვაქვს:

$$A_1A_4 \cdot A_3A_5 = A_1A_3 \cdot A_4A_5 + A_3A_4 \cdot A_1A_5.$$

მეორესმხრივ, განვიხილოთ $A_1A_3O,\ A_3A_5O,\ A_3A_4O,\ A_5A_4O,\ A_1A_4O,\ A_1A_5O$ სამკუთხე-დებიდავისარგებლოთ სინუსების თეორემით, მივიღებთ:

$$A_1A_3 = 2R\sin\frac{3\pi}{7},\ A_3A_5 = 2R\sin\frac{3\pi}{7},\ A_3A_4 = 2R\sin\frac{2\pi}{7},$$
$$A_5A_4 = 2R\sin\frac{2\pi}{7},\ A_1A_4 = 2R\sin\frac{\pi}{7},\ A_1A_5 = 2R\sin\frac{\pi}{7}.$$

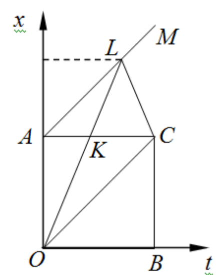
სადაც, R წესიერ შვიდკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია. მიღებული ტოლობების ჩასმით პტოლემეოსის თეორემის გამომსახველ ფორმულაში და $2R$–ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}.$$

თუ მიღებული ტოლობის ორთავე მხარეს გავყოფთ $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$ –ზე მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ამოცანა 11. უდაბნოში თანაბრად მოძრაობს აქლემების 1 კმ–იანი ქარავანი. გამცილებელმა გაიარა ქარავნის თავიდან ბოლომდე და დაბრუნდა უკან. ამ დროში ქარავანმა გაიარა 1 კმ. რა მანძილი გაიარა გამცილებელმა, თუ ის თანაბარი სიჩქარით მოძრაობდა?

ჩავთვალოთ ქარავანის სიჩქარე 1–ის ტოლად. დავხაზოთ ქარავანის მოძრაობის გრაფიკი. გრაფიკზე OC ქარავნის ბოლოა, ხოლო AM მისი დასაწყისი. OA მანძილი 1–ის ტოლია. (ნახ. 16).



ნახ. 16.

ვთქვათ, AOC კუთხის ბისექტრისა AC გვერდს კვეთს K წერტილში, ხოლო AM –ს L წერტილში. შევნიშნოთ, რომ

$$\angle AOC = \angle ACL = \angle ALK = \angle LAK = 22,5^0 + 45^0 = 67,5^0.$$

ე.ი. CLK სამკუთხედი ტოლფერდაა.

ეს ნიშნავს, რომ OLC ტეხილი წარმოადგენს გამცილებლის მოძრაობის გრაფიკს. ამიტომ, გამცილებლის გავლილი მანძილია:

$$OA + 2\cdot\frac{AL}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

ამოცანა 12. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a. \end{cases}$$

განსაზღვრეთ მისი გეომეტრიული აზრი.

1. ვთქვათ, $abc \neq 0.$ გავამრავლოთ პირველი განტოლება c –ზე, მეორე განტოლენა b –ზე, მესამე განტოლება a –ზე. მიღებული განტოლებებიდან პირველ განტოლებას მივუმატოთ მეორე და გამოვაკლოთ მესამე. მივიღებთ:

$$2bcx = c^2 + b^2 - a^2.$$

ანალოგიურად ვიპოვით y და z –ს.

2. თუ $a = b = 0$, მაშინ $c = 0$ და x, y და z ნებისმიერი რიცხვებია.

3. თუ $a = 0,\ b, c \neq 0$, მაშინ $bx = c, \left(b^2 - c^2\right)x = 0.$ ცხადია $b = \pm c,\quad x = \pm 1,$ ხოლო დანარჩენ შემთხვევებში ამონახსნი არა აქვს. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $y \pm z = 0.$

საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ:

როცა $abc \neq 0,$ მაშინ $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\quad y = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\quad z = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$

როცა $a = 0,$ თუ $b = c \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (1, t, -t);$

როცა $a = 0$, თუ $b = -c \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (1, t, t);$

როცა $b = 0,$ თუ $a = c \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (t, 1, -t);$

როცა $b = 0,$ თუ $a = -c \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (t, 1, t);$

როცა $c = 0,$ თუ $a = b \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (t, -t, 1);$

როცა $c = 0,$ თუ $a = -b \neq 0$, მაშინ $(x, y, z) = (t, t, 1);$

როცა $a = b = c = 0,\ x, y, z$ –ნებისმიერი რიცხვებია;

დანარჩენ შემთხვევებში სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

სისტემის გეომეტრიული აზრი მდგომარეობს შემდეგში: თუ a, b, c სამკუთხედის გვერდებია, მაშინ x, y, z შესაბამისად ამ გვერდების პირდაპირ მდებარე კუთხეების კოსინუსებია, რაც ასახვას პოულობს სისტემის ამონახსნების პოვნის პროცესშიც.

ამოცანა 13. დადებითი a, b, c, x, y, z რიცხვები ისეთია, რომ სრულდება ტოლობები

$$x^2+xy+y^2=a^2,$$
$$y^2+yz+z^2=b^2,$$
$$x^2+xz+z^2=c^2.$$

გამოსახეთ $xy+yz+xz$ გამოსახულება a, b და c რიცხვებით.

სიბრტყეზე ავაგოთ რაიმე O წერტილი და ამ წერტილიდან გავავლოთ OA, OB და OC სხივები, რომელთა შორის კუთხეები წყვილ–წყვილად 120^0–ის ტოლია და ამ სხივებზე გადავდოთ მონაკვეთები $OA=x, OB=y$ და $OC=z$. კოსინუსების თეორემის თანახმად OAB სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$AB^2=x^2+y^2-2xy\cos120^0=x^2+y^2+xy=a^2,$$

ანალოგიურად, OBC და OAC სამკუთხედებიდან შესაბამისად მივიღებთ:

$$BC^2=y^2+z^2-2yz\cos120^0=y^2+z^2+yz=b^2,$$

$$AC^2=x^2+z^2-2xz\cos120^0=x^2+z^2+xz=c^2.$$

ე.ი. ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b და c.

რადგან,

$$=\frac{1}{2}\left(xy+yz+xz\right)\sin120^0=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(xy+yz+xz\right).$$

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OAc}=\frac{1}{2}xy\sin120^0+\frac{1}{2}zy\sin120^0+\frac{1}{2}xz\sin120^0=$$

საიდანაც,

$$xy+yz+xz=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{ABC}.$$

რადგან, ABC სამკუთხედის გვერდებია a, b და c, ამიტომ ამ სამკუთხედის ფართობი შეგვიძლია გამოვთვალოთ ჰერონის ფორმულით, გვაქვს:

$$S_{ABC}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)},$$

სადაც, $p=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$.

ამიტომ, საბოლოოდ, გვაქვს:

$$xy+yz+xz=\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{4}{3}\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ამოცანა 14. დადებითი $A,\ B,\ C$ და D რიცხვები ისეთია, რომ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x^2+y^2=A, \\ |x|+|y|=B \end{cases}$$

აქვს m ამონახსნი, ხოლო განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C, \\ |x|+|y|+|z|=D \end{cases}$$

აქვს n ამონახსნი. ცნობილია, რომ $m>n>1$. იპოვეთ m და n.

პირველი განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება წარმოადგენს წრეწირს, რომლის ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში და რადიუსია $\sqrt{A}$. მეორე განტოლებას აკმაყოფილებს კვადრატი, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და დიაგონალები საკოორდინატო ღერძების ნაწილებია. ამიტომ პირველ სისტემას იმის მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას ღებულობენ A და B რიცხვები ან არ აქვს ამონახსნი, ან აქვს ოთხი ამონახსნი, ან აქვს რვა ამონახსნი. ე.ი. m არის ან 0, ან 4 ან 8.

მეორე განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება არის სფეროს განტოლება, რომლის ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში და რადიუსია $\sqrt{C}$. სისტემის მეორე განტოლებას აკმაყოფილებს ოქტაედრის წერტილები, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და წვეროებით საკოორდინატო ღერძებზე, რომლებიც კოორდინატთა სათავიდან დაშორებულია თანაბარი მანძილებით. ეს სისტემა იმის მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას ღებულობენ C და D რიცხვები, ან არ აქვს ამონახსნი, ან აქვს ექვსი ამონახსნი (ოქტაედრის წვეროები სფეროს წერტილებია), ან აქვს რვა ამონახსნი (სფერო ეხება ოქტაედრის წახნაგებს), ან აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე (სფერო გადაკვეთს ოქტაედრის წახნაგებს წრეწირზე ან წრეწირის რკალებზე). ე.ი. n არის ან 0, ან 6 ან 8.

პირობიდან $m>n>1$, გამომდინარეობს, რომ

$$m=8,\ \ n=6.$$

ამოცანა 15. დაფაზე დაწერილია სამი ნატურალური რიცხვი. პაპუნა ფურცელზე წერს ამ რიცხვებიდან ნებისმიერი ორი რიცხვის ნამრავლს, ხოლო დაფაზე დაწერილ მესამე რიცხვს შლის და წერს ახალ რიცხვს, რომელიც მოცემულზე ერთით ნაკლებია. შემდეგ იმეორებს იგივე ოპერაციას დაფაზე დაწერილი ახალი სამეულის მიმართ, ვიდრე დაფაზე დაწერილი რიცხვებიდან რომელიმე არ გახდება 0–ის ტოლი. რისი ტოლი იქნება ამ მომენტში პაპუნას მიერ ფურცელზე დაწერილი ყველა რიცხვის ჯამი?

ავიღოთ ნებისმიერი სამი a, b და c ნატურალური რიცხვი, განვიხილოთ მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის გვერდები გამოისახება a, b და c ნატურალური რიცხვებით. ყოველი ოპერაციის შესრულების დროს ჩვენ მართკუთხა პარალელეპიპედიდან ჩამოვაჭრით ისეთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის სისქე 1–ის ტოლია და ჩამოჭრილი პატარა მართკუთხა პარალელეპიპედის რიცხვით მნიშვნელობას პაპუნა იწერს ფურცელზე. პროცესი მთავრდება მაშინ, როცა მოცემული მართკუთხა პარალელეპიპედი დაიჭრება 1–ის ტოლი სისქის პატარა მართკუთხა პარალელეპიპედებად. ცხადია, რომ 1–ის ტოლი სისქის ჩამოჭრილი ყველა მართკუთხა პარალელეპიპედების მოცულობათა ჯამი ტოლია თავიდან მოცემული მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობის, რომელიც თავის მხრივ ტოლია მოცემული სამი ნატურალური რიცხვის ნამრავლის.

ჩვენი მიზანი იყო საოლიმპიადო ალგებრული ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაციით და შემდეგ სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების გამოყენების სწავლებით აგვემაღლებინა მათემატიკის შესწავლის ინტერესი, მოგვეხსნა მოსწავლეთათვის საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის ამოცანების ამოხსნისადმი უარყოფითი დამოკიდებულება და შიში, აგვემაღლებინა სასწავლო-აღმზრდელობითი მუშაობის დონე–მიღწეული იქნა. გარდა ამისა შევადგინეთ ალგებრული შინაარსის მქონე საოლიმპიადო ამოცანები, რომელთა ამოხსნა მარტივად ხდება გეომეტრიული ინტერპრეტაციით და რომელთა ამოხსნისათვის აუცილებელია სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების გამოყენება და დავამუშავეთ მათი სწავლების მეთოდიკა. ასეთი ამოცანების ამოხსნის სწავლება მიზნად ისახავს მოსწავლეთა ისეთი უნარების

განვითარებას, როგორიცაა მიღებული ინფორმაციის გარეთ ახალი ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოპიება და შექმნა. გარდა ამისა საოლიმპიადო ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და შემდეგ ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლება საშუალებას იძლევა, რომ მათემატიკის სწავლება გადავაქციოთ დიდაქტიკაზე დაფუძნებული ცოდნის და მის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების შეწყვილებად.

ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა, რომ საოლიმპიადო ალგებრული შინაარსის ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და შემდეგ ამ ამოცანების ამოხსნა სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებით მნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მათ ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კერძოდ, კონსტრუქციული და კრიტიკული აზროვნების ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას და დიდი როლი აკისრია პიროვნების სრულყოფილ ადამიანად ჩამოყალიბებაში.

§2.5. ფუნქციებთან დაკავშირებული საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი მათემატიკის სასკოლო კურსში

სასკოლო მათემატიკის კურსში ძირითადად შეისწავლება ისეთი ფუნქციები, რომლებიც ჩაწერილია ანალიზური ფორმითდა შემდეგ ამ გამოსახულების მეშვეობით ხდება ამ ფუნქციათა თვისებების დადგენა.ჩვენი კვლევის სფეროს განეკუთვნება შებრუნე-ბული შინაარსის მქონე ამოცანების განხილვა, კერძოდ, ისეთი საოლიმპიადო ამოცანე-ბისა, როცა მოცემულია ფუნქციის ზოგიერთი თვისება და ამ თვისებებით უნდა აღვადგინოთ ფუნქციის სახე, განვსაზღვროთ მისი თვისებები და ვიპოვოთ ფუნქციის ანალიზური ჩანაწერი. ფუნქციის ზოგიერთი თვისების საშუალებით ფუნქციათა აღდგენის ამოცანები საოლიმპიადო ამოცანების კატეგორიას განეკუთვნება და არ არსებობს მათი ამოხსნის ზოგადი ალგორითმი. ასეთ ამოცანებში ზოგადად საძიებელია $f(x)$ ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება.

იმ პერიოდში, როცა სკოლაში შეისწავლებოდა ფუნქციის წარმოებული და ინტეგრალი, მაშინ მოსწავლეები ამ სახის ზოგადი ამოცანის-ფუნქციის ზოგიერთი მოცემული თვისებებით ფუნქციის აღდგენის არსში ცოტად თუ ბევრად გარკვეული იყვნენ, ახლა როცა დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები სკოლაში აღარ შეისწავლება, მასწავლებელს უფრო მეტი მუშაობა უხდება მოსწავლეები გაარკვიოს დასმული შებრუნებული ამოცანის არსში, მაგრამ მისასალმებელია ის ფაქტი, რომ შემდგომში მოსწავლეები აღნიშნული სახის ამოცანების ამოხსნის მიმართ განსაკუთრებულ დაინტერესებას იჩენენ.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ფუნქციის აღსადგენი ამოცანების ამოხსნის მეთოდური მიდგომები ნაკლებად დამუშავებულია და ასეთი სახის კონკრეტული ამოცანების რაოდენობაც არც თუ ისე დიდი რაოდენობაა შემუშავებული, ამიტომ მეთოდური თვალსაზრისით საინტერესოა ასეთი სახის სხვადასხვა ტიპის ამოცანების განხილვა და ამ სახის მოცანების ამოხსნისათვის მეთოდური რეკომენდაციების შემუშავება. ამავე

კონტექსტში უნდა განვიხილოთ ზოგიერთი სახის მიმდევრობებიც, რადგან მიმდევრობა ფუნქციის კერძო სახეა. ამავე კატეგორიას მივაკუთვნეთ მათემატიკური ოპერაციის ზოგიერთი სახე, როცა რიცხვებს შორის რაღაც წესით ხდება შესაბამისობის დამყარება, უნდა შევნიშნოთ, რომ ასეთი სახის ამოცანებიც ფუნქციებთან დაკავშირებულ საკითხებს მიეკუთვნება.

ამოცანა 1. f რიცხვითი ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა

$$f\left(x+y\right)= f(x)+ f(y)+80xy.$$

იპოვეთ $f\left(1\right)$, თუ $f\left(0,25\right)=2.$

რადგან მოცემული გვაქვს $f\left(0,25\right)$ და უნდა ვიპოვოთ $f\left(1\right)$, ამიტომ ეს გვიბიძგებს იმისკენ, რომ უშუალო გადასვლა $f\left(0,25\right)$-დან $f\left(1\right)$ -ზე არ განხორციელდება. რადგან

$$1 = 0,5 + 0,5,$$

ხოლო თავის მხრივ

$$0,5 = 0,25 + 0,25,$$

ამიტომ ორჯერ დაგვჭირდება მოცემული ფორმულის გამოყენება. კერძოდ ჯერ გამოვთვალოთ $f\left(0,5\right).$ გვაქვს:

$$f\left(0,5\right)= f(0,25+0,25)= f(0,25)+ f(0,25)+80\cdot 0,25\cdot 0,25=9.$$

გამოვიყენოთ მიღებული შედეგი და ანალოგიურად ვიპოვოთ $f\left(1\right)$, გვაქვს:

$$f\left(1\right)= f(0,5+0,5)= f(0,5)+ f(0,5)+80\cdot 0,5\cdot 0,5=9+9+20=38.$$

ამოცანა 2. f რიცხვითი ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი დადებითი x და y -თვის სრულდება ტოლობა

$$f\left(xy\right)= f(x)+ f(y).$$

იპოვეთ $f\left(2018\right)$, თუ $f\left(\frac{1}{2018}\right)=-1.$

ვთქვათ $y=1$, მაშინ ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$f(x)=f(x)+f(1).$$

საიდანაც,

$$f(1)=0.$$

ვთქვათ, $x=2018$ და $y=\frac{1}{2018}$. მაშინ

$$f(1)=f(2018)+f\left(\frac{1}{2018}\right)=0.$$

აქედან

$$f(2018)=-f\left(\frac{1}{2018}\right)=1.$$

ამოცანა 3. იპოვეთ ყველა $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ყველა ნამდვილ x რიცხვზე და აკმაყოფილებს განტოლებას

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

მოცემულ განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვათ $1-x$. მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2,\\ f(x)+2f(1-x)-(1-x)^2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4f(x)+2f(1-x)=2x^2,\\ f(x)+2f(1-x)-(1-x)^2,\end{cases}$$

საიდანაც;

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right).$$

შემოწმებით დავადგენთ, რომ მიღებული ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

ამოცანა4.იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუშესრულებულიაპირობა

$$f(3x-2)+3f(2-3x)=6x$$

მოვახდინოთ აღნიშვნა: $3x-2=t$. საიდანაც $x=\frac{t+2}{3}$. გვაქვს:

$$f(t)+3f(-t)=2t+4.$$

ამტოლობაში t შევცვალოთ $-t$ -თი, მივიღებთსისტემას:

$$\begin{cases} f(t)+3f(-t)=2t+4 \\ 3f(t)+f(-t)=-2t+4 \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნის შედეგად მივირებთ, რომ

$$f(t)=-t+1.$$

ე.ი. საძიებელი ფუნქციაა $f(x)=-x+1.$

მოვახდინოთ შემოწმება. გვაქვს:

$$f(3x-2)=-\left(3x-2\right)+1=-3x+2+1=-3x+3,$$

$$f(2-3x)=-(2-3x)+1=3x-1,$$

მიღებული გამოსახულებების ჩასმით მოცემულ განტოლე–ბაში მივიღებთ:

$$f(3x-2)+3f(2-3x)=-3x+3+3(3x-1)=-3x+3+9x-3=6x.$$

მასასადამე, დაკმაყოფილებულია ამოცანის პირობა და მიღებული ფუნქცია საძიებელია.

ამოცანა 5. $y=f\left(x\right)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე და რაიმე $k\neq 0$ რიცხვისათვის აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას

$$f(x+k)\left(1-f(x)\right)=1+f(x).$$

დაამტკიცეთ, რომ $f\left(x\right)$-პერიოდული ფუნქციაა.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x+k)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

მაშინ,

$$f(x+2k)=f\left(\left(x+k\right)+k\right)=\frac{1+f(x+k)}{1-f(x+k)}=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-1-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}.$$

$$f(x+3k)=f\left(\left(x+2k\right)+k\right)=\frac{1+f(x+2k)}{1-f(x+2k)}=\frac{1-\dfrac{1}{f(x)}}{1+\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

$$f(x+4k)=f\left(\left(x+3k\right)+k\right)=\frac{1+f(x+3k)}{1-f(x+3k)}=\frac{1+\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1-\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}}=\frac{f(x)+1+f(x)-1}{f(x)+1-f(x)+1}=f(x).$$

მივიღეთ, რომ

$$f(x+4k)=f(x).$$

ე.ი. $f\left(x\right)$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია $4k$.

ამოცანა 6. $f\left(x\right)$ ფუნქცია განსაზღვრულია დადებით ნახევარღერძზე და ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. ცნობილია, რომ

$$f\left(1\right)+f(2)=10,$$

და ნებისმიერი a და b-თვის

$$f\left(a+b\right)=f(a)+f(b)+2\sqrt{f(a)f(b)}.$$

იპოვეთ $f\left(2^{2018}\right)$.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f\left(2a\right)=f(a)+f(b)+2\sqrt{f(a)f(a)}=2f(a)+2f(a)=4f(a).$$

კერძოდ,

$$f\left(2\right)=4f(1).$$

ამიტომ,

$$5f(1)=10\Rightarrow f(1)=2.$$

მიმდევრობა $f(1),\ f(2),\ f(2^2),\cdots$ წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელია 4. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ რიცხვი $f\left(2^{2018}\right)$, ანუ ამ მიმდევრობის 2019-ე წევრი, რომელიც ტოლია

$$2 \cdot 4^{2018} = 2^{4037}.$$

ე.ი.

$$f\left(2^{2018}\right) = 2^{4037}.$$

ამოცანა 7. ცნობილია, რომ

$$3f(x) + 2f(-x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x$$

ნებისმიერი ნამდვილი x -თვის. იპოვეთ $f\left(x\right)$.

რადგან ამოცანის პირობა დაკმაყოფილებულია ნებისმიერი ნამდვილი x -თვის, ამიტომ x შევცვალოთ - x -ით. მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} 3f(x) + 2f(-x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x, \\ 2f(x) + 3f(-x) = 4x^4 + 3x^3 + x^2 + x. \end{cases}$$

თუ სიტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ -3-ზე, მეორე განტოლებას 2-ზე, მივიღებთ:

$$\begin{cases} -9f(x) - 6f(-x) = -12x^4 + 9x^3 - 3x^2 + 3x, \\ 4f(x) + 6f(-x) = 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2x. \end{cases}$$

თუ შევკრებთ სისტემაში მიღებულ განტოლებებს, გვექნება:

$$f(x) = \frac{4}{5}x^4 - 3x^3 + \frac{1}{6}x^2 - x.$$

ამოცანა 8. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია x -ის ყოველი არანულოვანი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2x^2 - \frac{2}{x^2} + 3 = 0.$$

იპოვეთ $f\left(2018\right)$.

პირველ რიგში გავარკვიოთ არსებობს თუ არა ისეთი x, რომლისთვისაც კმაყოფილდება პირობა:

$$x + \frac{1}{x} = 2018. \quad (1)$$

რადგან,

$$x^2-2018x+1=0$$

კვადრატულ განტოლებას ამონახსნები აქვს, ამიტომ ასეთი x -ები არსებობს:

$$x=1009\pm\sqrt{1009^2-1}.$$

(1) გამოსახულების კვადრატში ახარისხების შემდეგ მივიღებთ:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2018^2-2.$$

მაშასადამე,

$$f\left(2018\right)=2\left(2018^2-2\right)-3=2\cdot 2018^2-7.$$

ამოცანა 9. იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს

$$a\cdot f\left(x^{2n+1}\right)+b\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)=cx \qquad (1)$$

განტოლებას, სადაც $a, b, c\in R$, $|a|\neq|b|$, $n\in N$.

ცალკე განიხილეთ შემთხვევა, როცა $|a|=|b|$.

f ფუნქციის განსაზღვრის არის ყოველი წერტილისათვის, ამ არეს ეკუთვნის მისი მოპირდაპირე წერტილი, ამასთან მართებულია (1) განტოლება და აგრეთვე ის განტოლება ან განტოლებები, რომლებიც (1) განტოლებიდან მიიღება როგორც შედეგი. მოცემულ განტოლებაში x შევცვალოთ - x -ით და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\left(-x\right)^{2n+1}=-x^{2n+1}.$$

$$a\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)+b\cdot f\left(x^{2n+1}\right)=-cx.$$

მაშასადამე, მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} a\cdot f\left(x^{2n+1}\right)+b\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)=cx, \\ a\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)+b\cdot f\left(x^{2n+1}\right)=-cx. \end{cases}$$

სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ a-ზე, მეორე განტოლება $\left(-b\right)$ -ზე და მიღებული განტოლებები შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$\left(a^2-b^2\right)\cdot f\left(x^{2n+1}\right)=c\left(a-b\right)x.$$

რადგან $|a|\neq|b|$, ამიტომ

$$f\left(x^{2n+1}\right)=\frac{c}{a+b}x.$$

x^{2n+1} შევცვალოთ x -ით, მაშინ x შეიცვლება $\sqrt[2n+1]{x}$ -ით და გვექნება:

$$f\left(x\right)=\frac{c}{a+b}\sqrt[2n+1]{x}.$$

მიღებული $f\left(x\right)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მიღებული f ფუნქცია აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|a|=|b|$. აქ განიხილება რამდენიმე ქვეშემთხვევა:

1. როცა $a=b=0$ და $c=0$, მაშინ ამოცანას აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქცია.

2. როცა $a=b=0$ და $c\neq0$, მაშინ არ არსებობს ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

3. როცა $a=b\neq0$ და $c\in R$, მაშინ ამოცანას აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი კენტი ფუნქცია. მართლაც,

$$a\cdot f\left(x^{2n+1}\right)+a\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)=cx,$$

$$f\left(x^{2n+1}\right)+f\left(-x^{2n+1}\right)=\frac{c}{a}x \qquad (2)$$

თუ მიღებულ განტოლებაში x -ს შევცვლით - x -ით დაგავითვალისწინებთ, რომ

$$\left(-x\right)^{2n+1}=-x^{2n+1},$$

გვექნება:

$$f\left(x^{2n+1}\right)+f\left(-x^{2n+1}\right)=-\frac{c}{a}x \qquad (3)$$

თუ შევკრიბავთ (2) და (3) ტოლობებს, მარტივად მივიღებთ:

$$f\left(-x^{2n+1}\right)=-f\left(-x^{2n+1}\right). \qquad (2)$$

ანუ,

$$f\left(-t\right)=-f\left(-t\right).$$

ე.ი. ამოცანას აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი კენტი ფუნქცია.

4. როცა $a=-b\neq 0$ და $c=0$, მაშინ ამოცანას აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ლუწი ფუნქცია. ამის ჩვენება წინა შემთხვევის ანალოგიურია.

5. როცა $a=b\neq 0$ და $c\neq 0$, მაშინ (1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$f\left(x\right)-f\left(-x\right)=\frac{c}{a}\sqrt[2n+1]{x}$$

რომელსაც აკმაყოფილებს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქცია, რომლის სახეა:

$$f\left(x\right)=\psi\left(x\right)+\frac{c}{2a}\sqrt[2n+1]{x}$$

სადაც $\psi\left(x\right)$ ლუწი ფუნქციაა.

ამოცანა 10. მწკრივში ჩაწერილია 2017 რიცხვი. პირველი რიცხვი 1-ის ტოლია. ცნობილია, რომ პირველი და ბოლო რიცხვის გარდა, მიმდევრობის ყველა რიცხვი მისი მეზობელი რიცხვების ჯამის ტოლია. იპოვეთ ბოლო რიცხვი.

აღვნიშნოთ რიცხვები

$$a_1=1, a_2, \cdots, a_{2017}.$$

ცხადია, რომ

$$a_{n+1}=a_{n+2}+a_n \text{ და } a_{n+2}=a_{n+3}+a_{n+1}.$$

შევკრიბოთ ეს ტოლობები წევრ-წევრად, გვექნება:

$$a_{n+3}=-a_n.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n,$$

ე.ი.მიმდევრობის წევრები პერიოდულად მეორდება ექვსი წევრის შემდეგ. რადგან,

$$a_{2017} = -a_{6\cdot 336+1} = a_1 = 1.$$

ამოცანა 11. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $x=1$ წერტილისა და აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$(x-1)\, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + f(x).$$

იპოვეთ $f(-1)$.

მოცემულ ტოლობაში ჩავსვათ მნიშვნელობები $x=0$ და $x=-1$. მივიღებთ:

$$\begin{cases} -f(-1) = f(0), \\ -2f(0) = -1 + f(-1). \end{cases}$$

საიდანაც,

$$f(-1) = -1.$$

თუ ამ ამოცანის ამოხსნას მაშინ ვახდენთ, როცა მოსწავლეებმა იციან შექცეული ფუნქციის ცნება, მაშინ მიზანშეწონილია, მათ შევახსენოთ, რომ

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

ფუნქცია თავისი თავის შექცეულია.

ამ ფუნქციის ეს თვისება საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ უფრო ზოგადი ამოცანა, კერძოდ ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, გარდა $x=1$ წერტილისა.

მართლაც,

$$(x-1)\, f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + f(x)$$

განტოლებაში x შევცვალოთ $\dfrac{x+1}{x-1}$-ით. მივიღებთ:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right) f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}+f\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

ანუ,

$$\frac{2}{x-1} f(x)=\frac{x+1}{x-1}+f\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

საიდანაც,

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{2}{x-1} f(x)-\frac{x+1}{x-1}.$$

მიღებული ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2 f(x)-x-1=x+f(x),$$

საიდანაც,

$$f(x)=2x+1.$$

ამოცანა 12. არსებობს თუ არა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე და სრულდება ტოლობა

$$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x.$$

ვთქვათ, ასეთი ფუნქცია არსებობს, მაშინ

$$f(\sin 0)+f(\cos 0)=\sin 0.$$

ანუ,

$$f(0)+f(1)=0.$$

მაგრამ,

$$f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}.$$

ანუ,

$$f(0)+f(1)=1.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ასეთი ფუნქცია არ არსებობს.

ამოცანა 13. იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერი $x, y, z \in R$ აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)\geq 3f\left(x+2y+3z\right).$$

ჩავსვათ $x=y=-z$. მივიღებთ:

$$f(2x)+f(0)+f(0)\geq 3f\left(0\right).$$

საიდანაც,

$$f(2x)\geq f\left(0\right).$$

მეორეს მხრივ, როცა $x=y=-z$, მივიღებთ

$$f(0)+f(0)+f(2x)\geq 3f(2x).$$

საიდანაც,

$$f(2x)\leq f\left(0\right).$$

ამრიგად,

$$f\left(0\right)\geq f(2x)\geq f\left(0\right),$$

ანუ,

$$f(2x)=C.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $C\in R$-თვის $f(x)=C$ ფუნქცია აკმაყოფილებს უტოლობას.

ამოცანა 14. $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი $x\in R$-თვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(1-x\right)=1.$$

იპოვეთ: ა) $f(0)$ და $f(1)$. ბ) იპოვეთ ყველა ასეთი $f(x)$ ფუნქცია.

ა) ჩავწეროთ მოცემული განტოლება, როცა $x=0$ და $x=1.$ გვაქვს:

$$\begin{cases} f(0)+\frac{1}{2}\cdot f\left(1\right)=1, \\ f(1)+\frac{3}{2}\cdot f\left(0\right)=1. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$f(0)=2,\ f(1)=-2.$$

ბ) ჩავწეროთ მოცემული განტოლება, როცა $x=\frac{1}{2}+t$ და $x=\frac{1}{2}-t.$ გვაქვს:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}-t\right)+(1-t)\cdot f\left(\frac{1}{2}+t\right)=1, \\ f\left(\frac{1}{2}+t\right)+(1+t)\cdot f\left(\frac{1}{2}-t\right)=1. \end{cases}$$

როცა, $t\neq 0$ მაშინამსისტემასაქვსერთადერთიამონახსნი

$$f\left(\frac{1}{2}+t\right)=-\frac{1}{t},\quad f\left(\frac{1}{2}-t\right)=\frac{1}{t}.$$

ცხადია, ყველა ასეთი $f(x)$ ფუნქცისათვის, როცა $x\neq\frac{1}{2}$, შესრულებულია ტოლობა:

$$f(x)=\frac{2}{1-2x}.$$

დავწეროთ მოცემული ტოლობა, როცა $x=\frac{1}{2}$. გვაქვს:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

ანუ,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

იმის შემოწმება, რომ ნაპოვნი ფუნქცია გამოდგება, შესაძლებელია უშუალო ჩასმის გამოყენებით.

მაშასადამე, არსებობს მხოლოდ ერთი $f(x)$ ფუნქცია, ისეთი რომ, $f(x)=\frac{2}{1-2x}$, როცა $x\neq\frac{1}{2}$ და $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

ამოცანა 15. იპოვეთ ყველა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე და ნებისმიერი დადებითი x და y რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$f\left(x^y\right) = f\left(x\right)^{f(y)}.$$

მარტივი შესამჩნევია, რომ $f(x) = 1$, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. ვეძებოთ სხვა ამონახსნი. ვთქვათ, $f(a) \neq 1$, რაიმე $a > 0$ რიცხვისათვის. მაშინ ტოლობიდან

$$f\left(a\right) \cdot f(xy) = f\left(a^{xy}\right) = f\left(a^x\right)^{f(y)} = f(a) \cdot f(x) \cdot f(y),$$

საიდანაც, ნებისმიერი დადებითი x და y რიცხვებისათვის გვაქვს:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y). \qquad (1)$$

ხოლო ტოლობიდან,

$$f\left(a\right) \cdot f(x+y) = f\left(a^{x+y}\right) = f\left(a^x\right) \cdot f\left(a^y\right) = f(a)^{f(x)} \cdot f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)},$$

გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი დადებითი x და y რიცხვებისათვის გვაქვს:

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (2)$$

(1) შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2,$$

საიდანაც,

$$f(1) = 1,$$

ხოლო (2) და (1)-დან მივიღებთ:

$$f(n) = f(1+1+\cdots+1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = n.$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) = f(m) = m,$$

ანუ ნებისმიერი $m, n \in N$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}. \qquad (3)$$

დავუშვათ, რომ რაიმე $x > 0$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x) \neq x,$$

ვთქვათ, $f(x) < x,$ (შემთხვევა, როცა $f(x) > x,$ განიხილება ანალოგიურად. შევარჩიოთ ისეთი $y = \dfrac{m}{n}$, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$f(x) < y < x,$$

მაშინ (2) და (3) ტოლობებიდან მივიღებთ მის საწინააღმდეგო უტოლობას.

$$f(x) = f(y + (x - y)) = f(y) + f(x - y) > f(y) = y.$$

რაც ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება არასწორია. ამრიგად, $f(x) = x$, ნებისმიერი $x > 0$ რიცხვისათვის და მოძებნილი ფუნქცია აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს ორი ფუნქცია:

$$f(x) = 1 \text{ და } f(x) = x \text{, როცა } x > 0.$$

ამოცანა 16. ფუნქციები: $f(x) = x$ და $f(x^2) = x^6$ განსაზღვრულია ყველა $x > 0$ რიცხვებისათვის და ზრდადია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x^3) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^6$$

ფუნქციაც ზრდადია ყველა $x > 0$ რიცხვებისათვის.

ყველა ფუნქცია განიხილება მხოლოდ დადებით ნახევარღერძზე. შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$g(x^n)$ ფუნქციის ზრდადია, მაშინ ზრდადია $g(x)$ ფუნქციაც;

$f(x) - g(x)$ ფუნქცია ზრდადია, თუ შესრულებულია პირობა:

$$f(x) - f(y) > g(x) - g(y), \text{ როცა } x > y.$$

ამრიგად, უნდა დავამტკიცოთ, რომ როცა $x > y$, მაშინ შესრულებულია პირობა:

$$f(x) - f(y) > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - y^2\right).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$4\left(x^2 + xy + y^2\right) = 3\left(x + y\right)^2 + \left(x - y\right)^2 \geq 3\left(x + y\right)^2.$$

ცხადია, რომ

$$\max\left(1; x^2+xy+y^2\right) \ge \sqrt{x^2+xy+y^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y).$$

თუ გავამრავლებთ $x-y$-ზე, მივიღებთ:

$$\max\left(x-y; x^3-y^3\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-y^2), \text{ როცა } x>y.$$

ამოცანის პირობაში მოცემულია, რომ ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ

$$f(x)-f(y) > \max\left(x-y; x^3-y^3\right),$$

რაც ნიშნავს, რომ უტოლობა დამტკიცებულია.

ამოცანა 17. იპოვეთ ყველა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$f(2x+1)=4x^2+14x+7.$$

ამოხსნა. ვთქვათ, $t=2x+1$, მაშინ $x=\frac{1}{2}(t-1)$. ცხადია,

$$f(t)=(t-1)^2+7(t-1)+7=t^2+5t+1.$$

ე.ი. საძიებელ ფუნქციას აქვს სახე:

$$f(x)=x^2+5x+1.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამოცანის პირობაში მოცემულ დამოკიდებულებაში $2x+1$ ჩვენ შევცვალეთ x-ით, მაშინ, x შეიცვალა $\frac{1}{2}(x-1)$-ით.

ამოცანა 18. ყოველ x და y რიცხვთა წყვილს რაღაც წესით შეესაბამება რაიმე $x \otimes y$ რიცხვი. იპოვეთ $2018 \otimes 1970$, თუ ცნობილია, რომ ნებისმიერი სამი x, y, z რიცხვისათვის სამართლიანია იგივეობები:

1. $x \otimes x = 0;$
2. $x(y \otimes z) = (x \otimes y) + z.$

თუ გამოვიყენებთ მეორე იგივეობას, პირველი იგივეობა შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$x = x \otimes x + x = x \otimes (x \otimes x) = x \otimes 0 = x \otimes (y \otimes y) = x \otimes y + y.$ ანუ,

$$x \otimes y = x - y.$$

ამიტომ,

$$2018 \otimes 1970 = 2018 - 1970 = 48.$$

ამოცანა 19. მოცემულია კვადრატული სამწევრი

$$f(x) = x^2 + ax + b.$$

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის არსე-ბობს ისეთი ნამდვილი y რიცხვი, რომ

$$f(y) = f(x) + y.$$

იპოვეთ a რიცხვის შესაძლო მნიშვნელობებს შორის მაქსიმუმი.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ კვადრატულ განტოლებას

$$f(y) - y - f(x) = 0$$

ნებისმიერი x რიცხვისათვის გააჩნია ამონახსნი y -ის მიმართ.

ჩავსვათ $x = -\dfrac{a}{2}$, მივიღებთ განტოლებას:

$$y^2 + ay + b - y - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - b = 0.$$

ანუ,

$$y^2 + \left(a - 1\right) y + \frac{a^2}{4} = 0.$$

მისი დისკრიმინანტია

$$D = \left(a - 1\right)^2 - a^2 = 1 - 2a \geq 0.$$

საიდანაც

$$a \leq \frac{1}{2}.$$

მეორეს მხრივ, თუ

$$a = \frac{1}{2},$$

მაშინ ნებისმიერი x -თვის შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $y = -x.$ გვაქვს,

$$f(y) = x^2 - \frac{1}{2}x + b = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + b \right) - x = f(x) + y.$$

ე.ი. $a = \frac{1}{2}$.

ამოცანა 20. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს მუდმივისაგან განსხვავებული $f(x)$ ფუნქცია, ისეთი რომ სრულდება პირობა:

$$f(a(x+y)) = f(x) + f(y).$$

როცა $a = 1$, მაშინ $f(x) = x$.

როცა $a \neq 1$, მაშინ არსებობს ისეთი y, რომ

$$y = a(x+y).$$

საიდანაც,

$$y = \frac{a}{1-a} \cdot x.$$

მაგრამ მაშინ მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ:

$$f(a(x+y)) = f\left(a\left(x + \frac{ax}{1-a} \right) \right) = f\left(\frac{ax}{1-a} \right) = f(y).$$

ანუ, ნებისმიერი x-თვის

$$f(x) = 0.$$

რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას.

ე.ი. საბოლოოდ დავასკვნით, რომ $a = 1$.

ამოცანა 21. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებული არანულოვანი მთელი რიცხვებია. ცნობილია, რომ $p(a) = a^3$, $p(b) = b^3$. იპოვეთ *a, b* და c კოეფიციენტები.

რადგან $p(a) = a^3$, $p(b) = b^3$ ამიტომ, *a* და *b* რიცხვები წარმოადგენენ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვებს, საიდანაც ვიეტის თეორემის თანახმად

$$a+b=-\frac{b}{a} \text{ და } ab=\frac{c}{a}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$b=-\frac{a^2}{a+1}=-\frac{a^2-1+1}{a+1}=-a+1-\frac{1}{a+1} \text{ და } c=a^2b.$$

ვინაიდან *a, b* და c არანულოვანი მთელი რიცხვებია, ამიტომ

$$a=-2,\ b=4 \text{ და } c=16.$$

ამოცანა 22. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუცნობილია, რომ ნებისმიერი $x\neq 0$-თვის შესრულებულიაპირობა

$$(x+1)f(x)+f\left(\frac{2}{x}\right)=2,\ f(0)=2.$$

მოვახდინოთშეცვლა. $\frac{x}{2}$ შევცვალოთ x-ით. გვექნება:

$$\begin{cases}(x+1)f(x)+f\left(\frac{2}{x}\right)=2,\\ \left(\frac{2}{x}+1\right)f\left(\frac{2}{x}\right)+f(x)=2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)f(x)+f\left(\frac{2}{x}\right)=2,\\ f(x)+\frac{x+2}{x}f\left(\frac{2}{x}\right)=2.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{(x+2)(x+1)}{x}f(x)-\frac{x+2}{x}f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{2(x+2)}{x},\\ f(x)+\frac{x+2}{x}f\left(\frac{2}{x}\right)=2.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[1-\frac{(x+2)(x+1)}{x}\right]f(x)=2-\frac{2(x+2)}{x}.\Leftrightarrow f(x)=\frac{4}{x^2+2x+2}.$$

მარტივად დავრწმუნდებით, რომ $f(x)=\frac{4}{x^2+2x+2}$ ფუნქცია საძიებელია.

ამოცანა 23. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუ ის განსაზღვრულია x არგუმენტისნატურალურიმნიშვნელობისათვისდააკმაყოფილებსპირობას:

$$f(x)=f(x-1)+a,\ f(1)=1.$$

რადგან $f(1)=1$ და ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ნატურალური მნიშვნელობისათვის, გვაქვს:

$f(1)=1$;

$f(2)=f(1)+a=1+a;$

$f(3)=f(2)+a=1+2a;$

$f(4)=f(3)+a=1+3a;$

....

$f(n)=f(n-1)+a=1+(n-1)a,$

....

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ საძიებელი ფუნქციაა

$$f(x)=1+(x-1)a,\ \text{ანუ}\ f(x)=ax+(1-a).$$

მიღებული მიმდევრობა გამოსახავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია 1 და სხვაობა a -ს ტოლია.

ამოცანა 24. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუ ის განსაზღვრულია x არგუმენტის ნატურალური მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებსპირობას:

$$f(x)=a\cdot f(x-1),\ f(1)=1,\ a\neq 0,\ a\neq 1.$$

რადგან $f(1)=1$ და ფუნქცია განსაზღვრულია x არგუმენტის ნატურალური მნიშვნელობებისათვის, გვაქვს:

$f(1)=1$;

$f(2)=a\cdot f(1)=a;$

$f(3)=a\cdot f(2)=a^2;$

$f(4)=a\cdot f(3)=a^3;$

……………………………

$f(n)=a\cdot f(n-1)=a^{n-1},$

………………………………………

საბოლოოდ დავასკვნით, რომ საძიებელი ფუნქციაა

$$f(x)=a^{x-1}.$$

მიღებული მიმდევრობა გამოსახავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია 1 და მნიშვნელი a -ს ტოლია.

§2.6. პედაგოგიური ექსპერიმენტი

საშუალო სკოლაში მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნისსწავლების მეთოდიკის თავისებურებებმა, რომელიც ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული იყო დისერტაციაში როგორც ზოგადად, ისე კონკრეტული ამოცანების განხილვით, ექსპერიმენტული შემოწმება გაიარა ოთხი წლის (2013-2017 წლებში) განმავლობაში.პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, სსიპ ქუთაისის ანდრია რაზმაძის სახელობის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, სსიპ იოსებ ოცხელის სახელობის ქუთაისის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ ქუთაისის №34 საჯარო სკოლაში, შპს ქუთაისის სკოლა XXI საუკუნე,სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ წყალტუბოს საჯარო სკოლაში, სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ ბანოჯას საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ სამტრედიის №12 საჯარო სკოლაში, სსიპ ბაღდადის მუნიციპალიტეტის სოფელ როკითის საჯარო სკოლაში, სსიპ ვანის მუნიციპალიტეტის სოფელ სალომინაოს საჯარო სკოლაში, სსიპ ტყიბულის №1 საჯარო სკოლაში და ქუთაისის მოსწავლე-ახალგაზრდობის სასახლეში.

ექსპერიმენტული კვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე ოთხი სასწავლო წლის განმავლობაში. პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ჩვენს მიერ ანალიზი ჩაუტარდა საკონტროლო წერებისა და დამოუკიდებელი სამუშაოების იმ ნაშრომებს, რომლებიც შეეხებოდა დისერტაციაში განხილულ საკითხებს. მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს (2013 წელი) განისაზღვრა ჩვენს მიერ განსახილავი თემების ნუსხა და დამუშავდა მისი სწავლების კერძო მეთოდიკა, რომელმაც შემდგომში პრაქტიკული მუშაობის პროცესში ზოგიერთი არაარსებითი ხასიათის ცვლილება განიცადა. სასწავლო ექსპერიმენტით (2013-2017 წლები) დადასტურდა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნისსაშუალო სკოლის სასწავლო პრაქტიკაში ჩართვის

აუცილებლობა და შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობა. სულ პედაგოგიურ ექსპერიმენტში მონაწი-ლეობდა 405 მოსწავლე.

ანალიზმა ცხადყო, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობისათვის სირთულეს წარმოად-გენსკონკრეტული თემატიკის მქონე ზოგიერთი სახის მათემატიკის სასკოლო საოლიმ-პიადოამოცანების ამოხსნა. თემატიკის მიხედვით ეს ეხება სასკოლო საოლიმპიადო შინაარსის იმ ამოცანებს, რომლებშიც მოთხოვნილია ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნა, ისეთი შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთა ეფექტური ამოხსნისთვის მიზანშეწონილია საგანთაშორისი და შიგასაგნობრივი კავშირების გამოყენება, განტოლებების ამოხსნის მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, ზოგიერთი სახის ალგებრული ამოცანების ამოხსნა გეომეტრიული ინტერპრეტაცით, ფუნქციებთან დაკავშირებული საოლიმპიადო ამოცანები და სხვ.

მათემატიკის სასკოლო კურსი ისეა აგებული, რომ მასში დისერტაციაში განხილული კონკრეტული საკითხების გადაწყვეტისათვის საჭირო თეორიული საკითხების უმრავ-ლესობა შეტანილი არ არის, ხოლო მოცულობით იმ მცირე მასალის შესახებ, რომელსაც სკოლის სასწავლო კურსი შეიცავს და ჩვენს მიერ დეტალურად იყო განხილული დისერტაციაში, შეგვიძლია დაბეჯითებით ვთქვათ, რომ მათზე მასწავლებლები ყურადღებას ნაკლებად ამახვილებენ, რასაც უმრავლეს შემთხვევაში დროის სიმცირით ხსნიან. ამიტომ ჩვენს მიერ ძირითადი ყურადღება გადატანილი იყო სასკოლო მათემა-ტიკისსაოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის თავისებურებებზე. ამოცანები სირთულის მიხედვით განსხვავდებოდა მათემატიკის სპეციალიზირებულ და სტაციონარული სკოლების მოსწავლეებისათვის.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის დროს ვიყენებდით მათემატიკის სასწავლო სახელმძღვანელოებში და დამხმარე ლიტერატურიდან აღებულ ამოცანებს და ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილ ამოცანებს.

დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ერთი მხრივ ის ამოცანები, რომლებიც თავისი შინაარსით და სირთულით საოლიმპიადოხასიათისაა მასწავლებლების მიერ საგაკვეთილო პროცესზე ან არ განიხილება, ან განიხილება ძალზე მცირე რაოდენობით. მეორეს მხრივ,

როდესაც იშვიათ გამონაკლისებში ხდება მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის სწავლება, მასწავლებლები არ ახდენენ მოსწავლეებისათვის ამოცანის ამოხსნის პროცესში გამოყენებული მეთოდის თუ ხერხის სრულფასოვან მეცნიერულ ახსნას და არ ახდენენ გამოყენებული მეთოდური მიდგომის უპირატესობის დემონსტრირებას სხვა მეთოდებთან შედარებით.

ექსპერიმენტული გამოკვლევა ჩატარდა ორ ეტაპად სწავლების სამ ფორმაზე:

პირველიეტაპი-მოსამზადებელი ექსპერიმენტი-რომელიც ჩატარდა გაკვეთილებ-ზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. გაკვეთილებზე განიხილებოდა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანები, რომელთა ამოხსნა მოითხოვდა სპეციალურ მიდგომებს, ამოხსნის კერძო მეთოდიკის ღრმა და საფუძვლიან ცოდნას. ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე კი ვიხილავდით მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის სპეციალურხერხებს.

მეორე ეტაპი–სასწავლო ექსპერიმენტი ჩატარდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის მიზანს წარმოადგენდა მოსწავლეთა საერთო მათემატიკური ცოდნის დონის შემოწმება. განსაკუთრებულ დაინტერესებას ვიჩენდით თუ რამდენად ფლობდნენ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნი-სათვის საჭირო თეორიულ საკითხებს და როგორ ახერხებდნენ მიღებული თეორიული ცოდნის პრაქტიკულ რეალიზებას–როგორ იყენებდნენ მიღებულ ცოდნას ამოცანების ამოხსნისას.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტი მიმდინარეობდა 2013 წელს და მასში მონაწილეობა მიიღო პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, სსიპ ქუთაისის ანდრია რაზმაძის სახელობის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, სსიპ იოსებ ოცხელის სახელობის ქუთაისის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ ქუთაისის №34 საჯარო სკოლაში, შპს ქუთაისის სკოლა XXI საუკუნე,სსიპ

წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ წყალტუბოს საჯარო სკოლაში, სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ ბანოჯას საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ სამტრედიის №12 საჯარო სკოლაში, სსიპ ბაღდადის მუნიციპალიტეტის სოფელ როკითის საჯარო სკოლაში, სსიპ ვანის მუნიციპალიტეტის სოფელ სალომინაოს საჯარო სკოლაში, სსიპ ტყიბულის №1 საჯარო სკოლაში და ქუთაისის მოსწავლე-ახალგაზრდობის სასახლის მოსწავლეებმა.

მოსწავლეებს მათემატიკის გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე ვასწავლიდით მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს და ხერხებს. სწავლება ითვალისწინებდა როგორც თეორიულ მასალას, ისე პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნას. სასწავლო პროცესში თემატიკის მიხედვით ვახდენდით ისეთი ამოცანების ჩართვას, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური მეთოდების და ხერხების გამოყენება, ამისათვის დამატებით სასწავლო დროს არ ვიყენებდით. ამ ეტაპზე განისაზღვრა განსახილავი თემების ნუსხა და მათი სწავლების მეთოდიკა.

მოსწავლეებს ეძლეოდათ ისეთი საოლიმპიადო ამოცანები, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური ხერხების გამოყენება სასკოლო სახელმძღვანელოებიდან და კრებულებიდან[7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [110], [111], [112], [113], [114], [115], [116], [117], [118], [119], [120], [121], [122], [123]. აგრეთვე ჩვენს მიერ სპეციალურად შედგენილი ამოცანები.

განსაკუთრებული სიძნელე წარმოშვა ისეთმა საოლიმპიადო ამოცანებმა, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროასპეციალური მეთოდებისა და ხერხების ცოდნა.

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის შედეგებზე დაყრდნობით შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლებას საკმარისი ყურადღება არ ექცევა საშუალო სკოლებში;

2. ზემოთ აღნიშნულის გამო მოსწავლეთა უმრავლესობა ვერ ფლობს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის იმ სპეციალურ ხერხებს, რომელთა გამოყენება ზევრ კონკრეტულ სიტუაციაში ძალზე კარგ შედეგს იძლევა;

3. მოსწავლეთა ის მცირე ნაწილი, რომელებმაც იციან მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხები, მარტივად ახერხებენ კონკრეტული თემატიკის ამოცანების ამოხსნას.

4. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის მიზანმიმართული სწავლების უპირატესობის დასადგენად საჭირო გახდა სასწავლო ექსპერიმენტის ჩატარება.

სასწავლო ექსპერიმენტის მოსამზადებლად საჭირო გახდა პასუხი გაგვეცა ძირითად კითხვებზე:

ა) მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის რომელი სპეციალური ხერხების სწავლებაა აუცილებელი?

ბ) საშუალო სკოლის საგაკვეთილი პროცესში თემატიკის მიხედვით, რომელი სახის მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების განხილვაა პრაქტიკულად მიზანშეწონილი?

გ) როგორ გავაკეთოთ ეს?

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემის მიზნით გავაანალიზეთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების შესახებ არსებული თანამედროვე მეთოდიკური ლიტერატურა. შევარჩიეთ ჩვენთვის მისაღები მეთოდური მიდგომები და ის ამოცანები, რომელებიც ამოიხსნებიან ჩვეულებრივი ტრადიციული მიდგომებით, მაგრამ მოითხოვს დიდი მოცულობის მათემატიკურ გარდაქმნებს და ამავე დროს მათი ამოხსნა მარტივად და ეფექტურად შეიძლება სპეციალური ხერხების გამოყენებით, რაც გვაძლევს დროში საგრძნობ ეფექტს და მოსწავლეებს უნვითარებს ლოგიკურ აზროვნებასა და მიხვედრილობის უნარს. დავსახეთ პრაქტიკული მუშაობის გეგმა.

მეორე კითხვაზე ასე ვუპასუხეთ: შევარჩიეთ და დავამუშავეთ ის საკითხები, რომელთა განხილვა აუცილებელია იმისათვის, რომ მომზადდეს შესაბამისი თეორიუ–ლი ბაზა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის ხერხების შესასწავლად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დავამუშავეთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანების ამოხსნის თეორიული საფუძვლები. ამ მიზნით მეცნიერულად გამოვიკვლიეთ:

- მათემატიკის სასკოლო ოლიმპიადების ისტორია;
- გავარკვიეთ დამოკიდებულება მათემატიკის საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ამოცანებსა და მათემატიკის სასკოლო კურსში განსახილავ ამოცანებს შორის;
- დავამუშავეთ კლასგარეშე მუშაობის, როგორც როგორც სწავლების ერთ-ერთი ფორმის მეთოდოლოგიური და მეთოდიკური საფუძვლები;
- დავადგინეთ კლასგარეშე მუშაობის მიზნები და ამოცანები;
- მოვახდინეთ მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის შედარებითი ანალიზი საგაკვე-თილო სასწავლო პროცესთან;
- ანალიზი ჩავუტარეთ მათემატიკის კლასგარეშე მუშაობის ფორმებს;
- დავამუშავეთ მათემატიკის ფაკულტატიური კურსების სწავლების სპეციალური მეთოდიკა;
- მეთოდურად გავაანალიზეთ და დავამუშავეთ მათემატიკის საგნობრივი წრის მეცადინეობის ჩატარების ფორმები და შევისწავლეთ მისი მეთოდიკური თავისებურებები.

ამ საკითხების დამუშავების პარალელურად მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ შეგვერ-ჩია მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ის მეთოდები, რომლე-ბიც შედარებით ხშირად გამოიყენება სასკოლო პრაქტიკაში.

დავამუშავეთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ხერხე-ბის სწავლების კერძო მეთოდიკა და შევადგინეთ მეთოდურად გამართული მათემ-ატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების სისტემა განხილული ამოხსნისმეთოდის ან/და ხერხისათვის, რომელთა ჩართვას რეკომენდირებულად ვთვლით სასწავლო

პრაქტიკაში. დავამუშავეთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის შემდეგი სპეციალური მეთოდების და ხერხების სწავლების კერძო მეთოდიკა:

- საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნის ზოგიერთი სპეციალური ხერხის სწავლების მეთოდური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში;.
- საოლიმპიადო მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით;
- საოლიმპიადო შინაარსის მქონე განტოლებების მთელ რიცხვთა სიმრავლეში ამოხსნის არასტანდარტული ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი.
- საოლიმპიადო შინაარსის მქონე ალგებრული ამოცანების ამოხსნა გეომეტრიული ინტერპრეტაცით და მათი სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი;
- ფუნქციებთან დაკავშირებული საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებანი.

ეს საკითხები პედაგოგიური ექსპერიმენტის მსვლელობის პროცესში განიხილებოდა გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე .

მესამე კითხვის პასუხს წარმოადგენს ჩვენს მიერ დისერტაციის II თავში დამუშავებული მეთოდიკა, რომელიც შემოწმებას გადიოდა გაკვეთილებზე მთელ კლასთან, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე. ექსპერიმენტის მიმდინარეობის პროცესში ვახდენდით სწავლების მეთოდიკის და დასმული ამოცანების კორექტირებას მათი დახვეწისთვის. რის საფუძველზეც სწავლების პროცესი შემუშავებული მეთოდიკით წარიმართა. შევნიშნავთ, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადოამოცანის საგაკვეთილო პროცესში განხილვა და მათი პრაქტიკული ამოხსნა რა თქმა უნდა ვერ ხერხდებოდა დროის ფაქტორის გამო, მაგრამ აღნიშნული მეთოდები გამოიყენებოდა მთელი სემესტრის მანძილზე. ერთ გაკვეთილზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობაზე, მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი

წრის სხდომაზე განიხილებოდა ერთი საკითხი, ხოლო მოსწავლეებს დავალების სახით ეძლეოდათ შედარებით მარტივი სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა, რომლის ამოხსნა შეიძლებოდა იმავე მეთოდით.

სასწავლო ექსპერიმენტის დროს ვისარგებლეთ ყველა იმ ამოცანით, რომელიც განხილულია დისერტაციაში და მოყვანილია დანართში. მათგან ზოგიერთი მათგანი განვიხილეთ გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემა-ტიკის საგნობრივი წრის სხდომაზე. დანარჩენი მოსწავლეებს მივეცით დამოუკიდებე-ლი მუშაობისათვის. ვსარგებლობდით სხვადასხვა სახელმძღვანელოებითა და კრებუ-ლებით, რომლებიც გამოყენებული იყო მოსამზადებელი ექსპერიმენტის ჩატარების დროს.სასწავლო ექსპერიმენტის ძირითადი მიზანი იყო შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის დამტკიცება. ის მიმდინარეობდა სამი სასწავლო წლის (2014-2017 წლები) განმავლობაში პედაგოგიური ექსპერიმენტი ჩვენს მიერ ჩატარებული იქნა შპს ქუთაისის №1 სკოლაში, სსიპ ქუთაისის ანდრია რაზმაძის სახელობის №41 ფიზიკა-მათემატიკის საჯარო სკოლაში, სსიპ იოსებ ოცხელის სახელობის ქუთაისის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ ქუთაისის №34 საჯარო სკოლაში, შპს ქუთაისის სკოლა XXI საუკუნე,სსიპ წყალტუბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ წყალტუბოს საჯარო სკოლაში, სსიპ წყალტუ-ბოს მუნიციპალიტეტის სოფელ ბანოჯას საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის №7 საჯარო სკოლაში, სსიპ ზესტაფონის მუნიციპალიტეტის სადგურ სვირის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპლიტეტის რუფოთის საჯარო სკოლაში, სსიპ თერჯოლის მუნიციპალიტეტის ჩხარის №2 საჯარო სკოლაში, სსიპ სამტრედიის №12 საჯარო სკოლაში, სსიპ ბაღდადის მუნიციპალიტეტის სოფელ როკითის საჯარო სკოლაში, სსიპ ვანის მუნიციპალიტეტის სოფელ სალომინაოს საჯარო სკოლაში, სსიპ ტყიბულის №1 საჯარო სკოლაში და ქუთაისის მოსწავლე-ახალგაზრდობის სასახლეში.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის მიმდინარეობის მთელი პერიოდის მანძილზე ყოველი სასწავლო წლის დასაწყისში ვატარებდით პირველ შემოწმებას. ამ შემოწმების დროს მოსწავლეებს მათთვის სასურველი ხერხით უნდა ამოეხსნათ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანები, დაახლოებით იმ სახის, რაც მოცემული იყო

მოსამზადებელი ექსპერიმენტის დროს. საშუალოდ ამ დავალებას სრულყოფილად ასრულებდა მოსწავლეთა მესამედი. მთელი სემესტრის განმავლობაში მიმდინარეობდა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება, ხოლო მომდევნო შემოწმებები ტარდებოდა სემესტრის ბოლოს. მოსწავლეთა შედეგები ყოველი მომდევნო შემოწმების დროს სულ უფრო მაღალი იყო. მეხუთე შემოწმების დროს დავალებას სრულყოფილად მოსწავლეთა ორ მესამედზე მეტი ასრულებდა.რაც ადასტურებს ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდიკის უპირატესობას.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარების დროს გარდა მასში მონაწილე ჯგუფების გარდა ვაკვირდებოდით საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებსაც. ამ ჯგუფების მოსწავლეთა ცოდნის დონე მათემატიკაში თითქმის ერთნაირი იყო. საშუალო შეფასება შესაბამისად 7,5 და 7,4.ექსპერიმენტულ ჯგუფებშისწავლება მიმდინარეობდა დისერტაციაში აღწერილი მეთოდიკით, ხოლო საკონტროლოდ შერჩეულ ჯგუფებში კი-ტრადიციული ფორმით.

შემუშავებული მეთოდიკის ეფექტურობის შემოწმებას ვაწარმოებდით სემესტრის ბოლოს ფინალურ გამოცდაზე მიცემული ამოცანების სახით. თითოეულ სასწავლო დავალებაში მიცემული იყო ერთი საკითხი, რომლის გადაწყვეტა მოითხოვდა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნას ჩვენს მიერ გამოყენებული მეთოდების ან ხერხის გამოყენებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელი იყო სხვა ხერხითაც, ოღონდ საჭიროა რთული გამოთვლების ჩატარება.

მოვიყვანოთ სპეციალური ხერხებით მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სტატისტიკური შეფასება ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფებისათვის ექსპერიმენტის სამი სასწავლო წლის განმავლობაში. ცხრილში მოცემულია ხუთი შემოწმების შედეგები. პირველი შემოწმება ითვალისწინებდა მოსწავლეთა საერთო დონის დადგენას, დანარჩენი ოთხი-უკვე შემუშავებული მეთოდიკის ათვისების შემოწმებას.

ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფები სტატისტიკურად შეფასდა ორი ნიშნით:

1. რამდენი მოსწავლე შეეცადა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნას ჩვენს მიერ განხილული მეთოდებით და ხერხებით;

2. ამ მოსწავლეებიდან რამდენმა ამოხსნა ამოცანა სწორად.

ექსპერიმენტის შედეგები მოყვანილია პირველ ცხრილში.

ცხრილი 1

ჯგუფები	ექსპერიმენტული					საკონტროლო				
მოსწავლეთა რაოდენობა	215	215	215	215	215	190	190	190	190	190
ამოხსნა I	141	144	147	143	145	106	108	110	114	112
ვერ ამოხსნა	74	71	68	72	70	84	82	80	76	78
ამოხსნა II	107	108	109	111	110	69	73	71	68	69
ვერ ამოხსნა	34	36	38	32	35	37	35	39	46	43

იმის გამო, რომ თითოეული ამოცანის ამოხსნის შედეგიდან დიდი გადახრა არ არის, ამიტომ გადავიდეთ შეფასებათა საშუალოების განხილვაზე. ამ ორ ნიშანს შორის განსხვავება გამოვთვალეთ χ^2 კრიტერიუმის საშუალებით [56]. კრიტერიუმის სტატის-ტიკის $T_{კრ}$ მნიშვნელობა $\alpha = 0{,}005$ მონაცემის დონისათვის და $\nu = 1$ თავისუფლების ხარისხისათვის U ცხრილიდან [1] ტოლია 7,68, ე.ი. $T_{კრ}$=7,68. T_0 ნულოვანი ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ შემოწმებული ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფის მოსწავლეთა შორის შემთხვევითია. ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზა-არის სტატისტიკური განსხვავება, ე.ი. შემთხვევითი არ არის. შედეგები მოყვანილია მეორე ცხრილში.

ცხრილი 2

ჯგუფები	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
მოსწავლეთა რაოდენობა	215	190
ამოხსნა I	144	110
ვერ ამოხსნა	71	70
ამოხსნა II	109	70
ვერ ამოხსნა	35	40

ჩატარებული ექსპერიმენტის $T_ნ$ კრიტერიუმის სტატისტიკური გამოთვლისათვის ვისარგებლეთ ფორმულით:

$$T_ნ = 2 \cdot \frac{N\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right)^2}{n_1 n_2 \left(O_{11} + O_{21}\right)\left(O_{12} + O_{22}\right)} \quad [56]$$

ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეები აღებულია მე-3 და მე-4 ცხრილებიდან, რომლებიც თავის მხრივ მიღებულია მე-2 ცხრილიდან.

ცხრილი 3

I ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O_{11} = 144$	$O_{21} = 110$
ვერ ამოხსნა	$O_{12} = 71$	$O_{22} = 80$
	$O_{11} + O_{12} = n_1 = 215$	$O_{21} + O_{22} = n_2 = 190$

სადაც $n_1 + n_2 = N = 405$.

ცხრილი 4

II ნიშანი	ექსპერიმენტული	საკონტროლო
ამოხსნა	$O'_{11} = 109$	$O'_{21} = 71$
ვერ ამოხსნა	$O'_{12} = 35$	$O'_{22} = 39$
	$O'_{11} + O'_{12} = n'_1 = 144$	$O'_{21} + O'_{22} = n'_2 = 110$

სადაც $n'_1 + n'_2 = N' = 254$.

მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები:

პირველი ნიშნისათვის: $T_ნ = 8{,}10$. მეორე ნიშნისათვის: $T'_ნ = 8{,}71$. რადგან ორივე მნიშვნელობა აღემატება $T_{კრ}$, ამიტომ ორივე ნიშნით გადაწყვეტილების მიღების T_0 ჰიპოთეზა იცვლება ალტერნატიული T_1 ჰიპოთეზით. ე.ი. პირველი და მეორე ნიშნით განსხვავება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო ჯგუფებს შორის შემთხვევითი არ არის.

ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფების მოსწავლეები თითქმის ერთნაირ სასწავლო პირობებში იმყოფებოდნენ, სხვაობა იყო მხოლოდ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების მოხსნის სწავლების მეთოდიკაში, ამიტომ მიღებული განსხვავება შეიძლება ავხსნათ მხოლოდ იმით, რომ ეფექტურია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ჩატარებული სწავლების მეთოდიკა.

მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების მოხსნის ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ზემოთ მოყვანილი პედაგოგიური ექსპერიმენტი საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. მეთოდიკა, რომლის ზოგადი დახასიათება მოცემულია დისერტაციაში შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსის სასწავლო პრაქტიკაში, როგორც მათემატიკის სწავლების სპეციალური მეთოდიკა;

2. დისერტაციაში განხილული მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლება ხელს უწყობს მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის დონის გაღრმავებას და გაფართოებას, ამაღლებს ინტელექტს;

3. მეთოდიკური თვალსაზრისით მიზანშეწონილად მიგვაჩნია საშუალო სკოლაში მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანები დავყოთ მსგავსების და განმასხვავებელი ნიშნების მიხედვით. დაყოფის შემდეგ ამოცანები დავალაგოთ სირთულის მიხედვით. გაკვეთილებზე, ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე და მოსწავლეთა მათემატიკის საგნობრივი წრის სხდომებზე განვიხილოთ თითოეული ჯგუფის უფრო რთული ამოცანები, ხოლო შედარებით მარტივი ამოცანები მოსწავლეებს მივცეთ საშინაო დავალებად ან დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. მიუღებლად მიგვაჩნია მოსწავლეებისათვის სწავლების პროცესში რთული საოლიმპიადო ამოცანების მიცემა. რადგან ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც აღემატება მოსწავლეთა გონებრივ შესაძლებლობებს, მათში იწვევს შიშს და საკუთარ შესაძლებლობებში დაეჭვებას.

შემუშავებული მეთოდიკა საშუალებას იძლევა ეფექტური გავხადოთმათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების ქმედითუნარიანობა, რაც საბოლოოდ მოსწავლეებს განუმტკიცებს საკუთარი თავის რწმენას, ამაღლებს ამოცანების ამოხსნის ინტერესს. რაც დაადასტურა ჩატარებულმა პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა.

ზოგადი დასკვნები და რეკომენდაციები

თეორიული სამეცნიერო კვლევების, საკუთარი მრავალწლიანი პედაგოგიური გამოცდილებით, მოწინავე ნოვატორი პედაგოგებთან კონსულტაციების და ჩატარებული პედაგოგიური ესპერიმენტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ დასკვნები და რეკომენდაციები შემდეგი ფორმულირებით:

1. მასწავლებელმა მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებიკონკრეტული თემატიკის მიხედვით უნდა ჩართოს საკლასო მეცადინეობაზე, რომლისთვისაც დამატებითი სასწავლო დროის გამოყოფა საჭირო არ არის. საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის პროცესი უნდა ააგოს სწავლების მეცნიერულ შინაარსზე და გააზრებულ შეთვისებაზე, რომელიც დამყარებულია აქტიურ დამახსოვრებაზე და ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებაზე, რადგან სწავლების პროცესი დაფუძნებული უნდა იყოს მეცნიერებათა საფუძვლების თანმიმდევრულ შეთვისებაზე.

2. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებიამოხსნის მეთოდების ან/და ხერხების დაუფლება მოითხოვს მოსწავლეებისადმი ინდივიდუალურ მიდგომას, მათი თავისებურებების გათვალისწინებას, საშინაო დავალებების და დამოუკიდებელი სამუშაოების ინდივიდუალიზაციას და სხვ. მასწავლებლის დაკვირვების საგანს უნდა წარმოადგენდეს გაკვეთილზე განხილული და საშინაო დავალებად მიცემული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მთლიანი პროცესი.

3. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებისამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების ათვისება დამოკიდებულია როგორც მასწავლებლის გამოცდილებაზე, ისე ამოცანების ამოხსნის მეთოდებსა და სპეციალური ხერხების ფორმებსა და მეთოდიკურ თავისებურებებზე. ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და სპეციალური ხერხები მოითხოვს მეცნიერულ შესწავლას. ჩვენი აზრით მათემატიკის

სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებისამოხსნის მეთოდების და სპეციალური ხერხების სწავლებას მეტად უნდა ექცეოდეს ყურადღება უმაღლეს სკოლაში მათემატიკის აკადემიური პროგრამის განათლების მეცნიერებების მაინორ პროგრამებზე და მასწავლებელთა გადასამზადებელ ტრენინგებზე, რადგან ვთვლით, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებსა და ხერხებს უნდა ფლობდეს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის სამივე საფეხურის მათემატიკის ყველა მასწავლებელი.

4. სწავლების პროცესში მოსწავლეებს საფუძვლიანად უნდა გავაცნოთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნისასგამოყენებული მეთოდები და ხერხები. მიზანშეწონილია, თუ ამის შესაძლებლობა არსებობს ამოცანების ამოხსნის დროს გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდი ან/და ხერხი, ამასთან მეთოდურად უნდა დავასაბუთოთ გამოყენებული მეთოდის ან/და ხერხის უპირატესობა.

5. საკუთარმა პედაგოგიურმა გამოცდილებამ, კოლეგებთან კონსულტაციებმა და პედაგოგიურმა ექსპერიმენტმა დაადასტურა, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმ-პიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკა უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ მოთხოვნებს:

- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების სწავლება უნდა განხორციელდეს კონკრეტული ამოცანების საშუალებით ამოცანების ამოხსნის დროს;
- მასწავლებელმა უნდა გამოიყენოს ისეთი კითხვები, რომლებიც მოსწავლეებს დაეხმარება ასეთი ამოცანების ამოხსნის ყველაზე პერსპექტიული გზის მოძებნაში;
- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანებისამოხსნის სწავლების მეთოდიკა უნდა შეიცავდეს ამოცანის ანალიზს, რომლის მიზანია ამოცანის პირობაში ჩადებული ინფორმაციის სრული აღქმა და მის საფუძველზე ამოხსნის გზის მიგნება;

- მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანის ამოხსნის ახალი სპეციალური მეთოდის ან/და ხერხის განხილვამდე მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ გამოსაყენებელი მეთოდის ან/და ხერხის არსი და სპეციფიკა, თუ შესაძლებელია მოვახდინოთ მისი განზოგადება. ამოცანის ამოხსნის შემდეგ მიღებული ახალი ცოდნის განმტკიცების მიზნით მოსწავლეებს საშინაო დავალებად ან დამოუკიდეელი მუშაობისათვის მივცეთ შედარებით ნაკლები სირთულის მქონე ანალოგიური ამოცანა.
- მოსწავლეებს უნდა გავაცნოთ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნისას გამოყენებული სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების უპირატესობები იმავე ამოცანების ამოხსნის სხვა მეთოდებთან ან/და ხერხებთან შედარებით.

6. ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში მოსწავლეთათვის ცნობილი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა გარდა, არსებობს მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო შინაარსის ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების უამრავი სახე, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს ამოხსნის სპეციალური მეთოდების ან/და ხერხების გამოყენებას. გამოყოფილია ასეთი სახის ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და უტოლობების ზოგიერთი სახე, რომლებიც შესაძლებელია ჩართული იქნეს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების სასწავლო პროცესში, არ მოითხოვს დამატებითი სასწავლო დროის გამოყოფას და მოსწავლეთათვის მარტივად აღსაქმელია. ასეთი სახის ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხნის ჩართვა სასწავლო პროცესში ყოველგვარი ხელოვნურობის გარეშე, ბუნებრივად ხდება, ამოხსნის პროცესი საგრძნობლად მარტივია და მოსწავლეებს საშუალებას აძლევს დაინახონ ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების ამოხსნის განხილული ხერხების ორიგინალურობა და ის სილამაზე, რომელიც ასეთი ამოცანების ამოხსნას თან ახლავს. განხილულია ტრიგონომეტრიული განტოლებების და უტოლობების საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვაგვარი მიდგომები:

- რიცხვითი უტოლობების გამოყენებით;

- ფუნქციათა განსაზღვრის არეების შედარებით;
- ფუნქციათაშემოსაზღვრულობისთვისებისგამოყენებით;
- $f\left(\varphi(x)\right)=f\left(\phi(x)\right)$ სახის განტოლებების ამოხსნა;
- სუპერპოზიციისშემცველიტრიგონომეტრიულიგანტოლებებისამოხსნა.
- მეთოდურადდამუშავებულია

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\pm1,\ \sin\alpha x\sin\beta x=\pm1,\ \cos\alpha x\cos\beta x=\pm1,$$

$$A(\sin\alpha x)^n+B(\cos\beta x)^m=|A|+|B|,\ A(\sin\alpha x)^n+B(\sin\beta x)^m=|A|+|B|,$$

$$A(\cos\alpha x)^n+B(\cos\beta x)^m=|A|+|B|$$

სახის ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის სპეციალური ხერხები, რომლებიც ეყრდნობა სინუსდაკოსინუსფუნქციათათვისებებისგამოყენებას, სადაც $\alpha,\beta,A,B-$ მოცემული, ნულისგან განსხვავებული რიცხვებია, ხოლო $m,n-$მოცემული ნატურა–ლური რიცხვებია.

მიგვაჩნია, რომ მასწავლებელი სრულყოფილად უნდა იყოს დაუფლებული განხილუ–ლი სახის ამოცანების ამოხსნის სპეციალურ მეთოდებს და/ან ხერხებს, რომლებსაც შემდგომში საკუთარი შეხედულებების მიხედვით საჭიროების შემთხვევაში ჩართავს სასწავლო პროცესში, რაც იძლევა მოსწავლეთა კარგ განმავითარებელ ეფექტს.

7. საკუთარი პედაგოგიური გამოცდილებით, ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერიმენ–ტის შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოწინავე, შემოქმედი მასწავლებლი ეფექტურად ახერხებს სასკოლო საოლიმპიადო შინაარსის ტრიგონო–მეტრიული განტოლებების და უტოლობების ჩართვას სასწავლო პროცესში, მოსწავ–ლეებს აქვთ მზაობა სასწავლო პროცესში მეცადინეობაზე განიხილონ პროგრამაში მოცემულ ამოცანებთან შედარებით რთული საოლიმპიადო ამოცანები, რომელებიც მასწავლებლის მიერ ისეა შერჩეული, რომ მათი ამოხსნა მოითხოვს გონებამახვილობას და ამოხსნის სპეციალური ხერხების ცოდნას, მაშინ როცა ასეთი ამოცანები ჩვეულებრი–ვი, ტრადიციული მიდგომით ან არ ამოიხსნება, ან საკმაოდ დიდ დროს და რთული გარდაქმნების ჩატარებას მოითხოვს.

8. ჩვენს მიერ მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის მეთოდიკური თავისებურებების კვლევა საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით, რომელიც დამყარებულია მოსწავლეთა გონებრივი მოღვაწეობის მართვაზე, მოვახდინეთ ორი მიმართულებით: პირველი-პირდაპირი გზა, რომლის დროსაც მართვა ატარებს უშუალო ხასიათს და გამოიხატება სხვადასხვა ინტელექტუალური მოქმედების მიზანმიმართულ ჩამოყალიბებაში. მეორე მიმართულება გულისხმობს გონებრივი მოღვაწეობის მართვის ირიბ გზას სწავლების მეთოდების და შინაარსის მეშვეობით, რომლის დროსაც სწავლება სტიმულირებას უკეთებს მოსწავლეებს დამოუკიდებლად გამოავლინონ გონებრივი მოქმედებების ფუნქციები და სტრუქტურები სასწავლო მოღვაწეობის ზოგად შინაარსში.

საგანთაშორისი ხასიათის შემეცნებითი მათემატიკური ამოცანების მეთოდური სისტემის შესადგენად ჩვენ გამოვიყენეთ შემეცნებითი ამოცანების დიდაქტიკური სისტემის აგების ძირითადი პრინციპები. მისი თავისებურებები მდგომარეობს შემდეგში:

1. ამოცანების ტიპოლოგიის საფუძვლად აღებულია მათემატიკის სასკოლო კურსის ის თემები, რომლებიც საგანთაშორისი კავშირების შემცველია.

2. ამოცანების შინაარსის შერჩევა ისე ხდებოდა, რომ ამოცანების ამოხსნის აზრი და შედეგი აფართოებს იმ ცნებების საზღვრებს, რომლებიც შეისწავლება მომიჯნავე სასწავლო დისციპლინებში.

3. ყოველ ამოცნაში მომზადებულია შეკითხვების სისტემა მოსწავლეების მიერ ამოცანების საგანთაშორისი შინაარსის გაგების მიზნით და მათ მიერ სხვა სასწავლო დისციპლინებიდან ცოდნის აქტივიზაციისათვის.

არსებული სახის ამოცანების შედგენისათვის ჩვენ გამოვიყენეთ მეთოდიკა, რომელიც შემუშავებულია ალგებრის და გეომეტრიის სასწავლო მასალებზე დაყრდნობით.

I. მათემატიკის სასწავლო კურსში განვიხილეთ ალგებრული და გეომეტრიული მასალის შემცველი თემები, რომელიც ჩავთვალეთ საგანთაშორისი კავშირების შინაარისის შემცველად;

II. მათემატიკის სასწავლო კურსში არჩეული თემებიდან გამოვყავით ის, რომელთა გამოყენება შესაძლებელია შემეცნებითი ამოცანების შესადგენად.

III. შევადგინეთ საგანთაშორისი კავშირების გამოყენებით ამოცანათა სისტემები ალგებრული და გეომეტრიული მასალების ბაზაზე.

მეთოდურად დამუშავებულია საგანთაშორისი კავშირების შინაარსის მქონე ამოცანები, რომელთაგან გამოყოფილია ამოცანათა ჯგუფი, რომლის გამოყენება მიზანშეწონილია მათემატიკის გაკვეთილებზე, უფრო რთული ამოცანების ჯგუფი, რომელთა განხილვა მიზანშეწონილია მათემატიკის საგნობრივ წრეებზე ან ფაკულტატიურ მეცადინეობებზე, რადგან განხილული ამოცანების სირთულე აღემატება სკოლაში განსახილავი ამოცანების სირთულეს.

პედაგოგიური ექსპერიმენტით დადასტურებულია, რომ დისერტაციაში განხილული ამოცანების ტიპოლოგიის გამოყენებით შესაძლებელია მოსწავლეთა აქტიური, დამოუკიდებელი, შემოქმედებითი აზროვნების განვითარება. მიგვაჩნია, რომ მასწავლებლის მიერ ამოცანების ტიპოლოგიის ცოდნა არის განმავითარებელი სწავლების განხორციელების მნიშვნელოვანი პირობა.

9. მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო განტოლებათა ამოხსნის სწავლების მეთოდიკის ცენტრალური ელემენტია მათში მოთავსებული ევრისტიკული ინფორმაციის გამოვლენა და გამოყენება, რომელიც ხელს უწყობს განტოლების ამოხსნის გზის აღმოჩენას. სტანდარტული ფორმის განტოლებებისაგან განსხვავებით, არასტანდარტული განტოლებათა თავისებურებები განსაზღვრავენ ამოხსნის განსხვავებულ კერძო სახეებს. განტოლებათა ამოხსნა მთელ ან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც შეიცავს ორ ან მეტ უცნობს თავისი შინაარსით საოლიმპადო ამოცანათა კატეგორიას განეკუთვნება და მათი ამოხსნა მოსწავლეთათვის საკმაოდ რთულია.მეთოდურად დამუშავებულია მთელ რიცხვთა სიმრავლეში განტოლებათა ამოხსნა განტოლებებში შემავალი გამოსახულებების შეფასების მეთოდით. რაც გულისხმობს განტოლებაში შემავალი გამოსახულების შეფასებას ნაკლებობით, ან მეტობით, ან ნაკლებობით და მეტობით, ანუ ამ გამოსახულების მნიშვნელობათა არეს დადგენას, მაგრამ როცა ეს არ ხერხდება, საზღვრების დადგენას ნაკლებობით, ან მეტობით, ან ნაკლებობით და მეტობით. განტოლებების მთელ და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ამოხსნის

ძიების პროცესის წარმართვა გადმოცემული სახით იწვევს მოსწავლეთა დაინტერესებას და ხელს უწყობს ამოხსნის განხილული სპეციალური ხერხების პრაქტიკაში დანერგვასა და გამოყენებას.

10. მათემატიკის სწავლების მდგომარეობის კრიტიკული ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოსწავლეთა უმეტესობა სუსტად ფლობს მათემატიკის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ხერხებს, სასწავლო პროგრამით თითქმის არ განიხილება საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის სწავლება. დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით უნდა მოხდეს მათემატიკის ისეთი სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების შერჩევა, რომელიც სრულ შესაბამისობაში იქნება მოსწავლეთა ასაკობრივ თავისებურებებთან, მოახდენს შესასწავლი მასალის გაღრმავება-გაფართოებას, შესაბამისიობაში იქნება მოსწავლეთა ინტელექტუალური განვითარების დონესთან და ამავე დროს ექნება განმავითარებელი ფუნქცია.

11. პედაგოგიური ექსპერიმენტით დადასტურდა, რომ მოსწავლეთა მათემატიკით დაინტერესება გააძლიერა ისეთი სახის საოლიმპიადო ამოცანებმა, რომელებიც თავისი შინაარსით ალგებრულია, ხოლო მათი ამოხსნისათვის გაცილებით კარგ შედეგს იძლევა და მიზანშეწონილია გეომეტრიული მეთოდების და მიდგომების გამოყენება, ვიდრე ალგებრული მეთოდები. ასეთმა მიდგომამ მოსწავლეებში მოხსნა დაძაბულობა, რომელიც ახლავს გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნას და მოსწავლეებს თვალნათლივ აჩვენებს გეომეტრიული მასალის შესწავლის აუცილებლობას და ადასტურებს, რომ ზოგჯერ გეომეტრიული მიდგომებით მარტივად შესაძლებელია ალგებრული ამოცანების ამოხსნა. ასეთი მიდგომებით მარტივად ხდება გადასვლა საოლიმპიადო ალგებრული შინაარსის მასალიდან საოლიმპიადო გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებზე, რაც საშუალებას იძლევა მივიღოთ მაღალი შედეგები. შედგენილია სასკოლო საოლიმპიადი ალგებრული ამოცანები, რომელთა ამოხსნისათვის საჭიროა სპეციალური გეომეტრიული მიდგომები და მათი ჩართვა შესაძლებელია სასწავლო პროცესში კონკრეტული სასწავლო თემების გავლის დროს, არ მოითხოვს დამატებით სასწავლო დროის გამოყოფას და აქვს დიდი განმავითარებელი ფუნქცია, დამუშავებულია მეთოდური

რეკომენდაციები მასწავლებლებისათვის, რომელიც დაეხმარება მასწავლებლებს სასწავლო პროცესის დიდაქტიკის პრინციპების სრული დაცვით წარმართვაში და შესაძლებლობას მისცემს მათ შეადგინონ მსგავსი ამოცანები სხვადასხვა თემებისათვის.

12. საოლიმპიადო ალგებრული შინაარსის მქონე ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და ამოხსნის სპეციალური მეთოდების და/ან ხერხების სწავლება საშუალებას იძლევა, რომ მათემატიკის სწავლება გადაიქცეს დიდაქტიკაზე დაფუძნებული ცოდნის და მის მოსაპოვებლად საჭირო შემეცნების ხერხების შეწყვილებად.

13. ფუნქციის ზოგიერთი თვისების საშუალებით ფუნქციათა აღდგენის ამოცანები საოლიმპიადო ამოცანების კატეგორიას განეკუთვნება და არ არსებობს მათი ამოხსნის ზოგადი ალგორითმი. ასეთ ამოცანებში ზოგადად საძიებელია ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება. პედაგოგიური ექსპერიმენტით დაადასტურა, რომ ფუნქციების აღდგენის ამოცანების ამოხსნა მნიშვნელოვნად ამაღლებს მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის დონეს, ხელს უწყობს მათ ზოგად ინტელექტუალურ განვითარებას, კონსტრუქციული აზროვნების ჩამოყალიბებას, ლოგიკის, ინტუიციის და საკუთარი აზრების გადმოცემის დახვეწას, დამოუკიდებელი შემოქმედებითი შრომის უნარის ჩასახვას და დიდი როლი ასრულებს პიროვნების სრულყოფილ ადამიანად ჩამოყალიბებაში.

14. ჩატარებული პედაგოგიური ექსპერმენტით დადასტურდა, რომ მათემატიკის სასკოლო საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის ჩვენს მიერ დამუშავებული სწავლების მეთოდიკა ეფექტურია ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში, მისი ჩართვა შესაძლებელია სასწავლო პროცესში და წარმოადგენსმათემატიკის სწავლების სპეციალურ მეთოდიკას.

გამოყენებული ლიტერატურა

1.ბერძულიშვილი გ., ონიანი–საღინაძე ნ., ბაკურაძე ბ.სიმრავლეთა და ალბათობის თეორიის ელემენტების სწავლება მათემატიკის სასკოლო კურსში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2014 წ. 248 გვ.

2.ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ. მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2015 წელი. 252 გვ.

3.ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძეგ.საოლიმპიადომათემატიკურიამოცანებიდაწყებით კლასებში. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2016 წელი. 680 გვ.

4.ბერძულიშვილი გ. 2017 წელი საოლიმპიადო ამოცანებში და არა მარტო. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2016 წელი. 102 გვ.

5.ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.საოლიმპიადომათემატიკურამოცანათა ამოხსნის პრაქტიკული ჩვევების ფორმირება საშუალო სკოლაში.აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2017 წელი. 404 გვ.

6.ბრეგაძე გ.–განტოლებების, უტოლებების, მათი სისტემების და ერთობლიობების ამოხსნის სპეციალური ხერხების სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები მათემატიკის სასკოლო კურსში. განათლების დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის ავტორეფერატი. ქუთაისი, 2013 წ.

7.გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა VII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.

8.გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა VIII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
9.გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა IX კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
10. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა X კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
11. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა XI კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
12. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-მათემატიკა XII კლასის სახელმძღვანელო. გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
13. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, I ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
14. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.-გავიმეოროთ მათემატიკა. აბიტურიენტებისა და პედაგოგებისათვის, II ნაწილი გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი 2016 წელი.
15. გოქაძე ი. ბაკურაძე ზ., ბერძულიშვილი გ.-განტოლებების მთელ რიცხვთა სიმრავლე-ში ამოხსნის ერთი არასტანდარტული ხერხის შესახებ. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(56). თბილისი. 2015 წ. გვ. 139–143.
16. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნისას გამოყენებული ზოგიერთი ხერხის შესახებ. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(56). თბილისი. 2017 წ. გვ. 139–143.
17. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნისას გამოყენებული ზოგიერთი ხერხის შესახებ. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(55). თბილისი. 2017 წ. გვ. 159–163.

18. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., საგანთაშორისი კავშირების გამოყენება ერთი სახის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის დროს. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(57). თბილისი. 2017 წ. გვ. 123–127.
19. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., საგანთაშორისი კავშირების გამოყენება ერთი სახის საოლიმპიადო ამოცანების ამოხსნის დროს. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 1(57). თბილისი. 2017 წ. გვ. 118–122.
20. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-საოლიმპიადო ალგებრული ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. (I ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(59). თბილისი. 2017 წ. გვ. 20–24.
21. გოქაძე ი. ბერძულიშვილი გ., ბრეგაძე გ.-საოლიმპიადო ალგებრული ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. (II ნაწილი). პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 3(59). თბილისი. 2017 წ. გვ. 25–29.
22. დოგრაშვილი ა.-დაწყებითი მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი. 2003 წელი.
23. ეროვნული სასწავლო გეგმა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებისათვის. თბილისი, 2016 წელი.
24. ეროვნული სასწავლო გეგმა, საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში VII-XII კლასები. თბილისი, 2016 წელი.
25. ვახანია ზ.-სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად. თბილისი. 1999წ. 36 გვ.
26. ნადირაშვილი შ.-განზოგადების განვითარება სასკოლო ასაკის ბავშვებში. თბილისი. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია. 2009 წელი. 284 გვ.
27. კოტეტიშვილი ი.-ექსპერიმენტული სწავლების ფსიქოლოგიური შინაარსი. თბილისი. გამომცემლობა „მეცნიერება“. 2007 წელი. 171 გვ.
28. იმერლიშვილი ე.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა, ზოგადი მეთოდიკა. თსუ გამომცემლობა. თბილისი, 2001 წ.

29. მორალიშვილი თ.-ამოცანათა ამოხსნის ძიების სწავლება საშუალო სკოლაში. გამომცემლობა „განათლება“. თბილისი. 1991 წ. 128 გვ.
30. მორალიშვილი თ. სასკოლო მათემატიკის ამოცანების ამოხსნის ძიების სწავლების მეთოდიკური საფუძვლები. პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია. თბილისი, 2003.– 292 გვ.
31. მორალიშვილი თ., ჯინჯიხაძე გ.-არასტანდარტული ამოცანების მნიშვნელობა მათემატიკის კურსის სწავლების პრაქტიკაში. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“, №19, თბილისი, 2005, გვ. 46-54.
32. მორალიშვილი თ., ონიანი გ., ჯინჯიხაძე გ.-სასწავლო საქმიანობის სუბიექტის ფორმირება დაწყებით და საბაზო სკოლაში არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეშვეობით. თბილისი, გამომცემლობა „უნივერსალი“, თბილისი, 2008 წელი.
33. ნახუცრიშვილი ნ.-პრობლემურ-განმავითარებელი სწავლების საკითხები დაწყები-თი სკოლის საფეხურზე თელავის ი.გოგებაშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერ-სიტეტის სამეცნიერო შრომების კრებული № 2 (20) . 2006 წ. გვ.237-239.
34. ნოზაძე გ., ოჩხიკიძე მ.-მათემატიკის სახელმძღვანელოებისათვის სავარჯიშოთა შერჩევის კრიტერიუმები. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, №117, გვ. 59-62.
35. სახელმწიფო საგანმანათლებლო სტანდარტი მათემატიკაში. საქართველოს საკანონმდებლო მაცნე. თბილისი. 2015 წელი.
36. უზნაძე დ. შრომები. ზოგადი ფსიქოლოგია. ტ. III-IV. გამომცემლობა „აღმაშე-ნებელი“, თბილისი, 1998.–637 გვ.
37. ქელბაქიანი ვ.-მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ქუთაისი, 2001 წ.

38. ჩხიკვაძე ი.-განმავითარებელი სწავლების სისტემაში დაწყებითი კლასებისათვის ტექსტური ამოცანების შედგენისა და გამოყენების დიდაქტიკური ასპექტები. აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა. ქუთაისი, 2009 წელი.
39. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ინვარიანტების და ნახევრადინვარიანტების მეთოდის გამოყენებით გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლების მეთოდიკური თავისებურებები საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 45–48.
40. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. ფართობისა და მოცულობის მეთოდის გამოყენებით არასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის სწავლება საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 49–52.
41. წერეთელი თ., ბერძულიშვილი გ. საშუალო სკოლაში დირიხლეს პრინციპითარასტანდარტული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა და მისი სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში. პერიოდული საერთაშორიო სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი“. 2(58). თბილისი. 2017 წ. გვ. 53–56.
42. ჯინჯიხაძე გ.-არასასტანდარტული ამოცანა, როგორც მათემატიკის კურსის ამოცანათა სისტემის ელემენტი. იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიკურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“, №19. თბილისი,. 2005, გვ. 54-58.
43. ჯინჯიხაძე გ.-ცნებები „ამოცანა“ და „არასტანდარტული მათემატიკური ამოცა-ნა“ თანამედროვე მეცნიერულ გამოკვლევებში: იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტის შრომების კრებული „საზრისი“ №18, თბილისი. 2005, გვ. 51-55.
44. Алфутова Н.Б. Устинов А.В.-Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.- 264 с.

45. Асташов Е.А., Веревкин Я.А., Манжина О.А., Удимов Д.А.-Математический кружок (8-9 классы). Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2015 г. 65 с.

46. Берлов С., Иванов С., Кохась К.-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Лань, 1998. 448 с.

47. Блинков А. Кружок по геометрии. Издательский дом «Первое сентября». Учебно-методический журнал Математика. №5(782) 2017 г.

48. Богданов И. И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А.- Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006. Окружной и финальный этапы, М.: МЦНМО, 2007. 472 с.

49. Брунер Дж.-Психология понятия. Москва. Изд. „Просвещение". 1977 г

50. Быковских А.М.-Нестандартные задачи. Красноярский Государственный университет. Заочная естественно научная школа про КрасГУ. Красноярск. 2006.

51. Васильев Н., Гуттенмахер В., Раббот Ж., Тоом А.-Заочные математические олимпиады Москва. Наука. 1987 г.

52. Васильев Н.Б., Егоров А.А.-Задачи Всесоюзных математических олимпиад. (Библиотека математического кружка, выпуск 18) М.: Наука, 1988. 288 с.

53. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике.Челябинск. Взгляд. 448 с.2004г.

54. Генкин С.А., Итенберг И.В. , Фомин Д.В.-Ленинградские математические кружки. пособие для внеклассной работы. Киров,, 1994. 272 с.

55. Готман Э.Г. Совершенствование содержания геометрических задач и методов их решения как средство повышения качества знаний учащихся по математике. - Арзамас, 2007. - 202 с.

56. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непарамстрические методы /М. И. Грабарь, К. А. Красняпская М.: Педагогика, 1977.-136 с.

57. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Москва. Просвещение. 2010 г.

58. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения.-Москва.Интор, 1996.-544с.

59. Дрозина В.В., Дильман В.Л. Механизм творчества решения нестандартных задач М.: БИНОМ, 2008. - 257с.

60. Зайкин М.И. Математический тренинг. Развиваем комбинационные способности. Задачники по математике для школьников. Книга для учащихся 4-7 классов. — М.: ВЛАДОС, 1996. — 176 с.

61. Иванов С.В., Математический кружок. Задачник первого-второго года обучения. Санкт-Петербургский городской дворец творчества юных, 1993.- 80 с.

62. Канель-Белов А.Я., Ковалджи А.К.-Как решают нестандартные задачи. под ред. В.Д. Бугалина. Изд. четвертое. Москва. Изд.юательство МЦНМО. 2008 г.

63. Канунников А.Л.-Математический кружок (8 класс). Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2015 г. 67 с.

64. Коробицын Д.А., Жуков Г. К.-Математический кружок 5 класс. Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2015 г. 121 с.

65. Кузнецов С.Л., Оноприенко А.А.-Математический кружок (6-7 классы). Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2017 г. 91 с.

66. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я.-Венгерские математические олимпиады. Перевод с венгерского Данилова Ю.А. под редакцией и с предисловием В.М. Алексеева. М.: Мир, 1976. 544 с.

67. Левитас Г.Г.-Нестандартные задачи по математике в 7-11 классах. Москва. изд. ИЛЕКСА. 2009 г.

68. Литвинов В.Л.88 занимательных и олимпиадных задач по математике.Самара,2015.43с.

69. Мамий Д. II Кавказская математическая олимпиада. Издательский дом «Первое сентября». Учебно-методический журнал Математика. №5(782) 2017 г.

70. Методика преподования математики в средней школе: Общая методика. Учебное пособие для ст-ов физ.-мат. фак-ов пед. инст. /В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др.-2-е изд.-Москва. Просвещение, 1980. – 368с.

71. Натадзе Р. К.-К онтогенезису формирования понятия. Тбилиси. Изд. „Мецниереба“, 1976. 264 стр.

72. Осипов И.И.-Математический кружок (5-6 классы). Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2017 г. 86 с.

73. Перельман Я.И.-Живая математика. Москва.: Наука. Гл. ред. Физю-матю лит. 1967 г. 160 с. Перельман Я.И.-Занимательная алгебра. Москва.: Наука. Гл. ред. Физю-матю лит. 1967 г. 200 с.

74. Перельман Я.И.-Занимательная геометрия. Москва.: М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1950.— 296с

75. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. - М.: АСТ .ПРЕСС: Магистр-S, 2015. - 256с.

76. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Пер. с англ. / Под ред. С. А. Яновской.- Москва. Наука, 1976.-448 с.

77. Пойа Д. Как решать задачу .Пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; Под ред. Ю. М. Гайдука.- Москва. Учпедгиз, 1959.-207 с.

78. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. И. А. Вайпштейпа; Под ред. С. А. Яновской. 2-е изд., испр. Москва. Наука, 1975.-463 с.

79. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Москва. Изд.„Просвещение“.1969.659 с.

80. Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия. Вопросы психологии. 1966 г. №4. стр. 121-126.

81. ПрасоловВ.В.. Задачипо алгебре, арифметике *и* анализу. М.: МЦНМО, 2007. 345с.

82. Развивающие задачи для математического досуга /Сост. Э. А. Кремнев, З. С. Сухотина. Москва. Школа-пресс, 1993.-95 с.
83. Рахимов А. З. Формирование творческого мышления школьников. Автореф. дисс. . докт. пед. наук.- Москва. 1993.31 с.
84. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. Т. 1. /С.Л. Рубинштейн.-Москва. Педагогика, 1989.-485 с.
85. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии /С.Л. Рубинштейн. Москва. Педагогика,1976.-417 с.
86. Сгибнев А.И. Делимость чисел и простые числа. Методика преподавания математики. книжка серии «Школьные математические кружки» М.: МЦНМО, 2012.-112 с.
87. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. Задачники по математике для школьников.М.: Посев, 2003.-128 с.
88. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. Задачники по математике для школьников. для учащихся 5-7 кл.- М.: Просвещение, 2002.- 207 с.
89. Стрелков Н.П., Кузнецов С.Л.-Математический кружок (6-7 классы). Методические указания. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Механико-математический факультет. Москва. 2017 г. 71 с.
90. Столяр А. А. Методы обучения математике: Учебное пособие для пединститутов /А.А.Столяр. -Минск: Народная асвета, 1981. 191 с.
91. Столяр А. А. Педагогика математики /А.А.Столяр.-3-е изд.-Минск: Вышэйшая школа, 1986.-158 с.
92. Цыпкин А., Пинский А.-Справочник по методам решения задач по математике. Москва. Наука. 1989 г.
93. Чаплыгин В.Ф.-Нестандартные задачи. Некоторые методические аспекты. Ярославский педагогический вестник. 1998 №3 (15). стр. 96-104.
94. Шарыгип, И. Ф. Математика: задами па смекалку. Учеб. пособие для 5-6 кл. / И. Ф. Шарыгип, А. В. Шевкин. Москва. Просвещение, 1995.

95. Шарыгип, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред.шк. /И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.-М. Просвещение, 1991.-384 с.

96. Шарыгин И.Ф. Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. -М.: Просвещение, 1994.-252 с.

97. Шарыгин И.Ф.-Геометрия.Задачник для 9–11 классов. М.: Дрофа, 1986. 400 с.

98. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды /Д. Б. Элькопин / Под ред. В. В. Давыдова. Москва. Педагогика, 1989. -554 с.

99. Эльконин Д.Б. Психология обучения школьников. Москва. Знание, 1974. – 64с.

100. Якиманская И. С. Развивающее обучение /И. С. Якиманская.-Москва. Педагогика, 1979.-144 с.- (Б-ка учителя.-Воспитание и обучение).

101. Якуба Э.Г.-Из опита преподавания математики в VII-VIII классах. Москва.,,,Педагогика“, 2006 г.

102. Ingrid Bohm, Jens Schneider. Productive Learning–An Educational Opportunity for Young People in Europe. Berlin, 2009.

103. Productive Learning in the Learning Workshops: Pilot Projects in Pecs, St. Petersburg, and Berlin Present Their Work. Berlin, 2011.

104. Learning mathematics. Q.E.Lapointe, N.A.Mead, J.M.Askew.-The International Assessment of Educational Progress, Educational Testing service, –2009.–158 p.

105. Mathematics. Cole W.L., Haubher M.A., Sparks J.M., W.G.Quast / Coordinating Author E.R.Duncan.–Boston: Houghton Mifflin Company, 2010.–486 p.

106. Ross Honsberger. More mathematical morsels.–The Mathematical association of America, 2011.–237 p.

107. Assessment Standards for Scool mathematics. Working Draft.–Nationai Council of teachers of mathematics, 2008.–244 p.

108. Eisenmann, B. (2009) Curriculum vision and coherence Adapting curriculum to focus on authentic mathematics Mathematics Teacher, 103 (1), 70 -75.

109.National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics Reston, VA: Author.Nowlin, D. 2007). Precision: The neglected part of the measurement standard. Mathematics Teacher, 100 (5), 356-360.

110.http://problems.ru/

111.http://olympnew.ncfu.ru/

112.http://www.5egena5.ru/

113.http://rupark.com/

114.http://zaba.ru/

115.http://pikabu.ru/

116.http://nsportal.ru/

117.http://olehnik.ru/

118.http://ilib.mccme.ru/

119.http://matica.narod.ru/

120.http://lyamb-da.livejournal.com/

121.http://mmmf.msu.ru/

122.http://concurs.mziuri.ge

123.http://imedi.mziuri.ge

124.http://mathpuzzle.com/

125.http://mmmf.msu.ru/

დანართი

1. მთელ მდელოზე ბალახი იზრდება ერთნაირად სწრაფად და ერთნაირად ხშირია. 70 ძროხა მდელოს მოძოვს 24 დღეში, 30 ძროხა-60 დღეში. რამდენი ძროხა მოძოვს ამ მდელოს 96 დღეში?

2. მონადირეებმა გადაწყვიტეს იხვზე სანადიროდ წასვლა და დათქვეს, რომ ერთმანეთს შეხვდნენ ტყეში-მონადირის სახლში. მონადირეთა სახლში მივიდა 10 მონადირე, ყველა მონადირემ შესასვლელში დატოვა რეზინის სანადირო ჩექმები. რეზინის სანადირო ყველა ჩექმის ათივე წყვილი სხვადასხვა ზომისაა. მონადირეებმა მოილაპარაკეს ვინ რომელი მიმართულებით უნდა წავიდეს და სად ინადიროს. ისინი სათითაოდ გამოდიან მონადირის სახლის შესასვლელში, იცვამენ რეზინის სანადირო ჩექმების იმ წყვილს, რომლებშიც მათ ფეხი ჩადით და მიდიან სანადიროდ. (ე.ი. ნებისმიერ მონადირეს შეუძლია ჩაიცვას რეზინის ის სანადირო ჩექმა, რომელიც მის ფეხის ზომაზე ნაკლები არ არის). რაღაც მომენტში აღმოჩნდა, რომ მონადირის სახლში დარჩენილმა ვერცერთმა მონადირემ ვეღარ შეძლო სანადირო ჩექმების ჩაცმა და სანადიროდ წასვლა. მაქსიმუმ რამდენმა მონადირემ ვერ შეძლოს სანადიროდ წასვლა?

3. მთელ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის გრაფიკის ორ წერტილს მთელი კოორდინატები აქვთ. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ამ ორ წერტილს შორის მანძილი მთელი რიცხვია, მაშინ ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი აბსცისათა ღერძის პარალელურია.

4. ერთდროულად ორი A და B სოფლებიდან ერთმანეთის შესახვედრად მუდმივი სიჩქარით გაემართენ ანი და ბადრი (სავალდებულო არ არის რომ, ანის და ბადრის

ერთნაირი საჩქარეები ჰქონდეთ). თუ ანი გამოვიდოდა 30 წთ-ით ადრე, მაშინ ისინი შეხვდებოდნენ 2 კმ-ით უფრო ახლოს B სოფლიდან. თუ ბადრი გამოვიდოდა 30 წთ-ით უფრო ადრე, მაშინ შეხვედრა შედგებოდა უფრო ახლოს A სოფლიდან, რა მანძილით?

5. ABC სამკუთხედის AA' და BB' სიმაღლეები გადაიკვეთება H წერტილში. X და Y წერტილები შესაბამისად AB და CH მონაკვეთების შუაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ XY და $A'B'$ წრფეები მართობულია.

6. შერლოკ ჰოლმსი და დოქტორი უოტსონი მატარებლით მგზავრობენ. თითოეული მათგანი დასაწყისში იხედებოდა ფანჯარაში, შემდეგ კითხულობდა გაზეთს, შემდეგ ხსნიდა კროსვორდს და ბოლოს სვამდა ჩაის. შერლოკ ჰოლმსი ყოველ მომდევნო მოქმედებაზე ორჯერ მეტ დროს ხარჯავდა წინასთან შედარებით, ხოლო დოქტორი უოტსონი-4-ჯერ მეტს. მათ ფანჯარაში ერთდროულად გაიხედეს და ჩაის სმაც ერთდროულად დაამთავრეს. რას აკეთებდა შერლოკ ჰოლმსი, როცა დოქტორი უოტსონი კროსვორდს ხსნიდა?

7. ალი-ბაბა და 40 ყაჩაღი ნადავლს იყოფენ. გაყოფა ითვლება სამართლიანად, თუ ნებისმიერ 30 ყაჩაღს ჯამში შეხვდება ნადავლის არანაკლებ ნახევარი. ნადავლის რა უდიდესი წილი შეიძლება შეხვდეს ალი-ბაბას სამართლიანი გაყოფისას?

8. ვინი-პუჰმა, პიტაჩოკმა, კურდღელმა და ჩოჩორმა ია-იამ შეჭამეს ერთი კასრი თაფლი. ამასთან, პიტაჩოკმა შეჭამა იმის ნახევარი, რაც შეჭამა ვინი-პუჰმა, კურდღელმა-იმის ნახევარი, რაც ვერ შეჭამა ვინი-პუჰმა, ხოლო ჩოჩორ ია-იას შეხვდა კასრის მხოლოდ მეათედი. კასრის რა ნაწილი შეხვდა კურდღელს?

9. მამილო კარლს აქვს 130 ფირფიტა. 5 ფირფიტიდან მას შეუძლია გააკეთოს სათამაშო წისქვილი, 7 ფირფიტიდან-თბომავალი, 14 ფირფიტიდან-თვითმფრინავი. თვითმფრინავი ღირს 19 ოქრო, თბომავალი-8 ოქრო, წისქვილი-6 ოქრო. რა უდიდესი რაოდენობის ოქრო შეუძლია გამოიმუშაოს მამილო კარლმა?

10. დილის სირბილის შემდეგ კარლსონი წონაში იკლებს 1 კილოგრამს, ხოლო საღამოს (ბლინების მირთმევის შემდეგ) ის იმატებს თავისი წონის მესამედით.

სირბილის დაწყებიდან მესამე დღის საღამოს კარლსონმა აღმოაჩინა, რომ მისი წონა გაიზარდა ორჯერ. რამდენს იწონიდა კარლსონი სპორტით დაკავებამდე?

11. კვადრატი დაჭრეს 12 მართკუთხა სამკუთხედად. შესაძლებელია თუ არა მათგან 10 ერთმანეთის ტოლი იყოს, ხოლო დარჩენილი ორი, მათგან და ერთმანეთისაგან განსხვავებული?

12. მალვინამ თხოვა ბურატინოს ჩამოეწერა ყველა ცხრანიშნა რიცხვი, რომლებიც შედგებოდა ერთმანეთისაგან განსხვავებული ციფრებისაგან. ბურატინოს დაავიწყდა როგორ იწერება 7, ამიტომ დაწერა ყველა ისეთი ცხრანიშნა რიცხვი, რომლებიც 7-ს არ შეიცავს. შემდეგ მალვინამ ბურატინოს უთხრა: ამ რიცხვებიდან ექვსი ციფრი გადაშალე ისე, რომ დარჩენილი ყველა სამნიშნა რიცხვი იყოს მარტივი. ბურატინომ უპასუხა: ეს შეუძლებელია. მართალია თუ არა ბურატინო?

13. კლუბში ერთმანეთს 20 ჯენტლმენი შეხვდა. ზოგიერთ მათგანს შლაპა ეხურა, ზოგიერთს არა. დრო და დრო ერთ-ერთი ჯენტლმენი იხდიდა შლაპას და ახურებდა ჯენტლმენებიდან ერთ-ერთს, რომელსაც შლაპა არ ეხურა. ბოლოს ათმა ჯენტლმენმა დაითვალა, რომ მათ თითოეულმა უფრო მეტჯერ გასცეს შლაპა, ვიდრე მიიღეს. რამდენი ჯენტლმენი მივიდა კლუბში შლაპის გარეშე?

14. გაზეთის სქელტანიანი გამოცემა 30 კვინტო ღირს, ხოლო ჩვეულებრივი-უფრო იაფი. პენსიონერებისათვის დაწესებულია ერთი და იმავე პროცენტიანი შეღავათი ყველა გაზეთის შეძენაზე, ამიტომ გაზეთის ჩვეულებრივ გამოცემას ისინი ყიდულობენ 15 კვინტოდ. ცნობილია, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში გაზეთი ღირებულება გამოისახება კვინტოების ნატურალური რიცხვით. რა ღირს ჩვეულებრივი გაზეთი შეღავათების გარეშე და რა ღირს სქელტანიანი გაზეთი პენსიონრებისათვის?

15. იუველირმა დაამზადა გარეგნულად ექვსი ერთნაირი ფორმის ვერცხლის სამკაული წონებით: 22 გრ, 23 გრ, 24 გრ, 32 გრ, 34 გრ და 36 გრ და დაავალა თავის შეგირდს თითოეული სამკაულისათვის დამღის საშუალებით დაეწერა თავისი წონა. შეუძლია თუ არა იუველირს ორი აწონით თეფშებიან სასწორზე გირების გამოყენების გარეშე გაარკვიოს სწორად დააწერა თუ არა სამკაულებს წონები შეგირდმა?

16. საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეობდნენ დიდოსტატები და ოსტატები. ტურნირის დამთავრებისას აღმოჩნდა, რომ ყველა მონაწილემ დაგროვებული ქულების ზუსტად ნახევარი მოიპოვა ოსტატებთან. დაამტკიცეთ, რომ ტურნირზე მონაწილე მოჭადრაკეთა რაოდენობა რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატია. გაითვალისწინეთ, რომ ტურნირის მონაწილეებმა ერთმანეთთან მხოლოდ ერთი პარტია ითამაშეს, მოგება ფასდება 1 ქულით, ფრე-0,5 ქულით, წაგება-0 ქულით.

17. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + z, \\ \dfrac{1}{y} = z + x, \\ \dfrac{1}{z} = x + y. \end{cases}$$

18. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის AB, BC და CA გვერდებზე აღებულია შესაბამისად D, E და F წერტილები ისე, რომ $DE \parallel AC$, $DF \parallel BC$. იპოვეთ AE და BF წრფეებს შორის კუთხე.

19. სამი განსხვავებული რიცხვის ჯამი 10-ის ტოლია, ხოლო მათ შორის უდიდესსა და უმცირესს შორის სხვაობა 3-ს უდრის. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს სიდიდით საშუალო რიცხვმა?

20. $ABCD$ პარალელოგრამით შემოსაზღვრული არეს შიგნით აღებულია P წერტილი ისე, რომ $\angle APB + \angle CPD = 180°$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\angle PBC = \angle PDC.$$

21. არაუარყოფითი $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ რიცხვების ჯამი 1-ის ტოლია. იპოვეთ $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_9x_{10}$ ჯამის შესაძლო უდიდესი მნიშვნელობა.

22. ტოლფერდა ABC $(AB = AC)$ სამკუთხედის AB და AC გვერდებზე შესაბამისად აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ $AN > AM$. MN და BC წრფეები გადაიკვეთება K წერტილში. შეადარეთ MK და MB მონაკვეთები.

23. არსებობს თუ არა კვადრატული სამწევრი, რომელიც, როცა $x =$ 2015, 2016, 2017 ღებულობს შესაბამისად მნიშვნელობებს: 2016, 0 და 2016

24. შეიძლება თუ არა 1-დან 10-მდე ნატურალური რიცხვები მწკრივში დავაწყოთ ისე, რომ ყოველი რიცხვი იყოს ყველა წინა რიცხვის ჯამის გამყოფი?

25. ასი ნატურალური რიცხვი ადგენს ზრდად არითმეტიკულ პროგრესიას. შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი ორი მათგანი ურთიერთმარტივი იყოს?

26. თანმიმდევრობით აღებული n ნატურალური რიცხვის ჯამი მარტივი რიცხვია. იპოვეთ ყველა n, რომლისთვისაც ეს შესაძლებელია.

27. გვაქვს სამი ერთნაირი დიდი ჭურჭელი. ერთში 3 ლიტრი სპირტია, მეორეში 20 ლიტრი წყალი, მესამე ჭურჭელი ცარიელია. შესაძლებელია მთელი სითხე ერთი ჭურჭლიდან გადავასხათ ან მეორე ჭურჭელში, ან ნიჟარაში. ასევე შესაძლებელია ავირჩიოთ ორი ჭურჭელი და მესამე ჭურჭლიდან შევავსოთ ის ჭურჭელი რომელშიც შედარებით ცოტა სითხეა სანამ არჩეულ ჭურჭლებში სითხეები არ გათანაბრდება. როგორ მივიღოთ 10 ლიტრი განზავებული 30%-იანი სპირტი?

28. კომპანიის „რქები და ჩლიქები“ აქციები ყოველდღიურად იზრდება ან მცირდება n%-ით, სადაც n -ფიქსირებული, 100-ზე ნაკლები ნატურალური რიცხვია (კურსი არ მრგვალდება). არსებობს თუ არა ისეთი n, რომლისთვისაც აქციების კურსმა ორჯერ მიიღოს ერთი და იმავე მნიშვნელობა?

29. ალბათობა იმისა, რომ ნაყიდი ნათურა იმუშავებს, 0,95-ის ტოლია. რამდენი ნათურა უნდა ვიყიდოთ, რომ შესრულდეს პირობა: ალბათობა იმისა, რომ ნაყიდ ნათურებს შორის იქნება არანაკლებ 5 მუშა ნათურა 0,99-ზე ნაკლები არ არის.

30. ამირანი და ტარიელი შეთანხმდნენ შეხვდნენ კაფეში პირველ საათზე. ამირანი კაფეში მიდის თორმეტი საათიდან პირველ საათამდე, იცდის 10 წუთი და შემდეგ მიდის. ტარიელიც ასე იქცევა.

ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი 12 საათიდან პირველ საათამდე მივლენ კაფეში და შეხვდებიან ერთმანეთს;

ბ) როგორ შეიცვლება შეხვედრის ალბათობა, თუ ტარიელი გადაწყვეტს კაფეში მივიდეს პირველის ნახევარზე ადრე, ხოლო ამირანი ისევ 12 საათიდან პირველ საათამდე მივა კაფეში?

გ) როგორ შეიცვლება შეხვედრის ალბათობა, თუ ტარიელი გადაწყვეტს მივიდეს კაფეში ნებისმიერ დროს 12.00-დან 12.50-მდე, ხოლო ამირანი ისევ 12 საათიდან პირველ საათამდე მივა კაფეში?

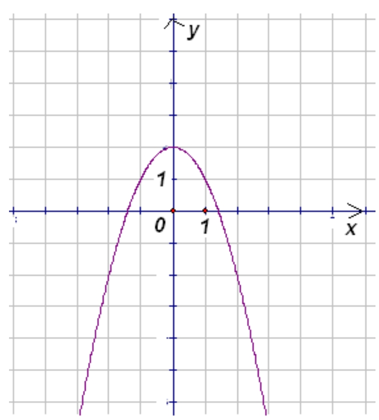
31. მონადირეს ყავს ორი ძაღლი. ერთხელ ის ძაღლებთან ერთად ტყეში დაიკარგა. მონადირემ იცის, რომ თითოეული ძაღლი p ალბათობით აირჩევს სწორ გზას სახლისაკენ. მან გადაწყვიტა, რომ ძაღლები მორიგეობით გამოეშვა. თუ ორივე ძაღლი აირჩევს ერთსა და იმავე გზას, მაშინ ის გაყვება მათ, თუ ძაღლები სხვადასხვა მხარეს წავლენ, მაშინ მონადირე აირჩევს გზას, რისთვისაც ააგდებს მონეტას. იზრდება თუ არა ასეთი მეთოდით მონადირის მიერ სახლისაკენ სწორი გზის არჩევის შანსი, თუ მას ეყოლებოდა არა ორი, არამედ ერთი ძაღლი?

32. იპოვეთ თვლის ათობით სისტემაში $4^{12}\cdot5^{21}$ რიცხვის ციფრთა ჯამი.

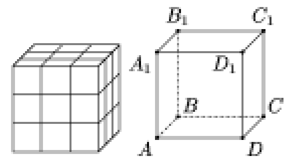
33. ტოლფერდა *ABC* სამკუთხედში *B* კუთხე 30°-ის ტოლია. $AB = BC = 6$. გავლებულია *ABC* სამკუთხედის *CD* სიმაღლე და *BDC* სამკუთხედის *DE* სიმაღლე. იპოვეთ *BE*.

34.არსებობს თუ არა სამკუთხედი, რომლის კუთხეთა გრადუსული ზომები გამოისახება მარტივი რიცხვებით?

35.საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახულია $y = ax^2 + c$ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახაზი). რომელ წერტილებში გადაკვეთს $y = cx + a$ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს?



36. კუბი შედგება 27 პატარა კუბიკისაგან (იხ. ნახაზი ა). შეადარეთ ამ კუბის გვერდითი ზედაპირი და იმ სხეულის გვერდითი ზედაპირი, რომელიც მიიღება დიდი კუბისაგან, თუ მას მოვაშორებთ „კუთხის“ კუბიკებს.

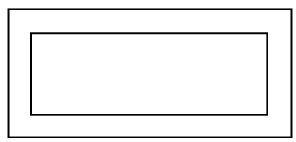


ა ბ

37. იპოვეთ $x^3 + y^3$, თუ ცნობილია, რომ,

$$x + y = 5 \text{ და } x + y + x^2y + xy^2 = 24.$$

38.არის თუ არა ორი მართკუთხედი მსგავსი: სურათი ჩარჩოთი და სურათი ჩარჩოს გარეშე, თუ ჩარჩოს სისქე ყველგან ერთნაირია (იხ. ნახაზი)?



39. სამკუთხედის მედიანა ერთნახევარჯერ მეტია იმ გვერდზე, რომლის მიმართაც ის არის გავლებული. იპოვეთ დანარჩენ ორ მედიანას შორის კუთხე.

40. პაპუნამ შეკრიბა ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის კვადრატი და იმავე რიცხვის მეოთხე ხარისხი და შედეგი უთხრა ანის. შეძლებს თუ არა ანი ცალსახად განსაზღვროს პაპუნას მიერ შერჩეული რიცხვი?

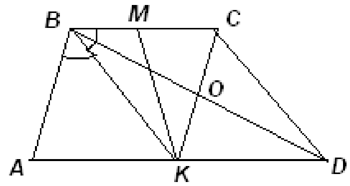
41.იპოვეთ თვლის ათობით სისტემაში 45-ის ჯერადი უმცირესი რიცხვი, რომელიც ჩაიწერება მხოლოდ ერთიანებით და ნულებით.

42. დაფაზე დაწერილია რიცხვები $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$. ნებადართულია ნებისმიერი ორი რიცხვის წაშლა და მათ ადგილზე მათი სხვაობის-არაუარყოფითი რიცხვის დაწერა. შესაძლებელია თუ არა ასეთი ოპერაციების რამდენჯერმე შესრულების შემდეგ დაფაზე დარჩეს მხოლოდ რიცხვი 15?

43. იპოვეთ უდიდესი ნატურალური n, რომლისთვისაც

$$n^{200} < 5^{300}.$$

44. *ABCD*ტრაპეციაში *B*ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა კვეთს *AD* ფუძეს *K* შუაწერტილში. *M* წერტილი *BC* გვერდის შუაწერტილია და $AB = BC$. იპოვეთ ფარდობა $KM : BD$.



45. ქარავანში ცხენები, ერთკუზიანი და ორკუზიანი აქლემებია. მათ სულ 200 კუზი აქვთ. რამდენი ცხოველია ქარავანში, თუ მასში იმდენი ცხენია, რამდენიც ორკუზიანი აქლემია. რამდენი კუზი აქვს ქარავანში ყველა ცხოველს ერთად?

46. იპოვეთ მარტივ რიცხვთა ყველა წყვილი, რომელთა კვადრატების სხვაობაც მარტივი რიცხვია.

47. ამოხსენით უტოლობა

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \le 1.$$

48. აჩვენეთ, რომ თუ $b>a + c>0$, მაშინ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატულ განტოლებას ორი ფესვი აქვს.

49.ცნობილია, რომ

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 3.$$

იპოვეთ

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

გამოსახულების მნიშვნელობა.

50. იპოვეთ n-ის უმცირესი ნატურალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც რიცხვი $n!$იყოფა 990-ზე

51. *ABC* სამკუთედში *C* კუთხე სამჯერ მეტია *A* კუთხეზე. *AB* გვერდზე აღებულია *D* წერტილი ისე, რომ $BD=BC$. იპოვეთ *CD,* თუ $AD = 4$.

52. $ABCD$ პარალელოგრამის BD დიაგონალი BC გვერდთან და D წვეროდან AB გვერდისადმი გავლებულ სიმაღლესთან ადგენს $45°$ -იან კუთხეებს. იპოვეთ ACD კუთხე.

53. შარვალი, პერანგი და ჰალსტუხი ერთად 120 ლარი ღირს. ხოლო 5 შარვალი, 2 პერანგი და 3 ჰალსტუხი ერთად 350 ლარი ღირს. რა უფრო ძვირია, ორი შარვალი თუ ერთი პერანგი?

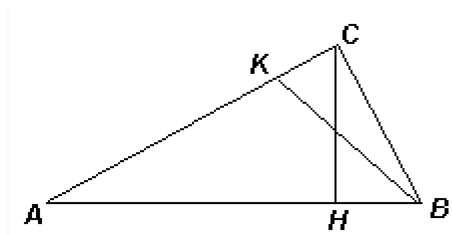
54. DEF სამკუთხედში გავლებულია DK მედიანა. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle KDE = 70°$, $\angle DKF = 140°$.

55. რიცხვითი fფუნქცია ისეთია, რომ, ნებისმიერი x და y-თვის სრულდება ტოლობა:

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) + \frac{2018}{x+y}.$$

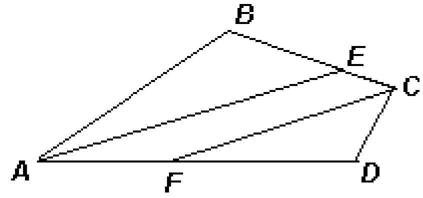
იპოვეთ $f(2018)$, თუ $f(504{,}5) = 2$.

56. მართკუთხა ABC სამკუთხედში მართი კუთხიდან გავლებულია CH სიმაღლე. დიდი B მახვილი კუთხიდან გავლებულია BK მონაკვეთი ისე, რომ $\angle CBK = \angle CAB$ (იხ. ნახაზი). დაამტკიცეთ, რომ CH სიმაღლე BK მონაკვეთს შუაზე ყოფს.



57. ორი ავტობუსი მოძრაობს ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით მუდმივი სიჩქარით. პირველი გამოემართა ბაქოდან 9 საათზე და თბილისში ჩამოვიდა 18 საათზე, მეორე გავიდა თბილისიდან 10 საათზე და ბაქოში ჩავიდა 19 საათზე. რომელ საათზე შეხვდნენ ავტობუსები ერთმანეთს?

58. $ABCD$ ოთხკუთხედის A და C კუთხეების AE და CF ბისექტრისები პარალელურია (იხ. ნახაზი). დაამტკიცეთ, რომ B და D კუთხეები ტოლია.



59. არსებობს თუ არა ისეთი x, რომ

$$\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=7\ ?$$

60. შესაძლებელია თუ არა 5 ერთეულის გვერდის მქონე კვადრატი დავჭრათ 1×4 და 1×3 ერთეულის ზომის მართკუთხედებად ისე, რომ მივიღოთ 7 მართკუთხედი?

61.ამოხსენით განტოლებათა სისიტემა

$$\begin{cases}\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=185,\\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65.\end{cases}$$

62. ABCკუთხის გვერდებზე მონიშნულია წერტილები Mდა Kისე, რომ BMCდა BKAკუთხეები ტოლია,BM = BK, AB=15,BK=8, CM = 9. იპოვეთ COK სამკუთხედის პერიმეტრი, სადაც O-AKდა CMწრფეების გადაკვეთის წერტილია.

63.ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}x^2+4\sin^2 y-4=0,\\ \cos x-2\cos^2 y-1=0.\end{cases}$$

64. ამოხსენით განტოლებათა სისიტემა

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}=\dfrac{3}{z},\\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}=\dfrac{3}{x},\\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xz}=\dfrac{21}{y}.\end{cases}$$

65. ამოხსენით განტოლება

$$x^{2018}+\frac{1}{x^{2018}}=1+x^{2019}.$$

66.იპოვეთ, x^2y=10000x+y განტოლების მთელი ამონახსნები.

67. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}.$$

68. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ x^2y-xy^2=6.\end{cases}$$

69. ამოხსენით განტოლებათა სისიტემა

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 = 15; \\ x_1 - 12x_2 + 11x_3 = 2; \\ x_1 - 11x_3 + 10x_4 = 2; \\ x_1 - 10x_4 + 9x_5 = 2; \\ x_1 - 9x_5 + 8x_6 = 2; \\ x_1 - 8x_6 + 7x_7 = 2; \\ x_1 - 7x_7 + 6x_8 = 2; \\ x_1 - 6x_8 + 5x_9 = 2; \\ x_1 - 5x_9 + 4x_{10} = 2; \\ x_1 - 4x_{10} + 3x_{11} = 2; \\ x_1 - 3x_{11} + 2x_{12} = 2; \\ x_1 - 2x_{12} = 2. \end{cases}$$

70. ამოხსენით განტოლება

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

71. ამოხსენით განტოლება:

$$2\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} = \frac{10}{x-4}.$$

72. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ 1 - x_3x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1 - x_{n-1}x_n = 0, \\ 1 - x_nx_1 = 0. \end{cases}$$

73. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 = 2, \\ x_8 + x_1 + x_2 = -2, \end{cases}$$

74. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5. \end{cases}$$

75. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

76. იპოვეთ განტოლების ყველა მთელი ამონახსნი

$$7x+16y=2.$$

77. იპოვეთ განტოლების ამონახსნები დადებით რიცხვთა სიმრავლეში

$$2x^{x}=\sqrt{2}.$$

78. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0.$$

79. იპოვეთ განტოლების ამონახსენი მთელ რიცხვებში

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{250}.$$

80. იპოვეთ ყველა ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3, \quad \frac{2x_3^2}{1+x_3^2}=x_1.$$

81. ამოხსენით განტოლება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ddots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\ddots+\cfrac{1}{x_{n-1}-1+\cfrac{1}{x_n}}}}.$$

82.ამოხსენით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4, \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1, \\ x_3 + \dfrac{1}{x_4} = 4, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 4, \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 1. \end{cases}$$

83. ამოხსენით განტოლება

$$|x-2018|+|2018-x|=2019.$$

84.ამოხსენით განტოლება

$$\left(x^2+x\right)+\sqrt{x^2-1}=0.$$

85.ამოხსენით განტოლება

$$2^x+3^x=5^x.$$

86.ამოხსენით განტოლება

$$x^{x^4}=4.$$

87.რაციონალური კოეფიციენტების მქონე კუბურ და კვადრატულ განტოლებებს საერთო ფესვი აქვთ. დაამტკიცეთ, რომ კუბურ განტოლებას რაციონალური ფესვი აქვს.

88. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} xy=1, \\ yz=2, \\ zx=8. \end{cases}$$

89. იპოვეთ განტოლების ყველა ნამდვილი ამონახსნი

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}.$$

90. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში

$$2^n+7=x^2.$$

91. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხთა სიმრავლეში

$$11x + 63y = 2018.$$

92.ყუთებში აწყვია კაკლები. პირველ ყუთში 6 კგ-ით ნაკლები კაკალია, ვიდრე დანარჩენ ორ ყუთში ერთდ. ხოლო მეორე ყუთში 10 კგ-ით ნაკლები კაკალია, ვიდრე ორ დარჩენილ ყუთში ერთდ. რამდენი კაკალია მესამე ყუთში?

93.რამდენი ნამდვილი ამონახსნი აქვს განტოლებათა სისტემას სამი ცვლადით და ორი განტოლებით

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1? \end{cases}$$

94. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა $(n > 2)$.

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots x_n + x_1} = \cdots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_2 + \cdots x_{n-1}}, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

95. ამოხსენით განტოლება მარტივ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x^2 - 7x - 144 = y^2 - 25y.$$

96. ამოხსენით განტოლება

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+2016} + \sqrt{x+2018}} = 1.$$

97. შვილი მამაზე ორჯერ უმცროსია. ის მაშინ დაიბადა, როცა მამა 25 წლის იყო. რამდენი წლისაა შვილი?

98. ტოლფერდა სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე 45^0-ია. როგორია ეს სამკუთხედი მახვილკუთხა, მართკუთხა, თუ ბლაგვკუთხა?

99. კინოთეატრში რამდენიმე რიგია. თითოეულ რიგში 12 ადგილია. პირველი რიგი დანომრილია 1-დან 12-ის ჩათვლით, მეორე რიგი 13-დან 24-ის ჩათვლით, და ა.შ. ნომერი, რომელზეც ანი ზის პაპუნას რიგის ნომრის ტოლია, ხოლო მათი ადგილების ჯამია 123. იპოვეთ ანის და პაპუნას ადგილების ჯამი.

100. კლასში 25 მოსწავლეა. შესაძლებელია თუ არა, რომ კლასში 6 მოსწავლეს ჰყავდეს 3-3 მეგობარი, 10-ს, 4-4 მეგობარი, ხოლო 9-ს ზუსტად 5-5 მეგობარი?

101. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\frac{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{3\cos x+1}}{2}=\sqrt[4]{6\sin x\cos x+2\sin x+3\cos x+1}.$$

102. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}\leq 2-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{4}.$$

103. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2018\sqrt{x^2-5x+6}+2019\sqrt{3x-2-x^2}=tg\,\frac{\pi x}{2}.$$

104. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$\arccos x\leq \pi-\sqrt{|x|-1}.$$

105. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\cos^{2017}x+\sin^{2019}x=1.$$

106. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin 3x+\cos\frac{12x}{5}=2.$$

107. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sqrt{12-25x^2+20x}=4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

108. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin x\cos 8x=1.$$

109. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2\sin^{2016}2x-5\cos^{2017}4x=7.$$

110. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული უტოლობა

$$5\sin^{2018}2x-8\cos^{2017}4x\geq 13.$$

111. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x^2+4\sin^2 y-4=0,\\ \cos x-2\cos^2 y-1=0.\end{cases}$$

112. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin x+\sin^3 x+2018\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2018\cos^5 4x.$$

113. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sqrt{3+4x+4x^2}\cdot arct(2x+1)=\sqrt{6-4x+x^2}\cdot arct(x-2)$$

114. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$2018\cos(x^2)+(9-8x)^4=x^8+2018\cos(9-8x).$$

115. ამოხსენით ტრიგონომეტრიული განტოლება

$$\sin\frac{x}{x^2+1}+\sin\frac{1}{x^2+x+2}=0.$$

116. მოცემულია $a,b,c>0$.დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}>a+c$$

117. მოცემულია $a,b,c>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

118. მოცემულია $a,b,c,d>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}>a+d.$$

119. მოცემულია $a,b,c,d>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}>\sqrt{a^2+ad+d^2}.$$

120. მოცემულია $a,b,c,d>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\sqrt{c^2-cd+d^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\sqrt{a^2+ad+d^2}\geq(a+c)(b+d)$$

121. მოცემულია $a,b,c>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

122. მოცემულია $a,b,c,d>0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{a^2+d^2}\geq(a+c)(b+d)$$

123. მოცემულია $a,b,c>0$.დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$
$$\geq \frac{3(ab+ac+bc)^2}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}}$$

124. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$
$$\geq (ab+bc+ca)^2(2a^2+2b^2+2c^2+ab+bc+ca)$$

125. მოცემულია $a, b, c > 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$3(a+b+c) \leq \sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3bc}+\sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3ac}$$
$$+\sqrt{(a+b+c)^2+3a^2-3ab}$$

126. ვთქვათ $a, b, c > 0$ და $a^2+ab+b^2=m^2$, $a^2+ac+c^2=n^2$,$b^2+bc+c^2=k^2$. დაამტკიცეთ, რომ საართლიანია უტოლობა:

$$\sqrt{m+n+k}\cdot(a+b+c) \leq \sqrt{mn(m+n-k)}+\sqrt{mk(m+k-n)}+\sqrt{nk(n+k-m)}.$$

127. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^2 = y^2 + 3y + 7.$$

128.ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^2 - x = y^2 + 4y + 5.$$

129. იპოვეთ $49x+51y=602$

განტოლებისამონახსნებინატურალურრიცხვთასიმრავლეში.

130.ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x^2+xy-y-2=0.$$

131. ამოხსენით განტოლება მარტივ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x^2-7x-144=y^2-25y.$$

132.ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

133. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^3+6x^2+10x+14=y^3$$

134. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^3+3x^2+3x=y^3+6y^2+12y+6$$

135. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^4+6x^2=y^2+4y+2$$

136. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x^{4m}+2x^{2m}+8x^m=4y^{2n}+8y^n$$

137. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$\left(x^2+4\right)\left(y^2+1\right)=8xy.$$

138. ცნობილია, რომ $x+2y+3z=1$. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს გამოსახულებამ $x^2+y^2+z^2$?

139. იპოვეთ x^2+y^2 გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $|x-y|\le 2$ და $|3x+y|\le 6$.

140. არაუარყოფითი x, y, z რიცხვები აკმაყოფილებენ უტოლობებს: $5\le x, y, z\le 8$.

იპოვეთ $S=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$ გამოსახულების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

141. იპოვეთ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა.

142. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$arctg1+arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.$$

143. დაამტკიცეთ ტოლობა

$$ctg30^0+ctg75^0=2.$$

144. იპოვეთ

$$f\left(x\right)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{\left(b-x\right)^2+c^2}\quad \left(a>0,\quad b>0,\quad c>0\right)$$

ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

145. გამოთვალეთ $\cos 36^0$ და $\cos 72^0$.

146. დაამტკიცეთ რიცხვითი ტოლობა

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

147. უდაბნოში თანაბრად მოძრაობს აქლემების 1 კმ–იანი ქარავანი. გამცილებელმა გაიარა ქარავნის თავიდან ბოლომდე და დაბრუნდა უკან. ამ დროში ქარავანმა გაიარა 1 კმ. რა მანძილი გაიარა გამცილებელმა, თუ ის თანაბარი სიჩქარით მოძრაობდა?

148. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} ay+bx=c, \\ cx+az=b, \\ bz+cy=a. \end{cases}$$

განსაზღვრეთ მისი გეომეტრიული აზრი.

149. დადებითი a, b, c, x, y, z რიცხვები ისეთია, რომ სრულდება ტოლობები

$$x^2+xy+y^2=a^2,$$
$$y^2+yz+z^2=b^2,$$
$$x^2+xz+z^2=c^2.$$

გამოსახეთ $xy+yz+xz$ გამოსახულება a , b და c რიცხვებით.

150. დადებითი A, B, C და D რიცხვები ისეთია, რომ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x^2+y^2=A, \\ |x|+|y|=B \end{cases}$$

აქვს m ამონახსნი, ხოლო განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C, \\ |x|+|y|+|z|=D \end{cases}$$

აქვს n ამონახსნი. ცნობილია, რომ $m>n>1$. იპოვეთ m და n .

151. დაფაზე დაწერილია სამი ნატურალური რიცხვი. პაპუნა ფურცელზე წერს ამ რიცხვებიდან ნებისმიერი ორი რიცხვის ნამრავლს, ხოლო დაფაზე დაწერილ მესამე რიცხვს შლის და წერს ახალ რიცხვს, რომელიც მოცემულზე ერთით ნაკლებია. შემდეგ იმეორებს იგივე ოპერაციას დაფაზე დაწერილი ახალი სამეულის მიმართ, ვიდრე

დაფაზე დაწერილი რიცხვებიდან რომელიმე არ გახდება 0–ის ტოლი. რისი ტოლი იქნება ამ მომენტში პაპუნას მიერ ფურცელზე დაწერილი ყველა რიცხვის ჯამი?

152. f რიცხვითი ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა

$$f\left(x+y\right)=f(x)+f(y)+80xy.$$

იპოვეთ $f\left(1\right)$, თუ $f\left(0,25\right)=2.$

153. f რიცხვითი ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი დადებითი x და y-თვის სრულდება ტოლობა

$$f\left(xy\right)=f(x)+f(y).$$

იპოვეთ $f\left(2018\right)$, თუ $f\left(\frac{1}{2018}\right)=-1.$

154. იპოვეთ ყველა $f\left(x\right)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ყველა ნამდვილ x რიცხვზე და აკმაყოფილებს განტოლებას

$$2f\left(x\right)+f(1-x)=x^2.$$

155.იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუშესრულებულიაპირობა

$$f(3x-2)+3f(2-3x)=6x$$

156. $y=f\left(x\right)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე და რაიმე $k\neq 0$ რიცხვისათვის აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას

$$f(x+k)\left(1-f(x)\right)=1+f(x).$$

დაამტკიცეთ, რომ $f\left(x\right)$-პერიოდული ფუნქციაა.

157. $f\left(x\right)$ ფუნქცია განსაზღვრულია დადებით ნახევარღერძზე და ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. ცნობილია, რომ

$$f\left(1\right)+f(2)=10,$$

და ნებისმიერი a და b-თვის

$$f\left(a+b\right)=f(a)+f(b)+2\sqrt{f(a)f(b)}.$$

იპოვეთ $f\left(2^{2018}\right)$.

158. ცნობილია, რომ

$$3f(x)+2f(-x)=4x^4-3x^3+x^2-x$$

ნებისმიერი ნამდვილი x -თვის. იპოვეთ $f(x)$.

159. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია x -ის ყოველი არანულოვანი მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)-2x^2-\frac{2}{x^2}+3=0.$$

იპოვეთ $f(2018)$.

160. იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს

$$a\cdot f\left(x^{2n+1}\right)+b\cdot f\left(-x^{2n+1}\right)=cx \qquad (1)$$

განტოლებას, სადაც $a, b, c\in R$, $|a|\neq|b|$, $n\in N$.

ცალკე განიხილეთ შემთხვევა, როცა $|a|=|b|$.

161. მწკრივში ჩაწერილია 2017 რიცხვი. პირველი რიცხვი 1-ის ტოლია. ცნობილია, რომ პირველი და ბოლო რიცხვის გარდა, მიმდევრობის ყველა რიცხვი მისი მეზობელი რიცხვების ჯამის ტოლია. იპოვეთ ბოლო რიცხვი.

162. $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ყველგან, გარდა $x=1$ წერტილისა და აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$(x-1)\,f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+f(x).$$

იპოვეთ $f(-1)$.

163. არსებობს თუ არა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე და სრულდება ტოლობა

$$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x.$$

164. იპოვეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერი $x, y, z \in R$ აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)\geq 3f\left(x+2y+3z\right).$$

165. $f(x)$ ფუნქცია ნებისმიერი $x\in R$-თვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(1-x\right)=1.$$

იპოვეთ: ა) $f(0)$ და $f(1)$. ბ) იპოვეთ ყველა ასეთი $f(x)$ ფუნქცია.

166. იპოვეთ ყველა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია დადებით რიცხვთა სიმრავლეზე და ნებისმიერი დადებითი x და y რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$f\left(x^{y}\right)=f\left(x\right)^{f(y)}.$$

167. ფუნქციები: $f(x)=x$ და $f(x^2)=x^6$ განსაზღვრულია ყველა $x>0$ რიცხვებისათვის და ზრდადია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x^3)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^6$$

ფუნქციაც ზრდადია ყველა $x>0$ რიცხვებისათვის.

168. იპოვეთ ყველა ისეთი $f(x)$ ფუნქცია, რომ

$$f(2x+1)=4x^2+14x+7.$$

169. ყოველ x და y რიცხვთა წყვილს რაღაც წესით შეესაბამება რაიმე $x\otimes y$ რიცხვი. იპოვეთ $2018\otimes 1970$, თუ ცნობილია, რომ ნებისმიერი სამი x, y, z რიცხვისათვის სამართლიანია იგივეობები:

1. $x\otimes x=0;$
2. $x\left(y\otimes z\right)=\left(x\otimes y\right)+z.$

170. მოცემულია კვადრატული სამწევრი

$$f(x)=x^2+ax+b.$$

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის არსე-ბობს ისეთი ნამდვილი y რიცხვი, რომ

$$f(y) = f(x) + y.$$

იპოვეთ a რიცხვის შესაძლო მნიშვნელობებს შორის მაქსიმუმი.

171. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს მუდმივისაგან განსხვავებული $f(x)$ ფუნქცია, ისეთი რომ სრულდება პირობა:

$$f(a(x+y)) = f(x) + f(y).$$

172. $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებული არანულოვანი მთელი რიცხვებია. ცნობილია, რომ $p(a) = a^3$, $p(b) = b^3$. იპოვეთ a, b და c კოეფიციენტები.

173. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუცნობილია, რომ ნებისმიერი $x \neq 0$-თვის შესრულე-ბულიაპირობა

$$(x+1)f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right) = 2,\ f(0) = 2.$$

174. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუ ის განსაზღვრულია x არგუმენტისნატურალურიმნიშვნელობისათვისდააკმაყოფილებსპირობას:

$$f(x) = f(x-1) + a,\ f(1) = 1.$$

175. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქცია, თუ ის განსაზღვრულია x არგუმენტის ნატურალური მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებსპირობას:

$$f(x) = a \cdot f(x-1),\ f(1) = 1,\ a \neq 0,\ a \neq 1.$$

176. 9 მოსწავლემ საკონტროლო წერაში მიიღო შეფასებები 7, 8, 9 და 10. დაამტკიცეთ, რომ 3 მათგანს მაინც აქვს მიღებული ერთნაირი შეფასება.

177. იპოვეთ ყველა იმ ცხრანიშნა რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი, რომლებიც მიიღება 123456789 რიცხვში ციფრთა ყველა შესაძლო გადაადგილებით, თვით ამ რიცხვის ჩათვლით.

178. როგორ გადმოვასხათ 15 ლიტრიანი სავსე კასრიდან 8 ლიტრი წყალი, თუ გვაქვს ორი 5 და 9 ლიტრიანი ჭურჭლები. წყლის გადასხმა მხოლოდ ამ ჭურჭლებშია ნებადართული.

179. ოთხი მეგობარი სათევზაოდან დაბრუნდა. ყოველმა ორმა მეთევზემ ერთად დათვალა თავიანთი დანაჭერები. მიიღეს რიცხვები: 7, 9, 14, 14, 19 და 21. დაადგინეთ:

ა) სულ რამდენი თევზი დაიჭირეს?

ბ) შესაძლებელია თუ არა გავარკვიოთ რამდენი თევზი დაიჭირა თითოეულმა მეთევზემ?

180. ფიქრია კვირაში 5 დღე სწავლობს. მას ყოველდღიურად ან 5, ან 6, ან 7, ან 8 გაკვეთილი აქვს. დაამტკიცეთ, რომ კვირის რომელიმე ორ დღეს მას გაკვეთილების ერთნაირი რაოდენობა აქვს

181. რა უმცირესი რაოდენობის მოსწავლე უნდა იყოს სკოლაში, რომ მათ შორის აუცილებლად იყოს ორი მოსწავლე, რომელიც ერთი და იმავე თვის ერთსა და იმავე რიცხვშია დაბადებული?

182. ავტობუსში 34 მგზავრია. ავტობუსი მარშრუტზე სულ 9 გაჩერებას აკეთებს და ამ გაჩერებებზე ჩამოდიან ავტობუსში მყოფი მგზავრები, ხოლო ახალი მგზავრები ავტობუსში არ ადიან. დაამტკიცეთ, რომ ამ გაჩერებებიდან ორ გაჩერებაზე მაინც ჩამოვა მგზავრთა ერთი და იგივე რაოდენობის მგზავრები (შესაძლოა გაჩერებაზე არცერთი მგზავრი არ ჩამოვიდეს).

183.ცნობილია, რომ

$$a+b=1.$$

შესაძლოა თუ არა აღმოჩნდეს რომ $a^4 = b^4$?

184. ბაყაყი დახტის წრფის გასწვრივ: ა) 1 სმ-ით მარჯვნივ ან მარცხნივ. ბ) თავიდან 1 სმ მარჯვნივ, შემდეგ 3 სმ მარჯვნივ ან მარცხნივ, შემდეგ 5 სმ მარჯვნივ ან მარცხნივ და ა.შ. შესაძლებელია თუ არა ის აღმოჩნდეს საწყის წერტილში 2017 ნახტომის შემდეგ?

185. მაგიდაზე დგას ოთხი ჭიქა: ერთი ჭიქა გადაბრუნებულია-ფსკერით ზემოთ, ხოლო სამი ჭიქა დგას სწორად-ფსკერით მაგიდაზე. ნებადართულია ნებისმიერი ორი

ჭიქის გადაბრუნება. შესაძლებელია თუ არა რამდენიმე ასეთი ოპერაციის შესრულების შემდეგ აღმოჩდეს ყველა ჭიქა გადაბრუნებული-ფსკერით მაგიდაზე?

186. მათემატიკოსი ხუთ შვილთან ერთად შევიდა პიცერიაში.

მაკა: მე, მინდა პომიდორით და ძეხვის გარეშე.

დათო: მე, პომიდორის გარეშე მინდა.

ნინო: მე, პომიდორით, მაგრამ სოკოს გარეშე.

ირინა: მე, სოკოს გარეშე, მაგრამ ძეხვით.

სოსო: მე, სოკოთი მინდა.

მამა: აშკარაა, რომ ყველასათვის საჭირო ინგრედიენტებით ერთი პიცა ნამდვილად არ გვეყოფა.

მამამ ცოტა ხანს იფიქრა და შეკვეთა მისცა. რამდენი პიცა შეუკვეთა მან?

187. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში

$$m^2 - n^2 = 2018.$$

188. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვთა სიმრავლეში

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

189. არსებობს თუ არა ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვი, ისეთი რომ, თითოეული რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 7-ზე?

190. არსებობს თუ არა 4 მომდევნო ნატურალური რიცხვი, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვის ხარისხს?

191. A პუნქტიდან B პუნქტში გაემგზავრა ველოსიპედისტი. იმავდროულად B პუნქტიდან A პუნქტისაკენ ველოსიპედისტთან შესახვედრად გამოემართა ქვეითი. მათი შეხვედრის შემდეგ ველოსიპედისტი გაბრუნდა უკან, ხოლო ქვეითმა გააგრძელა სვლა A პუნქტისაკენ. ცნობილია, რომ ველოსიპედისტი დაბრუნდა A პუნქტში ქვეითზე 30 წუთით ადრე. რა დრო დახარჯა ქვეითმა A პუნქტიდან B პუნქტში ჩასასვლელად, თუ ველოსიპედისტის სიჩქარე ქვეითის სიჩქარეზე 5-ჯერ მეტი იყო?

192. ორი მონადირე ერთდროულად გაემართა ერთმანეთის შესახვედრად ორი სოფლიდან, რომელთა შორის მანძილი 18 კმ-ია. პირველი მიდიოდა 5 კმ/სთ სიჩქარით,

მეორე-4 კმ/სთ სიჩქარით. პირველ მონადირეს გაჰყვა ძაღლი, რომელიც დარბის 8 კმ/სთ სიჩქარით. ძაღლი მონადირეების მოძრაობის დაწყებისთანავე გაიქცა მეორე მონადირესთან, შეხვდა მას, იმავე წამს გამობრუნდა და გაიქცა პატრონთან შესახვედრად, შეხვდა მას, იმავე წამს გამობრუნდა და გაიქცა მეორე მონადირესთან შესახვედრად და ა.შ. ასე დარბოდა ის მანამ, სანამ მონადირეები ერთმანეთს არ შეხვდნენ. რამდენი კილომეტრი გაიარა ძაღლმა მონადირეების შეხვედრამდე?

193. ტურისტი მოძრაობდა 3,5 საათის განმავლობაში, ამასთან ნებისმიერ ერთსაათიან შუალედში ის 5 კმ-ს გადიოდა. გამომდინარეობს აქედან ის თუ არა, რომ ტურისტის საშუალო სიჩქარეა 5 კმ/სთ?

194. პაპუნას სურს შეიძინოს პლაზმური ტელევიზორი, რომელიც 2016 ლარი ღირს. მას მამამ ანგარიშზე ჩაურიცხა იმდენი ლარი, რისი ტოლიც არის

$$404^5 - 403^2\cdot(404^3 + 2\cdot404^2 + 3\cdot404 + 4)$$

გამოსახულების მნიშვნელობა. ეყოფა თუ არა პაპუნას ტელევიზორის საყიდლად ფული?

195. გვირაბის გასათხრელად დაიქირავეს მიწისმთხრელთა ორი ბრიგადა. ერთი ბრიგადას შეუძლია ერთ საათში გათხაროს ორჯერ უფრო გრძელი გვირაბი, ვიდრე მეორეს, მაგრამ ხელშეკრულებით ორთავე ბრიგადას ერთ საათში ერთსა და იმავე თანხას უხდიან. რა დაუჯდება დამქირავებელს უფრო იაფი-ორივე ბრიგადის ერთდროული მუშაობა გვირაბის ორივე თავიდან მათ შეხვედრამდე, თუ ჯერ ერთმა ბრიგადამ შეასრულოს სამუშაოს ნახევარი და მერე მეორე ბრიგადამ სამუშაოს დარჩენილი ნახევარი?

196. შარშან დედას 1 ლარად შეეძლო ეყიდა 40 ცალი სამურაბე სამოთხის ვაშლი ან 60 ცალი სამურაბე პანტა მსხალი. წელს კი 1 ლარად იყიდებოდა პაკეტი, რომელშიც იყო 25 ცალი სამურაბე სამოთხის ვაშლი და 25 ცალი სამურაბე პანტა მსხალი. დედა მურაბად ყოველწლიურად აკეთებს 600 ცალ სამოთხის ვაშლს და 600 ცალ პანტა მსხალს. როდის უფრო ძვირი დაუჯდა დედას სამურაბე ვაშლისა და სამურაბე მსხლის ყიდვა, შარშან თუ წელს?

197. სამმა მიწისმთხრელმა სამ საათში ამოთხარა სამი ორმო. რამდენ ორმოს ამოთხრის 6 მიწისმთხრელი 5 საათში?

198. კვინტოეთის სავალუტო ბირჯაზე 11 კვინტოში იძლევიან 14 ბაჩაჩს, 22 ხვინჩიკში-21 ბაჩაჩს, 10 ხვინჩიკში - 3 ტანტალს, ხოლო 5 აჯაჯში-2 ტანტალს. რამდენ კვინტოს მოგვცემენ 13 აჯაჯში?

199. გარეგნულად ერთნაირ ტყუპ ძმებს-ხვიჩას და გოჩას სტუმრად ეწვია მათი მათემატიკის მასწავლებელი. რომელმაც იცის, რომ ძმებიდან ერთ-ერთი არასოდეს არ ამბობს მართალს. ერთ-ერთს მან ჰკითხა: „შენ ხარ ხვიჩა?“. –„დიახ“-უპასუხა მან. იგივე შეკითხვა დაუსვა მასწავლებელმა მეორე ძმასაც, რომელზეც მიიღო ცალსახა, გარკვეული პასუხი და განსაზღვრა, რომელ ძმას რა ერქვა.რომელია ხვიჩა?

200. ყოველ საღამოს გიორგი შემთხვევით და არა წინასწარგანზრახულ დროს მიდის ავტობუსის გაჩერებაზე. ამ გაჩერებაზე ავტობუსები ორი მიმართულებით მიდის. ერთი- გიორგის სახლთან და მეორე, მის მეგობარ მერაბთან. გიორგი ელოდება და ადის პირველ მოსულ ავტობუსში მიუხედავად იმისა, რომელი მარშრუტის არის ავტობუსი და მიდის ან სახლში ან მერაბთან. გარკვეული დროის შემდეგ გიორგიმ შენიშნა, რომ მერაბთან ის სტუმრად დადის თითქმის 2-ჯერ უფრო ხშირად, ვიდრე საკუთარ სახლში. ამის საფუძველზე გიორგიმ გააკეთა დასკვნა, რომ იმ მარშრუტის ავტობუსები, რომლებიც მერაბის სახლთან მიდის ორჯერ უფრო ხშირად დადის, ვიდრე ისინი, რომლებიც მის სახლთან მიდიან. მართალია თუ არა ის? შესაძლებელია, თუ არა ამოცანის პირობა შესრულდეს მაშინ, თუ ამ ორი მარშრუტის ავტობუსები დადიან ერთნაირი სიხშირით? ჩათვალეთ, რომ ავტობუსები დადიან არა შემთხვევით, არამედ მკაცრად გაწერილი გრაფიკით.

201. პაპუნამ ჩაწერა ოთხნიშნა რიცხვი. მარიმ პირველ ციფრს მიუმატა 1, მეორე ციფრს-2, მესამე ციფრს-3 და მეოთხე ციფრს-4, ხოლო შემდეგ გადაამრავლა ჯამები და მიიღო 234. რა რიცხვი ჩაწერა პაპუნამ?

202. გვაქვს 5 აკუმულიატორი, მათგან 3 დამუხტულია, ხოლო ორი განმუხტული. ფოტოაპარატი მუშაობს ორი დამუხტული აკუმულიატორის ერთდროული შეერთებით. აჩვენეთ, რომ ოთხი ცდა საკმარისია, რომ ფოტოაპარატმა აუცილებლად იმუშაოს.

203. ნინო მასწავლებელმა ბოლო ზარისათვის უნდა იყიდოს 16 ბუშტი. მაღაზიაში სამი ფერის ბუშტებია: ლურჯი, წითელი და მწვანე. 16 ბუშტის ყიდვის რამდენი განსხვავებული ვარიანტი არსებობს, თუ ნინო მასწავლებლის მიერ ნაყიდი თითოეული ფერის ბუშტების რაოდენობა მთლიანად ნაყიდი ბუშტების რაოდენობის მეოთხედზე ნაკლები არ უნდა იყოს?

204. გემის ტრიუმში ბზარი გაჩნდა. მაშინვე ჩართეს წყლის ტუმბო, რომელმაც სრულად ვერ ამოტუმბა წყალი, რის შედეგადაც ტრიუმში 10 წუთში წყლის დონემ 20 სმ-ით აიწია. ამის შემდეგ ჩართეს იმავე სიმძლავრის მეორე ტუმბო და 5 წუთის შემდეგ წყლის დონემ 10 სმ-მდე დაიწია. ამ დროს ბზარიც დაგმანეს. რა დროში ამოტუმბავს ორივე ტომბო დარჩენილ წყალს?

205. მამა ეუბნება შვილს:

-დღეს ჩვენ ორივეს დაბადების დღე გვაქვს და შენ ჩემზე 2-ჯერ უმცროსი ხარ.

-დიახ, ეს ჩემ სიცოხლეში მერვედ ხდება, როცა მე შენზე უმცროსი ვარ მთელ რიცხვჯერ.

რამდენი წლისაა შვილი, თუ მამა 75 წელზე მეტი ასაკის არ არის?